

新高考答案页第 2 期

数学

第 5 期

第 2~3 版同步周测

一、单项选择题

1~8. DAADDDDA

二、多项选择题

9. CD

10. BD

11. AB

12. ABD

三、填空题

13. (-2, 9)

14. $\frac{1}{3}$

15. $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$

16. $[3e^3+6, +\infty)$

四、解答题

17. 解: (1) 化简, 得 $f(x) = \frac{2e^x}{1-x}$.

因为 $f'(x) = \left(\frac{2e^x}{1-x}\right)'$
 $= \frac{(2e^x)'(1-x) - 2e^x(1-x)'}{(1-x)^2}$
 $= \frac{2(2-x)e^x}{(1-x)^2}$, 所以 $f'(2) = 0$.

(2) 因为 $f''(x) = \left(x^{-\frac{3}{2}}\right)' - x' + (\ln x)'$
 $= -\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} - 1 + \frac{1}{x}$, 所以 $f''(1) = -\frac{3}{2}$.

18. 解: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $g'(x) = \frac{a}{x} (x > 0)$.
 由已知, 得 $\begin{cases} \sqrt{x} = a \ln x, \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{a}{x} \end{cases}$

解得 $a = \frac{e}{2}$, $x = e^2$. 所以两条曲线的交点

坐标为 (e^2, e) , 切线的斜率 $k = f'(e^2) = \frac{1}{2e}$.

所以切线的方程为 $y - e = \frac{1}{2e}(x - e^2)$,

即 $\frac{x}{2e} - y + \frac{e}{2} = 0$.

19. (1) 解: 因为 $f(x) = x - \frac{2}{x} - a \ln x$,

所以 $f'(x) = 1 + \frac{2}{x^2} - \frac{a}{x}$,

所以 $f'(1) = 3 - a$,

又 $f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = x - 2$, 所以 $f'(1) = 1$,

即 $3 - a = 1$, 所以 $a = 2$.

(2) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 因为 $f(x)$ 在定义域上是增函数,

所以 $f'(x) = 1 + \frac{2}{x^2} - \frac{a}{x} \geq 0$ 在 $(0, +\infty)$

上恒成立,

所以 $a \leq \left(x + \frac{2}{x}\right)_{\min}$, 由基本不等式

得 $x + \frac{2}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{2}{x}} = 2\sqrt{2}$, 当且仅当

$x = \sqrt{2}$ 时, 等号成立, 故 $\left(x + \frac{2}{x}\right)_{\min} = 2\sqrt{2}$,

所以实数 a 的取值范围为 $(-\infty, 2\sqrt{2}]$.

20. 解: (1) $f'(x) = e^x - 2ex + a$, 由 $f(x)$

在 $(0, 1)$ 上单调, 得在 $(0, 1)$ 上 $f'(x) \geq 0$

或 $f'(x) \leq 0$ 恒成立.

令 $g(x) = e^x - 2ex + a$, 则 $g'(x) = e^x - 2e$,

令 $g'(x) = 0$, 解得 $x = \ln(2e)$, 因为 $0 < x < 1 < \ln(2e)$, $g'(x) < 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, 1)$

上单调递减, 所以 $g(1) \geq 0$ 或 $g(0) \leq 0$, 解得 $a \leq -1$ 或 $a \geq e$, 所以实数 a 的取值范围为 $(-\infty, -1] \cup [e, +\infty)$.

(2) $y = e^x - ex^2 + ax + e \ln x$ 的图象恒在 x 轴上方, 即当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $y > 0$ 恒成立,

即 $a > ex - \frac{e^x}{x} - e \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立.

令 $h(x) = ex - \frac{e^x}{x} - e \ln x$, 则 $h'(x) =$

$\frac{ex^2 - ex - e^x(x-1)}{x^2} = \frac{(ex - e^x)(x-1)}{x^2}$,

令 $h'(x) > 0$, 解得 $0 < x < 1$; 令 $h'(x) < 0$, 解得 $x > 1$, 所以函数 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上

单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $h(x)$ 在 $x=1$ 处取得最大值, 最大值为 $h(1) = 0$, 所以 $a > 0$.

所以实数 a 的取值范围为 $(0, +\infty)$.

21. 解: (1) 设 $AC = c$.

在 $\triangle ABM$ 中, $\tan \angle BMA = \frac{a}{\frac{c}{2}} = \frac{2a}{c}$.

在 $\triangle CDM$ 中, $\tan \angle DMC = \frac{b}{\frac{c}{2}} = \frac{2b}{c}$.

因为 $\angle BMD = 90^\circ$, 所以 $\angle BMA + \angle DMC = 90^\circ$, 所以 $\tan \angle BMA \cdot \tan \angle DMC = 1$,

即 $c^2 = 4ab$, 所以 $c = 2\sqrt{ab}$, 所以 $AC = 2\sqrt{ab}$.

(2) 由题意, 得 $AC = \lambda(a+b)$, 则 $2\sqrt{ab} =$

$\lambda(a+b)$, 即 $\lambda = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} = \frac{2k}{1+k^2} = \frac{2}{k+\frac{1}{k}}$.

在 $\triangle CBD$ 中, 过点 B 作 CD 的垂线, 垂足为 E . 设 $AC = c$,

所以 $\tan \angle CBE = \frac{a}{c}$, $\tan \angle DBE = \frac{b-a}{c}$,

所以 $\tan \angle CBD = \tan(\angle CBE + \angle DBE) =$

$\frac{\tan \angle CBE + \tan \angle DBE}{1 - \tan \angle CBE \cdot \tan \angle DBE} =$

$$\frac{\frac{a}{2\sqrt{ab}} + \frac{b-a}{2\sqrt{ab}}}{1 - \frac{a}{2\sqrt{ab}} \cdot \frac{b-a}{2\sqrt{ab}}} = \frac{\frac{b}{2\sqrt{ab}}}{1 - \frac{b-a}{4b}} = 1,$$

$$\text{所以 } \sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{3}{2} + \frac{a}{2b},$$

$$\text{因为 } k = \sqrt{\frac{b}{a}}, \text{ 所以 } k = \frac{3}{2} + \frac{1}{2k^2},$$

$$\text{即 } 2k^3 - 3k^2 - 1 = 0,$$

$$\text{设 } f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1, x > 1,$$

$$\text{所以 } f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1) > 0,$$

$$\text{所以函数 } f(x) \text{ 单调递增.}$$

$$\text{若 } \lambda \in (0.8, 1), \text{ 则 } 2 < k + \frac{1}{k} < \frac{5}{2},$$

$$\text{即 } 1 < k < 2,$$

$$\text{因为 } f(1) = -2 < 0, f(2) = 3 > 0,$$

$$\text{所以 } 1 < k < 2 \text{ 成立, 所以 } \lambda \in (0.8, 1) \text{ 成立, 所以能满足委托单位的设计要求.}$$

$$22. \text{解: (1) 当 } a = -1 \text{ 时, } f(x) = \frac{2}{x} + \ln x,$$

$$\text{则 } f'(x) = -\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-2}{x^2} (x > 0),$$

$$\text{令 } f'(x) > 0, \text{ 解得 } x > 2, \text{ 所以 } f(x) \text{ 在 } (2, +\infty) \text{ 上单调递增;}$$

$$\text{令 } f'(x) < 0, \text{ 解得 } 0 < x < 2, \text{ 所以 } f(x) \text{ 在 } (0, 2) \text{ 上单调递减.}$$

$$\text{所以当 } a = -1 \text{ 时, } f(x) \text{ 的单调递减区间是 } (0, 2), \text{ 单调递增区间是 } (2, +\infty).$$

$$(2) \text{ 当 } a = 0 \text{ 时, } f(x) = \frac{2}{x} \text{ 没有零点, 则 } a = 0 \text{ 不符合题意;}$$

$$\text{当 } a \neq 0 \text{ 时, 令 } f(x) = 0, \text{ 即 } \frac{2}{x} - a \ln x = 0,$$

$$\text{得 } \frac{1}{a} = \frac{x \ln x}{2}.$$

$$\text{设 } g(x) = \frac{x \ln x}{2} (x > \frac{1}{e^2}),$$

$$\text{则 } g'(x) = \frac{\ln x + 1}{2},$$

$$\text{令 } g'(x) > 0, \text{ 解得 } x > \frac{1}{e}, \text{ 令 } g'(x) < 0,$$

$$\text{解得 } \frac{1}{e^2} < x < \frac{1}{e}, \text{ 故 } g(x) \text{ 在 } \left(\frac{1}{e^2}, \frac{1}{e}\right) \text{ 上单}$$

$$\text{调递减, 在 } \left(\frac{1}{e}, +\infty\right) \text{ 上单调递增,}$$

$$\text{故 } g(x)_{\min} = g\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{2e},$$

$$\text{又 } g\left(\frac{1}{e^2}\right) = \frac{1}{e^2}, \text{ 所以 } -\frac{1}{2e} < \frac{1}{a} < \frac{1}{e^2},$$

$$\text{解得 } -e^2 < a < -2e,$$

$$\text{故实数 } a \text{ 的取值范围是 } (-e^2, -2e).$$

值, 最大值为 8.

(2) 因为 $\triangle ABC$ 为等腰三角形, 且 AD

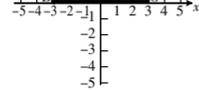
为底边的中线, 所以以 D 为坐标原点, DC ,

DA 所在直线分别为 x, y 轴建立如图所示

的平面直角坐标系, 由 (1) 可得 $P(0, 2)$, 又

$|BD|^2 = 5^2 - 4^2 = 9$, 所以 $B(-3, 0), C(3, 0)$, 所以 $\overrightarrow{PB} = (-3, -2), \overrightarrow{PC} = (3, -2)$, 所以 $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} =$

$-9 + 4 = -5$.



(第 19 题图)

20. 解: (1) $f(x) = a \cdot b = 2\cos^2 x + \sqrt{3} \sin 2x +$

$m = \sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x + m + 1 = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) +$

$m + 1$, 由 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$,

得 $k\pi - \frac{\pi}{3} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbf{Z}$.

因为 $x \in [0, \pi]$,

所以 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{2\pi}{3} \leq x \leq \pi$,

所以函数 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的单调递增

区间是 $\left[0, \frac{\pi}{6}\right], \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$.

(2) 由 (1) 知 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递增,

当 $x = \frac{\pi}{6}$ 时, $f(x)_{\max} = m + 3$,

当 $x = 0$ 时, $f(x)_{\min} = m + 2$.

由题设可得 $\begin{cases} m+3 < 4, \\ m+2 > -4, \end{cases}$ 解得 $-6 < m < 1$,

所以实数 m 的取值范围是 $(-6, 1)$.

21. 解: (1) 因为 $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC} = \frac{1}{2}$,

即 $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$,

所以 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} -$

$\overrightarrow{AB}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$,

所以 $\overrightarrow{AD} \cdot (2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}(2\overrightarrow{AB} +$

$\overrightarrow{AC}) \cdot (2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}(4|\overrightarrow{AB}|^2 - |\overrightarrow{AC}|^2) = 0$.

(2) 因为点 E 为 BC 的中点, 设 \overrightarrow{AB} 与

\overrightarrow{AC} 的夹角为 θ , 所以 $\frac{1}{|\overrightarrow{AE}|^2} + \frac{1}{|\overrightarrow{BC}|^2} =$

$\frac{4}{(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2} + \frac{1}{(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})^2} = \frac{4}{5+4\cos\theta} +$

$\frac{1}{5-4\cos\theta} = \frac{1}{10}(5+4\cos\theta+5-4\cos\theta)$.

$$\left(\frac{4}{5+4\cos\theta} + \frac{1}{5-4\cos\theta}\right) = \frac{1}{10}\left[5 + \frac{5+4\cos\theta}{5-4\cos\theta} +$$

$$\frac{4(5-4\cos\theta)}{5+4\cos\theta}\right] \geq \frac{1}{10} \times (5+4) = \frac{9}{10}.$$

当且仅当 $5+4\cos\theta = 2(5-4\cos\theta)$,

即 $\cos\theta = \frac{5}{12}$ 时取等号.

此时 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2}AB \cdot AC \sin\theta =$

$$\frac{1}{2} \times 1 \times 2 \times \sqrt{1 - \left(\frac{5}{12}\right)^2} = \frac{\sqrt{119}}{12}.$$

22. 解: (1) 依题意, 设直线 l 的方程为

$y = k(x-1), A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

联立方程组 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = k(x-1), \end{cases}$

消去 y 并整理, 得

$$(1+k^2)x^2 - 2k^2x + k^2 - 4 = 0,$$

显然 $\Delta > 0$, 则由韦达定理, 得

$$x_1 + x_2 = \frac{2k^2}{1+k^2}, x_1 x_2 = \frac{k^2 - 4}{1+k^2},$$

① 若 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -3$, 则 $x_1 x_2 + y_1 y_2 = -3$,

即 $x_1 x_2 + k^2(x_1 - 1)(x_2 - 1) = -3$,

整理, 得

$$(1+k^2)x_1 x_2 - k^2(x_1 + x_2) + k^2 + 3 = 0,$$

所以 $k^2 - 4 - \frac{2k^4}{1+k^2} + k^2 + 3 = 0$,

所以 $(2k^2 - 1)(1+k^2) - 2k^4 = 0$,

化简, 得 $k^2 = 1$,

所以直线 l 的斜率为 1 或 -1.

(2) 如图, 连接 OM, ON, PQ ,

因为 $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN} = 0$, 所以 $PM \perp PN$,

又 Q 为 MN 的中点,

所以 $PQ = QM$.

因为 M, N 为圆上的两点,

所以 $OM = ON = 2$, 又 Q 为 MN 的中点,

所以 $OQ \perp MN$,

所以 $OQ^2 + QM^2 = OM^2 = 4$, 又 $PQ = QM$,

故 $OQ^2 + PQ^2 = 4$.

设点 Q 的坐标为 (x, y) ,

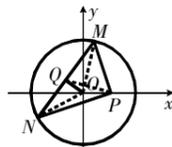
则 $x^2 + y^2 + (x-1)^2 + y^2 = 4$,

整理, 得 $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{7}{4}$,

所以点 Q 的轨迹是以 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 为圆心,

$\frac{\sqrt{7}}{2}$ 为半径的圆,

所以 $OQ_{\min} = \frac{\sqrt{7}-1}{2}$.



(第 22 题图)

一、单项选择题

1~8.AADCBCACA

二、多项选择题

9.BD 10.ABD

11.ABC 12.CD

三、填空题

13. $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

14. $\frac{1}{2}$

15. $\frac{3\sqrt{3}R^2}{8}$

16. $\left[\frac{2}{3}e\sqrt{e}-\sqrt{e}, +\infty\right)$

四、解答题

17.解:(1)当 $k=0, a=2$ 时, $f(x) = -\sin 2x + 2\sin x, f'(x) = -2\cos 2x + 2\cos x = -4\cos^2 x + 2\cos x + 2 = 2(2\cos x + 1)(1 - \cos x)$,
当 $x \in [0, \pi]$ 时,令 $f'(x) = 0$,
解得 $x = \frac{2\pi}{3}$ 或 $x = 0$,

所以 $f(0) = 0, f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}, f(\pi) = 0$,

所以 $f(x)_{\max} = f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

(2)当 $k=4$ 时, $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增,则 $f'(x) = 4 - 2(2\cos^2 x - 1) + a\cos x \geq 0$ 对 $\forall x \in \mathbf{R}$ 恒成立.

得 $4\cos^2 x - a\cos x - 6 \leq 0$,

设 $t = \cos x \in [-1, 1], g(t) = 4t^2 - at - 6$,

则 $g(t) \leq 0$ 在 $[-1, 1]$ 上恒成立,由

二次函数图象,知 $\begin{cases} g(-1) \leq 0, \\ g(1) \leq 0, \end{cases}$ 得 $-2 \leq a \leq 2$.

2.所以 a 的取值范围是 $[-2, 2]$.

18.(1)解:因为 $f(x) = a \ln x + \frac{2}{\sqrt{x}} (x > 1)$,

所以 $f'(x) = \frac{a}{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{a\sqrt{x} - 1}{x\sqrt{x}}$.

要使 $f(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上不单调,则 $f'(x) = 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上有解,

即 $a = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 在 $(1, +\infty)$ 上有解,

所以 $0 < a < 1$,

所以实数 a 的取值范围是 $(0, 1)$.

(2)证明:当 $a=1$ 时,要证明 $f(x) < \frac{x^2}{2} -$

$x+3$,即证 $g(x) = \ln x + \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{x^2}{2} + x - 3 < 0$.

$$g'(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}} - (x-1) = \frac{(\sqrt{x}-1)(1-x^2\sqrt{x})}{x\sqrt{x}}$$

因为 $x > 1$,所以 $\sqrt{x}-1 > 0, 1-x^2\sqrt{x} < 0$,所以 $g'(x) < 0$,则 $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单

调递减,所以 $g(x) < g(1) = -\frac{1}{2} < 0$.

故 $f(x) < \frac{x^2}{2} - x + 3$.

19.(1)解:当 $m=0$ 时, $f(x) = e^x - ex, f'(x) = e^x - e$,又 $f'(x)$ 是增函数,且 $f'(1) = 0$,所以当 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$,当 $x < 1$ 时, $f'(x) < 0$,所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递

减,在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,所以当 $x=1$ 时, $f(x)$ 取得极小值 $f(1) = 0$,无极大值.
(2)证明: $f'(x) = e^x - 2mx + m - e$,令 $g(x) = f'(x) = e^x - 2mx + m - e$,则 $g'(x) = e^x - 2m$,当 $m < 0$ 时,则 $g'(x) > 0$,故 $g(x) = f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增,又 $g(0) = f'(0) = 1 + m - e < 0, g(1) = f'(1) = -m > 0$,所以存在 $x_0 \in (0, 1)$,使得 $g(x_0) = f'(x_0) = 0$,且当 $x \in (0, x_0)$ 时, $f'(x) < 0, f(x)$ 是减函数,当 $x \in (x_0, 1)$ 时, $f'(x) > 0, f(x)$ 是增函数,又因为 $f(0) = 1, f(1) = 0$,所以 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上存在唯一零点.

20.解:(1)在 $\triangle SAO$ 中, $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$,由 $\triangle SNO_1 \sim \triangle SAO$,得 $\frac{SO_1}{SO} = \frac{r}{R}$,所以 $SO_1 = \frac{4}{3}r$,

所以 $OO_1 = 4 - \frac{4}{3}r$,所以 $V(r) = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot (4 - \frac{4}{3}r) = \frac{4}{9}\pi(3r^2 - r^3), 0 < r < 3$.

(2)由(1)得 $V(r) = \frac{4}{9}\pi(3r^2 - r^3), 0 < r < 3$,所以 $V'(r) = \frac{4}{9}\pi(6r - 3r^2)$,

令 $V'(r) = 0$,得 $r = 2$,当 $r \in (0, 2)$ 时, $V'(r) > 0$,所以 $V(r)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递增;当 $r \in (2, 3)$ 时, $V'(r) < 0$,所以 $V(r)$ 在 $(2, 3)$ 上单调递减.所以当 $r = 2$ 时, $V(r)$ 取得最大值,最大值为 $V(2) = \frac{16\pi}{9}$.

所以 V 的最大值为 $\frac{16\pi}{9}$.

21.解:(1)当 $a=0$ 时, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$,则 $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} (x > 0)$,令 $f'(x) > 0$,解得 $0 < x < e$,令 $f'(x) < 0$,解得 $x > e$,故 $f(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增,在 $(e, +\infty)$ 上单调递减.

(2) $g(x) = x f(x) = \ln x + a(x^2 - x) (x \geq 1)$,若 $g(x) \leq 0$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立,即 $\ln x +$

$a(x^2 - x) \leq 0$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立.

当 $a \geq 0$ 时, $g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, $g(2) = \ln 2 + 2a > 0$,不符合题意;

当 $a < 0$ 时, $g'(x) = \frac{1}{x} + 2ax - a =$

$$\frac{2ax^2 - ax + 1}{x}$$

令 $g'(x) = 0$,即 $2ax^2 - ax + 1 = 0$,则 $\Delta = a^2 - 8a > 0$,

所以 $g'(x) = 0$ 有两个不相等的实数根,设两实数根分别为 x_1, x_2 ,

则 $x_1 x_2 = \frac{1}{2a} < 0$,不妨设 $x_1 < 0 < x_2$.

①当 $x_2 > 1$ 时,当 $x \in (1, x_2)$ 时, $g'(x) > 0, g(x)$ 在 $(1, x_2)$ 上单调递增,当 $x \in (x_2, +\infty)$ 时, $g'(x) < 0, g(x)$ 在 $(x_2, +\infty)$ 上单调递减.

所以 $g(x_2) > g(1) = 0$,不符合题意.

②当 $x_2 \leq 1$ 时,易知 $g'(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减, $g'(1) = 1 + a \leq 0$,即 $a \leq -1, g'(x) \leq 0$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立,所以 $g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减.

所以当 $x \in [1, +\infty)$ 时, $g(x) \leq g(1) = 0$,符合题意.

综上,实数 a 的取值范围为 $(-\infty, -1]$.

22.解:(1)由已知得当 $a=1$ 时, $f'(x) = 2xe^x + x^2e^x + 2x + 4 = (xe^x + 2)(x + 2)$,令 $g(x) = xe^x + 2$,则 $g'(x) = (x + 1)e^x$,当 $x < -1$ 时, $g'(x) < 0$,当 $x > -1$ 时, $g'(x) > 0$,所以函数 $g(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递减,在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增,所以 $g(x)_{\min} = g(-1) = -\frac{1}{e} + 2 > 0$,故 $g(x) = xe^x + 2 > 0$,所以当 $x < -2$ 时, $f'(x) < 0$,当 $x > -2$ 时, $f'(x) > 0$,所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -2)$ 上单调递减,在 $(-2, +\infty)$ 上单调递增,所以 $f(x)_{\min} = f(-2) = 4e^{-2} - 4$.

(2) $f'(x) = 2xe^x + x^2e^x + 2ax + 4a = (xe^x + 2a)(x + 2)$,令 $h(x) = xe^x + 2a(x > 0)$.

①当 $a \geq 0$ 时, $h(x) = xe^x + 2a > 0$,又因为 $x + 2 > 0$,故 $f'(x) = (xe^x + 2a)(x + 2) > 0$,

此时 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $f(x)$ 无极值;

②当 $a < 0$ 时, $h'(x) = (x + 1)e^x > 0, h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,又 $h(0) = 2a < 0, h(-2a) = -2a(e^{-2a} - 1) > 0$,

所以 $h(x) = xe^x + 2a$ 在 $(0, +\infty)$ 上存在唯一零点,设为 $x_0 (x_0 > 0)$,所以当 $x \in (0, x_0)$ 时, $h(x) < 0, f'(x) < 0, f(x)$ 单调递减,当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $h(x) > 0, f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增,所以当 $a < 0$ 时,函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上存在极值点 x_0 .

综上,实数 a 的取值范围为 $(-\infty, 0)$.

第7期

第2~3版同步周测

一、单项选择题

1~8.CBBBABBC

二、多项选择题

9.BC 10.CD

11.AB 12.AC

三、填空题

13. $\frac{7}{9}$

14. $\frac{\sqrt{2}}{10}$

15. $\frac{\sqrt{6}\pi}{4}$

16. $(1, +\infty)$

四、解答题

17.解:(1) $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\alpha + \tan\frac{\pi}{4}}{1 - \tan\alpha \tan\frac{\pi}{4}}$

$$= \frac{\tan\alpha + 1}{1 - \tan\alpha} = \frac{2+1}{1-2} = -3.$$

$$(2) \frac{\sin 2\alpha}{\sin^2\alpha + \sin\alpha\cos\alpha - \cos^2\alpha - 1}$$

$$= \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha + \sin\alpha\cos\alpha - (2\cos^2\alpha - 1) - 1}$$

$$= \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha + \sin\alpha\cos\alpha - 2\cos^2\alpha}$$

$$= \frac{2\tan\alpha}{\tan^2\alpha + \tan\alpha - 2} = \frac{2 \times 2}{2^2 + 2 - 2} = 1.$$

$$18.解:(1) f(x) = \sin\alpha x \cos\omega x - \sqrt{3} \cos^2\omega x + \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$\frac{1}{2} \sin 2\omega x - \frac{\sqrt{3}}{2} (1 + \cos 2\omega) + \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$\frac{1}{2} \sin 2\omega x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2\omega x + \sin\left(2\omega x - \frac{\pi}{3}\right),$$

因为 $f(x)$ 图象上两相邻对称轴之间的距离为 π ,

所以 $f(x)$ 的周期为 2π ,

所以 $\frac{2\pi}{2\omega} = 2\pi$,所以 $\omega = \frac{1}{2}$.

(2)由(1)知 $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$,

所以 $f(x + \varphi) = \sin\left(x + \varphi - \frac{\pi}{3}\right)$.

因为 $f(x + \varphi)$ 是奇函数,

所以 $\varphi - \frac{\pi}{3} = k\pi (k \in \mathbf{Z})$,

所以 $\varphi = \frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$,又 $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$,

所以 $\varphi = \frac{\pi}{3}$,

所以 $g(x) = \cos(2x - \varphi) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$,

由 $2k\pi \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq \pi + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$,

得 $\frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$,

因为 $x \in [0, \pi]$,所以 $g(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的单调递减区间

为 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$.

19.解:(1) $f(x) = \sin^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x +$

$$2\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1 - \cos 2x}{2} +$$

$$\frac{\sqrt{3} \sin 2x}{2} + \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}.$$

因为 $x \in \left[-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}\right]$,

所以 $2x + \frac{\pi}{6} \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$.

则 $f(x)_{\min} = f\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}$,

$f(x)_{\max} = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}$.

(2)由(1)知 $m = 2$.所以 $g(x) = 2\sin x +$

$$\lambda \cos x = \sqrt{4 + \lambda^2} \sin(x + \alpha) \left(\tan \alpha = \frac{\lambda}{2}\right).$$

当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ 时, $x + \alpha \in \left(\alpha, \frac{\pi}{3} + \alpha\right)$.

要使 $g(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ 上存在最大值,必有

$\frac{\pi}{3} + \alpha > \frac{\pi}{2}$,即 $\alpha > \frac{\pi}{6}$.所以 $\frac{\lambda}{2} = \tan \alpha >$

$\frac{\sqrt{3}}{3}$,所以 $\lambda > \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

所以 λ 的取值范围是 $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$.

20.解:(1) $f(x) = \sqrt{3} \sin x \cos x +$

$$\cos^2 x + m = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \frac{1 + \cos 2x}{2} + m = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x +$$

$$\frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} + m = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2} + m,$$

因为 $f(x)$ 的最小值为 -3 ,

所以 $-1 + \frac{1}{2} + m = -3$,解得 $m = -\frac{5}{2}$,

所以 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - 2$.

令 $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi (k \in$

$\mathbf{Z})$,解得 $\frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$,

所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[\frac{\pi}{6} +$

$k\pi, \frac{2\pi}{3} + k\pi\right] (k \in \mathbf{Z})$.

(2) $f\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left[2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6}\right] - 2 =$

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) - 2 = \cos 2x - 2, \text{ 所以 } a \sin x + f\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = a \sin x + \cos 2x - 2 = a \sin x + 1 - 2\sin^2 x - 2 =$$

$$-2\sin^2 x + a \sin x - 1, \text{ 令 } t = \sin x, x \in (0, \pi), \text{ 则 } t \in (0, 1], \text{ 所以原不等式可转化为 } -2t^2 + at -$$

$$1 < 0, a < 2t + \frac{1}{t}, \text{ 又 } 2t + \frac{1}{t} \geq 2\sqrt{2t \cdot \frac{1}{t}} = 2\sqrt{2},$$

当且仅当 $2t = \frac{1}{t}$,即 $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取等号,所以

$a < 2\sqrt{2}$,所以实数 a 的取值范围为 $(-\infty, 2\sqrt{2})$.

21.解:(1)由题意知 $y = A \sin(\omega x + \varphi) +$

$b (A > 0, \omega > 0, b \geq 0, |\varphi| \leq \frac{\pi}{2})$,

因为摩天轮的最高点距地面101m,则最低点距地面的距离为 $101 - 84 = 17$ (m),

所以 $\begin{cases} A + b = 101, \\ -A + b = 17, \end{cases}$ 解得 $A = 42, b = 59$,又

函数 y 的周期为 t ,所以 $\omega = \frac{2\pi}{t}$,

所以 $y = 42 \sin\left(\frac{2\pi}{t}x + \varphi\right) + 59 (x \geq 0)$,

又 $x = 0$ 时, $y = 17$,所以 $17 = 42 \sin \varphi + 59$,则 $\sin \varphi = -1$,所以可取 $\varphi = -\frac{\pi}{2}$,

所以 $y = 42 \sin\left(\frac{2\pi}{t}x - \frac{\pi}{2}\right) + 59 = -42 \cdot$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{t}x\right) + 59 (x \geq 0, t \text{ 为参数}).$$

(2)依题意,可知 $y = -42 \cos\left(\frac{2\pi}{t}x\right) +$

$59 \geq 80$,所以 $\cos\left(\frac{2\pi}{t}x\right) \leq -\frac{1}{2}$,不妨取

第一圈,得 $\frac{2\pi}{3} \leq \frac{2\pi}{t}x \leq \frac{4\pi}{3}$,所以 $\frac{t}{3} \leq$

$x \leq \frac{2t}{3}$,由题意,得 $\frac{2t}{3} - \frac{t}{3} \geq 5$,解得 $t \geq$

15,所以 t 的最小值为15.

22.解: $f(\theta) = 4\cos^2\theta - 4\cos\theta + 3\sin^2\theta = \cos^2\theta - 4\cos\theta + 3, g(\theta) = m\cos\theta$.