第 4 期

第 2~3 版章节测试参考答案

一、单项选择题

1.B　提示：$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0$.故选B.

2.C　提示：不妨设向量$\boldsymbol{a}=(1,0,0)$,$\boldsymbol{b}=(0,1,0)$,$\boldsymbol{c}=(0,0,1)$,则向量$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(1,1,0)$,$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(1,-1,0)$,$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}=(1,0,1)$.设$\boldsymbol{p}=x\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+y(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+z(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})$,即$(2,3,4)=x(1,1,0)+y(1,-1,0)+z(1,0,1)$,所以$\begin{cases}x+y+z=2,\\x-y=3,\\z=4,\end{cases}$解得$x=\frac{1}{2}$,$y=-\frac{5}{2}$,$z=4$,即$\boldsymbol{p}$在$\{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\}$下的坐标为$\left(\frac{1}{2},-\frac{5}{2},4\right)$.故选C.

3.B　提示：$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})-\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}=-\frac{2}{3}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c$,故选B.

4.B　提示：$a\cdot b=(e_1+e_2)\cdot(e_1-2e_2)=e_1^2-e_1\cdot e_2-2e_2^2=1-|e_1|\cdot|e_2|\times\frac{1}{2}-2=-\frac{3}{2}$,$|a|=\sqrt{a^2}=\sqrt{(e_1+e_2)^2}=\sqrt{e_1^2+2e_1\cdot e_2+e_2^2}=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$,$|b|=\sqrt{b^2}=\sqrt{(e_1-2e_2)^2}=\sqrt{e_1^2-4e_1\cdot e_2+4e_2^2}=\sqrt{1-2+4}=\sqrt{3}$,所以$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{a\cdot b}{|a||b|}=\frac{-\frac{3}{2}}{3}=-\frac{1}{2}$,所以$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=120°$.故选B.

5.A　提示：设$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=k$,则$\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{b}$,即$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,即"$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$"可推出"$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$";又若$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$时,$\boldsymbol{b}=(0,0,0)$,虽有$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$成立,但条件$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$显然不成立,

所以"$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$"推不出"$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$",故"$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$"是"$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$"的充分不必要条件.故选A.

6.B　提示：以点C_1为坐标原点,分别以C_1B_1,C_1D_1,C_1C所在直线为x、y、z轴,建立空间直角坐标系,由于$A_1M=AN=\frac{\sqrt{2}a}{3}$,则$M\left(a,\frac{2a}{3},\frac{a}{3}\right)$,$N\left(\frac{2a}{3},\frac{2a}{3},a\right)$,$\overrightarrow{MN}=\left(-\frac{a}{3},0,\frac{2a}{3}\right)$;又$C_1D_1\perp$平面$BB_1C_1C$,所以$\overrightarrow{C_1D_1}=(0,a,0)$为平面$BB_1C_1C$的一个法向量.因为$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{C_1D_1}=0$,所以$\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{C_1D_1}$,又$MN\not\subset$平面$BB_1C_1C$,所以$MN/\!/$平面$BB_1C_1C$.故选B.

7.A　提示：设圆锥底面圆的圆心为O,半径为1,以O为原点,AB、OP所在直线分别为y、z轴,建立空间直角坐标系,则$A(0,-1,0)$、$B(0,1,0)$、$C\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right)$、$P(0,0,\sqrt{2})$,$\overrightarrow{PB}=(0,1,-\sqrt{2})$,$\overrightarrow{AC}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},0\right)$,所以$\cos\langle\overrightarrow{PB},\overrightarrow{AC}\rangle=\frac{\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{PB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$,所以$\langle\overrightarrow{PB},\overrightarrow{AC}\rangle=\frac{\pi}{3}$,因此,异面直线$PB$与$AC$所成的角为$\frac{\pi}{3}$.故选A.

8.C　提示：因为$AB\perp AC$,$AB\perp PA$,且$PA\cap AC=A$,所以$AB\perp$平面PAC,则BD与平面PAC所成角为$\angle ADB$,$\tan\angle ADB=\frac{AB}{AD}=\frac{3}{AD}$,当$AD$取得最小值时,$\angle ADB$取得最大值.在等腰$Rt\triangle PAC$中,当$D$为$PC$的中点时,$AD$取得最小值.以$A$为坐标原点,AB,AC,AP分别为x,y,z轴,建立空间直角坐标系$Axyz$,则$A(0,0,0)$,$B(3,0,0)$,$C(0,2,0)$,$P(0,0,2)$,$D(0,1,1)$,则$\overrightarrow{AD}=(0,1,1)$,$\overrightarrow{PC}=(0,2,-2)$,$\overrightarrow{BC}=(-3,2,0)$,设平面$PBC$的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则$n\cdot\overrightarrow{PC}=n\cdot\overrightarrow{BC}=0$,即$\begin{cases}2y-2z=0,\\-3x+2y=0,\end{cases}$令$y=3$,得$\boldsymbol{n}=(2,3,3)$.设AD与平面PBC所成角为$\theta$,所以$\sin\theta=|\cos\langle n,\overrightarrow{AD}\rangle|=\frac{3+3}{\sqrt{22}\times\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{11}}{11}$,所以$AD$与平面$PBC$所成角的正弦值为$\frac{3\sqrt{11}}{11}$.故选C.

二、多项选择题

9.BCD　提示：因为$2\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$,所以$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$,$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$,$2\boldsymbol{b}$共面,故B正确;因为$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})+\boldsymbol{a}$,所以$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$,$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$共面,故C正确;因为$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{c})+3\boldsymbol{c}$,所以$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$,$\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{c}$,$\boldsymbol{c}$共面,故D正确.对于A选项,若设$b+c=\lambda(b-c)+\mu a$,则$b+c=\lambda b-\lambda c+\mu a$,得$\begin{cases}\lambda=1,\\-\lambda=1,\\\mu=0,\end{cases}$故无解,因此$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$,$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$,$\boldsymbol{a}$不共面.故选BCD.

10.BC　提示：以D为坐标原点,DB,DC,DA所在直线分别为x,y,z轴,建立空间直角坐标系,设折叠前的等腰直角三角形ABC的斜边$BC=2$,则$D(0,0,0)$,$B(1,0,0)$,$C(0,1,0)$,$A(0,0,1)$,则$\overrightarrow{AB}=(1,0,-1)$,$\overrightarrow{AC}=(0,1,-1)$,$\overrightarrow{DC}=(0,1,0)$,$\overrightarrow{BD}=(-1,0,0)$.从而有$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0+0+1=1$,故A错误;$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}=0$,故B正确;$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC}=0$,故C正确;易知平面$ADC$的一个法向量为$\overrightarrow{BD}=(-1,0,0)$,设平面ABC的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则$\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\\overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}x-z=0,\\y-z=0,\end{cases}$令$y=1$,则$x=1$,$z=1$,故$\boldsymbol{n}=(1,1,1)$,$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}\neq0$,故D错误.故选BC.

11.AD　提示：因为$a\cdot b=1\times2-1\times1+2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=0$,所以$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,所以直线$l$与$m$垂直,故A正确;$\boldsymbol{a}=(0,1,-1)$,$\boldsymbol{n}=(1,-1,-1)$,则$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}=0\times1+1\times(-1)+(-1)\times(-1)=0$,则$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{n}$,所以$l/\!/\alpha$或$l\subset\alpha$,故B错误;因为$\boldsymbol{n}_1=(0,1,3)$,$\boldsymbol{n}_2=(1,0,2)$,所以$\boldsymbol{n}_1$与$\boldsymbol{n}_2$不共线,所以$\alpha/\!/\beta$不成立,故C错误;因为点$A(1,0,-1)$,$B(0,1,0)$,$C(-1,2,0)$,所以$\overrightarrow{AB}=(-1,1,1)$,$\overrightarrow{BC}=(-1,1,0)$.因为向量$\boldsymbol{n}=(1,u,t)$是平面$\alpha$的法向量,所以$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-1+u+t=0,\\-1+u=0,\end{cases}$解得$u+t=1$,故D正确.故选AD.

12.ABD　提示：以A为原点,AB,AD,AA′为x,y,z轴,建立空间直角坐标系,则$A(0,0,0)$,$B(a,0,0)$,$C(a,a,0)$,$D(0,a,0)$,$A'(0,0,a)$,$B'(a,0,a)$,$C'(a,a,a)$,$D'(0,a,a)$,$E\left(a,\frac{a}{2},0\right)$,$F\left(0,\frac{a}{2},a\right)$,$\overrightarrow{B'E}=\left(0,\frac{a}{2},-a\right)$,$\overrightarrow{FD}=\left(0,\frac{a}{2},-a\right)$,$\overrightarrow{B'E}=\overrightarrow{FD}$,$B'E/\!/FD$,$B'E=FD$,所以四边形$B'EDF$是平行四边形,由正方体知$DE=DF$,因此四边形$B'EDF$为菱形,A正确;$\overrightarrow{A'C}=(a,a,-a)$,$\overrightarrow{DE}=\left(a,-\frac{a}{2},0\right)$,$\cos\langle\overrightarrow{A'C},\overrightarrow{DE}\rangle=\frac{\overrightarrow{A'C}\cdot\overrightarrow{DE}}{|\overrightarrow{A'C}||\overrightarrow{DE}|}=\frac{a^2-\frac{a^2}{2}}{\sqrt{3}a\times\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}}=\frac{\sqrt{15}}{15}$,B正确;设平面$B'EDF$的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,由$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{B'E}=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DE}=0,\end{cases}$得$\begin{cases}\frac{a}{2}y-az=0,\\ax-\frac{a}{2}y=0,\end{cases}$取$y=2$,则$x=1$,$z=1$,即$\boldsymbol{n}=(1,2,1)$,$\overrightarrow{AD}=(0,a,0)$,$|\cos\langle\overrightarrow{AD},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{AD}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{AD}||\boldsymbol{n}|}=\frac{2a}{a\times\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$,直线$AD$与平面$B'EDF$所成角的正弦值是$\frac{\sqrt{6}}{3}$,C错误;平面$ABCD$的一个法向量是$\boldsymbol{m}=(0,0,1)$,$\cos\langle m,\boldsymbol{n}\rangle=\frac{m\cdot\boldsymbol{n}}{|m||\boldsymbol{n}|}=\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$,所以平面$B'EDF$与平面$ABCD$夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{6}}{6}$,其正弦值为$\frac{\sqrt{30}}{6}$,D正确.故选ABD.

三、填空题

13.$\frac{1}{4}$　提示：设$\overrightarrow{AB}=a$,$\overrightarrow{AC}=b$,$\overrightarrow{AD}=c$,则$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1$且两两夹角为60°,所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\frac{1}{2}$,$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\frac{c-a}{2}$,$\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}=-a$,所以$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BA}=-\frac{(c-a)\cdot a}{2}=-\frac{1}{2}(c\cdot a-a^2)=\frac{1}{4}$.

14.$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)$　提示：设$M(a,b,c)$,则$\overrightarrow{AM}=(a,b,c-1)$,$\overrightarrow{AB}=(-1,1,0)$,因为$M$在直线$AB$上,所以存在实数$\lambda$,使得$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$,所以$a=-\lambda$,$b=\lambda$,$c=1$,所以$M(-\lambda,\lambda,1)$,所以$\overrightarrow{CM}=(-\lambda-1,\lambda-2,4)$,因为$CM\perp AB$,所以$\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{AB}=\lambda+1+\lambda-2=0$,解得$\lambda=\frac{1}{2}$,所以$M\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)$.

15.$\sqrt{6}$　提示：以D为原点,DA、DC、DD_1分别为x、y、z轴,建立空间直角坐标系,则点$E(0,2,0)$,$D_1(0,0,2)$,$A(1,0,0)$,$B_1(1,4,2)$,从而$\overrightarrow{D_1A}=(1,0,-2)$,$\overrightarrow{AE}=(-1,2,0)$,$\overrightarrow{D_1B_1}=(1,4,0)$,设平面$AD_1E$的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,由$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{D_1A}=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\end{cases}$可得$\begin{cases}x-2z=0,\\-x+2y=0,\end{cases}$令$x=2$,则$\boldsymbol{n}=(2,1,1)$,所以点$B_1$到平面$AD_1E$的距离为$d=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{D_1B_1}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$.

16.$\frac{\sqrt{3}}{3}$　提示：以点O为坐标原点,OB、OC、OP所在直线分别为x、y、z轴,建立空间直角坐标系$Oxyz$,因为$AB=AB$,$BC=AD$,$\angle ABC=\angle BAD$,所以$\triangle ABC\cong\triangle BAD$,所以$\angle BAC=\angle ABD$,所以$OA=OB$,因为$OA\perp OB$,$AB=2\sqrt{2}$,则$OA=OB=2$,则$A(0,-2,0)$,$B(2,0,0)$,$P(0,0,2)$,$E(1,-1,0)$,$F(0,-1,1)$,$\overrightarrow{OE}=(1,-1,0)$,$\overrightarrow{OF}=(0,-1,1)$,设平面$OEF$的法向量为$\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,由$\begin{cases}m\cdot\overrightarrow{OE}=0,\\m\cdot\overrightarrow{OF}=0,\end{cases}$可得$\begin{cases}x-y=0,\\z-y=0,\end{cases}$令$y=1$,则$x=z=1$,可得$\boldsymbol{m}=(1,1,1)$,易知平面OAE的一个法向量为$n=(0,0,1)$,则$|\cos\langle m,\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|m\cdot\boldsymbol{n}|}{|m|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{1}{\sqrt{3}\times1}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,所以平面FOE与平面AOE夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$.

四、解答题

17.解：$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}=(-1,1,2)-(-2,0,2)=(1,1,0)$,$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}=(-3,0,4)-(-2,0,2)=(-1,0,2)$.

(1)$\cos\theta=\frac{a\cdot b}{|a||b|}=\frac{-1+0+0}{\sqrt{2}\times\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$,所以$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角$\theta$的余弦值为$-\frac{\sqrt{10}}{10}$.

(2)$ka+b=(k,k,0)+(-1,0,2)=(k-1,k,2)$,$ka-2b=(k,k,0)-(-2,0,4)=(k+2,k,-4)$,所以$(k-1,k,2)\cdot(k+2,k,-4)=(k-1)(k+2)+k^2-8=0$,即$2k^2+k-10=0$,解得$k=-\frac{5}{2}$或$k=2$.

18.(1)证明：因为$PA\perp$底面$ABCD$,$AD\perp AB$,所以以A为原点,AB为x轴,AD为y轴,AP为z轴,建立空间直角坐标系,由题意$B(1,0,0)$,$P(0,0,2)$,$C(2,2,0)$,$E(1,1,1)$,$D(0,2,0)$,$\overrightarrow{BE}=(0,1,1)$,$\overrightarrow{PD}=(0,2,-2)$,所以$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{PD}=0$,所以$BE\perp PD$.

(2)解：$\overrightarrow{BC}=(1,2,0)$,$\overrightarrow{CP}=(-2,-2,2)$,$\overrightarrow{AC}=(2,2,0)$,由点$F$在棱$PC$上,设$\overrightarrow{CF}=\lambda\overrightarrow{CP}=(-2\lambda,-2\lambda,2\lambda)$,$0\leqslant\lambda\leqslant1$,所以$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}=(1-2\lambda,2-2\lambda,2\lambda)$,因为$BF\perp AC$,所以$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{AC}=2(1-2\lambda)+2(2-2\lambda)=0$,解得$\lambda=\frac{3}{4}$,

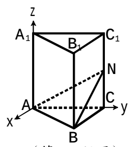
所以$|\overrightarrow{PF}|=\left(1-\frac{3}{4}\right)|\overrightarrow{PC}|=\frac{1}{4}\sqrt{4+4+4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,即线段$PF$的长为$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

19.解：在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中,$\angle ABC=90°$,以点B为原点,BA、BC、BB_1所在直线分别为x、y、z轴,建立空间直角坐标系$Bxyz$,则点$A(1,0,0)$、$A_1(1,0,2)$,$B(0,0,0)$,$B_1(0,0,2)$,$C(0,1,0)$,$C_1(0,1,2)$.

(1)设异面直线B_1C_1与A_1C所成角为α,$\overrightarrow{B_1C_1}=(0,1,0)$,$\overrightarrow{A_1C}=(-1,1,-2)$,$\cos\langle\overrightarrow{B_1C_1},\overrightarrow{A_1C}\rangle=\frac{\overrightarrow{B_1C_1}\cdot\overrightarrow{A_1C}}{|\overrightarrow{B_1C_1}|\cdot|\overrightarrow{A_1C}|}=\frac{1}{1\times\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$,即$\cos\alpha=\frac{\sqrt{6}}{6}$,所以$\sin\alpha=\frac{\sqrt{30}}{6}$,则$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\sqrt{5}$,因此,异面直线$B_1C_1$与$A_1C$所成角的正切值为$\sqrt{5}$.

(2)设直线B_1C与平面A_1BC所成角为β,平面A_1BC的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,$\overrightarrow{BA_1}=(1,0,2)$,$\overrightarrow{BC}=(0,1,0)$,$\overrightarrow{B_1C}=(0,1,-2)$,由$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BA_1}=x+2z=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=y=0,\end{cases}$得$\begin{cases}x=-2z,\\y=0,\end{cases}$取$z=-1$,得$\boldsymbol{n}=(2,0,-1)$,所以$\sin\beta=|\cos\langle\overrightarrow{B_1C},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{B_1C}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{B_1C}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{2}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{2}{5}$,所以$\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\frac{\sqrt{21}}{5}$.因此,直线$B_1C$与平面$A_1BC$所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{21}}{5}$.

20.解：建立如图所示的空间直角坐标系,则$A(0,0,0)$,$B(2\sqrt{3},2,0)$,$C(0,4,0)$,$C_1(0,4,4)$,因为N是CC_1的中点,所以$N(0,4,2)$.



(第 20 题图)

(1)$\overrightarrow{AN}=(0,4,2)$,$\overrightarrow{AB}=(2\sqrt{3},2,0)$,则$|\overrightarrow{AN}|=2\sqrt{5}$,$|\overrightarrow{AB}|=4$.设点$N$到直线$AB$的距离为$d_1$,

则$d_1=\sqrt{|\overrightarrow{AN}|^2-\left(\frac{\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\right)^2}=\sqrt{20-4}=4$.

(2)设平面ABN的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则由$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AB}$,$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AN}$,得$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=2\sqrt{3}x+2y=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AN}=4y+2z=0,\end{cases}$令$z=2$,则$y=-1$,$x=\frac{\sqrt{3}}{3}$,即$\boldsymbol{n}=\left(\frac{\sqrt{3}}{3},-1,2\right)$.易知$\overrightarrow{C_1N}=(0,0,-2)$,设点$C_1$到平面$ABN$的距离为$d_2$,则$d_2=\frac{|\overrightarrow{C_1N}\cdot n|}{|n|}=\frac{|-4|}{\frac{4\sqrt{3}}{3}}=\sqrt{3}$.

21.(1)证明：取PF的中点G,连接EG、CG,连接AC交BD于O,连接FO.因为E、G分别为PD、PF的中点,所以$EG/\!/FD$,又$EG\not\subset$平面BDF,$FD\subset$平面BDF,所以$EG/\!/$平面BDF,又$AF=1$,故F为GA的中点,所以$FO/\!/GC$,又$GC\not\subset$平面BDF,$FO\subset$平面BDF,所以$GC/\!/$平面BDF,又$EG\cap CG=G$,EG,$CG\subset$平面CGE,所以平面$CGE/\!/$平面BDF,又$CE\subset$平面CGE,所以$CE/\!/$平面BDF.

(2)解：取BC中点Q,连接AQ,因为四边形$ABCD$是$\angle ABC=60°$的菱形,所以$AQ\perp AD$,又$PA\perp$平面$ABCD$,以A为原点,$\overrightarrow{AQ}$、$\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{AP}$为x、y、z轴正方向,建立空间直角坐标系$Axyz$.则$D(0,3,0)$,$B\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2},0\right)$,$C\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},0\right)$,$F(0,0,1)$,$P(0,0,3)$.所以$\overrightarrow{DF}=(0,-3,1)$,$\overrightarrow{DB}=\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},-\frac{9}{2},0\right)$.设平面$BDF$的法向量为$n=(x,y,z)$,则由$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DF}=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DB}=0,\end{cases}$可得$\begin{cases}-3y+z=0,\\\frac{3\sqrt{3}}{2}x-\frac{9}{2}y=0,\end{cases}$令$z=3$,则$x=\sqrt{3}$,$y=1$,所以$\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},1,3)$.显然平面PAD的一个法向量为$\boldsymbol{m}=(1,0,0)$,所以$|\cos\langle m,\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|m\cdot\boldsymbol{n}|}{|m|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{39}}{13}$,所以平面BDF和平面PAD夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{39}}{13}$.

22.(1)证明：连接AC,因为底面$ABCD$为菱形,$\angle ABC=60°$,所以$\triangle ABC$是正三角形,因为E是BC的中点,所以$AE\perp BC$,又$AD/\!/BC$,所以$AE\perp AD$,因为$PA\perp$平面$ABCD$,$AE\subset$平面$ABCD$,所以$PA\perp AE$,又$PA\cap AD=A$,所以$AE\perp$平面PAD,又$AE\subset$平面AEM,所以平面$AEM\perp$平面PAD.

(2)解：以A为原点,AE,AD,AP为x,y,z轴,建立空间直角坐标系,不妨设$AB=AP=2$,则$AE=\sqrt{3}$,$A(0,0,0)$,$B(\sqrt{3},-1,0)$,$C(\sqrt{3},1,0)$,$P(0,0,2)$,$D(0,2,0)$,$E(\sqrt{3},0,0)$,$F\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},1\right)$,所以$\overrightarrow{PD}=(0,2,-2)$,$\overrightarrow{AF}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},1\right)$,$\overrightarrow{AB}=(\sqrt{3},-1,0)$,设$\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PD}=\lambda(0,2,-2)(0\leqslant\lambda\leqslant1)$,则$M(0,2\lambda,2-2\lambda)$.设平面$ABF$的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AF}=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y+z=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=\sqrt{3}x-y=0,\end{cases}$取$x=1$,则$y=\sqrt{3}$,$z=-\sqrt{3}$,得$\boldsymbol{n}=(1,\sqrt{3},-\sqrt{3})$,设直线$EM$与平面$ABF$所成角为$\theta$,$\overrightarrow{EM}=(-\sqrt{3},2\lambda,2-2\lambda)$,$\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{EM}\rangle|=\frac{|n\cdot\overrightarrow{EM}|}{|n|\cdot|\overrightarrow{EM}|}=\frac{|\sqrt{3}(4\lambda-3)|}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{8\lambda^2-8\lambda+7}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$,化简得$4\lambda^2-8\lambda+1=0$,则$\lambda=\frac{2-\sqrt{3}}{2}(0\leqslant\lambda\leqslant1)$,故存在点$M$满足题意,此时$\frac{PM}{PD}=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$.

扫码免费下载
习题讲解 ppt

第 1 期

第 3~4 版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.A　提示：模与向量$\overrightarrow{A_1B_1}$的模相等的向量有$\overrightarrow{B_1A_1}$,$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{BA}$,$\overrightarrow{DC}$,$\overrightarrow{CD}$,$\overrightarrow{D_1C_1}$,$\overrightarrow{C_1D_1}$,共7个.

2.B　提示：因为向量$a=(2,-1,3)$,$b=(-1,4,2)$,$c=(1,-1,m)$共面,

所以存在x,y,使得$a=xb+yc$,所以$(2,-1,3)=(-x+y,4x-y,2x+my)$,

所以$\begin{cases}-x+y=2,\\4x-y=-1,\\2x+my=3,\end{cases}$解得$x=\frac{1}{3}$,$y=\frac{7}{3}$,$m=1$.故选B.

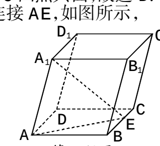
3.D　提示：由题意知,$\angle APC=\angle BPC=\angle APB=60°$,D是棱AB中点,

所以$\overrightarrow{PD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})$,所以$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{PC}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PB}=\frac{1}{2}\times1\times1\times\cos60°+\frac{1}{2}\times1\times1\times\cos60°=\frac{1}{2}$.故选D.

4.D　提示：因为向量$\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$,$\overrightarrow{OC}$不能构成空间的一个基底,所以向量$\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$,$\overrightarrow{OC}$共面,

因此O,A,B,C四点共面,故选D.

5.A　提示：连接AE,如图所示,



(第 5 题图)

得$\overrightarrow{A_1E}=\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AE}=-c+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=-c+b+\frac{1}{2}a=\frac{1}{2}a+b-c$,故选A.

6.D　提示：设向量$a=(1,0,0)$,$b=(0,1,0)$,$c=(0,0,1)$,则向量$a+b=(1,1,0)$,$a-b=(1,-1,0)$,又向量$p=(3,2,1)$,不妨设$p=x(a+b)+y(a-b)+zc$,则$(3,2,1)=(x+y,x-y,z)$,

即$\begin{cases}x+y=3,\\x-y=2,\\z=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=\frac{5}{2},\\y=\frac{1}{2},\\z=1,\end{cases}$所以向量p在$\{a+b,a-b,c\}$下的坐标为$\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2},1\right)$.故选D.

7.A　提示：因为△ABC的三个顶点分别为$A(0,0,\sqrt{5})$,$B\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},\sqrt{5}\right)$,$C(-1,0,\sqrt{5})$,

所以$\overrightarrow{AB}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right)$,$\overrightarrow{AC}=(-1,0,0)$,所以$\cos\angle BAC=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1\times1}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,又$\angle BAC\in(0,\pi)$,

所以$\angle BAC=\frac{\pi}{6}$,所以角A的大小为$\frac{\pi}{6}$.故选A.

8.B　提示：设$C(x,0,0)$,$D(0,y,0)$,因为$A(1,0,2)$,$B(0,2,1)$,所以$\overrightarrow{AD}=(-1,y,-2)$,$\overrightarrow{BC}=(x,-2,-1)$,因为$AD\perp BC$,所以$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=-x-2y+2=0$,即$x+2y=2$.因为$\overrightarrow{CD}=(-x,y,0)$,

所以$|\overrightarrow{CD}|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(2-2y)^2+y^2}=\sqrt{5y^2-8y+4}=\sqrt{5\left(y-\frac{4}{5}\right)^2+\frac{4}{5}}\geqslant\frac{2\sqrt{5}}{5}$.故选B.

二、多项选择题

9.BC　提示：对于A,因为空间向量i,j,k都是单位向量,且两两垂直,所以$|i|=|j|=|k|=1$,且$i\cdot j=0$,$i\cdot k=0$,$j\cdot k=0$,

则$|i+j+k|=\sqrt{(i+j+k)^2}=\sqrt{i^2+j^2+k^2+2i\cdot j+2j\cdot k+2i\cdot k}=\sqrt{3}$,

所以向量i+j+k的模是$\sqrt{3}$,故A错误;

对于B,因为空间向量i,j,k都是单位向量,且两两垂直,所以i,j,k不共面,而向量i+j,i-j均与i,j共面,所以i+j,i-j与k不共面,则$\{\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j},\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$可以构成空间的一个基底,故B正确;

对于C,设i+j+k与k的夹角为α,则$\cos\alpha=\frac{(i+j+k)\cdot k}{|i+j+k||k|}=\frac{i\cdot k+j\cdot k+k\cdot k}{|i+j+k||k|}=\frac{1}{\sqrt{3}\times1}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,故C正确;

对于D,因为$|i+j|=\sqrt{(i+j)^2}=\sqrt{i^2+2i\cdot j+j^2}=\sqrt{2}$,同理可得$|k-j|=\sqrt{2}$,

则$\cos\langle i+j,k-j\rangle=\frac{(i+j)\cdot(k-j)}{|i+j||k-j|}=-\frac{1}{2}$,

所以向量i+j与k-j的夹角为120°,则向量i+j与k-j不共线,故D错误.故选BC.

10.ABD　提示：因为E、F分别是OA、BC的中点,所以$\overrightarrow{OF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c$,故A正确;$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}a$,因为$PF=2EP$,所以$EP=\frac{1}{3}EF$,$FP=\frac{2}{3}EF$,

即$\overrightarrow{EP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EF}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}a\right)=-\frac{1}{6}a+\frac{1}{6}b+\frac{1}{6}c$,故B正确;

$\overrightarrow{FP}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{EF}=-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}a\right)=\frac{1}{3}a-\frac{1}{3}b-\frac{1}{3}c$,故C错误;

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{EP}=\frac{1}{2}a-\frac{1}{6}a+\frac{1}{6}b+\frac{1}{6}c=\frac{1}{3}a+\frac{1}{6}b+\frac{1}{6}c$,故D正确.故选ABD.

11.BCD　提示：对于A,左边为向量,右边为实数,显然不相等,故A不正确;对于B,左边$=(4,2,2)\cdot(-1,5,-3)=-4+10-6=0$,右边$=(1,2,3)\cdot(2,5,-4)=2+10-12=0$,所以左边=右边,因此B正确;对于C,$a+b+c=(3,7,-1)$,左边$=3^2+7^2+(-1)^2=59$,右边$=1^2+2^2+3^2+3^2+0+(-1)^2+(-1)^2+5^2+(-3)^2=59$,所以左边=右边,因此C正确;

对于D,由C可得:左边$=\sqrt{59}$;因为$a-b-c=(-1,-3,7)$,所以$|a-b-c|=\sqrt{59}$,所以左边=右边,因此D正确.故选BCD.

12.ACD　提示：由图形及其已知可得:点B_1的坐标为$(4,5,3)$,点$C_1(0,5,3)$关于点B对称的点为$(8,5,-3)$,点A关于直线BD_1对称的点为$C_1(0,5,3)$,

点$C(0,5,0)$关于平面ABB_1A_1对称的点为$(8,5,0)$.因此ACD正确.故选ACD.

三、填空题

13.-6　提示：因为向量$a=(1,2,3)$,$b=(2,1,k)$,所以$a+b=(3,3,k+3)$,

又因为$a\perp(a+b)$,所以$a\cdot(a+b)=3+6+3(k+3)=0$,解得$k=-6$.

14.(1,0,2);5　提示：由于C是线段AB的中点,且$A(-1,1,3)$,$B(3,-1,1)$,

故$C(1,0,2)$,又$D(-2,4,2)$,

所以$|\overrightarrow{CD}|=\sqrt{(1+2)^2+(0-4)^2+(2-2)^2}=5$.

15.2　提示：因为$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1F}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{B_1D_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB_1}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1D_1}-\overrightarrow{A_1B_1})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$,

又$\overrightarrow{AF}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}+z\overrightarrow{AA_1}$,所以$x=y=\frac{1}{2}$,$z=1$,则$x+y+z=2$.

16.$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　提示：空间向量a满足$a=xe_1+ye_2(x,y\in R)$,$e_1\cdot e_2=e_2\cdot e_3=e_3\cdot e_1=\frac{1}{2}$,由$|a|=2$,

得$|a|^2=a\cdot a=(xe_1+ye_2)\cdot(xe_1+ye_2)=4$,即$x^2+y^2+xy=4$,又$|a\cdot e_3|=|(xe_1+ye_2)\cdot e_3|=\frac{1}{2}|x+y|$,

因为$x^2+y^2\geqslant2xy$,所以由$x^2+y^2+xy=4$,得$3xy\leqslant4$,即$xy\leqslant\frac{4}{3}$,所以$|x+y|^2=x^2+y^2+2xy=x^2+y^2+xy+xy\leqslant4+\frac{4}{3}=\frac{16}{3}$,故$|x+y|\leqslant\frac{4}{\sqrt{3}}$,所以$|a\cdot e_3|=\frac{1}{2}|x+y|\leqslant\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

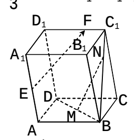
四、解答题

17.解：(1)因为$a=(2,-3,1)$,$b=(2,0,3)$,$c=(0,0,m)$,所以$a+2b-3c=(6,-3,7-3m)=(6,-3,1)$,所以$7-3m=1$,解得$m=2$.

(2)由$m=2$,得$c=(0,0,2)$,$b+c=(2,0,5)$,所以$a\cdot(b+c)=(2,-3,1)\cdot(2,0,5)=4+0+5=9$.

18.解：(1)如图,取AA_1的中点E,在D_1C_1上取一点F,使得$D_1F=2FC_1$,连接EF,

则$\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EA_1}+\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{D_1F}=\overrightarrow{EF}$.



(第 18 题图)

(2)$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BC_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB})+\frac{3}{4}\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AA_1}$,

所以$\alpha=\frac{1}{2}$,$\beta=\frac{1}{4}$,$\gamma=\frac{3}{4}$.

19.解：(1)$\overrightarrow{AC}=(1,-3,2)$,$\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AC}=\lambda(1,-3,2)$,

设O为坐标原点,所以$\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=\lambda(1,-3,2)$,$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\lambda(1,-3,2)=(\lambda,2-3\lambda,3+2\lambda)$,

$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}=(\lambda,2-3\lambda,3+2\lambda)-(-2,1,6)=(\lambda+2,1-3\lambda,2\lambda-3)$,

因为$\overrightarrow{BD}\perp\overrightarrow{AC}$,所以$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=(1,-3,2)\cdot(\lambda+2,1-3\lambda,2\lambda-3)=\lambda+2-3+9\lambda+4\lambda-6=14\lambda-7=0$,

解得$\lambda=\frac{1}{2}$,故$\overrightarrow{OD}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},4\right)$,即$D\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},4\right)$.

(2)$\overrightarrow{BA}=(2,1,-3)$,$\overrightarrow{BC}=(3,-2,-1)$,

$|\overrightarrow{BA}|=\sqrt{2^2+1^2+(-3)^2}=\sqrt{14}$,$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{3^2+(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{14}$,

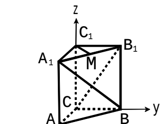
$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=2\times3+1\times(-2)+(-3)\times(-1)=7$,$\cos B=\cos\langle\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\rangle=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}=\frac{7}{\sqrt{14}\times\sqrt{14}}=\frac{1}{2}$,

所以$\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以以BA,BC为邻边的平行四边形的面积为$S=\sqrt{14}\times\sqrt{14}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=7\sqrt{3}$.

20.(1)解：以C为原点,CA,CB,CC_1所在直线分别为x,y,z轴,建立空间直角坐标系,

则$A_1(1,0,2)$,$B(0,1,0)$,$C(0,0,0)$,$B_1(0,1,2)$,$\overrightarrow{BA_1}=(1,-1,2)$,$\overrightarrow{CB_1}=(0,1,2)$,

所以$\cos\langle\overrightarrow{BA_1},\overrightarrow{CB_1}\rangle=\frac{\overrightarrow{BA_1}\cdot\overrightarrow{CB_1}}{|\overrightarrow{BA_1}|\cdot|\overrightarrow{CB_1}|}=\frac{3}{\sqrt{6}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{30}}{10}$.



(第 20 题图)

(2)证明：由(1)得$A_1(1,0,2)$,$B(0,1,0)$,$C_1(0,0,2)$,$M\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},2\right)$,

$\overrightarrow{A_1B}=(-1,1,-2)$,$\overrightarrow{C_1M}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$,

所以$\overrightarrow{A_1B}\cdot\overrightarrow{C_1M}=-1\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{2}+0=0$,所以$A_1B\perp C_1M$.

21.解：(1)如图,过D作$DE\perp BC$于E,因为$BC=2$,$\angle BDC=90°$,$\angle DCB=30°$,所以$BD=1$,$CD=\sqrt{3}$,所以$DE=CD\cdot\sin30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$OE=OB-BD\cos60°=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$,

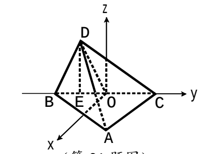
所以D的坐标为$\left(0,-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

又因为$C(0,1,0)$,所以$\overrightarrow{CD}=\left(0,-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

(2)因为A点坐标为$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right)$,$B(0,-1,0)$,

所以$\overrightarrow{AD}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$\overrightarrow{BC}=(0,2,0)$,

所以AD与BC所成角的余弦值为$|\cos\langle\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC}\rangle|=\left|\frac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AD}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}\right|=\left|\frac{-2}{\sqrt{\frac{3}{4}+1+\frac{3}{4}}\times2}\right|=\frac{\sqrt{10}}{5}$.



(第 21 题图)

22.解：(1)以A为原点,AB,AD,AP所在直线分别为x,y,z轴建立空间直角坐标系,则$A(0,0,0)$,$B(\sqrt{3},0,0)$,$C(\sqrt{3},1,0)$,$P(0,0,2)$,故$\overrightarrow{AC}=(\sqrt{3},1,0)$,$\overrightarrow{PB}=(\sqrt{3},0,-2)$.

所以$\cos\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{PB}\rangle=\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{PB}|}=\frac{3}{2\times\sqrt{7}}=\frac{3\sqrt{7}}{14}$.

(2)由(1)知$\overrightarrow{AP}=(0,0,2)$,$\overrightarrow{AC}=(\sqrt{3},1,0)$,$E\left(0,\frac{1}{2},1\right)$.

设$N(a,0,c)$,则$\overrightarrow{NE}=\left(-a,\frac{1}{2},1-c\right)$.因为$NE\perp$平面$PAC$,所以$\begin{cases}\overrightarrow{NE}\cdot\overrightarrow{AP}=2(1-c)=0,\\\overrightarrow{NE}\cdot\overrightarrow{AC}=-\sqrt{3}a+\frac{1}{2}=0,\end{cases}$解得$a=\frac{\sqrt{3}}{6}$,$c=1$,

所以$N\left(\frac{\sqrt{3}}{6},0,1\right)$.所以$N$到$AB$的距离为1,到$AP$的距离为$\frac{\sqrt{3}}{6}$.

第 2 期

第 3~4 版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.B　提示：因为$a=(1,0,2)$,$\boldsymbol{n}=(-2,0,-4)$,所以$\boldsymbol{n}=-2\boldsymbol{a}$,即$\boldsymbol{n}/\!/\boldsymbol{a}$,所以$l\perp\alpha$.故选B.

2.D　提示：直线l_1,l_2的方向向量分别为$\boldsymbol{a}=(-2,2,1)$,$\boldsymbol{b}=(3,-2,m)$,且$l_1\perp l_2$,所以$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-2\times3-2\times2+m=0$,解得$m=10$.故选D.

3.D　提示：$\overrightarrow{AB}=(-1,1,-2)$,$\overrightarrow{BC}=(-2,0,1)$,$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=-1+\lambda-2\mu=0$,$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=-2+\mu=0$,可得$\mu=2$,$\lambda=5$,$\lambda+\mu=7$,故选D.

4.D　提示：连接D_1E并延长,与AD交于M点处,因为$A_1E=2ED$,可得M为AD中点,连接BF并延长,交AD于N点,因为$CF=2FA$,可得N为AD中点,所以M,N重合,且$\frac{ME}{ED_1}=\frac{1}{2}$,$\frac{MF}{FB}=\frac{1}{2}$,所以$\frac{ME}{ED_1}=\frac{MF}{FB}$,所以$EF/\!/BD_1$,故选D.

5.D　提示：对于A,若$a\subset\alpha$,$b\subset\beta$,$\alpha/\!/\beta$,则a与b平行或异面,A错误;对于B,若$a/\!/b$,$b\subset\beta$,则$a\subset\beta$或$a/\!/\beta$,B错误;对于C,若$\alpha\perp\beta$,$a\subset\alpha$,则$a/\!/\beta$或$a\subset\beta$或$a\perp\beta$或a与β斜交,C错误;对于D,设直线a,b的方向向量分别为$\boldsymbol{m}$、$\boldsymbol{n}$,由于$a\perp\alpha$,则平面α的一个法向量为$\boldsymbol{m}$,$b\perp\beta$,则平面β的一个法向量为$\boldsymbol{n}$,因为$a\perp b$,所以$\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$,因此,$\alpha\perp\beta$,D正确.故选D.

6.A　提示：设正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为1,平面AEF的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则$A(1,0,0)$,$E\left(1,1,\frac{1}{3}\right)$,$F\left(0,1,\frac{2}{3}\right)$,所以$\overrightarrow{AE}=\left(0,1,\frac{1}{3}\right)$,$\overrightarrow{EF}=\left(-1,0,\frac{1}{3}\right)$,则$\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{AE}=0,\\n\cdot\overrightarrow{EF}=0,\end{cases}$即

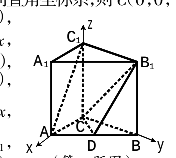
① $\begin{cases}y+\frac{1}{3}z=0,\\ -x+\frac{1}{3}z=0,\end{cases}$ 取 $x=1$,则 $y=-1,z=3$,故 $\boldsymbol{n}=(1,-1,3)$.故选 A.

7.D 提示:因为 $\overrightarrow{AB}=(1,5,-2)$,$\overrightarrow{BC}=(3,1,z)$,$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$,所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=8-2z=0$,解得 $z=4$,

所以 $\overrightarrow{BC}=(3,1,4)$,因为 $BP\perp$ 平面 ABC,AB、$BC\subset$ 平面 ABC,所以 $BP\perp AB$,$BP\perp BC$,则 $\begin{cases}\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{AB}=x+5y+5=0,\\ \overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BC}=3x+y-15=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=\frac{40}{7},\\ y=-\frac{15}{7},\end{cases}$ 因此 $\overrightarrow{BP}=\left(\frac{33}{7},-\frac{15}{7},-3\right)$.故选 D.

8.B 提示:因为 $AC=3$,$BC=4$,$AB=5$,所以 $AC^2+BC^2=AB^2$,所以 $AC\perp BC$,则在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,AC,BC,CC_1 两两垂直,以 C 为原点,CA,CB,CC_1 所在直线分别为 x 轴,y 轴,z 轴,建立如图所示的空间直角坐标系,则 $C(0,0,0)$,$A(3,0,0)$,$B(0,4,0)$,$B_1(0,4,4)$,$C_1(0,0,4)$,$\overrightarrow{CB_1}=(0,4,4)$,设点 $D(x,y,0)(0<x<3,0<y<4)$,则 $\overrightarrow{CD}=(x,y,0)$,设平面 CDB_1 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(a,b,c)$,


(第 8 题图)

则 $\begin{cases}m\cdot\overrightarrow{CD}=0,\\ m\cdot\overrightarrow{CB_1}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}ax+by=0,\\ 4b+4c=0,\end{cases}$ 令 $b=-x$,则 $\boldsymbol{m}=(y,-x,x)$,若 $AC_1\parallel$ 平面 CDB_1,则 $\overrightarrow{AC_1}\cdot m=0$,易得 $\overrightarrow{AC_1}=(-3,0,4)$,所以 $-3y+4x=0$,①

由 D 在 AB 上,得 $\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{AD}$,由 $\overrightarrow{AB}=(-3,4,0)$,$\overrightarrow{AD}=(x-3,y,0)$,得 $\frac{x-3}{-3}=\frac{y}{4}$,即 $4x+3y=12$,②

由①②可得 $x=\frac{3}{2}$,$y=2$,即 D 为 AB 的中点,故 $AD=\frac{1}{2}AB$.故选 B.

二、多项选择题

9.AB 提示:若两条直线不重合,则空间中直线与直线平行(或垂直)的充要条件为它们的方向向量平行(或垂直),故 A、B 均正确.若两个平面不重合,则空间中面面平行(或垂直)的充要条件为它们的法向量平行(或垂直),故 C、D 均不正确.故选 AB.

10.BD 提示:对于 A,$\overrightarrow{AB}=(2,1,0)$,$\overrightarrow{AC}=(-1,2,1)$,可知不存在实数 λ,使得 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AC}$,$\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 不共线,A 错误;对于 B,因为 $\overrightarrow{AB}=(2,1,0)$,所以与 $\overrightarrow{AB}$ 同向的单位向量是 $\left(\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{5}}{5},0\right)$,B 正确;对于 C,因为 $\overrightarrow{BC}=(-3,1,1)$,所以 $\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\rangle=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}=\frac{-5}{\sqrt{5}\times\sqrt{11}}=-\frac{\sqrt{55}}{11}$,C 错误;对于 D,设平面 ABC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则 $\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{AB}=2x+y=0,\\ n\cdot\overrightarrow{BC}=-3x+y+z=0,\end{cases}$ 令 $x=1$,解得 $y=-2$,$z=5$,所以 $\boldsymbol{n}=(1,-2,5)$,D 正确.故选 BD.

11.BCD 提示:对于 A,若直线 $b\subset\alpha$,则 $\boldsymbol{p}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ 成立,故 $b\parallel\alpha$ 不是 $\boldsymbol{p}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ 的必要条件,故 A 错误;

对于 B,若 $\overrightarrow{OP}=\frac{2}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{5}\overrightarrow{OB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{OC}$,则 $\frac{2}{5}(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})=\frac{1}{5}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP})+\frac{2}{5}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OP})$,所以 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}$,所以 P,A,B,C 四点共面,故 B 正确;

对于 C,由题意得 $ka+b=(-k,k+2,2k+3)$,$2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-2,0,1)$,

若 $ka+b$ 与 $2a-b$ 垂直,则 $(ka+b)\cdot(2a-b)=2k+2k+3=0$,解得 $k=-\frac{3}{4}$,故 C 正确;

对于 D,由题意知 $\overrightarrow{AB}=(5,0,2)$,$\overrightarrow{AC}=(4,-3,0)$,

则 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{25+4}=\sqrt{29}$,$\cos A=\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{AB}|}=\frac{20}{5\sqrt{29}}=\frac{4\sqrt{29}}{29}$,所以 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2A}=\sqrt{\frac{13}{29}}$,所以 AC 边上的高 $|BD|=|\overrightarrow{AB}|\sin A=\sqrt{29}\times\sqrt{\frac{13}{29}}=\sqrt{13}$,故 D 正确.故选 BCD.

12.CD 提示:以 $\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AA_1}\}$ 为正交基底建立空间直角坐标系 $Axyz$,则 $A(0,0,0)$,$B(2,0,0)$,$C(2,2,0)$,$D(0,2,0)$,$A_1(0,0,4)$,$B_1(2,0,4)$,$E(0,2,2)$,

所以 $\overrightarrow{B_1E}=(-2,2,-2)$,$\overrightarrow{A_1B}=(2,0,-4)$,

因为 $\overrightarrow{B_1E}\cdot\overrightarrow{A_1B}=-4+0+8=4\neq0$,所以 $\overrightarrow{B_1E}$ 与 $\overrightarrow{A_1B}$ 不垂直,故 A 错误;

$\overrightarrow{CB_1}=(0,-2,4)$,$\overrightarrow{CE}=(-2,0,2)$,

设平面 B_1CE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$,则由 $\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{CB_1}=0,\\ n\cdot\overrightarrow{CE}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-2y_1+4z_1=0,\\ -2x_1+2z_1=0,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}y_1=2z_1,\\ x_1=z_1,\end{cases}$

不妨取 $z_1=1$,则 $x_1=1$,$y_1=2$,所以 $n=(1,2,1)$,同理可得平面 A_1BD 的一个法向量为 $m=(2,2,1)$,故不存在实数 λ 使得 $n=\lambda m$,故平面 B_1CE 与平面 A_1BD 不平行,故 B 错误;

在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,$B_1C_1\perp$ 平面 CDD_1C_1,故 B_1C_1 是三棱锥 B_1-CEC_1 的高,所以 $V_{C_1-B_1CE}=V_{B_1-CEC_1}=\frac{1}{3}S_{\triangle CEC_1}\cdot B_1C_1=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times4\times2\times2=\frac{8}{3}$,故 C 正确;三棱锥 $C_1-B_1CD_1$ 的外接球即为长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的外接球,故外接球的半径 $R=\frac{\sqrt{2^2+2^2+4^2}}{2}=\sqrt{6}$,

所以三棱锥 $C_1-B_1CD_1$ 的外接球的表面积 $S=4\pi R^2=24\pi$,故 D 正确.故选 CD.

三、填空题

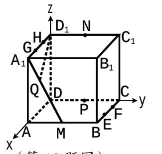
13.0 提示:因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(0,1,1)\cdot(1,1,0)=1\neq0$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=(0,1,1)\cdot(1,0,1)=1\neq0$,$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=(1,1,0)\cdot(1,0,1)=1\neq0$,

所以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 中任意两个向量都不垂直,即 α,β,γ 中任意两个平面都不垂直.

14.$\left(\frac{1}{2},1,-2\right)$ 提示:设直线 l 的方向向量为 $\boldsymbol{d}=(x,y,z)$,依题意可知 $\begin{cases}d\perp n_1,\\ d\perp n_2,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}2x+y+z=0,\\ 2y+z=0,\end{cases}$ 令 $y=1$,则 $z=-2$,$x=\frac{1}{2}$,所以 $d=\left(\frac{1}{2},1,-2\right)$.

15.6 提示:因为 $l\perp\alpha$,所以 $n\parallel u$,所以 $\frac{3}{1}=\frac{a+b}{2}=\frac{a-b}{3}$,所以 $a+b=6$.

16.①③④ 提示:建立如图所示空间直角坐标系.


(第 16 题图)

设正方体棱长为 3,

①因为 $F(1,3,0)$,$H(1,0,3)$,$\overrightarrow{FH}=(0,-3,3)$,$A(3,0,0)$,$C_1(0,3,3)$,$\overrightarrow{AC_1}=(-3,3,3)$,所以 $\overrightarrow{FH}\cdot\overrightarrow{AC_1}=0$,又矩形 $EFHG$ 与矩形 A_1BCD_1 的中心重合,且 AC_1 过矩形 A_1BCD_1 的中心,所以 FH 与 AC_1 异面且垂直,故①正确;

②因为 $F(1,3,0)$,$G(2,0,3)$,$\overrightarrow{FG}=(1,-3,3)$,$\overrightarrow{AC_1}=(-3,3,3)$,所以 $\overrightarrow{FG}\cdot\overrightarrow{AC_1}=-3\neq0$,所以 FG 与 AC_1 不垂直,故②错误;

③由 $A_1(3,0,3)$,$M\left(3,\frac{3}{2},0\right)$,$D_1(0,0,3)$,$\overrightarrow{A_1M}=\left(0,\frac{3}{2},-3\right)$,$\overrightarrow{A_1D_1}=(-3,0,0)$,设平面 A_1MD_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则 $\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{A_1M}=0,\\ n\cdot\overrightarrow{A_1D_1}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\frac{3}{2}y-3z=0,\\ 3x=0,\end{cases}$ 令 $y=2$,则 $\boldsymbol{n}=(0,2,1)$,同理求得平面 EFN 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,2,1)$,因为 $\boldsymbol{m}\parallel\boldsymbol{n}$,所以平面 $A_1MD_1\parallel$ 平面 EFN,又因为 $D_1Q\subset$ 平面 A_1MD_1,所以 $D_1Q\parallel$ 平面 EFN,故③正确;

④因为 $B_1(3,3,3)$,$H(1,0,3)$,$F(1,3,0)$,$P\left(0,\frac{3}{2},0\right)$,则 $\overrightarrow{B_1H}=(-2,-3,0)$,$\overrightarrow{FP}=\left(-1,-\frac{3}{2},0\right)$,所以 $\overrightarrow{B_1H}=2\overrightarrow{FP}$,则 $\overrightarrow{B_1H}\parallel\overrightarrow{FP}$,所以 B_1,H,F,P 四点共面,故④正确.

四、解答题

17.解:以点 A 为原点,AD、AB、AS 所在的直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴,建立空间直角坐标系 $Axyz$.

则 $A(0,0,0)$,$B(0,1,0)$,$C(1,1,0)$,$D\left(\frac{1}{2},0,0\right)$,$S(0,0,1)$.

(1)因为 $SA\perp$ 平面 $ABCD$,

所以 $\overrightarrow{AS}=(0,0,1)$ 是平面 $ABCD$ 的一个法向量.

(2)因为 $AD\perp AB$,$AD\perp SA$,所以 $AD\perp$ 平面 SAB,

所以 $\overrightarrow{AD}=\left(\frac{1}{2},0,0\right)$ 是平面 SAB 的一个法向量.

(3)在平面 SCD 中,$\overrightarrow{DC}=\left(\frac{1}{2},1,0\right)$,$\overrightarrow{SC}=(1,1,-1)$.

设平面 SCD 的法向量是 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{DC}$,$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{SC}$,所以 $\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{DC}=0,\\ n\cdot\overrightarrow{SC}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\frac{1}{2}x+y=0,\\ x+y-z=0,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}x=-2y,\\ z=-y,\end{cases}$

令 $y=-1$,则 $z=1$,$x=2$,所以 $\boldsymbol{n}=(2,-1,1)$,所以 $\boldsymbol{n}=(2,-1,1)$ 是平面 SCD 的一个法向量.

18.证明:(1)以 A 为原点,AB 所在直线为 x 轴,AD 所在直线为 y 轴,AP 所在直线为 z 轴,建立空间直角坐标系 $Axyz$,设 $AB=2a$,$BC=2b$,$PA=2c$,

则 $A(0,0,0)$,$B(2a,0,0)$,$C(2a,2b,0)$,$D(0,2b,0)$,$P(0,0,2c)$,

因为 E 为 AB 的中点,F 为 PC 的中点,所以 $E(a,0,0)$,$F(a,b,c)$,所以 $\overrightarrow{EF}=(0,b,c)$,$\overrightarrow{AP}=(0,0,2c)$,$\overrightarrow{AD}=(0,2b,0)$,所以 $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AP}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$,所以 $\overrightarrow{EF}$,$\overrightarrow{AP}$,$\overrightarrow{AD}$ 共面.

(2)因为 $\overrightarrow{CD}=(-2a,0,0)$,$\overrightarrow{EF}=(0,b,c)$,所以 $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{EF}=(-2a,0,0)\cdot(0,b,c)=0$,

所以 $\overrightarrow{CD}\perp\overrightarrow{EF}$,所以 $CD\perp EF$.

19.(1)解:由题意,正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 a,则正方体的体积为 $V_1=a^3$,又三棱锥 A_1-ABD 的体积 $V_{A_1-ABD}=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle ABD}\cdot A_1A=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AD\cdot A_1A=\frac{1}{6}a^3$,

所以剩余部分的体积 $V=V_1-V_{A_1-ABD}=a^3-\frac{1}{6}a^3=\frac{5}{6}a^3$.

(2)证明:以 D 为原点,DA,DC,DD_1 所在直线为 x,y,z 轴,建立空间直角坐标系,则 $D(0,0,0)$,$A_1(a,0,a)$,$B(a,a,0)$,$A(a,0,0)$,$C_1(0,a,a)$,

$\overrightarrow{DA_1}=(a,0,a)$,$\overrightarrow{DB}=(a,a,0)$,$\overrightarrow{AC_1}=(-a,a,a)$,由 $\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{DA_1}=0$,$\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{DB}=0$,所以 $AC_1\perp DA_1$,$AC_1\perp DB$,又 $DA_1\cap DB=D$,所以 $AC_1\perp$ 平面 A_1DB.

20.证明:(1)以 D 为原点,DA,DC,DD_1 所在直线为 x,y,z 轴,建立空间直角坐标系,设正方体的棱长为 2,则 $D(0,0,0)$,$A_1(2,0,2)$,$B(2,2,0)$,$B_1(2,2,2)$,$C(0,2,0)$,$D_1(0,0,2)$,设平面 A_1BD 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,因为 $\overrightarrow{DA_1}=(2,0,2)$,$\overrightarrow{DB}=(2,2,0)$,所以 $\begin{cases}2x+2z=0,\\ 2x+2y=0,\end{cases}$ 所以取 $\boldsymbol{m}=(-1,1,1)$,同理平面 B_1CD_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(-1,1,1)$,所以 $\boldsymbol{m}\parallel\boldsymbol{n}$,所以平面 $A_1BD\parallel$ 平面 B_1CD_1.

(2)因为 M、N 分别为 AB、B_1C 的中点,所以 $\overrightarrow{MN}=(-1,1,1)$,所以 $\overrightarrow{MN}\parallel\boldsymbol{m}$,所以 $MN\perp$ 平面 A_1BD.

21.证明:(1)取 PA 的中点 M,连接 DM,EM,则 $ME\parallel AB$,且 $ME=\frac{1}{2}AB$,又 $AB\parallel CD$ 且 $CD=\frac{1}{2}AB$,所以 $ME\parallel CD$ 且 $ME=CD$,所以四边形 $CDME$ 为平行四边形,所以 $CE\parallel DM$,又 $DM\subset$ 平面 ADP,$CE\not\subset$ 平面 ADP,所以 $CE\parallel$ 平面 ADP.

(2)取 BC 的中点 O,连接 PO,$\triangle PBC$ 为等边三角形,即 $PO\perp BC$,因为平面 $PBC\perp$ 底面 $ABCD$,BC 为交线,$PO\subset$ 平面 PBC,所以 $PO\perp$ 底面 $ABCD$.以 BC 的中点 O 为坐标原点,以 BC 所在直线为 x 轴,过点 O 与 AB 平行的直线为 y 轴,PO 所在直线为 z 轴,建立空间直角坐标系 $Oxyz$,因为 $CD=1$,$AB=BC=2$,则 $PO=\sqrt{3}$.

所以 $A(1,-2,0)$,$B(1,0,0)$,$D(-1,-1,0)$,$P(0,0,\sqrt{3})$,$M\left(\frac{1}{2},-1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,所以 $\overrightarrow{PA}=(1,-2,-\sqrt{3})$,$\overrightarrow{DM}=\left(\frac{3}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$\overrightarrow{PB}=(1,0,-\sqrt{3})$.

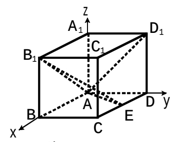
因为 $\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{PB}=\frac{3}{2}\times1+0\times0+\frac{\sqrt{3}}{2}\times(-\sqrt{3})=0$,所以 $\overrightarrow{DM}\perp\overrightarrow{PB}$,即 $DM\perp PB$.

因为 $\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{PA}=\frac{3}{2}\times1+0\times(-2)+\frac{\sqrt{3}}{2}\times(-\sqrt{3})=0$,所以 $\overrightarrow{DM}\perp\overrightarrow{PA}$,即 $DM\perp PA$.

又因为 $PA\cap PB=P$,PA,$PB\subset$ 平面 PAB,所以 $DM\perp$ 平面 PAB.

因为 $DM\subset$ 平面 PAD,所以平面 $PAD\perp$ 平面 PAB.

22.(1)证明:以 A 为原点,$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{AA_1}$ 的方向分别为 x 轴,y 轴,z 轴的正方向建立空间直角坐标系(如图).


(第 22 题图)

设 $AB=a$,则 $A(0,0,0)$,$D(0,1,0)$,$D_1(0,1,1)$,$E\left(\frac{a}{2},1,0\right)$,$B_1(a,0,1)$,故 $\overrightarrow{AD_1}=(0,1,1)$,$\overrightarrow{B_1E}=\left(-\frac{a}{2},1,-1\right)$,$\overrightarrow{AB_1}=(a,0,1)$,$\overrightarrow{AE}=\left(\frac{a}{2},1,0\right)$.

因为 $\overrightarrow{B_1E}\cdot\overrightarrow{AD_1}=-\frac{a}{2}\times0+1\times1+(-1)\times1=0$,所以 $B_1E\perp AD_1$.

(2)解:假设在棱 AA_1 上存在一点 $P(0,0,z_0)$,使得 $DP\parallel$ 平面 B_1AE,此时 $\overrightarrow{DP}=(0,-1,z_0)$.

又设平面 B_1AE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,所以 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB_1}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}ax+z=0,\\ \frac{ax}{2}+y=0,\end{cases}$ 取 $x=1$,则 $z=-a$,$y=-\frac{a}{2}$,得平面 B_1AE 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=\left(1,-\frac{a}{2},-a\right)$.要使 $DP\parallel$ 平面 B_1AE,只要 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{DP}$,有 $\frac{a}{2}-az_0=0$,解得 $z_0=\frac{1}{2}$.

又 $DP\not\subset$ 平面 B_1AE,所以在棱 AA_1 上存在点 P,满足 $DP\parallel$ 平面 B_1AE,此时 $AP=\frac{1}{2}$.

第 3 期

第 3~4 版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.D 提示:由题意 $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=\left(2,\frac{3}{2},3\right)$,$\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OP}=\left(-2,-\frac{1}{2},-3\right)$,$|\overrightarrow{PC}|=\sqrt{4+\frac{1}{4}+9}=\frac{\sqrt{53}}{2}$.故选 D.

2.A 提示:设 l_1 与 l_2 两条异面直线所成的角为 θ,则 $0°<\theta<90°$,因为 l_1 与 l_2 这两条异面直线所成的角等于直线 l_1 的方向向量与 l_2 的方向向量的夹角或夹角的补角,所以 $\theta=180°-150°=30°$,故选 A.

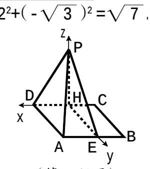
3.B 提示:设 l 与 α 所成的角为 θ,则 $\sin\theta=|\cos\langle m,n\rangle|=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以 $\theta=60°$,故选 B.

4.D 提示:由题意知 $\overrightarrow{OP}=(0,1,-2)$,又平面 α 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,-2,2)$,所以 P 到 α 的距离为 $\frac{|\overrightarrow{OP}\cdot n|}{|n|}=\frac{|0-2-4|}{\sqrt{1+4+4}}=2$.故选 D.

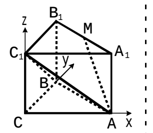
5.C 提示:以 A 为原点,AB,AD,AA_1 所在直线分别为 x,y,z 轴,建立空间直角坐标系,则 $C(1,1,0)$,$C_1(1,1,1)$,$E\left(0,\frac{1}{2},1\right)$,所以 $\overrightarrow{EC}=\left(1,\frac{1}{2},-1\right)$,$\overrightarrow{CC_1}=(0,0,1)$,

所以 $\overrightarrow{CC_1}$ 在 $\overrightarrow{EC}$ 上的投影向量长度为 $\left|\frac{\overrightarrow{CC_1}\cdot\overrightarrow{EC}}{|\overrightarrow{EC}|}\right|=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4}+1}}=\frac{2}{3}$,所以点 C_1 到直线 CE 的距离 $d=\sqrt{|\overrightarrow{CC_1}|^2-\left(\frac{\overrightarrow{CC_1}\cdot\overrightarrow{EC}}{|\overrightarrow{EC}|}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.故选 C.

6.D 提示:因为四边形 $ABCD$ 为正方形,所以 $AD\perp DC$.又 $PD\perp AD$,所以 $\angle PDC$ 为二面角 $P-AD-C$ 的平面角,即 $\angle PDC=60°$.如图所示,过 P 作 $PH\perp DC$ 于 H.因为 $DC\perp AD$,$PD\perp AD$,$DC\cap PD=D$,所以 $AD\perp$ 平面 PDC.所以 $AD\perp PH$.又 $PH\perp DC$,$AD\cap DC=D$,所以 $PH\perp$ 平面 $ABCD$,在平面 $ABCD$ 内过 H 作 $HE\perp AB$ 于 E,连接 PE,则 $PE\perp AB$,所以线段 PE 即为所求.以 H 为坐标原点建立空间直角坐标系 $Hxyz$,则 $E(0,2,0)$,$P(0,0,\sqrt{3})$,所以 $\overrightarrow{PE}=(0,2,-\sqrt{3})$,所以 $|\overrightarrow{PE}|=\sqrt{0+2^2+(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{7}$.故选 D.


(第 6 题图)

7.A 提示:如图,建立空间直角坐标系 $Cxyz$,则 $A(2,0,0)$,$B(0,2,0)$,$C_1=(0,0,\sqrt{2})$,$M(1,1,\sqrt{2})$,$\overrightarrow{AM}=(-1,1,\sqrt{2})$,$\overrightarrow{BA}=(2,-2,0)$,$\overrightarrow{BC_1}=(0,-2,\sqrt{2})$,设平面 ABC_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,由 $\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{BA}=0,\\ n\cdot\overrightarrow{BC_1}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}2x-2y=0,\\ -2y+\sqrt{2}z=0,\end{cases}$ 令 $x=1$,可得 $\boldsymbol{n}=(1,1,\sqrt{2})$,设直线 AM 与平面 ABC_1 所成的角为 θ,则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AM},n\rangle|=\frac{|\overrightarrow{AM}\cdot n|}{|\overrightarrow{AM}|\cdot|n|}=\frac{2}{2\times2}=\frac{1}{2}$,故直线 AM 与平面 ABC_1 所成的角为 $\frac{\pi}{6}$.故选 A.


(第 7 题图)

8.A 提示:因为 $\angle AOD=2\angle BOD$,且 $\angle AOD+\angle BOD=\pi$,所以 $\angle BOD=\frac{\pi}{3}$,连接 CO,则 $CO\perp$ 平面 ABD,以点 O 为坐标原点,OB、OC 所在直线分别为 y、z 轴,建立空间直角坐标系,设圆 O 的半径为 2,则 $A(0,-2,0)$,$B(0,2,0)$,$C(0,0,2\sqrt{3})$,$D(\sqrt{3},1,0)$,$\overrightarrow{AD}=(\sqrt{3},3,0)$,$\overrightarrow{BC}=(0,-2,2\sqrt{3})$,$|\cos\langle\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{AD}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}=\frac{6}{2\sqrt{3}\times4}=\frac{\sqrt{3}}{4}$,因此,异面直线 AD 与 BC 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$.故选 A.

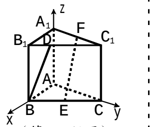
二、多项选择题

9.AC 提示:点 $A(-1,3,0)$,$P(-2,1,z)$,所以 $\overrightarrow{AP}=(-1,-2,z)$,又 $\boldsymbol{n}=(-2,-2,1)$,则 $d=\frac{|\overrightarrow{AP}\cdot n|}{|n|}=\frac{|2+4+z|}{\sqrt{4+4+1}}=\frac{|6+z|}{3}=\frac{10}{3}$.解得 $z=4$ 或 -16.故选 AC.

10.ABD 提示:当直线 l 的方向向量与平面 α 的法向量的夹角为 150°时,直线 l 与平面 α 所成的角为 60°,A 不正确;向量夹角的范围是[0°,180°],而异面直线夹角为(0°,90°],B 不正确;二面角的取值范围是[0°,180°],C 正确;二面角的大小与其两个半平面的法向量的夹角的大小相等或互补,D 不正确.故选 ABD.

11.BCD 提示:若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{n}$,则直线 $a\parallel$ 平面 α 或 $a\subset\alpha$,故 A 不正确;若 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{n}$,则 $\boldsymbol{a}$ 也是平面 α 的一个法向量,所以直线 $a\perp$ 平面 α,故 B 正确;直线与平面所成角的正弦值等于直线的方向向量与平面法向量夹角的余弦值的绝对值,所以若 $\cos\langle a,n\rangle=\frac{1}{2}$,则直线 a 与平面 α 所成角的大小为 $\frac{\pi}{6}$,故 C 正确;两个平面夹角与它们法向量所成的不大于 90°的角相等,故 D 正确.故选 BCD.

12.ACD 提示:建立如图所示的空间直角坐标系,则 $A(0,0,0)$,$B(2,0,0)$,$C(0,2,0)$,$B_1(2,0,2)$,$C_1(0,2,2)$,$E(1,1,0)$,$F(0,1,2)$,设 $D(x,2-x,2)$,$\overrightarrow{EF}=(-1,0,2)$,$\overrightarrow{BD}=(x-2,2-x,2)$,直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$\angle BAC=90°$,可得 $\overrightarrow{AC}$ 为平面 AA_1B_1B 的一个法向量,$\overrightarrow{AA_1}$ 为平面 ABC 的一个法向量.对于 A,$\overrightarrow{AC}=(0,2,0)$,$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{AC}=0$,即 $EF\perp AC$,又 $EF\not\subset$ 平面 AA_1B_1B,所以 $EF\parallel$ 平面 AA_1B_1B,故 A 正确;对于 B,若 D 是 B_1C_1 上的中点,则 $\overrightarrow{BD}=(-1,1,2)$,所以 $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BD}=1+4=5$,所以 EF 与 BD 不垂直,故 B 不正确;对于 C,由 $\overrightarrow{AA_1}$ 为平面 ABC 的一个法向量,$\overrightarrow{AA_1}=(0,0,2)$,设直线 EF 与平面 ABC 所成角为 θ,则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{EF},\overrightarrow{AA_1}\rangle|=\left|\frac{\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{AA_1}}{|\overrightarrow{EF}||\overrightarrow{AA_1}|}\right|=\frac{4}{\sqrt{5}\times2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,故 C 正确;对于 D,设 $\overrightarrow{B_1D}=\lambda\overrightarrow{B_1C_1}=(-2\lambda,2\lambda,0)(0\leqslant\lambda\leqslant1)$,则 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1D}=(-2\lambda,2\lambda,2)$,所以 $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{EF}=2\lambda+4$,所以 $\cos\langle\overrightarrow{BD},\overrightarrow{EF}\rangle=\frac{\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{EF}}{|\overrightarrow{BD}||\overrightarrow{EF}|}=\frac{2+\lambda}{\sqrt{5}\times\sqrt{2\lambda^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{5}\times\sqrt{\left(\frac{3}{\lambda+2}-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{2}{9}}}$,所以当 $\frac{3}{\lambda+2}=\frac{4}{3}$,即 $\lambda=\frac{1}{4}$ 时,$\cos\langle\overrightarrow{BD},\overrightarrow{EF}\rangle$ 取最大值,即直线 BD 与直线 EF 所成角最小,此时 $\overrightarrow{BD}=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},2\right)$,所以 $|BD|=|\overrightarrow{BD}|=\frac{3\sqrt{2}}{2}$,故 D 正确.故选 ACD.

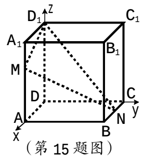

(第 12 题图)

三、填空题

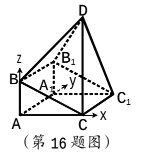
13.$\frac{\sqrt{15}}{15}$ 提示:以 A 为原点,AB,AD,AA' 所在直线分别为 x,y,z 轴,建立空间直角坐标系,则 $A'(0,0,a)$,$C(a,a,0)$,$D(0,a,0)$,$E\left(a,\frac{a}{2},0\right)$,$\overrightarrow{A'C}=(a,a,-a)$,$\overrightarrow{DE}=\left(a,-\frac{a}{2},0\right)$,所以 $\cos\langle\overrightarrow{A'C},\overrightarrow{DE}\rangle=\frac{\overrightarrow{A'C}\cdot\overrightarrow{DE}}{|\overrightarrow{A'C}||\overrightarrow{DE}|}=\frac{\sqrt{15}}{15}$.所以直线 $A'C$ 与 DE 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{15}$.

14.$\frac{5}{6}$ 提示:过 P 作 $PM\perp$ 平面 $ABCD$ 于 M,过 M 作 $MN\perp AB$ 于 N,连接 PN,则 PN 即为所求,因为 $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$,所以 $AN=\frac{3}{4}$,$NM=\frac{1}{2}$,$PM=\frac{2}{3}$,所以 $PN=\sqrt{PM^2+MN^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{5}{6}$.即 P 点到直线 AB 的距离为 $\frac{5}{6}$.

15.$\frac{8}{5}$ 提示:建立如图所示空间直角坐标系,设 $M(4,0,a)(0\leqslant a\leqslant4)$,$N(2,4,0)$,$D_1(0,0,4)$,$\overrightarrow{MN}=(-2,4,-a)$,$\overrightarrow{D_1N}=(2,4,-4)$,设平面 D_1MN 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则 $\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{MN}=0,\\ n\cdot\overrightarrow{D_1N}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-2x+4y-az=0,\\ 2x+4y-4z=0,\end{cases}$ 故 $\begin{cases}x=\frac{(4-a)z}{4},\\ y=\frac{(a+4)z}{8},\end{cases}$ 令 $z=8$,$x=8-2a$,$y=a+4$,则 $n=(8-2a,a+4,8)$,平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $n_1=(0,0,1)$,设平面 D_1MN 与底面 $ABCD$ 的夹角为 θ,则 $\cos\theta=|\cos\langle n,n_1\rangle|=\frac{|n\cdot n_1|}{|n||n_1|}=\frac{8}{\sqrt{5a^2-24a+144}}$.当 $a=\frac{12}{5}$ 时,$\cos\theta$ 最大,则 θ 最小,所以 $M\left(4,0,\frac{12}{5}\right)$,$A_1(4,0,4)$,$\overrightarrow{A_1M}=\left(0,0,-\frac{8}{5}\right)$,$A_1M=\frac{8}{5}$.


(第 15 题图)

16.1 提示:以 A 为坐标原点,AC,AA_1,AB 所在直线分别为 x,y,z 轴,建立空间直角坐标系则 $A(0,0,0)$,$C(\sqrt{3},0,0)$,$C_1(\sqrt{3},2,0)$,$D(\sqrt{3},1,2)$,$B(0,0,1)$,$B_1(0,2,1)$,所以 $\overrightarrow{BB_1}=(0,2,0)$,$\overrightarrow{BD}=(\sqrt{3},1,1)$.设平面 BB_1D 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,所以 $\begin{cases}\overrightarrow{BB_1}\cdot n=0,\\ \overrightarrow{BD}\cdot n=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}2y=0,\\ \sqrt{3}x+y+z=0,\end{cases}$


(第 16 题图)

所以平面 BB_1D 的一个法向量为 $n=(\sqrt{3},0,-3)$.设 $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}$,$\lambda\in[0,1]$,所以 $\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{DB}+\lambda\overrightarrow{BC}=(\sqrt{3}\lambda-\sqrt{3},-1,-1-\lambda)$,所以 $\frac{\sqrt{3}}{4}=|\cos\langle\overrightarrow{DP},n\rangle|=\frac{|3\lambda-3+3+3\lambda|}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{(\sqrt{3}\lambda-\sqrt{3})^2+1+(\lambda+1)^2}}$,解得 $\lambda=\frac{1}{2}$,或 $\lambda=-\frac{5}{6}$(舍去),所以 $\frac{BP}{BC}=\frac{1}{2}$.因为 $BC=2$,所以 $BP=1$.

四、解答题

17.解:以 D 为原点,DA,DC,DD_1 所在直线分别为 x,y,z 轴,建立空间直角坐标系.于是 $D(0,0,0)$,$A_1(2,0,2)$,$C(0,2,0)$,$E(2,1,0)$,$F(1,1,1)$,$D_1(0,0,2)$,所以 $\overrightarrow{EF}=(-1,0,1)$,$\overrightarrow{CD_1}=(0,-2,2)$,$\overrightarrow{DA_1}=(2,0,2)$,$\overrightarrow{DC}=(0,2,0)$.

(1)$|\cos\langle\overrightarrow{EF},\overrightarrow{CD_1}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{CD_1}|}{|\overrightarrow{EF}||\overrightarrow{CD_1}|}=\frac{2}{\sqrt{2}\times2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$,所以异面直线 EF 和 CD_1 所成的角为 60°.

(2)证明:$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{DA_1}=-1\times2+0\times0+1\times2=0$,所以 $\overrightarrow{EF}\perp\overrightarrow{DA_1}$,即 $EF\perp DA_1$;$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{DC}=-1\times0+0\times2+1\times0=0$,所以 $\overrightarrow{EF}\perp\overrightarrow{DC}$,即 $EF\perp DC$.又 DA_1,$DC\subset$ 平面 A_1CD,且 $DA_1\cap DC=D$,所以 $EF\perp$ 平面 A_1CD.

18.解:(1)因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$,则 PA 为棱锥 $P-ABCD$ 的高,又 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形,所以 $S_{ABCD}=2^2=4$,$PA=4$,故 $V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}\times S_{ABCD}\times PA=\frac{1}{3}\times4\times4=\frac{16}{3}$.

(2)以点 A 为原点,AD,AB,AP 为 x,y,z 轴,建立空间直角坐标系,则 $P(0,0,4)$,$D(2,0,0)$,$M(0,0,2)$,$B(0,2,0)$,$C(2,2,0)$,所以 $\overrightarrow{PD}=(2,0,-4)$,$\overrightarrow{MB}=(0,2,-2)$,$\overrightarrow{MC}=(2,2,-2)$,设平面 MBC 的法向量为 $n=(x,y,z)$,则 $\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{MB}=0,\\ n\cdot\overrightarrow{MC}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2y-2z=0,\\ 2x+2y-2z=0,\end{cases}$ 令 $y=1$,则 $x=0$,$z=1$,故 $n=(0,1,1)$,设直线 PD 与平面 MBC 所成角为 θ,则 $\sin\theta=|\cos\langle n,\overrightarrow{PD}\rangle|=\frac{4}{2\sqrt{5}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$,故直线 PD 与平面 MBC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

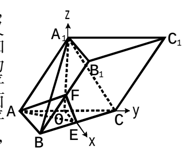
19.(1)证明:分别取 DD_1 和 AD 的中点 E,F,连接 EM,FN,EF,则 $EM\parallel DC$ 且 $EM=\frac{1}{2}DC$;$FN\parallel DC$ 且 $FN=\frac{1}{2}DC$,所以 $EM\parallel FN$,且 $EM=FN$,所以四边形 $EMNF$ 是平行四边形,所以 $EF\parallel MN$,又 $EF\subset$ 平面 ADD_1A_1,$MN\not\subset$ 平面 ADD_1A_1,所以 $MN\parallel$ 平面 ADD_1A_1.

(2)解:以 D 为原点,DA,DC,DD_1 分别为 x,y,z 轴,建立空间直角坐标系 $Dxyz$,则 $A(6,0,0)$,$C(0,4,0)$,$D_1(0,0,2)$,$C_1(0,4,2)$,$A_1(6,0,2)$,又 M,N 分别是 DC_1,AC 的中点,所以 $M(0,2,1)$,$N(3,2,0)$,所以 $\overrightarrow{A_1N}=(-3,2,-2)$,$\overrightarrow{A_1M}=(-6,2,-1)$,$\overrightarrow{CM}=(0,-2,1)$.设平面 A_1MN 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则 $\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{A_1M}=0,\\ n\cdot\overrightarrow{A_1N}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-6x+2y-z=0,\\ -3x+2y-2z=0,\end{cases}$ 令 $z=3$,则 $x=1$,$y=\frac{9}{2}$,所以 $n=\left(1,\frac{9}{2},3\right)$,设 C 到平面 A_1MN 的距离为 h,则 $h=\frac{|\overrightarrow{CM}\cdot n|}{|n|}=\frac{|-9+3|}{\sqrt{\frac{121}{4}}}=\frac{12}{11}$.

20.(1)证明:设 AD 的中点为 O,连接 OP,OB,BD.由 $PA=PD=AD$,$AB=AD$,$\angle DAB=60°$,可知 $\triangle ABD$,$\triangle PAD$ 为等边三角形,又点 O 为 AD 的中点,所以 $PO\perp AD$,$BO\perp AD$.又 $PO\cap BO=O$,故 $AD\perp$ 平面 POB.又 $PB\subset$ 平面 POB,所以 $AD\perp PB$.

(2)解:不妨设 $PA=PD=AD=2$,则 $OP=BO=\sqrt{3}$.由 $AB\parallel CD$,得 $\cos\angle PBA=\frac{\sqrt{6}}{4}$,又 $AP=AB=2$,$PA^2=PB^2+AB^2-2PB\cdot AB\cdot\cos\angle PBA\Rightarrow4=PB^2+4-\sqrt{6}PB$,解得 $PB=\sqrt{6}$.在 $\triangle POB$ 中,$OP^2+OB^2=PB^2$,所以 $PO\perp OB$.由(1)可知 $PO\perp AD$,$BO\perp AD$,故 PO,OB,AD 两两垂直.以 O 为坐标原点,分别以 OA,OB,OP 所在直线为 x 轴、y 轴、z 轴,建立空间直角坐标系 $Oxyz$.则 $A(1,0,0)$,$B(0,\sqrt{3},0)$,$P(0,0,\sqrt{3})$,$C(-2,\sqrt{3},0)$,所以 $\overrightarrow{AP}=(-1,0,\sqrt{3})$,$\overrightarrow{AB}=(-1,\sqrt{3},0)$,$\overrightarrow{BP}=(0,-\sqrt{3},\sqrt{3})$,$\overrightarrow{BC}=(-2,0,0)$.设 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$ 为平面 PAB 的法向量,则 $\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{AP}=0,\\ n\cdot\overrightarrow{AB}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x_1+\sqrt{3}z_1=0,\\ -x_1+\sqrt{3}y_1=0,\end{cases}$ 可取 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},1,1)$.设 $\boldsymbol{m}=(x_2,y_2,z_2)$ 为平面 PBC 的法向量,则 $\begin{cases}m\cdot\overrightarrow{BP}=0,\\ m\cdot\overrightarrow{BC}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-\sqrt{3}y_2+\sqrt{3}z_2=0,\\ -2x_2=0,\end{cases}$ 取 $\boldsymbol{m}=(0,1,1)$.所以 $|\cos\langle n,m\rangle|=\frac{|n\cdot m|}{|n||m|}=\frac{2}{\sqrt{5}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$.所以平面 PAB 和平面 PBC 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

21.解:如图,取 AC 的中点 O,连接 A_1O,A_1C,OE,则 $OE\parallel AB$,又 $BA\perp AC$,所以 $OE\perp AC$,由题意知 $\triangle A_1AC$ 为等边三角形,又点 O 为 AC 的中点,所以 $A_1O\perp AC$.因为平面 $ACC_1A_1\perp$ 平面 ABC,平面 $ACC_1A_1\cap$ 平面 $ABC=AC$,$A_1O\subset$ 平面 ACC_1A_1,所以 $A_1O\perp$ 平面 ABC,又 $OE\subset$ 平面 ABC,所以 $A_1O\perp OE$,所以 OA_1,OE,OC 两两垂直,


(第 21 题图)

以 O 为原点,OE,OC,OA_1 所在直线为 x,y,z 轴,建立空间直角坐标系(如图),则 $A_1(0,0,\sqrt{3})$,$A(0,-1,0)$,$B(1,-1,0)$,$B_1(1,0,\sqrt{3})$,$E\left(\frac{1}{2},0,0\right)$,$F\left(1,-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$C_1(0,2,\sqrt{3})$,所以 $\overrightarrow{A_1B}=(1,-1,-\sqrt{3})$,$\overrightarrow{EF}=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$\overrightarrow{AE}=\left(\frac{1}{2},1,0\right)$,$\overrightarrow{AF}=\left(1,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$\overrightarrow{AC_1}=(0,3,\sqrt{3})$.

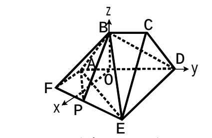
(1)设异面直线 A_1B 和 EF 所成角为 θ,则 $\cos\theta=|\cos\langle\overrightarrow{A_1B},\overrightarrow{EF}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{A_1B}\cdot\overrightarrow{EF}|}{|\overrightarrow{A_1B}|\cdot|\overrightarrow{EF}|}=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{5}\times\frac{\sqrt{5}}{2}}=\frac{1}{5}$.

所以异面直线 A_1B 和 EF 所成角的余弦值为 $\frac{1}{5}$.

(2)设平面 AEF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则 $\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{AE}=0,\\ n\cdot\overrightarrow{AF}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\frac{1}{2}x+y=0,\\ x+\frac{1}{2}y+\frac{\sqrt{3}}{2}z=0,\end{cases}$ 令 $y=1$,得 $x=-2$,$z=\sqrt{3}$,所以 $\boldsymbol{n}=(-2,1,\sqrt{3})$,所以点 C_1 到平面 AEF 的距离 $d=\frac{|\overrightarrow{AC_1}\cdot n|}{|n|}=\frac{6}{2\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

22.(1)证明:在等腰梯形 $ABCD$ 中,$AB=BC=1$,$AD=2$,可得 $\angle BAD=60°$.在 $\triangle ABD$ 中,由余弦定理得 $BD=\sqrt{3}$,所以 $AB^2+BD^2=AD^2$,所以 $AB\perp BD$.因为平面 $ABCD\perp$ 平面 $ADEF$ 且交于 AD,$DE\perp AD$,所以 $DE\perp$ 平面 $ABCD$.又因为 $AB\subset$ 平面 $ABCD$,所以 $AB\perp DE$.因为 $BD\cap DE=D$,所以 $AB\perp$ 平面 BDE.又因为 $AB\subset$ 平面 ABE,所以平面 $BDE\perp$ 平面 ABE.

(2)解:如图,过 B 作 AD 的垂线交 AD 于 O,过 O 在平面 $ADEF$ 内作 AD 的垂线 Ox,建立空间直角坐标系 $Oxyz$,则 $A\left(0,-\frac{1}{2},0\right)$,$B\left(0,0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$C\left(0,1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$D\left(0,\frac{3}{2},0\right)$,$E\left(2,\frac{3}{2},0\right)$,$F\left(1,-\frac{1}{2},0\right)$,$\overrightarrow{FE}=(1,2,0)$,$\overrightarrow{DE}=(2,0,0)$,$\overrightarrow{DC}=\left(0,-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$\overrightarrow{AB}=\left(0,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,设 $\overrightarrow{FP}=\lambda\overrightarrow{FE}$,$0\leqslant\lambda\leqslant1$,则 $P\left(\lambda+1,2\lambda-\frac{1}{2},0\right)$,$\overrightarrow{AP}=(\lambda+1,2\lambda,0)$.设平面 CDE 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$,则 $\begin{cases}m\cdot\overrightarrow{DE}=2x_1=0,\\ m\cdot\overrightarrow{DC}=-\frac{1}{2}y_1+\frac{\sqrt{3}}{2}z_1=0,\end{cases}$ 令 $z_1=1$,得 $\boldsymbol{m}=(0,\sqrt{3},1)$.设平面 PAB 的法向量为 $n=(x_2,y_2,z_2)$,则 $\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}y_2+\frac{\sqrt{3}}{2}z_2=0,\\ n\cdot\overrightarrow{AP}=(\lambda+1)x_2+2\lambda y_2=0,\end{cases}$ 令 $z_2=1$,得 $n=\left(\frac{2\sqrt{3}\lambda}{\lambda+1},-\sqrt{3},1\right)$.由 $|\cos\langle m,n\rangle|=\frac{|n\cdot m|}{|m|\cdot|n|}=\frac{2}{2\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{3}\lambda}{\lambda+1}\right)^2+4}}=\frac{\sqrt{3}}{4}$,解得 $\lambda=\frac{1}{2}$,或 $\lambda=-\frac{1}{4}$(舍去),所以存在点 P 满足题意,且 P 为 EF 的中点.


(第 22 题图)