第 40 期

第 1 版

专题四 立体几何参考答案

1.(1)证明略.(2)$\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2.(1)证明略.(2)$\frac{\sqrt{2}}{10}$.

3.(1)证明略.(2)PA=$4\sqrt{3}$.

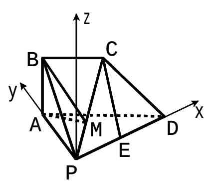
4.(1)当Q是C_1C中点时,直线D_1Q,DC,AP交于一点.理由略.

(2)存在点Q满足题意,且点Q为CC_1的中点.

5.(1)证明略.

(2)解:以P为坐标原点建立如图所示的空间直角坐标系,则P(0,0,0),$B(0,1,1)$,$C\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},1\right)$,$E\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0,0\right)$.设$M\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a,\frac{1}{2}a,a\right)$ $(0\le a\le 1)$,则$\overrightarrow{BM}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a,\frac{1}{2}a-1,a-1\right)$,$\overrightarrow{CE}=\left(0,-\frac{1}{2},-1\right)$,所以$|\cos\langle\overrightarrow{BM},\overrightarrow{CE}\rangle|=\left|\frac{\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{CE}}{|\overrightarrow{BM}||\overrightarrow{CE}|}\right|=\left|\frac{\frac{3}{2}-\frac{5}{4}a}{\sqrt{2a^2-3a+2}\times\frac{\sqrt{5}}{2}}\right|=\frac{\sqrt{10}}{5}$,得$a=\frac{2}{3}$,所以$\overrightarrow{BM}=\left(\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$,且$\overrightarrow{AB}=(0,0,1)$.

设平面ABM的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,由$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BM}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\end{cases}$得$\begin{cases}\sqrt{3}x-2y-z=0,\\ z=0,\end{cases}$令$x=2$,则$\boldsymbol{n}=(2,\sqrt{3},0)$.取平面$PAB$的一个法向量为$\boldsymbol{m}=(1,0,0)$,则$\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{2}{\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$,故二面角$M$-$AB$-$P$的余弦值为$\frac{2\sqrt{7}}{7}$.



(第 5 题图)

第 2~3 版

专题五 解析几何参考答案

1.(1)抛物线方程为$y^2=4x$,$P(3,\pm2\sqrt{3})$.

(2)证明略.

2.(1)$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

(2)$\frac{4\sqrt{10}}{9}$.

3.(1)$P(4,3)$.

(2)$(x-1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$.

(3)证明略.

4.(1)$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.(2)证明略.

5.(1)$c=1$.

(2)椭圆C上存在P,使线段BD和线段OP相互平分,其坐标为$\left(-1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,或$\left(-1,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

6.(1)$x^2=4y$.

(2)$3\sqrt{3}$.

7.解:(1)由题意可设椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,

则$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$(其中$c^2=a^2-b^2$,$c>0$),

且$\frac{2}{a^2}+\frac{1}{2b^2}=1$,故$a=2$,$b=1$,

所以椭圆的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)由题意可知,直线l的斜率存在且不为0.故可设直线l:$y=kx+m(m\neq0)$.

设$P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,由$\begin{cases}y=kx+m,\\ x^2+4y^2=4,\end{cases}$消去$y$得$(1+4k^2)x^2+8kmx+4(m^2-1)=0$,则$\Delta=64k^2m^2-16(1+4k^2)(m^2-1)=16(4k^2-m^2+1)>0$,

且$x_1+x_2=-\frac{8km}{1+4k^2}$,$x_1x_2=\frac{4(m^2-1)}{1+4k^2}$,

故$y_1y_2=(kx_1+m)(kx_2+m)=k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2$.

因为直线OP、PQ、OQ的斜率依次成等比数列,

所以$\frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_2}{x_2}=\frac{k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2}{x_1x_2}=k^2$,

即$-\frac{8k^2m^2}{1+4k^2}+m^2=0$.

又$m\neq0$,所以$k^2=\frac{1}{4}$,即$k=\pm\frac{1}{2}$.

由于直线OP、OQ的斜率存在,且$\Delta>0$,得$0<m^2<2$,且$m^2\neq1$.

设d为点O到直线l的距离,

则$d=\frac{|2m|}{\sqrt{5}}$,

$|PQ|=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}=\sqrt{5(2-m^2)}$,

所以△OPQ的面积$S=\frac{1}{2}|PQ|d=\sqrt{m^2(2-m^2)}<\frac{m^2+2-m^2}{2}=1(m^2\neq1)$,

故△OPQ面积的取值范围为$(0,1)$.

第 4 版

专题六 函数与导数参考答案

1.(1)函数$f(x)$的单调递增区间为$(1,+\infty)$,单调递减区间为$(0,1)$.

(2)a的取值范围为$[1,e]$,两曲线没有交点.

2.(1)函数$h(x)$在$(0,\pi)$上单调递减.(2)1个.

3.(1)$[0,1]$.

(2)$\left[-1,\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{\frac{\pi}{2}-1}\right]$.

4.(1)$\left(\frac{e}{2},+\infty\right)$.(2)证明略.

5.(1)函数$f(x)$在$(0,1)$上单调递增,在$(1,+\infty)$上单调递减.

(2)$(-\infty,0]$.

6.解:(1)设过点$P(0,-1)$的直线与曲线$f(x)$相切于点$(x_0,\ln x_0)$.因为$f(x)=\ln x$,则$f'(x)=\frac{1}{x}$,所以在$(x_0,\ln x_0)$处切线斜率为$f'(x_0)=\frac{1}{x_0}$,则在$(x_0,\ln x_0)$处切线方程为$y-\ln x_0=\frac{1}{x_0}(x-x_0)$.将$P(0,-1)$代入切线方程,得$\ln x_0=0$,所以$x_0=1$,所以切线方程为$y=x-1$.

(2)假设存在$k\neq1$的正实数,使得只有唯一的正数a,当$x>\frac{1}{a}$时,不等式$f(x)g\left(x-\frac{1}{a}\right)\le kx$恒成立,即$\frac{a^2x}{ax-1}\ln x\le kx$恒成立.因为$x>\frac{1}{a}$,所以$\ln x\le\frac{k(ax-1)}{a^2}$,即$\ln x-\frac{k(ax-1)}{a^2}\le0$.令$m(x)=\ln x-\frac{k(ax-1)}{a^2}=\ln x-\frac{k}{a}x+\frac{k}{a^2}$ $\left(x>\frac{1}{a}\right)$,则$m'(x)=\frac{1}{x}-\frac{k}{a}$,令$m'(x_1)=0$,解得$x_1=\frac{a}{k}$.

①当$\frac{a}{k}>\frac{1}{a}$,即$0<k<a^2$时,$x\in\left(\frac{1}{a},x_1\right)$时,$m'(x)>0$,则$m(x)$在$\left(\frac{1}{a},x_1\right)$上为增函数,$x\in(x_1,+\infty)$时,$m'(x)<0$,则$m(x)$在$(x_1,+\infty)$上为减函数,则$[m(x)]_{max}=m(x_1)=-1+\frac{k}{a^2}+\ln\frac{a}{k}\le0$,即$\frac{k}{a^2}+\ln\frac{a}{k}\le1$.

令$h(a)=\frac{k}{a^2}+\ln\frac{a}{k}(a>\sqrt{k})$,则$h'(a)=\frac{1}{a}-\frac{2k}{a^3}=\frac{a^2-2k}{a^3}$,令$h'(a_0)=0$,得$a_0=\sqrt{2k}$ $(a>\sqrt{k})$,$a\in(\sqrt{k},a_0)$时,$h'(a)<0$,则$h(a)$在区间$(\sqrt{k},a_0)$上为减函数,$a\in(a_0,+\infty)$时,$h'(a)>0$,则$h(a)$在区间$(a_0,+\infty)$上为增函数,因此存在唯一的正数$a>\sqrt{k}$,使得$h(a)\le1$,故只能$[h(a)]_{min}=1$,所以$[h(a)]_{min}=h(a_0)=\frac{1}{2}+\ln\sqrt{\frac{2}{k}}=1$,所以$k=\frac{2}{e}$,此时$a$只有唯一的值$\frac{2\sqrt{e}}{e}$.

②当$\frac{a}{k}\le\frac{1}{a}$,即$k\ge a^2$时,$m'(x)<0$,所以$m(x)$在$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$上为减函数,所以$x\to\frac{1}{a}$时,$m(x)\to\ln\frac{1}{a}\le0$,即$a\ge1$,故$k>1$,所以满足$1\le a\le\sqrt{k}$的$a$不唯一.

综上,存在实数$k=\frac{2}{e}$,a只有唯一值$\frac{2\sqrt{e}}{e}$,当$x>\frac{1}{a}$时,恒有原式成立.

第 37 期

第 1 版

专题七 不等式

参考答案

一、单项选择题

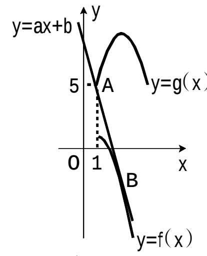
1~5.AADAA 6~10.CABCB

11~15.DCAAC 16~20.AABBA

21~25.AADCC

26.A

提示:当$x\in[1,5]$时,$2x\le x^2+ax+b\le6x$恒成立可得$-x^2+2x\le ax+b\le-x^2+6x$.令$f(x)=-x^2+2x(1\le x\le5)$,$g(x)=-x^2+6x(1\le x\le5)$,可得$f(x)$,$g(x)$图象如下图所示.要使$b$最大,则$y=ax+b$必过$A(1,5)$,且与$y=f(x)$相切于点$B$,则此时$b=5-a$,即直线方程为$y=ax+5-a$,联立$\begin{cases}y=ax+5-a,\\ y=-x^2+2x,\end{cases}$得$x^2+(a-2)x+5-a=0$,所以$\Delta=(a-2)^2-4(5-a)=0$,解得$a^2=16$.由图象可知$a<0$,所以$a=-4$,所以$b_{max}=5-(-4)=9$,故选A.



(第 26 题图)

二、多项选择题

27.BCD

提示:当$a=12$时,原不等式为$x^2-8x+12\le0$,其解集为$[2,6]$,不满足题意,故A错误;当$a=13$时,原不等式为$x^2-8x+13\le0$,其解集为$[4-\sqrt{3},4+\sqrt{3}]$,满足题意,故B正确;当$a=14$时,原不等式为$x^2-8x+14\le0$,其解集为$[4-\sqrt{2},4+\sqrt{2}]$,满足题意,故C正确;当$a=15$时,原不等式为$x^2-8x+15\le0$,其解集为$[3,5]$,满足题意,故D正确.故选BCD.

28.BD

提示:设$t=2a+b$,$t>0$,因为$2a+\frac{2}{a}+b+\frac{1}{b}-10=0$,所以$10-t=\frac{2}{a}+\frac{1}{b}$,所以$0<t<10$,$(2a+b)\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)=5+\frac{2b}{a}+\frac{2a}{b}\ge5+2\sqrt{\frac{2b}{a}\cdot\frac{2a}{b}}=9$,当且仅当$\frac{2b}{a}=\frac{2a}{b}$且$2a+\frac{2}{a}+b+\frac{1}{b}-10=0$,即$a=b=\frac{1}{3}$或$a=b=3$时取等号,此时$t(10-t)\ge9$,解得$1\le t\le9$.故$2a+b$有最大值9,最小值1.故选BD.

第 2 版

专题八 直线和圆、圆锥曲线

参考答案

一、单项选择题

1~5.DDAAA 6~10.DCCAB

11~15.CCBBD 16~20.BAAAA

21~24.ADCC

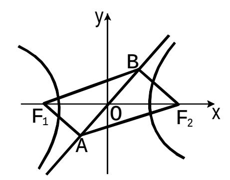
二、多项选择题

25.BCD

提示:设$|PF_2|=t$,由$|PF_1|=3|PF_2|$,可得$|PF_1|=3t$,由椭圆的定义可得$t+3t=2a$,即$t=\frac{1}{2}a$,而$t\in[a-c,a+c]$,所以$a-c\le\frac{1}{2}a\le a+c$,得$a\le2c$,所以$e=\frac{c}{a}\ge\frac{1}{2}$,又$0<e<1$,所以$\frac{1}{2}\le e<1$,则A不正确;B正确;D正确;而选项C,$3\sqrt{5}-6\approx0.71$也正确.故选BCD.

26.ACD

提示:依题意,取双曲线的渐近线方程为$y=\frac{b}{a}x$,即AB的方程为$y=\frac{b}{a}x$,因为$F_2(c,0)$,所以BF_2的方程为$y=-\frac{a}{b}(x-c)$,则$B\left(\frac{a^2}{c},\frac{ab}{c}\right)$,所以四边形$AF_1BF_2$的面积为$2\times\frac{1}{2}\times2c\times\frac{ab}{c}=2ab$,又四边形$AF_1BF_2$的面积为8,所以$2ab=8$,即$ab=4$,故A正确;双曲线的离心率$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$不确定,且$e>1$,故B错误;若双曲线的一条渐近线方程为$y=2x$,则$\frac{b}{a}=2$,可得$a=\sqrt{2}$,$b=2\sqrt{2}$,双曲线的方程为$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{8}=1$,故C正确;因为$e=\frac{c}{a}$,所以$e^2=1+\frac{16}{a^4}$,又$e\in[3,\sqrt{33}]$,所以$9\le1+\frac{16}{a^4}\le33$,又$a>0$,所以$\sqrt[4]{\frac{1}{2}}\le a\le\sqrt[4]{2}$,故D正确.故选ACD.



(第 26 题图)

第 3~4 版

专题九 概率与统计

参考答案

一、单项选择题

1~5.ABCBC 6~10.BBCAC

11~15.CCBBB 16~20.CCBBC

21~25.CCDBB 26~27.AA

二、多项选择题

28.ABD

提示:对于A,由折线图可知,甲店月营业额的平均值约为$\bar{x}=\frac{14+21+26+30+52+47}{6}\approx31.7$在$[31,32]$内,故A正确;对于B,根据乙店的营业额折线图可知,该店月营业额总体呈上升趋势,故B正确;对于C,甲店的极差值为52-14=38,乙店的极差值为53-7=46,故乙店的极差值比甲店的大,故C错误;对于D,根据甲、乙两店的营业额折线图可知7、8、9月份的总营业额甲店的营业额为30+52+47=129,乙店的营业额为33+44+53=130,故甲店的7、8、9月份总营业额比乙店少,故D正确.故选ABD.

29.CD

提示:X的取值为2,3,4,5,6,7,8,则X的分布列为

X	2	3	4	5	6	7	8
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

则$E(X)=2\times\frac{1}{16}+3\times\frac{1}{8}+4\times\frac{3}{16}+5\times\frac{1}{4}+6\times\frac{3}{16}+7\times\frac{1}{8}+8\times\frac{1}{16}=5$,$f_1(x)=\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{8}x^3+\frac{3}{16}x^4+\frac{1}{4}x^5+\frac{3}{16}x^6+\frac{1}{8}x^7+\frac{1}{16}x^8$,所以$f_1'(x)=\frac{1}{8}x+\frac{3}{8}x^2+\frac{3}{4}x^3+\frac{5}{4}x^4+\frac{9}{8}x^5+\frac{7}{8}x^6+\frac{1}{2}x^7$,$f_1'(1)=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{4}+\frac{5}{4}+\frac{9}{8}+\frac{7}{8}+\frac{1}{2}=5$,$f_1'(2)=\frac{1}{8}\times2+\frac{3}{8}\times2^2+\frac{3}{4}\times2^3+\frac{5}{4}\times2^4+\frac{9}{8}\times2^5+\frac{7}{8}\times2^6+\frac{1}{2}\times2^7=183\frac{3}{4}$,$f_1(2)=\frac{1}{16}\times2^2+\frac{1}{8}\times2^3+\frac{3}{16}\times2^4+\frac{1}{4}\times2^5+\frac{3}{16}\times2^6+\frac{1}{8}\times2^7+\frac{1}{16}\times2^8=\frac{225}{4}$.故选CD.

第 4 版

专题十 算法初步、推理与证明、复数

参考答案

1~5.ADDBD 6~10.CDABA

11.C

提示:记三角形数构成的数列为$\{a_n\}$,则$a_1=1$,$a_2=3=1+2$,$a_3=6=1+2+3$,$a_4=10=1+2+3+4$,…,易得通项公式为$a_n=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$;同理可得正方形数构成的数列$\{b_n\}$的通项公式为$b_n=n^2$.将四个选项中的数字分别代入上述两个通项公式,使得n都为正整数的只有$1225=35^2=\frac{49\times50}{2}$,故选C.

第 38 期

第 2 版

专题一　函数与导数
参考答案

1.$\left(-\frac{1}{3},1\right)$　2.2

3.3　4.1

5.$(-1,1)$　6.$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

7.$(-2,1)$　8.$(-1,1)$

9.$\frac{4}{3}+\log_2 3$　10.$(-1,2)$

11.0　12.$(1,2)$

13.$\frac{3\sqrt{3}}{2}$

14.$(-e^4,-e^2)\cup(e^2,e^4)$

15.$\left(0,\frac{\sqrt{15}}{15}\right)\cup\left(\frac{1}{e},\frac{e}{3}\right]$

16.$\left(-\infty,\frac{3}{2}\right]$　17.$\left[-1,\frac{1}{2}\right)$

18.$\left(-\frac{1}{e^2},0\right)$

专题二　立体几何、空间向量
参考答案

1.③④　2.$\frac{\sqrt{2}}{2}$

3.$\frac{\pi}{4}$　4.$\frac{\pi}{4}$

5.①④　6.$\sqrt{3}$

7.4:29　8.45°

9.$\frac{1}{3}$　10.3

第 3 版

专题三　三角函数、平面向量、解三角形
参考答案

1.$\frac{2019}{2020}$　2.4，$3\sqrt{3}$

3.$\frac{\pi}{2}$　4.$\frac{3}{5}$

5.$\sqrt{14}$　6.$\frac{4}{7}$

7.$\left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$　8.$\frac{2\pi}{3}$

9.$\frac{4}{5}$　10.$2\sqrt{3}$

11.$-\frac{3}{2}$　12.$\frac{2}{3}$

13.12　14.②③④

15.$\sqrt{2}+1$　16.3

17.$\frac{5\sqrt{3}}{2}+3$

提示：由正弦定理，可得$\sqrt{3}\cdot(\sin A\cos C+\sin C\cos A)=2\sin B\sin B$，即$\sqrt{3}\sin B=2\sin^2 B$，所以$\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$B=\frac{\pi}{3}$.又$\angle CAB=\frac{\pi}{3}$，所以$\triangle ABC$为等边三角形.在$\triangle ADC$中，由余弦定理，得$AC^2=10-6\cos D$，故四边形$ABCD$的面积为$S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ADC}=\frac{\sqrt{3}}{4}AC^2+\frac{3}{2}\sin D=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(10-6\cos D)+\frac{3}{2}\sin D=\frac{5\sqrt{3}}{2}+3\sin\left(D-\frac{\pi}{3}\right)$，所以当$D-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，$D=\frac{5\pi}{6}$时，四边形$ABCD$面积最大，最大值为$\frac{5\sqrt{3}}{2}+3$.

专题四　数列和不等式
参考答案

1.9　2.15

3.-3或2　4.$n+2^{2n+1}-2$

5.$b^a>a^a>a^b$　6.12或13

7.$\frac{9}{4}$　8.2^{n+1}

9.$\left(\frac{\sqrt{3}}{3},1\right)$　10.$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$

11.$(2n-3)\cdot 2^{n+1}+6$　12.$4\sqrt{2}$

13.$[-3,4]$　14.$(n-1)2^{n+1}+2$

15.4　16.$\frac{7\sqrt{3}}{3}$

17.8

提示：因为$S_{n+1}-2(2a_n+1)=0$ ($n\in\mathbf{N}_+$)，所以$S_{n+1}=4a_n+2$，所以$S_2=4a_1+2$，所以$a_2=3a_1+2=8$. 因为$a_{n+2}=S_{n+2}-S_{n+1}=4a_{n+1}-4a_n$，所以$a_{n+2}-2a_{n+1}=2(a_{n+1}-2a_n)$，所以数列$\{a_{n+1}-2a_n\}$是以$a_2-2a_1=4$为首项，公比为2的等比数列，所以$a_{n+1}-2a_n=4\times 2^{n-1}=2^{n+1}$，即$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{a_n}{2^n}=1$，所以数列$\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$是以1为首项，1为公差的等差数列，所以$\frac{a_n}{2^n}=1+(n-1)=n$，即$a_n=n\cdot 2^n$，所以$f(n)=\frac{a_n}{2^{n-1}}(-2n+31)-1=-4n^2+62n-1$.因为对称轴$n=\frac{62}{8}=7.75$，所以当$n=8$时，$f(n)$取得最大值.

第 4 版

专题五　直线和圆、圆锥曲线
参考答案

1.$y=-\frac{1}{8}$　2.8或$\frac{81}{8}$

3.6　4.-1

5.$\sqrt{2}-1$　6.$y=\pm x$

7.1或-5

8.$(-\infty,-2]\cup\left[\frac{2}{3},+\infty\right)$

9.$[6,+\infty)$　10.$x+y-4=0$

11.$[0,3]$　12.$3\sqrt{2}+3$

13.$\frac{\sqrt{97}}{5}$　14.$\frac{3}{4}$

15.$\frac{10}{3}$　16.$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$

17.$(1,1+\sqrt{3}]$

提示：由$(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OF_2})\cdot\overrightarrow{F_2P}=0$，得$(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OF_2})\cdot(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OF_2})=0$，即为$\overrightarrow{OP}^2=\overrightarrow{OF_2}^2$，可得$|OP|=c$，所以$\angle F_1PF_2=90°$.

设$|PF_1|=m$，$|PF_2|=n$，可得$m-n=2a$，且$m^2+n^2=4c^2$，令$m=kn$，所以$n=\frac{2a}{k-1}$，$m=\frac{2ka}{k-1}$.在$\triangle PF_1F_2$中，由勾股定理，得$|PF_1|^2+|PF_2|^2=4c^2$，所以$\left(\frac{2ka}{k-1}\right)^2+\left(\frac{2a}{k-1}\right)^2=4c^2$，所以$\left(\frac{k}{k-1}\right)^2+\left(\frac{1}{k-1}\right)^2=e^2$. 又$k\geqslant\sqrt{3}$，所以$e^2=\frac{k^2+1}{(k-1)^2}=1+\frac{2k}{(k-1)^2}=1+\frac{2}{k-2+\frac{1}{k}}\leqslant 1+\frac{2}{\sqrt{3}-2+\frac{1}{\sqrt{3}}}=4+2\sqrt{3}$，所以$1<e\leqslant 1+\sqrt{3}$.

专题六　概率与统计
参考答案

1.808　2.$\frac{1}{2}$

3.50　76.4　4.$\frac{2}{5}$

5.96　6.$\frac{1}{21}$

7.$\frac{3}{5}$　8.$\frac{5}{12}$

9.$\frac{61}{125}$　10.$\frac{23}{7}$

11.$\frac{11}{4}$

12.0.5，5

提示：根据题意，若从A，B盒中各取一个球，ξ表示所取的2个球中红球的个数，则ξ可取的值为0，1，2，则$P(\xi=0)=\frac{10-m}{10}\times\frac{m}{10}=\frac{m(10-m)}{100}$，$P(\xi=1)=\frac{10-m}{10}\times\frac{10-m}{10}+\frac{m}{10}\times\frac{m}{10}=\frac{m^2+(10-m)^2}{100}=\frac{m^2-10m+50}{50}$，$P(\xi=2)=\frac{m}{10}\times\frac{10-m}{10}=\frac{m(10-m)}{100}$，则$E(\xi)=0\times\frac{m(10-m)}{100}+1\times\frac{m^2-10m+50}{50}+2\times\frac{m(10-m)}{100}=1$，$D(\xi)=(0-1)^2\times\frac{m(10-m)}{100}+(1-1)^2\times\frac{m^2-10m+50}{50}+(2-1)^2\times\frac{m(10-m)}{100}=\frac{m(10-m)}{50}=\frac{10m-m^2}{50}=\frac{-(m-5)^2+25}{50}$，当$m=5$时，$D(\xi)$取得最大值，且其最大值为$\frac{25}{50}=0.5$.

第39期

第1版

专题一　三角与向量参考答案

1.(1)$B=\frac{2\pi}{3}$.(2)$2\sqrt{11}+6$.

2.(1)$AD=3$.(2)$\tan B=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

3.(1)$\left[-\frac{\pi}{8}+k\pi,\frac{3\pi}{8}+k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

(2)$[-1,1]$.

4.(1)$B=\frac{\pi}{3}$.(2)$a=4$，$c=6$.

5.选①②③，$\triangle ABC$的面积都为$2\sqrt{3}$或$4\sqrt{3}$.

6.(1)$g(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，$g(x)$在$(0,\pi)$上的单调递增区间为$\left(0,\frac{\pi}{6}\right]$和$\left[\frac{2\pi}{3},\pi\right)$.

(2)$\frac{5\sqrt{3}}{4}$.

第2版

专题二　数列参考答案

1.(1)$a_n=2n-1$，$b_n=3\cdot 2^{n-1}$.

(2)$T_n=n^2+3(2^n-1)$.

2.(1)$a_n=2n+1$.　(2)8.

3.(1)$a_n=n+1$，$n\in\mathbf{N}_+$，$b_n=2^n$，$n\in\mathbf{N}_+$.

(2)$c_n=n\cdot 2^{n+1}$.

4.**解：**(1)设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，因为a_4，$3a_3$，a_5成等差数列，所以$a_4+a_5=6a_3$，即$a_3q+a_3q^2=6a_3$，所以$q^2+q-6=0$，所以$q=2$或$q=-3$.又$a_4=2a_2+4$，所以$a_1q(q^2-2)=4$.因为$a_1>0$，所以$q=2$，$a_1=1$，所以$a_n=2^{n-1}$.

(2)因为$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=2^n-1$，$10a_n=\lambda S_n+2\lambda$，所以$\lambda=\frac{10a_n}{S_n+2}=\frac{5\times 2^n}{2^n+1}=5-\frac{5}{2^n+1}$.因为$\lambda$为整数，所以$n=2$时$\lambda=4$，所以存在$n=2$时$\lambda=4$满足条件.

5.**解：**(1)由题意知$\begin{cases}a_1+a_2+a_3=13,\\6a_2=a_1+a_3+8,\end{cases}$可得$a_2=3$，$a_1+a_3=10$，设递增的等比数列$\{a_n\}$的公比为$q$，得$\frac{3}{q}+3q=10$，解得$q=3$或$q=\frac{1}{3}$(舍去)，则$a_n=a_2q^{n-2}=3\cdot 3^{n-2}=3^{n-1}$.

(2)选①$3S_n+b_n=4$，当$n\geqslant 2$时，$3S_{n-1}+b_{n-1}=4$，又$3S_n+b_n=4$，两式相减可得$3b_n+b_n-b_{n-1}=0$，则$b_n=\frac{1}{4}b_{n-1}$，可得$\{b_n\}$为首项为1，公比为$\frac{1}{4}$的等比数列，则$b_n=\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.由$c_n=a_nb_n=\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$，得$T_n=\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1-\frac{3}{4}}=4-4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n$，由$\{T_n\}$为递增数列，可得$n=1$时，$T_n$取得最小值1.

选②$b_n=b_{n-1}+2(n\geqslant 2)$，可得$\{b_n\}$为首项为1，公差为2的等差数列，则$b_n=1+2\cdot(n-1)=2n-1$，$c_n=a_nb_n=(2n-1)\cdot 3^{n-1}$，则$T_n=1\times 3^0+3\times 3^1+5\times 3^2+\cdots+(2n-1)\times 3^{n-1}$，$3T_n=1\times 3+3\times 3^2+5\times 3^3+\cdots+(2n-1)\times 3^n$，两式相减可得$-2T_n=1+2(3^1+3^2+\cdots+3^{n-1})-(2n-1)\cdot 3^n=1+2\cdot\frac{3(1-3^{n-1})}{1-3}-(2n-1)\cdot 3^n$，化简得，$T_n=1+(n-1)\cdot 3^n$，由$\{T_n\}$为递增数列，可得$n=1$时，$T_n$取得最小值1.

选③$5b_n=-b_{n-1}(n\geqslant 2)$，得$\{b_n\}$为首项为1，公比为$-\frac{1}{5}$的等比数列，则$b_n=\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}$.

由$c_n=a_nb_n=\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}$，得$T_n=\frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^n}{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}=\frac{5}{8}-\frac{5}{8}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)^n$，$T_1=1$，$T_2=\frac{2}{5}$，当$n$为奇数时，$\frac{5}{8}<T_n\leqslant 1$；当$n$为偶数时，$T_n\geqslant\frac{2}{5}$，可得$n=2$时，$T_n$取得最小值$\frac{2}{5}$.

第3~4版

专题三　概率与统计参考答案

1.(1)列联表略，有97.5%的把握认为这200位参与调查者是否准备购买该品牌手机与性别有关.(2)$\frac{3}{5}$.

2.(1)$\hat{y}=11+\frac{100}{x}$.

(2)用反比例函数模型拟合效果更好，当产量为10千件时，每件产品的非原料成本为21元.

(3)企业要想获得更高利润，产品单价应选择90元.理由略.

3.(1)20.　(2)0.3.

(3)会选择B餐厅用餐.理由略.

4.**解：**(1)由这名同学总得分$X\in[-10,10]$，可得$X=-10$，10，由题意可得$P(|X|\leqslant 10)=P(X=-10)+P(X=10)=C_5^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^3+C_5^3\times\left(\frac{2}{3}\right)^3\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{40}{81}$，所以这名同学总得分$X\in[-10,10]$的概率为$\frac{40}{81}$.

(2)由题可知总得分X的所有取值为-50，-30，-10，10，30，50，$P(X=-50)=C_5^0\times\left(\frac{2}{3}\right)^0\times\left(\frac{1}{3}\right)^5=\frac{1}{243}$，$P(X=-30)=C_5^1\times\left(\frac{2}{3}\right)^1\times\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{10}{243}$，$P(X=-10)=C_5^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{40}{243}$，$P(X=10)=C_5^3\times\left(\frac{2}{3}\right)^3\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{80}{243}$，$P(X=30)=C_5^4\times\left(\frac{2}{3}\right)^4\times\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{80}{243}$，$P(X=50)=C_5^5\times\left(\frac{2}{3}\right)^5\times\left(\frac{1}{3}\right)^0=\frac{32}{243}$.

所以X的分布列为

X	-50	-30	-10	10	30	50
P	$\frac{1}{243}$	$\frac{10}{243}$	$\frac{40}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{32}{243}$

$E(X)=(-50)\times\frac{1}{243}+(-30)\times\frac{10}{243}+(-10)\times\frac{40}{243}+10\times\frac{80}{243}+30\times\frac{80}{243}+50\times\frac{32}{243}=\frac{50}{3}\approx 16.7$，故这名同学回答这5个问题的总得分的数学期望约为16.7分.

5.**解：**(1)由题意知X的可能取值为1000，2000，3000，$P(X=1000)=(0.0089+0.0311)\times 5=0.2$，$P(X=2000)=0.0800\times 5=0.4$，$P(X=3000)=(0.0467+0.0333)\times 5=0.4$，

所以X的分布列为

X	1000	2000	3000
P	0.2	0.4	0.4

(2)设一天的进货量为n千克，则$1000\leqslant n\leqslant 3000$.

①当$1000\leqslant n<2000$时，若最高气温不低于25，则$Y=8n$，若最高气温低于25，则$Y=1000\times 8-(n-1000)\times 6=14000-6n$，此时$E(Y)=0.8\times 8n+0.2\times(14000-6n)=5.2n+2800<13200$.

②当$2000\leqslant n\leqslant 3000$时，若最高气温不低于30，则$Y=8n$，若最高气温位于$[25,30)$内，则$Y=2000\times 8-(n-2000)\times 6=28000-6n$，若最高气温低于25，则$Y=1000\times 8-(n-1000)\times 6=14000-6n$，此时，$E(Y)=0.4\times 8n+0.4\times(28000-6n)+0.2\times(14000-6n)=14000-0.4n\leqslant 13200$，当且仅当$n=2000$时，取等号.

综上，当一天的进货量为2000千克时，$E(Y)$取到最大值.

6.**解：**(1)因为ξ服从正态分布$N(270,5^2)$，所以$P(260<x\leqslant 265)=\frac{P(260<x\leqslant 280)-P(265<x\leqslant 275)}{2}\approx\frac{0.9544-0.6826}{2}=0.1359$，所以质量指标在$(260,265]$内的排球约为$1000\times 0.1359\approx 136$个.

(2)(ⅰ)中国队前三场赢两场，第四场必赢，$f(p)=C_3^2p^3(1-p)$，因此$f'(p)=3[3p^2\cdot(1-p)-p^3]=3p^2(3-4p)$.令$f'(p)=0$，得$p=\frac{3}{4}$，当$p\in\left(0,\frac{3}{4}\right)$时，$f'(p)>0$，$f(p)$在$\left(0,\frac{3}{4}\right)$上为增函数；当$p\in\left(\frac{3}{4},1\right)$时，$f'(p)<0$，$f(p)$在$\left(\frac{3}{4},1\right)$上为减函数.所以$f(p)$的最大值点$p_0=\frac{3}{4}$.

(ⅱ)X的可能取值为3，2，1，0，

$P(X=3)=\left(\frac{3}{4}\right)^3+C_3^2\times\left(\frac{3}{4}\right)^3\times\frac{1}{4}=\frac{189}{256}$，

$P(X=2)=C_4^2\times\left(\frac{3}{4}\right)^3\times\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{81}{512}$，

$P(X=1)=C_4^2\times\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{27}{512}$，

$P(X=0)=\left(\frac{1}{4}\right)^3+C_3^1\times\left(\frac{3}{4}\right)\times\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{13}{256}$.

所以X的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{13}{256}$	$\frac{27}{512}$	$\frac{81}{512}$	$\frac{189}{256}$