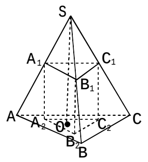
21.**解**:(1)设正三棱柱的高为 h ,底面边长为 x ,如图所示,



(第 21 题图)

则$\frac{15-h}{15}=\frac{x}{12}$,解得 $x=\frac{4}{5}(15-h)$.

又因为正三棱柱的侧面积为 120,

所以 $3xh=120$,所以 $xh=40$,

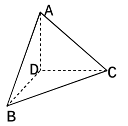
解得 $x=4,h=10$ 或 $x=8,h=5$,

所以该三棱柱的高是 10 或 5.

(2)因为面积之比等于相似比的平方,

所以三棱柱的上底面截棱锥所得的小棱锥与原棱锥的侧面积之比为$\frac{S_1}{S_2}=\left(\frac{15-h}{15}\right)^2=\frac{1}{9}$或$\frac{S_1}{S_2}=\left(\frac{15-h}{15}\right)^2=\frac{4}{9}$.

22.**解**:(1)由三视图可知,该几何体是三条侧棱两两垂直的三棱锥,如图. 以 DC,DB,DA 为长、宽、高构造一个长方体,则该长方体的外接球就是该三棱锥的外接球,即外接球的半径 $R=\frac{1}{2}\times\sqrt{2^2+2^2+1^2}=\frac{3}{2}$,所以该几何体外接球的体积 $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{9}{2}\pi$.



(第 22 题图)

(2)设内切球的球心为 O,半径为 r,由等体积法,得

$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times1=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times r+2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times1\times r+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\sqrt{3}\,r$,

得 $r=\frac{4-\sqrt{6}}{5}$,

所以该几何体内切球的半径为$\frac{4-\sqrt{6}}{5}$.

第 32 期

第 3~4 版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.C

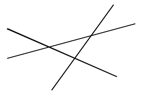
提示:将摩托车的脚撑放下,两轮胎与地面的接触点和脚撑与地面的接触点构成了一个三角形,这里用到了三角形的稳定性,即不共线的三点确定一个平面.

2.D

提示:对于 A,应为:$A\in\alpha,B\in\alpha$;对于 B,应为:$AB\subset\alpha$;对于 C,若 $A\notin\alpha$,则 $AB\not\subset\alpha$;D 显然正确.故选D.

3.C

提示:将三棱柱各棱无限延伸,其俯视图如图所示,此俯视图将平面分为 7 个部分.又上、下底面所在平面将空间分为上、中、下三部分,所以三棱柱各面所在平面将空间分为 7×3=21 部分.



(第 3 题图)

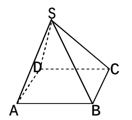
4.A

提示:因为直线 $a\subset$平面α,直线 $b\subset$平面α,$M\in a$,$N\in b$,所以 $M\in$平面α,$N\in$平面α,

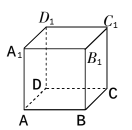
因为 $M\in l$,$N\in l$,所以 $l\subset\alpha$,故选 A.

5.B

提示:如图所示,在四棱锥 S-$ABCD$ 中,与棱 SA 异面的直线有 BC,CD 两条,则任取两条能构成异面直线的棱有$\frac{1}{2}\times(8\times2)=8$(对).



(第 5 题图)



(第 6 题图)

6.C

提示:在如图所示正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中,AB 和 DD_1 是异面直线,$DD_1/\!/BB_1$,$AB\cap BB_1=B$;$DD_1/\!/CC_1$,AB 与 CC_1 是异面直线.所以 a,c 的位置关系是异面或相交.

7.D

提示:两点确定一条直线,若两个平面只有一条公共直线,则这两个平面相交,故 A 错误;对于 B,当点在直线上时,可知两平面可能相交,故错误;对于 C,当三个点共线时,两平面可能相交,故错误;两条平行直线可确定一个平面,故 D 正确.

8.A

提示:由题意,若 $x=y=1$,则棱 DD_1 与平面 BEF 交于点 D,符合题意,此时 $x+y=2$;

若 $x=1,y=0$,则棱 DD_1 与平面 BEF 交于线段 DD_1,符合题意,此时 $x+y=1$.

排除 B、C、D 选项.故选 A.

二、多项选择题

9.ABD

提示:过直线 l 外两点作与 l 平行的平面,如果两点所在的直线与已知直线相交,则这样的平面不存在;如果两点所在的直线与已知直线平行,则这样的平面有无数个;如果两点所在的直线与已知直线异面,则这样的平面只有 1 个.故选 ABD.

10.AB

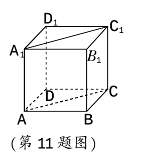
提示:连接 A_1C_1,AC,则 $A_1C_1/\!/AC$,所以 A_1、C_1、C、A 四点共面,所以 $A_1C\subset$平面 ACC_1A_1.

因为 $M\in A_1C$,所以 $M\in$平面 ACC_1A_1,又 $M\in$平面 AB_1D_1,所以 M 在平面 ACC_1A_1 与平面 AB_1D_1 的交线上.

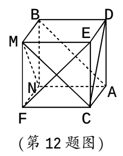
同理,可知 O 在平面 ACC_1A_1 与平面 AB_1D_1 的交线上,显然 A 在平面 ACC_1A_1 与平面 AB_1D_1 的交线上,所以 A,M,O 三点共线,A 正确;结合选项 A 和推论 1,可知 A,M,O,A_1 共面,A,M,C,O 共面,故 B 正确,C 错误;由选项 A 可知 B_1,O,$M\in$平面 AB_1D_1,若 B,B_1,O,M 共面,则 $B\in$平面 AB_1D_1,显然不成立,故 D 错误.

11.ABC

提示:如图所示,在正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中,AB 与 A_1C_1 是两条异面直线,它们在平面 $ABCD$ 上的正投影分别是 AB,AC,为两条相交直线;在平面 ABB_1A_1 上的正投影分别为 AB,A_1B_1,为两条平行直线;在平面 BCC_1B_1 上的正投影分别为 B,B_1C_1,为一条直线与直线外一点,故选 ABC.



(第 11 题图)



(第 12 题图)

12.ACD

提示:将展开图还原为如图所示正方体,可知 AB 与 EF 是异面直线,$AB/\!/CM$,EF 与 MN 是异面直线,MN 与 CD 也是异面直线,故选 ACD.

三、填空题

13.已知 $A\in l$,$B\in l$,若 $A\in\alpha$,$B\in\alpha$,则 $l\subset\alpha$

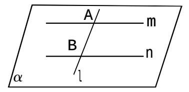
14.CR

提示:由题知 $R\in AB\subset\gamma$,$R\in l\subset\beta$,$C\in\gamma$,$C\in\beta$,所以 R,C 都在 γ 与 β 的交线上,所以 $\beta\cap\gamma=CR$.

15.平行、相交、异面

16.1

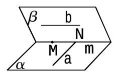
提示:三棱锥的三条侧棱两两相交且交于同一点,但三条侧棱不共面,故①③不符合要求;取正方体的三条侧棱,它们两两平行但不共面,故②不符合要求;对于④,如图所示,直线 $m\cap l=A$,$n/\!/m$,$n\cap l=B$,可知 m 与 n 可确定一个平面,设为 α,则 $A\in m\subset\alpha$,$B\in n\subset\alpha$,又 $A\in l$,$B\in l$,所以 $l\subset\alpha$,故直线 m,n,l 共面,④符合要求.



(第 16 题图)

四、解答题

17.**解**:如图所示.



(第 17 题图)

18.**证明**:设 $\alpha\cap\beta=a$,$\beta\cap\gamma=b$,$\alpha\cap\gamma=c$.因为 $a\subset\beta$,$b\subset\beta$,且 a,b 不平行,所以 a 与 b 必相交.

设 $a\cap b=P$,则 $P\in a\subset\alpha$,$P\in b\subset\gamma$,所以 $P\in\alpha\cap\gamma=c$,所以 a,b,c 相交于一点 P.

19.**证明**:(1)因为 $PQ\subset$平面 PQR,$M\in$直线 PQ,

所以 $M\in$平面 PQR.

因为 $RQ\subset$平面 PQR,$N\in$直线 RQ,所以 $N\in$平面 PQR.所以直线 $MN\subset$平面 PQR.

(2)因为 $M\in$直线 CB,$CB\subset$平面 BCD,

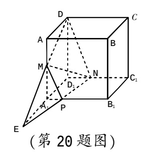
所以 $M\in$平面 BCD.

由(1),知 $M\in$平面 PQR,

所以 M 在平面 PQR 与平面 BCD 的交线上.

同理,可知 N,K 也在平面 PQR 与平面 BCD 的交线上,所以 M,N,K 三点共线.所以点 K 在直线 MN 上.

20.**解**:(1)如图所示,延长 DM 交 D_1A_1 的延长线于 E,连接 NE,则NE 即为直线 l 的位置.



(第 20 题图)

(2)因为 M 为 AA_1 的中点,$AD/\!/ED_1$,所以 $AD=A_1E=A_1D_1=a$.

因为 $A_1P/\!/D_1N$,且 $D_1N=\frac{1}{2}a$,

所以 $A_1P=\frac{1}{2}D_1N=\frac{1}{4}a$,

于是 $PB_1=A_1B_1-A_1P=a-\frac{1}{4}a=\frac{3}{4}a$.

21.**解**:(1)$P\in l$,证明如下:

因为 $m\subset\alpha$,$n\subset\beta$,$m\cap n=P$,

所以 $P\in\alpha$,$P\in\beta$.又 $\alpha\cap\beta=l$,由基本事实 3,

可知 $P\in l$.

(2)$m/\!/l$,证明如下:

由 $m/\!/n$,可知 m 与 n 可确定一个平面,设为 γ.

因为 $m\subset\alpha$,$l\subset\alpha$,所以 m 与 l 平行或相交.

假设 m 与 l 相交,设交点为 Q,则 $Q\in m\subset\gamma$,$Q\in l\subset\beta$,所以 $Q\in\gamma\cap\beta=n$.

又 $Q\in m$,所以 m 与 n 相交,这与 $m/\!/n$ 矛盾,

所以 m 与 l 不相交,故 $m/\!/l$.

22.(1)**解**:若 $A\in\alpha$,$B\notin\alpha$,$a\subset\alpha$,$A\notin a$,则直线 AB 与 a 是异面直线.

(2)**证明**:如图 1 所示,假设直线 AB 与 a 共面,设所在平面为 β,则 $a\subset\beta$,又 $a\subset\alpha$,所以 $\beta\cap\alpha=a$.

因为 $A\in AB\subset\beta$,$A\in\alpha$,所以 $A\in\alpha\cap\beta$.所以 $A\in a$.这与已知 $A\notin a$ 矛盾.所以直线 AB 与 a 是异面直线.

(3)**证明**:如图 2 所示,在空间四边形 $ABCD$ 中,因为 $C\in$平面 ABC,$D\notin$平面 ABC,$AB\subset$平面 ABC,$C\notin AB$,所以 CD 与 AB 是异面直线.同理可证得 BC 与 AD 是异面直线.所以空间四边形的对边是异面直线.

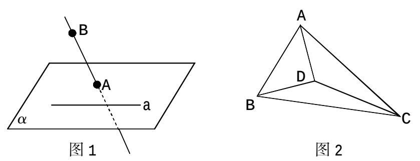


图 1　　图 2

(第 22 题图)

扫码免费下载习题讲解 ppt

第 29 期

第 2~3 版章节测试参考答案

一、单项选择题

1.C

提示:由$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$,得四边形$ABCD$是平行四边形,又$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AD}|$,所以四边形$ABCD$是菱形.

2.C

提示:因为$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$,$\lambda\in\mathbf{R}$,所以$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$共线.

又$|\boldsymbol{a}|=1$,$|\boldsymbol{b}|=2$,所以$\boldsymbol{a}=\pm\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$.

当$\boldsymbol{a}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$时,$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\frac{1}{2}|\boldsymbol{b}|=1$;

当$\boldsymbol{a}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$时,$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\frac{3}{2}|\boldsymbol{b}|=3$.故选C.

3.A

提示:$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{OD}=(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD})+(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA})=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DC}$.

4.D

提示:由已知,得$2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(1,-\sqrt{3})$,所以与$2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$共线的单位向量为$\pm\frac{2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}}{|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|}=\pm\frac{(1,-\sqrt{3})}{2}$, 即$\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$或$\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

5.A

提示:在$\triangle ABC$中,由余弦定理,得$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos C=4^2+3^2-2\times4\times3\times\frac{2}{3}=9$,所以$AB=3$.故$\cos B=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\frac{3^2+3^2-4^2}{2\times3\times3}=\frac{1}{9}$.

6.C

提示:由$3c\sin C-a\sin A=3b\sin B$及正弦定理,

得$3c^2-a^2=3b^2$,即$c^2=\frac{1}{3}a^2+b^2$.

所以$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\frac{2}{3}a^2}{2ab}=\frac{a}{3b}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,

从而可得$\frac{a}{b}=2\sqrt{2}$.

7.D

提示:由已知,得$|a+b|=\sqrt{a^2+2a\cdot b+b^2}=7$,

所以 $\cos\langle a,a+b\rangle=\frac{a\cdot(a+b)}{|a||a+b|}=\frac{5^2-6}{5\times7}=\frac{19}{35}$.

8.D

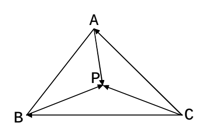
提示:如图所示,令$\overrightarrow{CA}=a$,$\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{CP}=\boldsymbol{x}$,则$\overrightarrow{AP}=\boldsymbol{x}-a$,$\overrightarrow{BP}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}$,于是$|\overrightarrow{AP}|^2+|\overrightarrow{BP}|^2+|\overrightarrow{CP}|^2=(\boldsymbol{x}-a)^2+(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})^2+\boldsymbol{x}^2$

$=3\boldsymbol{x}^2-2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{x}+a^2+\boldsymbol{b}^2$

$=3\left[\boldsymbol{x}-\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\right]^2-\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2+\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2$.

要使$AP^2+BP^2+CP^2$的值最小,则$\boldsymbol{x}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$,即$\overrightarrow{CP}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})=\frac{1}{3}[(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PC})+(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PC})]$,

化简可得$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$,则点$P$是$\triangle ABC$的重心.



(第 8 题图)

二、多项选择题

9.AC

提示:由已知可得$\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2=(2\lambda_2-\lambda_1,2\lambda_1+\lambda_2)$.若$\boldsymbol{a}=(1,0)$,则$2\lambda_1+\lambda_2=0$,当$\lambda_1\neq0$,$\lambda_2\neq0$时满足$\lambda_1\lambda_2<0$,故A符合题意,同理可知C符合题意;若$\boldsymbol{a}=(0,1)$,则$2\lambda_2-\lambda_1=0$,不满足$\lambda_1\lambda_2<0$,故B不符合题意,同理可知D不符合题意.故选AC.

10.ABC

提示:$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$,选项A正确;$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$,选项B正确;$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$,选项C正确;$\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AF}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$,选项D错误.故选ABC.

11.BCD

提示:对于选项A,由正弦定理,得$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,又$a<b$,所以$B=45°$或$135°$,该三角形的形状不唯一确定;对于选项B,由余弦定理,得$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=2^2+3^2-2\times2\times3\times\cos60°=7$,所以$c=\sqrt{7}$,该三角形唯一确定;对于选项C,由已知条件得$A=105°$,根据正弦定理可求得$b$和$c$的值,三边确定,该三角形唯一确定;对于选项D,三边确定,该三角形唯一确定.故选BCD.

12.BD

提示:由已知得$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=1$,因为$3\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}+5\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$,所以$3\overrightarrow{OA}=-(4\overrightarrow{OB}+5\overrightarrow{OC})$,两边平方,得$9|\overrightarrow{OA}|^2=16|\overrightarrow{OB}|^2+40\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+25|\overrightarrow{OC}|^2$,解得$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=-\frac{4}{5}\neq0$,故A错误;同理可得$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$,$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=-\frac{3}{5}$,故$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$,即$\angle AOB=90°$,故B正确;$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{OB}\cdot(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\frac{4}{5}$,故C错误;$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OC}\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=-\frac{1}{5}$,故D正确.故选BD.

三、填空题

13.$\sqrt{3}$

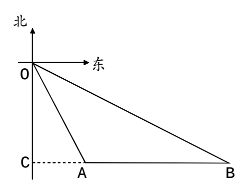
提示:以$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$为邻边作$\square OACB$,其中$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,则$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,可得$\triangle OAC$是边长为1的等边三角形,所以$\square OACB$为菱形.所以$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\overrightarrow{AB}|=2\cos30°=\sqrt{3}$.

14.-40

提示:由已知条件,得合力$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3=(8,-8)$,$\overrightarrow{AB}=(-1,4)$,则合力所做的功$W=\boldsymbol{F}\cdot\overrightarrow{AB}=8\times(-1)-8\times4=-40$.

15.1.63km

提示:画出示意图如图所示,其中O为这位学生最初的位置,骑行2km后的位置为B,塔在点A处,由题意知$\angle AOC=30°$,$\angle BOC=75°$,$OB=2$km, 点C,A,B在一条直线上, 且$\angle OCB=90°$, 则在$\triangle OAB$中,$\angle AOB=45°$,$\angle OAB=120°$,$OB=2$, 由正弦定理, 得$AB=\frac{OB\sin\angle AOB}{\sin\angle OAB}=\frac{2\sqrt{6}}{3}\approx1.63$(km).故此时这名学生与塔的距离大约为1.63km.



(第 15 题图)

16.0 或$\frac{18}{5}$

提示: 以 A 为原点,AB,AC 所在直线分别为 x,y 轴建立平面直角坐标系,则 $A(0,0)$,$B(4,0)$,$C(0,3)$,故$\overrightarrow{AB}=(4,0)$,$\overrightarrow{AC}=(0,3)$.

由$\overrightarrow{PA}=m\overrightarrow{PB}+\left(\frac{3}{2}-m\right)\overrightarrow{PC}$

$=m(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB})+\left(\frac{3}{2}-m\right)(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AC})$,

整理得$\overrightarrow{PA}=-2m\overrightarrow{AB}+(2m-3)\overrightarrow{AC}=(-8m,6m-9)$.

又 $AP=9$,所以 $64m^2+(6m-9)^2=81$,

解得 $m=0$,或 $m=\frac{27}{25}$.

当 $m=0$ 时,$\overrightarrow{PA}=\frac{3}{2}\overrightarrow{PC}$,此时 P,C,A 三点共线,

故$|\overrightarrow{CD}|=0$.

当 $m=\frac{27}{25}$时, 直线 PA 为 $y=\frac{9-6m}{8m}x=\frac{7}{24}x$, 直线 BC 为 $y=3-\frac{3}{4}x$,

联立以上两式解得 $x=\frac{72}{25}$,$y=\frac{21}{25}$,

所以 $D\left(\frac{72}{25},\frac{21}{25}\right)$,所以$|\overrightarrow{CD}|=\frac{18}{5}$.

综上可知,CD 的长度是 0 或$\frac{18}{5}$.

四、解答题

17.**解**:(1)由已知,得$\overrightarrow{AB}=(1,5)$,$\overrightarrow{AC}=(-3,1)$,则$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=(-2,6)$,$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=(4,4)$.

所以$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=2\sqrt{10}$,$|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|=4\sqrt{2}$,即两条对角线的长分别为 $2\sqrt{10}$和 $4\sqrt{2}$.

(2)由题意,可知$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}=0$,且$\overrightarrow{CD}/\!/\overrightarrow{CB}$.

设 $D(x,y)$,则$\overrightarrow{AD}=(x-1,y)$,$\overrightarrow{CD}=(x+2,y-1)$.

又$\overrightarrow{CB}=(4,4)$,可得$\begin{cases}4(x-1)+4y=0,\\4(y-1)-4(x+2)=0,\end{cases}$

解得 $x=-1$,$y=2$.

所以点 D 的坐标为$(-1,2)$.

18.(1)**解**:由题意,得B,E,C三点共线,

所以可令$\overrightarrow{OE}=x\overrightarrow{OC}+(1-x)\overrightarrow{OB}=2x\boldsymbol{a}+(1-x)\boldsymbol{b}$.　①

同理,因为A,E,D三点共线,

所以可令$\overrightarrow{OE}=y\boldsymbol{a}+3(1-y)\boldsymbol{b}$.　②

由①②,得$\begin{cases}2x=y,\\1-x=3(1-y),\end{cases}$

解得$x=\frac{2}{5}$,$y=\frac{4}{5}$.所以$\overrightarrow{OE}=\frac{4}{5}\boldsymbol{a}+\frac{3}{5}\boldsymbol{b}$.

(2)**证明**:因为$\overrightarrow{OL}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$,$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OE}=\frac{4\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}}{10}$,$\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})=\frac{2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}}{2}$,

所以$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\frac{6\boldsymbol{a}+12\boldsymbol{b}}{10}$,$\overrightarrow{ML}=\overrightarrow{OL}-\overrightarrow{OM}=\frac{\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}}{10}$,

所以$\overrightarrow{MN}=6\overrightarrow{ML}$.所以$L$,$M$,$N$三点共线.

19.**解**:(1)由余弦定理以及$a=2\sqrt{2}$,$b=5$,$c=\sqrt{13}$,得$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

又$C\in(0,\pi)$,所以$C=\frac{\pi}{4}$.

(2)由正弦定理以及$C=\frac{\pi}{4}$,$a=2\sqrt{2}$,$c=\sqrt{13}$,可得$\sin A=\frac{a\sin C}{c}=\frac{2\sqrt{13}}{13}$.

(3)由$a<c$及$\sin A=\frac{2\sqrt{13}}{13}$,

可得$\cos A=\sqrt{1-\sin^2A}=\frac{3\sqrt{13}}{13}$,

则$\sin2A=2\sin A\cos A=2\times\frac{2\sqrt{13}}{13}\times\frac{3\sqrt{13}}{13}=\frac{12}{13}$,

$\cos2A=2\cos^2A-1=\frac{5}{13}$.

所以$\sin\left(2A+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin2A+\cos2A)$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(\frac{12}{13}+\frac{5}{13}\right)=\frac{17\sqrt{2}}{26}$.

20.**解**:以A为原点,AB,AD所在直线分别为x轴,y

8

轴，建立平面直角坐标系，则$A(0,0)$，$M(3,1)$，$\overrightarrow{AM}=(3,1)$.

(1)若N为线段CD上靠近D的三等分点，则$N(1,2)$，$\overrightarrow{AN}=(1,2)$，所以$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=3\times1+1\times2=5$.

(2)设$N(a,2)$，$a\in[0,3]$，则$\overrightarrow{AN}=(a,2)$.

所以$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=3a+2=8$，解得$a=2$.

所以点N为线段CD上靠近C的三等分点.

21.**解**：(1)由题设，得$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=\sin A\cos B+\sin B\cos A$

$=\sin(A+B)=\sin C=\sin 2C=2\sin C\cos C$.

因为$0<C<\pi$，所以$\sin C\neq0$，可得$\cos C=\frac{1}{2}$，故$C=\frac{\pi}{3}$.

(2)由$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB})=\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{AC}^2=2$，得$b=|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{2}$.

由正弦定理，得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，所以$a=\frac{b\sin A}{\sin B}=\frac{\sqrt{2}\sin A}{\sin\left(\frac{2\pi}{3}-A\right)}=\frac{\sqrt{2}\sin A}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\frac{1}{2}\sin A}=\frac{2\sqrt{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{\tan A}}$.

所以$\triangle ABC$的面积$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{\tan A}}\times\sqrt{2}\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{1+\frac{\sqrt{3}}{\tan A}}$.

因为$C=\frac{\pi}{3}$，$\triangle ABC$是锐角三角形，所以$A\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$.

所以$\tan A\in\left(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$，从而可得$\frac{\sqrt{3}}{1+\frac{\sqrt{3}}{\tan A}}\in\left(\frac{\sqrt{3}}{4},\sqrt{3}\right)$.所以$\triangle ABC$面积的取值范围是$\left(\frac{\sqrt{3}}{4},\sqrt{3}\right)$.

22.**解**：(1)设$\triangle ABC$的外接圆半径为R，

则$2R=\frac{200\sqrt{57}}{3}$m.

由正弦定理可知，$AB=2R\sin\angle ACB=\frac{200\sqrt{57}}{3}\times\sin60^\circ=100\sqrt{19}$(m).

由余弦定理，得$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos\angle ACB$，将各数据代入并整理，得$AC^2-200AC-150000=0$.

解得$AC=500$，或$AC=-300$(舍去).所以道路AC的长是500m.

(2)因为四边形ABCD是平行四边形，

所以$AD=BC=200$m，又$\angle AED=60^\circ$，

在$\triangle ADE$中，由余弦定理，得

$AD^2=AE^2+ED^2-2AE\cdot ED\cdot\cos\angle AED=(AE+ED)^2-3AE\cdot ED\geqslant(AE+ED)^2-3\left(\frac{AE+ED}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(AE+ED)^2$，当且仅当AE=ED=200m时，等号成立.

所以$AE+DE\leqslant400$.所以$AE+DE+AD\leqslant600$.

所以栅栏总长的最大值为600m.

第30期

第3~4版章节测试参考答案

一、单项选择题

1.C

提示：$i^{2021}=(i^4)^{505}\cdot i=i$.

2.C

提示：由题设，得$\begin{cases}a^2-1=0,\\a-1\neq0,\end{cases}$解得$a=-1$.

3.B

提示：因为复数z对应的点的坐标是(1,2)，所以$z=1+2i$.所以$i\cdot z=i(1+2i)=-2+i$.

4.D

提示：$z^2-2z=(1+i)^2-2(1+i)=2i-2-2i=-2$，所以$|z^2-2z|=2$.

5.B

提示：$z=\frac{1-i}{i^3}=(1-i)i=1+i$，所以$\bar{z}=1-i$，所以$\bar{z}$的虚部为-1.

6.A

提示：$z_1-z_2=\frac{2-4i}{2+i}=\frac{(2-4i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{-10i}{5}=-2i$.

设$z_2=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，则$z_1=z_2-2i=a+(b-2)i$.

由$|z_1|=|z_2|=1$，得$\begin{cases}a^2+b^2=1,\\a^2+(b-2)^2=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=0,\\b=1.\end{cases}$

所以$z_1=-i$，$z_2=i$，则$z_1\cdot z_2=-i\cdot i=1$.

7.B

提示：设$z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，

则$\frac{1}{z}=\frac{1}{a+bi}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i$.

由图中点M的位置可知，$0<a<1$，$b>1$，则$\frac{a}{a^2+b^2}>0$，$-\frac{b}{a^2+b^2}<0$，故$\frac{1}{z}$表示的点在第四象限，又$\left|\frac{a}{a^2+b^2}\right|<\left|\frac{b}{a^2+b^2}\right|$，故$\frac{1}{z}$表示的点只可能是点$Q$，故选B.

8.D

提示：$z=\frac{2i}{1-\sqrt{3}i}$

$=\frac{2i(1+\sqrt{3}i)}{(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$.

设z的辐角主值为θ，则$r=1$，$\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\theta=\frac{1}{2}$.

又$0\leqslant\theta<2\pi$，所以$\theta=\frac{5\pi}{6}$.

二、多项选择题

9.ACD

提示：令$z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，代入$z^2+2|z|=0$中，得$a^2-b^2+2\sqrt{a^2+b^2}+2abi=0$，

则$\begin{cases}a^2-b^2+2\sqrt{a^2+b^2}=0,\\ab=0,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=0,\\b=0,\end{cases}$或$\begin{cases}a=0,\\b=2,\end{cases}$或$\begin{cases}a=0,\\b=-2.\end{cases}$

所以$z=0$，或$z=2i$，或$z=-2i$.故选ACD.

10.BD

提示：设$z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，则$z^2=a^2-b^2+2abi=-7-24i$.

所以$\begin{cases}a^2-b^2=-7,\\2ab=-24,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=3,\\b=-4,\end{cases}$或$\begin{cases}a=-3,\\b=4.\end{cases}$

所以复数z在复平面内对应的点的坐标为(3,-4)或(-3,4)，可能在第二、四象限.故选BD.

11.BC

提示：对于集合$M=\{m|m=i^n,n\in\mathbf{N}\}$，

当$n=4k(k\in\mathbf{N})$时，$i^n=1$；

当$n=4k+1(k\in\mathbf{N})$时，$i^n=i$；

当$n=4k+2(k\in\mathbf{N})$时，$i^n=-1$；

当$n=4k+3(k\in\mathbf{N})$时，$i^n=-i$，

所以$M=\{-1,1,i,-i\}$.

故$(1-i)(1+i)=2\notin M$，$\frac{1-i}{1+i}=-i\in M$，$\frac{1+i}{1-i}=i\in M$，$(1-i)^2=-2i\notin M$.故选BC.

12.AC

提示：设$z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，若$z\in\mathbf{R}$，则$b=0$，此时$\bar{z}=a\in\mathbf{R}$，故A正确；若$\frac{1}{z}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}\in\mathbf{R}$，则$b=0$，所以$z\in\mathbf{R}$，故C正确；设$z=i$，则$z^2=-1\in\mathbf{R}$，但$z\notin\mathbf{R}$，故B错误；设$z_1=i$，$z_2=2i$，则$z_1z_2=-2\in\mathbf{R}$，但$z_1\neq\bar{z}_2$，故D错误.故选AC.

三、填空题

13.3

提示：$z=(1+i)(2-i)=3+i$，所以复数z的实部是3.

14.$-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

提示：由题设，得向量$\overrightarrow{OZ}=(0,1)$，则旋转后的向量为$\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}\right),\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)\right)$，即$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$，所以该向量对应的复数是$-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$.

15.$2\sqrt{3}$

提示：由$z_1+z_2=\sqrt{3}+i$，得$|z_1+z_2|=2$.设复数z_1，z_2在复平面内对应的向量分别为$\overrightarrow{OZ_1}$，$\overrightarrow{OZ_2}$，以$\overrightarrow{OZ_1}$，$\overrightarrow{OZ_2}$为邻边作▱OZ_1ZZ_2，则$\overrightarrow{OZ}=\overrightarrow{OZ_1}+\overrightarrow{OZ_2}$，可得$\triangle OZ_1Z$是边长为2的等边三角形，所以▱$OZ_1ZZ_2$为菱形.所以$|z_1-z_2|=|\overrightarrow{Z_1Z_2}|=2\times2\cos30^\circ=2\sqrt{3}$.

16.$[2,+\infty)$

提示：由$x^2+2(1+i)x+ab+(a+b)i=0$，得$x^2+2x+ab+(a+b+2x)i=0$，

因为此方程总有实数解，

所以$a+b+2x=0$，且$x^2+2x+ab=0$.

消去x，得$\frac{1}{4}(a+b)^2-(a+b)+ab=0$，

所以$ab=-\frac{1}{4}(a+b)^2+(a+b)\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.

化简，得$(a+b)(a+b-2)\geqslant0$.

又$a>0$，$b>0$，所以$a+b-2\geqslant0$，即$a+b\geqslant2$.

所以$a+b$的取值范围是$[2,+\infty)$.

四、解答题

17.**解**：(1)$\frac{1-\sqrt{3}i}{(\sqrt{3}+i)^2}=\frac{1-\sqrt{3}i}{2+2\sqrt{3}i}$

$=\frac{(1-\sqrt{3}i)^2}{2(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)}$

$=-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i$.

(2)$\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^3(4+5i)}{(5-4i)(1-i)}$

$=\frac{2\sqrt{2}(1+i)^2(1+i)(4+5i)}{(5-4i)(1-i)}$

$=\frac{2\sqrt{2}\cdot2i\cdot2i(4+5i)(5+4i)}{(5-4i)(5+4i)(1-i)(1+i)}$

$=\frac{-8\sqrt{2}\times41i}{41\times2}=-4\sqrt{2}i$.

18.**解**：(1)由题意可得A(1,-3)，B(0,-1)，C(2,4)，设D(x,y)，

因为四边形ABCD是平行四边形，所以$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$，

又$\overrightarrow{AD}=(x-1,y+3)$，$\overrightarrow{BC}=(2,5)$，所以$\begin{cases}x-1=2,\\y+3=5.\end{cases}$解得x=3，y=2，故$z_0=3+2i$.

(2)因为$z=(1-3i)\times m-(2+4i)=(m-2)-(3m+4)i$，

复数z表示的点位于第二或第四象限，

所以$\begin{cases}m-2<0,\\3m+4<0,\end{cases}$或$\begin{cases}m-2>0,\\3m+4>0,\end{cases}$解得$m<-\frac{4}{3}$或$m>2$.

故实数m的取值范围是$\left(-\infty,-\frac{4}{3}\right)\cup(2,+\infty)$时，复数z表示的点位于第二或第四象限.

19.**解**：(1)选择条件①，则$\begin{cases}m^2-2m-8<0,\\m^2-4=0,\end{cases}$解得$m=2$.

选择条件②，则$m^2-4\neq0$，解得$m\neq\pm2$.

选择条件③，则$\begin{cases}m^2-2m-8=0,\\m^2-4\neq0,\end{cases}$解得$m=4$.

(2)$z-m^2(1+i)+8=(m^2-2m-8)+(m^2-4)i-m^2(1+i)+8=-2m-4i$.

由题设，得$\sqrt{(-2m)^2+16}=2\sqrt{5}$，解得$m=\pm1$.

20.**解**：(1)因为$z=1+mi$，所以$\frac{z-3}{1+2i}=\frac{mi-2}{1+2i}=\frac{(mi-2)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{2m-2}{5}+\frac{m+4}{5}i$.

由$\frac{z-3}{1+2i}$是实数，得$\frac{m+4}{5}=0$，解得$m=-4$.

所以$z=1-4i$.

(2)因为$z_0=\frac{1}{2}m+z-1=-2-4i$是关于$x$的方程$x^2+bx+c=0$的根，

所以$(-2-4i)^2+b(-2-4i)+c=0$，

即$(-2b+c-12)+(16-4b)i=0$，

则$\begin{cases}-2b+c-12=0,\\16-4b=0,\end{cases}$解得$b=4$，$c=20$.

21.**解**：(1)因为z的虚部为-1，所以设$z=x-i(x\in\mathbf{R})$.

所以$z\cdot\bar{z}=(x-i)(x+i)=x^2+1=2$，解得$x=-1$，或$x=1$.

又z在复平面内所对应的点在第四象限，所以$z=1-i$.

(2)因为$z=1-i$，$z^2=(1-i)^2=-2i$，所以$A(1,-1)$，$B(0,-2)$，$\overrightarrow{AO}=(-1,1)$，$\overrightarrow{AB}=(-1,-1)$.

所以$\cos\angle OAB=\frac{\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AO}|\cdot|\overrightarrow{AB}|}=\frac{1-1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=0$，

所以$\angle OAB=90^\circ$.

22.**证明**：(1)由已知，得

$|z_1z_2|=|(a+bi)(c+di)|=|(ac-bd)+(ad+bc)i|$

$=\sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2}$

$=\sqrt{a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2}$，

$|z_1||z_2|=|a+bi||c+di|=\sqrt{a^2+b^2}\times\sqrt{c^2+d^2}$

$=\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}=\sqrt{a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2}$.

所以$|z_1z_2|=|z_1||z_2|$.

(2)设$z=\frac{z_1}{z_2}$，则$z_1=zz_2$，所以$|z_1|=|zz_2|=|z||z_2|$，

所以$|z|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$，即$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$.

所以$\left|\frac{(1+i)(1-7i)}{\cos\theta+i\sin\theta}\right|=\frac{|(1+i)(1-7i)|}{|\cos\theta+i\sin\theta|}$

$=\frac{|1+i||1-7i|}{\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}}=\sqrt{1^2+1^2}\times\sqrt{1^2+(-7)^2}=10$，

即复数$\frac{(1+i)(1-7i)}{\cos\theta+i\sin\theta}$的模为10.

第31期

第3~4版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.C

提示：四棱柱有8个顶点，四棱台有8个顶点，五棱锥有6个顶点，五棱台有10个顶点，故选C.

2.B

提示：圆绕中间轴旋转一周得到的几何体是球，三角形绕中间轴旋转一周得到的几何体是圆锥，则题中的平面图形绕中间轴旋转一周，形成的几何体形状为一个球体中间挖去一个圆锥.

3.B

提示：一个六棱柱中挖去一个等高的圆柱，故选B.

4.D

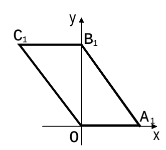
提示：正四棱柱是底面为正方形的直四棱柱，长方体是底面为矩形的直四棱柱，直平行六面体是底面为平行四边形的直四棱柱，所以$A\subseteq C\subseteq D\subseteq B$.

5.A

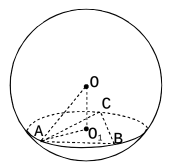
提示：画直观图时与x轴平行的线段长度保持不变，与y轴平行的线段长度变为原来的一半.所以直观图$\triangle A'B'C'$的底边与原$\triangle ABC$的底边相等，高为原$\triangle ABC$高的$\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}$倍，所以直观图$\triangle A'B'C'$的面积与原$\triangle ABC$面积的比是$\frac{\sqrt{2}}{4}$.故选A.

6.C

提示：把直观图$O'ABC$还原成四边形$OA_1B_1C_1$，如下图所示，其中$OA_1=2$cm，$OB_1=2O'B=4\sqrt{2}$cm，$\angle A_1OB_1=90^\circ$，则$A_1B_1=\sqrt{OA_1^2+OB_1^2}=6$(cm).所以原图形的周长为$2\times(2+6)=16$(cm).



(第6题图)



(第7题图)

7.A

提示：如图所示，由$\odot O_1$的面积为4π，可得其半径r=2.根据正弦定理，得$AB=2r\sin60^\circ=2\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$.

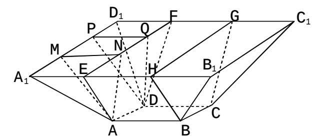
所以$OO_1=2\sqrt{3}$，又$AO_1=r=2$，所以外接球的半径$R=AO=\sqrt{AO_1^2+OO_1^2}=4$，所以球O的表面积$S=4\pi R^2=4\pi\times4^2=64\pi$.

8.B

提示：如图所示，将几何体进行分割，可得该几何体的容积

$V=2(V_{A-A_1MNE}+V_{AMN-DPQ}+V_{D-PQFD_1})+V_{BCGH-ADFE}$

$=2\times\left(\frac{1}{3}\times15\times6\times65\times2+\frac{1}{2}\times65\times15\times8\right)+\frac{(8+20)\times65}{2}\times40=52000$(立方尺).



(第8题图)

二、多项选择题

9.ACD

提示：用一个平面去截圆锥，轴截面的形状是等腰三角形；用一个平面去截圆柱，截面的形状不可能是三角形；用一个平面去截三棱锥，截面的形状是三角形；用一个平面去截正方体，截面的形状可能是三角形，故选ACD.

10.BD

提示：由斜二测画法的规则可知，在$\triangle ABC$中，$AB\perp BC$，AD为BC边上的中线，所以在$Rt\triangle ABD$中，AB为直角边，AD为斜边，$AB<AD$.又$\angle ADB$为锐角，所以$\angle ADC$为钝角，在$\triangle ADC$中，根据大边对大角，可知$AD<AC$.故最长的是AC，最短的是AB.

11.AB

提示：若绕一条直角边旋转一周，则形成的几何体为圆锥，且圆锥的底面半径为1，高为1，所以母线长$l=\sqrt{2}$，故表面积$S=\pi\times1\times\sqrt{2}+\pi\times1^2=(1+\sqrt{2})\pi$.若绕斜边旋转一周，则形成的几何体为同底等高的两个圆锥对底组合在一起，且底面半径为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，母线长为1，所以表面积$S=2\times\pi\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times1=\sqrt{2}\pi$.故选AB.

12.AC

提示：设细沙全部在上部时，细沙的底面半径为$r$cm，则$\frac{r}{4}=\frac{2}{3}\Rightarrow r=\frac{8}{3}$cm，所以细沙的体积$V_1=\frac{1}{3}\pi\times\left(\frac{8}{3}\right)^2\times\frac{2}{3}\times8=\frac{1024\pi}{81}$(cm³)，故A正确；沙漏的体积$V_2=2\times\frac{1}{3}\pi\times4^2\times8=\frac{256\pi}{3}$(cm³)，故B错误；设细沙全部漏入下部后形成的沙堆的高度为$h_1$cm，由$V_1=\frac{1}{3}\pi\times4^2\times h_1=\frac{1024\pi}{81}$，解得$h_1=\frac{64}{27}\approx2.4$(cm)，故C正确；该沙漏的一个沙时为$\frac{1024\pi}{81}\div0.02\approx1985$(秒)，故D错误.故选AC.

三、填空题

13.6

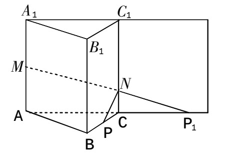
提示：根据斜二测画法的规则可知，对于原平面图形$\triangle ABC$，$BC\perp AC$，$AC=3$，$BC=4$，所以$\triangle ABC$的面积$S=\frac{1}{2}\times3\times4=6$.

14.$\frac{1}{3}$

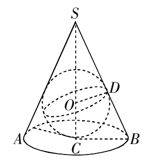
提示：$V_{A-NMD_1}=V_{D_1-AMN}=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times1\times1\right)\times2=\frac{1}{3}$.

15.$\sqrt{97}$，2

提示：正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的侧面展开图是一个长为9，宽为4的矩形，其对角线长为$\sqrt{9^2+4^2}=\sqrt{97}$.展开正三棱柱，使得侧面BB_1C_1C与侧面AA_1C_1C在同一平面上(如图所示)，当点P运动到点P_1的位置时，连接MP_1，则MP_1就是由点P沿棱柱侧面经过棱CC_1到点M的最短路线.设$PC=x$，在$Rt\triangle MAP_1$中，由勾股定理，得$(3+x)^2+2^2=29$，解得$x=2$，或$x=-8$(舍去).所以$PC=2$.



(第15题图)



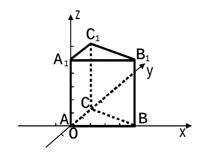
(第16题图)

16.$\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$

提示：圆锥内半径最大的球为该圆锥的内切球，如图所示，因为圆锥母线$BS=3$，底面半径$BC=1$，则其高$SC=\sqrt{BS^2-BC^2}=2\sqrt{2}$.不妨设该内切球与母线$BS$切于点$D$，$OD=OC=R$，由$\sin\angle BSC=\frac{OD}{OS}=\frac{BC}{BS}$，得$\frac{R}{2\sqrt{2}-R}=\frac{1}{3}$，解得$R=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以球的体积$V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$.

四、解答题

17.**解**：(1)该三棱柱的直观图如图所示.



(第17题图)

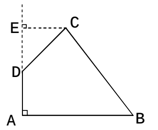
(2)三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的表面积$S=S_{矩形ABB_1A_1}+S_{矩形ACC_1A_1}+S_{矩形BCC_1B_1}+2S_{\triangle ABC}=AB\times AA_1+AC\times AA_1+BC\times BB_1+2\times\frac{1}{2}AB\times AC=4\times5+4\times5+4\sqrt{2}\times5+4\times4=56+20\sqrt{2}$.

18.**解**：截面BCFE右侧部分是棱柱，满足棱柱的定义，它是三棱柱BEB_1-CFC_1，其中$\triangle BEB_1$和$\triangle CFC_1$是底面，EF，B_1C_1，BC是侧棱；

截面BCFE左侧部分也是棱柱，它是四棱柱$ABEA_1-DCFD_1$，其中四边形$ABEA_1$和四边形$DCFD_1$是底面，A_1D_1，EF，BC，AD是侧棱.

19.**解**：如图，过C作$CE\perp AD$，交AD延长线于E，则所求几何体可看成是由梯形ABCE绕AE旋转一周所得的圆台，挖去$\triangle EDC$绕DE旋转一周所得的圆锥.所以所求几何体的表面积$S=\pi\times2\times2\sqrt{2}+\pi\times5^2+\pi\times5\times(2+5)=(60+4\sqrt{2})\pi$，

体积$V=V_{圆台}-V_{圆锥}=\frac{1}{3}\pi\times(5^2+5\times2+2^2)\times4-\frac{1}{3}\pi\times2^2\times2=\frac{148}{3}\pi$.



(第19题图)

20.**解**：(1)过C作平行于$A_1B_1C_1$的截面A_2B_2C，交AA_1，BB_1分别于点A_2，B_2.由直三棱柱性质及$\angle A_1B_1C_1=90^\circ$，知该几何体的体积$V=V_{A_1B_1C_1-A_2B_2C}+V_{C-ABB_2A_2}=\frac{1}{2}\times2\times2\times2+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times(1+2)\times2\times2=6$.

(2)在$\triangle ABC$中，$AB=\sqrt{2^2+(4-3)^2}=\sqrt{5}$，

$BC=\sqrt{2^2+(3-2)^2}=\sqrt{5}$，

$AC=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+(4-2)^2}=2\sqrt{3}$，

则$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times\sqrt{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}=\sqrt{6}$.