由正弦定理,得$\frac{BD}{\sin135°}=\frac{80}{\sin30°}$,

解得$BD=80\sqrt{2}$.

在△ACD中,可得∠DCA=∠CAD=15°,所以AD=CD=80.

在△ABD中,由余弦定理,得$AB^2=80^2+(80\sqrt{2})^2-2\times80\times80\sqrt{2}\times\cos135°=80^2\times5$,所以$AB=80\sqrt{5}$.

8.C

提示:设△ABC的面积为S,可得$a=4S,b=2\sqrt{2}S$,$c=2S\Rightarrow\cos A=\frac{(2\sqrt{2})^2+2^2-4^2}{2\times2\sqrt{2}\times2}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$.

二、多项选择题

9.AD

提示:若c为最长边,由$c^2>a^2+b^2=4+9$,可得$c>\sqrt{13}$,又$a+b=5>c$,所以$\sqrt{13}<c<5$,可得D正确;若b为最长边,由$9=b^2>c^2+a^2=c^2+4$,可得$c<\sqrt{5}$,又$c>b-a=1$,所以$1<c<\sqrt{5}$,可得A正确.

10.CD

提示:因为$\sin^2B=\sin A\sin C$,由正弦定理可得$b^2=ac$,所以$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+c^2-ac}{2ac}\geqslant\frac{2ac-ac}{2ac}=\frac{1}{2}$,当且仅当$a=c$时,等号成立,又$B\in(0°,180°)$,所以$B\in(0°,60°]$,故选CD.

11.BC

提示:由余弦定理,得$a^2=2^2+(\sqrt{3}+1)^2-2\times2\times(\sqrt{3}+1)\times\cos60°=6$,所以$a=\sqrt{6}$,C正确;由正弦定理,得$\frac{\sqrt{6}}{\sin60°}=\frac{2}{\sin B}$,所以$\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$,又$b<a$,所以$B=45°$,B正确;$C=180°-60°-45°=75°$,A错误;$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times2\times(\sqrt{3}+1)\times\sin60°=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$,D错误.

12.AB

提示:①利用$c\sin B<b<c$,得满足条件的角C有2个,三角形有两个解;②利用$b\sin A<a<b$,得满足条件的角B有2个,三角形有两个解;③利用$b=c\sin B$,得$C=90°$,三角形有唯一解;④利用大角对大边,得三角形无解.

三、填空题

13.$20\sqrt{7}$ m

提示:设塔的高度为hm,则$BD=CD\tan60°=\sqrt{3}h$,$AD=h$,在△ABD中,$AB=140$,∠ADB=150°,由余弦定理得$140^2=h^2+3h^2-2h\times\sqrt{3}h\times\cos150°$,解得$h=20\sqrt{7}$(m).

14.$\frac{\sqrt{21}}{7}$,3

提示:由正弦定理得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$,所以$\sin B=\frac{2}{\sqrt{7}}\times\sin60°=\frac{\sqrt{21}}{7}$.

由余弦定理得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,即$7=4+c^2-2c$,解得$c=3$或$c=-1$(舍去).

15.$\frac{21}{13}$

提示:在△ABC中,由$\cos A=\frac{4}{5}$,$\cos C=\frac{5}{13}$,得$\sin A=\frac{3}{5}$,$\sin C=\frac{12}{13}$. 所以$\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C=\frac{63}{65}$.由正弦定理得$b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{21}{13}$.

16.$\frac{\pi}{3}$,$(2,+\infty)$

提示:因为$S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+c^2-b^2)=\frac{1}{2}ac\sin B$,

所以$\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{\sin B}{\sqrt{3}}$,

即$\cos B=\frac{\sin B}{\sqrt{3}}$,

所以$\frac{\sin B}{\cos B}=\sqrt{3}$,

即$\tan B=\sqrt{3}$,又$0<B<\frac{\pi}{2}$,

所以$B=\frac{\pi}{3}$.

所以$\frac{c}{a}=\frac{\sin C}{\sin A}=\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{3}-A\right)}{\sin A}$

$=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A-\left(-\frac{1}{2}\right)\sin A}{\sin A}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\tan A}+\frac{1}{2}$,

因为C为钝角,$B=\frac{\pi}{3}$,

所以$0<A<\frac{\pi}{6}$,

所以$\tan A\in\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$,

$\frac{1}{\tan A}\in(\sqrt{3},+\infty)$.

故$\frac{c}{a}\in(2,+\infty)$.

四、解答题

17.**解**:由正弦定理,得$\sin A=\frac{a\sin B}{b}=\frac{10\sqrt{3}\sin45°}{10\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以$A=60°$或$120°$.

当$A=60°$时,$C=180°-45°-60°=75°$,

从而$c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{10\sqrt{3}\sin75°}{\sin60°}=5(\sqrt{6}+\sqrt{2})$;

当$A=120°$时,$C=180°-45°-120°=15°$,

从而$c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{10\sqrt{3}\sin15°}{\sin120°}=5(\sqrt{6}-\sqrt{2})$.

18.**解**:因为$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-6$,

所以$bc\cos A=-6$.

又$S_{\triangle ABC}=3$,所以$bc\sin A=6$,

因此$\tan A=-1$.

又$0<A<\pi$,所以$A=\frac{3\pi}{4}$.

又$b=3$,所以$3c\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=6$,

所以$c=2\sqrt{2}$.

由余弦定理$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,

得$a^2=9+8-2\times3\times2\sqrt{2}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=29$,

所以$a=\sqrt{29}$.

19.(1)**证明**:由已知式,得$2\left(\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\sin B}{\cos B}\right)=\frac{\sin A}{\cos A\cos B}+\frac{\sin B}{\cos A\cos B}$,化简得$2(\sin A\cos B+\sin B\cos A)=\sin A+\sin B$,即$2\sin(A+B)=\sin A+\sin B$,因为$A+B+C=\pi$,所以$\sin(A+B)=\sin(\pi-C)=\sin C$,从而$\sin A+\sin B=2\sin C$,由正弦定理,得$a+b=2c$.

(2)**解**:由(1)知$c=\frac{a+b}{2}$,又$a=b$,所以$c=a$,

所以$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{a^2+b^2-a^2}{2ab}=\frac{1}{2}$,

故$\cos C=\frac{1}{2}$.

20.**解**:选择条件①:

(1)因为$a+b=11$,所以$b=11-a$.由余弦定理,得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=(11-a)^2+7^2-2(11-a)\times7\times\left(-\frac{1}{7}\right)$,解得$a=8$.

(2)在△ABC中,$b=11-a=3$,

$\sin A=\sqrt{1-\cos^2A}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$.

由正弦定理,得$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$,所以$\sin C=\frac{c\sin A}{a}=\frac{7\times\frac{4\sqrt{3}}{7}}{8}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以△ABC的面积$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times8\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$.

选择条件②:

(1)在△ABC中,因为$\cos A=\frac{1}{8}$,$\cos B=\frac{9}{16}$,所以$\sin A=\frac{3\sqrt{7}}{8}$,$\sin B=\frac{5\sqrt{7}}{16}$.

由正弦定理,可得$\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{6}{5}$,又$a+b=11$,

所以$a=6$,$b=5$.

(2)在△ABC中,$\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{3\sqrt{7}}{8}\times\frac{9}{16}+\frac{1}{8}\times\frac{5\sqrt{7}}{16}=\frac{\sqrt{7}}{4}$,

所以△ABC的面积$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times6\times5\times\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{15\sqrt{7}}{4}$.

21.**解**:(1)设角A,B,C所对的边分别为a,b,c,因为$\sin^2A-\sin^2B-\sin^2C=\sin B\sin C$,

由正弦定理可得$a^2-b^2-c^2=bc$,即$b^2+c^2-a^2=-bc$.

由余弦定理的推论,得$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\frac{bc}{2bc}=-\frac{1}{2}$.又$0<A<\pi$,所以$A=\frac{2\pi}{3}$.

(2)由题知$a=3$,又$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,所以$9=b^2+c^2+bc=(b+c)^2-bc\geqslant(b+c)^2-\left(\frac{b+c}{2}\right)^2$,

结合$b+c>3$,解得$3<b+c\leqslant2\sqrt{3}$,当且仅当$b=c$时,"="成立.所以△ABC周长的最大值为$3+2\sqrt{3}$.

22.**解**:(1)由题得$AC=10\sqrt{7}$,$CD=10$,$CE=10\sqrt{3}$,∠DCE=70°-40°=30°,

在△CDE中,由余弦定理,得$DE^2=CD^2+CE^2-2CD\cdot CE\cdot\cos\angle DCE=10^2+(10\sqrt{3})^2-2\times10\times10\sqrt{3}\times\cos30°=100$,

所以$DE=10$,

所以客轮的航行速度$v_1=10\div\frac{1}{2}=20$(n mile/h).

因为$CD=DE$,所以∠DEC=∠DCE=30°,

所以∠AEC=150°.

在△ACE中,由余弦定理,得$AC^2=AE^2+CE^2-2AE\cdot CE\cdot\cos\angle AEC$,即$(10\sqrt{7})^2=AE^2+(10\sqrt{3})^2-2AE\cdot10\sqrt{3}\cdot\cos150°$,

解得$AE=10$,或$AE=-40$(舍去).所以客轮从E处到A海岛所用的时间$t_1=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$(h).

由于小张从C岛到A岛所用的最短时间为$t_2=\frac{10\sqrt{7}}{30}=\frac{\sqrt{7}}{3}$(h),而$t_2>t_1+\frac{1}{6}$,所以小张无法乘上这班客轮.

(2)在△ABC中,$\cos\angle BAC=-\frac{4}{5}$,$\sin\angle ACB=\frac{\sqrt{5}}{5}$,可得∠ACB为锐角,$\sin\angle BAC=\frac{3}{5}$,$\cos\angle ACB=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

所以$\sin B=\sin(\angle BAC+\angle ACB)$

$=\sin\angle BAC\cos\angle ACB+\cos\angle BAC\sin\angle ACB$

$=\frac{3}{5}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}-\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{2\sqrt{5}}{25}$.

由正弦定理,得$\frac{BC}{\sin\angle BAC}=\frac{AC}{\sin B}$,

所以$BC=15\sqrt{35}$.

所以小张由C海岛直接乘小艇去往B市的总费用为$f(v)=\frac{15\sqrt{35}}{v}\left(\frac{1}{2}v^2+v+50\right)=15\sqrt{35}\left(\frac{1}{2}v+\frac{50}{v}+1\right)\geqslant15\sqrt{35}\left(2\sqrt{\frac{1}{2}v\cdot\frac{50}{v}}+1\right)=165\sqrt{35}$ $(v\in(0,30])$,

当且仅当$\frac{1}{2}v=\frac{50}{v}$,

即$v=10$时,取"=".

所以若小张由C海岛直接乘小艇去往B市,至少需要$165\sqrt{35}\approx976$元.

第25期

第3~4版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.D

2.A

提示:$\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$.

3.C

提示:$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CD}+(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD})=2\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CA}$.

4.B

提示:因为$4=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\geqslant|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})|=2|\boldsymbol{b}|$,所以$|\boldsymbol{b}|\leqslant2$.故选B.

5.D

提示:由已知,得$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cdot\cos60°=\frac{1}{2}$.所以$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{b}^2=\frac{5}{2}$,$(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=2$,$(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}^2=-\frac{3}{2}$,$(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}^2=0$.

所以$(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$.故选D.

6.B

提示:由已知,得$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(2-\lambda)\boldsymbol{a}-(1+\mu)\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

因为A,B,C三点共线,所以$\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{BC}$,得$2-\lambda=-(1+\mu)$,所以$\lambda=\mu+3$.

7.A

提示:设向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为θ.

由$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$,得$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-4\boldsymbol{b}^2=0$,所以$|\boldsymbol{a}|=2|\boldsymbol{b}|$.

由$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})$,得$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{b}^2=4|\boldsymbol{b}|^2+8|\boldsymbol{b}|^2\cos\theta+3|\boldsymbol{b}|^2=0$,解得$\cos\theta=-\frac{7}{8}$.

8.C

提示:由已知可得$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot(-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})=\boldsymbol{c}^2-\boldsymbol{a}^2>0$,

$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\cdot(-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2<0$,

所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}>\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.故$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$最小.

二、多项选择题

9.BD

提示:$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=0$,$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BA}$,$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}=0$.故选BD.

10.AB

提示:对于A,有$2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}=-2(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$,即$\boldsymbol{b}=-4\boldsymbol{a}$,所以$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$共线;对于B,取$\mu\neq0$,且$\lambda\neq\mu$,由$\lambda\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{b}=0$,可得$\boldsymbol{b}=\frac{\lambda}{\mu}\boldsymbol{a}$,所以$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$共线;对于C,当$x=y=0$时,$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$不一定共线;对于D,因为$AB$与$CD$不一定平行,所以$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$不一定共线.故选AB.

11.CD

提示:因为$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AP}$,所以$\overrightarrow{PA}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$,$\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}-\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$,$\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}-\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$.所以$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}\neq0$,A错误;$\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}-\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}\neq0$,B错误;C显然正确;$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}-\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}=0$,D正确.故选CD.

12.ABC

提示:正八边形ABCDEFGH被分成8个全等的等腰三角形,等腰三角形的顶角$\theta=\frac{360°}{8}=45°$,则$\angle BOD=2\theta=90°$,即$HD\perp BF$,所以$\overrightarrow{HD}\cdot\overrightarrow{BF}=0$,A正确;因为$\angle AOD=3\theta=135°$,所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}=1\times1\times\cos135°=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,B正确;因为B、O、H三点分别在边长为1的正方形的三个顶点,且其中一条对角线与OA共线,所以$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OH}=\sqrt{2}\cdot\overrightarrow{OA}=-\sqrt{2}\cdot\overrightarrow{OE}$,C正确;$|\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{FH}|=|\overrightarrow{FA}|$,在等腰△AOF中,OA=OF=1,∠AOF=135°,则$FA^2=2\sin\frac{135°}{2}=2\sqrt{\frac{1-\cos135°}{2}}=2+\sqrt{2}$,所以$|\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{FH}|=|\overrightarrow{FA}|=\sqrt{2+\sqrt{2}}$,D错误.故选ABC.

三、填空题

13.$\overrightarrow{OC}$,$\overrightarrow{FO}$,$\overrightarrow{ED}$

14.$\boldsymbol{b}_6$

提示:因为$\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_7}=\boldsymbol{0}$,所以$\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_5+\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{b}_5+\boldsymbol{b}_7=\overrightarrow{A_2A_3}+\overrightarrow{A_5A_6}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_5}+\overrightarrow{OA_7}=(\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{A_2A_3})+(\overrightarrow{OA_5}+\overrightarrow{A_5A_6})+\overrightarrow{OA_7}=\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_6}+\overrightarrow{OA_7}=\overrightarrow{OA_6}=\boldsymbol{b}_6$.

15.$\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$

提示:由题设可得$B=30°$,$AD\perp BC$,所以$\overrightarrow{BD}$在$\overrightarrow{BA}$上的投影向量为$|\overrightarrow{BD}|\cdot\cos30°\cdot\frac{\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BA}|}=(\cos30°)^2\overrightarrow{BA}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$.

16.2,$\sqrt{3}$

提示:$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\frac{\pi}{3}=1$,所以$|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}^2}=2$,$|\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{t^2+2t+4}=\sqrt{(t+1)^2+3}$,所以$t=-1$时,$|\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}|$取得最小值$\sqrt{3}$.

四、解答题

17.**解**:如图1所示,在平面内任取一点O,作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$,$\overrightarrow{CB}=-\boldsymbol{b}$,则$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$;

如图2所示,在平面内任取一点O,作$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$,则$\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$,作$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{a}$,则$\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$.

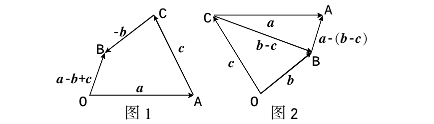


图1　图2

(第17题图)

18.(1)**解**:由题设,可得$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BA}=-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}=\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})-(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BA})=\frac{5}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AO}=\frac{5}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$.

(2)**证明**:因为$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OC}=\frac{4}{5}(-\boldsymbol{b})+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{5}\boldsymbol{b}=\frac{3}{5}\overrightarrow{CD}$,所以$\overrightarrow{CE}$与$\overrightarrow{CD}$共线.

又$\overrightarrow{CE}$与$\overrightarrow{CD}$有公共点C,所以C,D,E三点共线.

19.(1)**证明**:由已知,得$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{e}_1-4\boldsymbol{e}_2$,

所以$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{BD}$,

所以$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BD}$共线,且有公共点B,所以A,B,D三点共线.

(2)**解**:因为$\overrightarrow{BF}\parallel\overrightarrow{BD}$,所以存在实数$\lambda$,使得$\overrightarrow{BF}=\lambda\overrightarrow{BD}$,即$3\boldsymbol{e}_1-k\boldsymbol{e}_2=\lambda(\boldsymbol{e}_1-4\boldsymbol{e}_2)$,所以$\begin{cases}3=\lambda,\\-k=-4\lambda,\end{cases}$解得$k=12$.

20.**解**:(1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}\times1\times\frac{\sqrt{2}}{2}=1$.

因为$\boldsymbol{a}\perp(x\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$,所以$\boldsymbol{a}\cdot(x\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=x\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2x+1=0$,解得$x=-\frac{1}{2}$.

(2)设$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为θ,

则$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\sqrt{2}\times1\times\cos\theta=\sqrt{2}\cos\theta$.

因为$|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|\geqslant|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$恒成立,所以$(\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b})^2\geqslant(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2$恒成立,即$\boldsymbol{a}^2+2x\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+x^2\boldsymbol{b}^2\geqslant\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$恒成立,

整理得$x^2+2\sqrt{2}x\cos\theta-2\sqrt{2}\cos\theta-1\geqslant0$恒成立,

所以$\Delta=(2\sqrt{2}\cos\theta)^2+4(2\sqrt{2}\cos\theta+1)\leqslant0$,

解得$\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.又$\theta\in[0,\pi]$,所以$\theta=\frac{3\pi}{4}$.

21.**解**:(1)$|\overrightarrow{BC}|^2=(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})^2=\overrightarrow{AC}^2-2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}^2=1-2\times1\times1\times\cos120°+1=3$,所以$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{3}$.

因为$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{BC})$,所以$|\overrightarrow{BE}|^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{BO}^2+2\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}^2)=\frac{1}{4}(1+2\times1\times\sqrt{3}\times\cos30°+3)=\frac{7}{4}$,所以$|\overrightarrow{BE}|=\frac{\sqrt{7}}{2}$.

(2)取BE的中点N,连接MN,因为$ME=MB$,所以$MN\perp BE$.所以$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BE}\cdot(\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{NM})=\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{NM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BE}^2=\frac{7}{8}$.

22.**解**:(1)由点P,Q是线段AB的三等分点,得$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$,

同理可得$\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$,所以$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.

(2)结论:如果点$A_1,A_2,\cdots,A_{n-1}$是AB的n等分点,则$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_{n-1}}=\frac{n-1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

证明如下:先证明:$\overrightarrow{OA_k}+\overrightarrow{OA_{n-k}}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ $(1\leqslant k\leqslant n-1,n,k\in\mathbf{N}_+)$.

由$\overrightarrow{OA_k}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AA_k}$,$\overrightarrow{OA_{n-k}}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA_{n-k}}$,而$\overrightarrow{AA_k}+\overrightarrow{BA_{n-k}}=\boldsymbol{0}$,所以$\overrightarrow{OA_k}+\overrightarrow{OA_{n-k}}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.

记$S=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_{n-2}}+\overrightarrow{OA_{n-1}}$,则$S=\overrightarrow{OA_{n-1}}+\overrightarrow{OA_{n-2}}+\cdots+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_1}$.

两式相加,得$2S=(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_{n-1}})+(\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_{n-2}})+\cdots+(\overrightarrow{OA_{n-1}}+\overrightarrow{OA_1})=(n-1)\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$,

所以$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_{n-1}}=\frac{n-1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

第26期

第3~4版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.B

提示:$2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=2(1,-1)+(-1,2)=(1,0)$.

2.D

提示:由已知得$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-2,1)$,又$\boldsymbol{a}=(2,3)$,所以$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=-2\times2+1\times3=-1<0$,所以向量$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$的夹角是钝角.

3.D

提示:因为$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$是平面内的一组基底,所以$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$不共线.因为$-2(3\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2)=4\boldsymbol{e}_2-6\boldsymbol{e}_1$,所以$3\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$和$4\boldsymbol{e}_2-6\boldsymbol{e}_1$共线.所以$3\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$和$4\boldsymbol{e}_2-6\boldsymbol{e}_1$不能作为基底.故选D.

4.A

提示:由$\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$,得B是CD的中点,所以$\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$,所以$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.

5.D

提示:$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=(-1,1)$,

所以AD的长为$|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{2}$.

6.D

提示:由题设,得$2k-1-4k=0$,

解得$k=-\frac{1}{2}$,所以$\boldsymbol{m}=\left(-2,-\frac{1}{2}\right)$.

所以$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=-2\times4+\left(-\frac{1}{2}\right)\times1=-\frac{17}{2}$.

7.A

提示:$(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON})^2=|\overrightarrow{OM}|^2+2|\overrightarrow{OM}|\cdot|\overrightarrow{ON}|\cos\angle MON+|\overrightarrow{ON}|^2=2+2\cos\angle MON$.由题设,可得$\angle MON\in(90°,180°]$,

所以$\cos\angle MON\in[-1,0)$,$(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON})^2\in[0,2)$,

所以$|\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}|\in[0,\sqrt{2})$.

8.A

提示:因为D,P,E三点共线,所以可设$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AD}+(1-t)\overrightarrow{AE}=t(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})+(1-t)(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE})=t\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)+(1-t)\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\right)=\left(1-\frac{1}{2}t\right)\overrightarrow{AB}+\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}t\right)\cdot\overrightarrow{BC}$ $(0\leqslant t\leqslant1)$.又$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{BC}$,

可得$\begin{cases}1-\frac{1}{2}t=\lambda,\\\frac{1}{3}+\frac{2}{3}t=\mu,\end{cases}$

所以$\lambda^2+\mu=\left(1-\frac{1}{2}t\right)^2+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}t=\frac{1}{4}\left(t-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{11}{9}$.

故当$t=\frac{2}{3}$时,$\lambda^2+\mu$取得最小值为$\frac{11}{9}$.

二、多项选择题

9.AD

提示:设点$P(x,y)$.当$\lambda=\frac{1}{2}$时,$x=\frac{0+\frac{1}{2}\times4}{1+\frac{1}{2}}=\frac{4}{3}$,$y=\frac{1+\frac{1}{2}\times4}{1+\frac{1}{2}}=2$,

⑦ 所以$P\left(\frac{4}{3},2\right)$.

当$\lambda=2$时,$x=\frac{0+2\times4}{1+2}=\frac{8}{3}$,$y=\frac{1+2\times4}{1+2}=3$,

所以$P\left(\frac{8}{3},3\right)$.故选AD.

10.BCD

提示:当A=90°时,$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2+3k=0$,解得$k=-\frac{2}{3}$;

当$B=90°$时,$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(-1,k-3)$,则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-2+3(k-3)=0$,解得$k=\frac{11}{3}$;

当$C=90°$时,$\overrightarrow{BC}=(-1,k-3)$,$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=-1+k(k-3)=0$,解得$k=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$或$k=\frac{3-\sqrt{13}}{2}$.故选BCD.

11.ABD

提示:由题意可得,$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$,故A正确;

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$,

故B正确;

$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}=-\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}=-\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\left(\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}\right)=-\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$,故C错误;

$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\frac{1}{4}\boldsymbol{a}=-\frac{1}{4}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,故D正确.

故选ABD.

12.AC

提示:$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}+\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=(1-\lambda)\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}$.

因为$\overrightarrow{OP}$与$\overrightarrow{OC}$共线,且$\overrightarrow{OC}=\mu\overrightarrow{OA}+3\mu\overrightarrow{OB}$,

所以$\frac{1-\lambda}{\mu}=\frac{\lambda}{3\mu}$,解得$\lambda=\frac{3}{4}$,故C正确,D错误;

当P为OC的中点时,$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$,则$\frac{1-\lambda}{\mu}=\frac{\lambda}{3\mu}=\frac{1}{2}$,解得$\mu=\frac{1}{2}$,故A正确,B错误.故选AC.

三、填空题

13.5

提示:由已知,得$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=m+1-(2m-4)=0$,解得$m=5$.

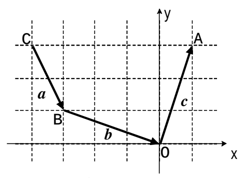
14.(2,6)

提示:设$D(x,y)$,由已知,得$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$,即$(4,1)=(6-x,7-y)$,解得$x=2$,$y=6$.所以$D(2,6)$.

15.0

提示:建立如图所示的平面直角坐标系,则$\boldsymbol{a}=(1,-2)$,$\boldsymbol{b}=(3,-1)$,$\boldsymbol{c}=(1,3)$.

因为$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}+\mu\boldsymbol{c}$,所以$(1,-2)=(3\lambda+\mu,-\lambda+3\mu)$,可得$3\lambda+\mu=1$,且$-\lambda+3\mu=-2$,解得$\lambda=\frac{1}{2}$,$\mu=-\frac{1}{2}$.所以$\lambda+\mu=0$.



(第15题图)

16.$-\frac{9}{4}$

提示:因为A,P,D三点共线,所以存在$x\in(0,1)$,使得$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AD}=x(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})=x\left(\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}\right)=x\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}x(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{3}x\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}x\overrightarrow{AC}$.

又$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$,可得$\lambda=\frac{1}{3}x$,$\mu=\frac{2}{3}x$,

所以$2\lambda+3\mu=\frac{8}{3}x=1$,解得$x=\frac{3}{8}$.

所以$\overrightarrow{PA}=-\overrightarrow{AP}=-\frac{1}{8}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$,$\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB}=\frac{7}{8}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

所以$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$

$=\left(-\frac{1}{8}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(\frac{7}{8}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\right)$

$=-\frac{7}{64}\overrightarrow{AB}^2-\frac{3}{16}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{1}{16}\overrightarrow{AC}^2$

$=-\frac{7}{64}\times4^2-\frac{3}{16}\times4\times4\times\cos60°+\frac{1}{16}\times4^2$

$=-\frac{9}{4}$.

四、解答题

17.(1)**证明:**根据题意,得$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$为非零向量,假设$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$共线,则$\exists k\in\mathbf{R}$,使得$\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}$,即$\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2=k(\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2)$,所以$(1-k)\cdot\boldsymbol{e}_1+(3+2k)\boldsymbol{e}_2=\mathbf{0}$.因为$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$不共线,所以$\begin{cases}1-k=0,\\3+2k=0,\end{cases}$该方程组无实数解.所以$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$共线不成立,即$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$不共线,所以$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$可以作为一组基底.

(2)**解:**设$\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}=x(\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2)+y(\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2)=(x+y)\boldsymbol{e}_1+(3y-2x)\boldsymbol{e}_2$,其中$x,y\in\mathbf{R}$,

又$\boldsymbol{c}=3\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$,由平面向量基本定理,得$\begin{cases}x+y=3,\\3y-2x=-1,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=2,\\y=1.\end{cases}$所以$\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

18.**解:**(1)由$\boldsymbol{a}=(1,3)$,得$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$.

(2)由$\boldsymbol{a}=(1,3)$,$\boldsymbol{b}=(-2,1)$,得$\boldsymbol{m}=\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(5,1)$,$\boldsymbol{n}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\left(-\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$.

(3)由(2)知,$\boldsymbol{m}=(5,1)$,$\boldsymbol{n}=\left(-\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$,因为$5\times\frac{5}{2}-1\times\left(-\frac{3}{2}\right)=14\neq0$,所以向量$\boldsymbol{m}$与$\boldsymbol{n}$不平行.

19.**解:**(1)设$\boldsymbol{a}=(x,y)$,则$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x-2,y-1)$.因为$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$平行于$x$轴,所以$y-1=0$,解得$y=1$.

又$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=1$,所以$\sqrt{(x-2)^2+0}=1$,解得$x=3$或$x=1$.

所以$\boldsymbol{a}=(3,1)$或$(1,1)$.

(2)由$\boldsymbol{b}=(-2,-1)$,得$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{5}$.又$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2}$,

所以$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+5=1$,得$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-3$.

所以$(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=4\boldsymbol{a}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=8+12+5=25$,

故$|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=5$.

20.**解:**(1)过点D作$DF/\!/BC$,交AE于点F,

则DF是$\triangle ABE$的中位线,所以$AF=FE$,$DF=\frac{1}{2}BE$.

又$CE=2BE$,所以$DF=\frac{1}{4}CE$,所以$FP=\frac{1}{4}EP$,

所以$AF:FP:PE=5:1:4$.

所以$\overrightarrow{AP}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AE}=\frac{3}{5}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE})=\frac{3}{5}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$.

所以$m=\frac{2}{5}$,$n=\frac{1}{5}$,所以$m-n=\frac{1}{5}$.

(2)结合(1)可知,$\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AP}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}-\frac{4}{5}\overrightarrow{AC}$,

所以$|\overrightarrow{CP}|^2=\left|\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}-\frac{4}{5}\overrightarrow{AC}\right|^2=\frac{4}{25}|\overrightarrow{AB}|^2-\frac{16}{25}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{16}{25}|\overrightarrow{AC}|^2=\frac{4}{25}\times9-\frac{16}{25}\times3\times2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{16}{25}\times4=\frac{148}{25}$,

所以$|\overrightarrow{CP}|=\frac{2\sqrt{37}}{5}$.

21.**解:**(1)由题意可得$\overrightarrow{OA}=(6,0)$,$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}=(3,0)$,$\overrightarrow{CO}=(-1,-\sqrt{3})$,$\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OM}=(2,-\sqrt{3})$,

故$\cos\angle OCM=\frac{\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{CM}}{|\overrightarrow{CO}|\cdot|\overrightarrow{CM}|}=\frac{\sqrt{7}}{14}$.

(2)设$P(t,\sqrt{3})$,其中$1\leqslant t\leqslant5$,则$\overrightarrow{OA}-\lambda\overrightarrow{OP}=(6-\lambda t,-\sqrt{3}\lambda)$.又$\overrightarrow{CM}=(2,-\sqrt{3})$,若$(\overrightarrow{OA}-\lambda\overrightarrow{OP})\perp\overrightarrow{CM}$,则$(\overrightarrow{OA}-\lambda\overrightarrow{OP})\cdot\overrightarrow{CM}=12-2\lambda t+3\lambda=0$,

可得$(2t-3)\lambda=12$.

当$t\neq\frac{3}{2}$时,λ存在,此时,$\lambda=\frac{12}{2t-3}$,因为$t\in\left[1,\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2},5\right]$,故$\lambda$的取值范围为$(-\infty,-12]\cup\left[\frac{12}{7},+\infty\right)$.

22.**解:**(1)$\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AQ}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$,$\overrightarrow{CR}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AR}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.

(2)由$\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{AC}+\mu\overrightarrow{CR}$,

结合(1)可得$\overrightarrow{AB}+\lambda\left(-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{AC}+\mu\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)$,

即$(1-\lambda)\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\lambda\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\mu\overrightarrow{AB}+(1-\mu)\overrightarrow{AC}$,

所以$\begin{cases}1-\lambda=\frac{1}{3}\mu,\\\frac{1}{2}\lambda=1-\mu,\end{cases}$解得$\begin{cases}\lambda=\frac{4}{5},\\\mu=\frac{3}{5}.\end{cases}$

(3)设$\overrightarrow{BP}=m\overrightarrow{BC}$,$\overrightarrow{AP}=n\overrightarrow{AI}$,由(2)知$\overrightarrow{AI}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$,因为$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{BA}$,所以$n\overrightarrow{AI}=m\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}$,

即$\frac{1}{5}n\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}n\overrightarrow{AC}=m(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{AB}=(1-m)\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{AC}$.因为$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$不共线,

所以$\begin{cases}\frac{1}{5}n=1-m,\\\frac{2}{5}n=m,\end{cases}$解得$\begin{cases}m=\frac{2}{3},\\n=\frac{5}{3},\end{cases}$

所以$\overrightarrow{BP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$,即$\frac{BP}{PC}=2$,

所以点P是BC上靠近点C处的三等分点.

第27期

第3~4版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.A

提示:由向量的平行四边形法则,可得$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=(3,1)$,所以点$B$的坐标为$(3,1)$.

2.A

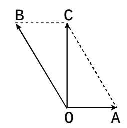
提示:$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3=(8,0)$.

3.A

提示:为使航向垂直河岸,静水速度$\boldsymbol{v}_1$需斜向上游方向,所以$|\boldsymbol{v}_1|=\sqrt{12^2+5^2}=13$(m/s).

4.B

提示:如图所示,设$\overrightarrow{OA}$表示水流速度,$\overrightarrow{OB}$表示船在静水中的速度,$\overrightarrow{OC}$表示船的实际速度,则$|\overrightarrow{OA}|=2$,$|\overrightarrow{OB}|=4$,$\angle AOB=120°$,所以$\angle CBO=60°$,可得$\angle AOC=90°$,所以$|\overrightarrow{OC}|=2\sqrt{3}$.所以该船的实际航程为$2\sqrt{3}\times\sqrt{3}=6$(km).



(第4题图)

5.B

提示:由已知,得$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=8\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=2\overrightarrow{BC}$,所以$AD/\!/BC$,且$AD\neq BC$,则四边形$ABCD$是梯形.

6.C

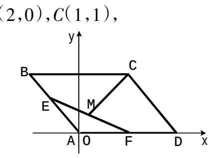
提示:由$\frac{\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$,可得$|\overrightarrow{AO}|\cos\angle OAB=|\overrightarrow{AO}|\cos\angle OAC$,所以$\angle OAB=\angle OAC$,即AO平分$\angle BAC$.由$\frac{\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|}=\frac{\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CB}|}$,同理可得CO平分$\angle ACB$.所以点O是$\triangle ABC$的内心.

7.A

提示:由题得$\overrightarrow{AB}=(-\sqrt{3},1)$,$\theta=-\frac{4\pi}{3}$,设$P(x',y')$,则$x'=-\sqrt{3}\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right)-\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$,$y'=-\sqrt{3}\cdot\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)+\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right)=-2$.所以$P(\sqrt{3},-2)$.

8.B

提示:建立如图所示平面直角坐标系,可得$A(0,0)$,$B(-1,1)$,$D(2,0)$,$C(1,1)$,



(第8题图)

则$\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AB}=(-\lambda,\lambda)$,得$E(-\lambda,\lambda)$;$\overrightarrow{AF}=\mu\overrightarrow{AD}=(2\mu,0)$,得$F(2\mu,0)$,

所以$M\left(\frac{2\mu-\lambda}{2},\frac{\lambda}{2}\right)$.又$4\lambda+\mu=1$,

故$|\overrightarrow{MC}|^2=\left(\frac{2\mu-\lambda}{2}-1\right)^2+\left(\frac{\lambda}{2}-1\right)^2=\left(\frac{9\lambda}{2}\right)^2+\left(\frac{\lambda-2}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(82\lambda^2-4\lambda+4)$.

当$\lambda=\frac{1}{41}$时,$|\overrightarrow{MC}|^2$取到最小值,即$|\overrightarrow{MC}|$取到最小值,此时$\mu=1-\frac{4}{41}=\frac{37}{41}$,故$\frac{\mu}{\lambda}$的最小值为37.

二、多项选择题

9.ABC

提示:若$\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{AB}$,因为$\overrightarrow{OB}=(1,1)$,$\overrightarrow{AB}=(1,1-b)$,所以$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AB}=1+1-b=0$,所以$b=2$.若$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{AB}$,同理可得$b=0$(舍去),或$b=1$.若$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$,同理可得$b=0$(舍去).故选ABC.

10.ABD

提示:由已知,得$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(-3,4)$,$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(t+2,t-5)$.因为点$A,B,C$能构成三角形,所以$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$不共线,可得$-3(t-5)-4(t+2)\neq0$,解得$t\neq1$.结合选项可知选ABD.

11.BD

提示:由$\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PC}=0$,可知P为线段AC的三等分点;由$\overrightarrow{QA}=2\overrightarrow{QB}$,可知B为线段AQ的中点,则PB与CQ显然不平行,A错误;$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA})=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$,B正确;$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PC}|\cos180°<0$,C错误;由$S_{\triangle ABC}=3$,$\frac{S_{\triangle BCP}}{S_{\triangle ABP}}=\frac{1}{2}$,得$S_{\triangle ABP}=2$,$S_{\triangle BCP}=1$,又$S_{\triangle ABP}=S_{\triangle BPQ}=2$,所以$S_{\triangle APQ}=4$,D正确.

12.AD

提示:由题得$|\boldsymbol{G}|=|\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2|$,所以$|\boldsymbol{G}|^2=|\boldsymbol{F}_1|^2+|\boldsymbol{F}_2|^2+2|\boldsymbol{F}_1||\boldsymbol{F}_2|\cos\theta=2|\boldsymbol{F}_1|^2\cdot(1+\cos\theta)$,解得$|\boldsymbol{F}_1|^2=\frac{|\boldsymbol{G}|^2}{2(1+\cos\theta)}$.由题意知$\theta\in(0,\pi)$时,$y=\cos\theta$单调递减,所以$|\boldsymbol{F}_1|^2$单调递增,即$\theta$越大越费力,$\theta$越小越省力,A正确;B错误;当$\theta=\frac{\pi}{2}$时,可得$|\boldsymbol{F}_1|=\frac{\sqrt{2}}{2}|\boldsymbol{G}|$,C错误;当$\theta=\frac{2\pi}{3}$时,可得$|\boldsymbol{F}_1|=|\boldsymbol{G}|$,D正确.

三、填空题

13.$4\sqrt{5}$

提示:船实际航行的速度的大小$v=\sqrt{4^2+8^2}=4\sqrt{5}$(km/h).

14.$\sqrt{5}$ N

提示:因为$\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2$成90°角,所以$\boldsymbol{F}_1\cdot\boldsymbol{F}_2=0$.

所以$|\boldsymbol{F}_3|=|\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2|=\sqrt{\boldsymbol{F}_1^2+\boldsymbol{F}_2^2+2\boldsymbol{F}_1\cdot\boldsymbol{F}_2}=\sqrt{5}$ N.

15.$\frac{5}{2}$

提示:以O为坐标原点,$\overrightarrow{OA}$所在直线为x轴,建立平面直角坐标系,可得$O(0,0)$,$A(1,0)$,$B(-1,\sqrt{3})$,$C\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.由$\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$,

得$\begin{cases}\frac{3}{2}=x-y,\\\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}y,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=2,\\y=\frac{1}{2},\end{cases}$

所以$x+y=\frac{5}{2}$.

16.$\frac{\sqrt{7}}{2}$

提示:由$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}$,$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CF}$,且$E,F$分别是$AD,BC$的中点,

得$2\overrightarrow{EF}=(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{ED})+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})+(\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CF})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$.易知$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{DC}$的夹角为180°-75°-45°=60°,

所以$|\overrightarrow{EF}|^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DC}^2)=\frac{1}{4}(1^2+2\times1\times2\times\cos60°+2^2)=\frac{7}{4}$,所以$|\overrightarrow{EF}|=\frac{\sqrt{7}}{2}$.

四、解答题

17.(1)**证明:**由题得$\overrightarrow{CA}=(2,3)$,$\overrightarrow{CB}=(-3,2)$,则$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=2\times(-3)+3\times2=0$,所以$\overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{CB}$.所以$\triangle ABC$是直角三角形.

又$|\overrightarrow{CA}|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$,$|\overrightarrow{CB}|=\sqrt{(-3)^2+2^2}=\sqrt{13}$,所以$|\overrightarrow{CA}|=|\overrightarrow{CB}|$.所以$\triangle ABC$是等腰直角三角形.

(2)**解:**因为B是线段AP的中点,所以$\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{AB}$.

设点$P(x,y)$,则$\overrightarrow{AP}=(x-3,y-2)$,又$\overrightarrow{AB}=(-5,-1)$,可得$x-3=2\times(-5)$且$y-2=2\times(-1)$,

解得$x=-7$,$y=0$,即$P(-7,0)$.

所以$\overrightarrow{PA}=(10,2)$,$\overrightarrow{PC}=(8,-1)$.

所以$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=78$,$|\overrightarrow{PA}|=2\sqrt{26}$,$|\overrightarrow{PC}|=\sqrt{65}$.

所以$\cos\angle APC=\frac{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PC}|}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

18.(1)**解:**由$2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\mathbf{0}$,得$2(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})=\mathbf{0}$,化简并整理,可得$\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$.

(2)**证明:**由$2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\mathbf{0}$,得$2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$,所以A是BC的中点.

又D是OB的中点,所以$\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$,所以$DA/\!/OC$,且$DA\neq OC$.

所以四边形$OCAD$是梯形.

19.**解:**以三个力的作用点为原点,正东方向为x轴正半轴,建立平面直角坐标系.

由已知可得$\boldsymbol{F}_1=(1,\sqrt{3})$,$\boldsymbol{F}_2=(2\sqrt{3},2)$,$\boldsymbol{F}_3=(-3,3\sqrt{3})$.

所以$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3=(2\sqrt{3}-2,4\sqrt{3}+2)$.

又位移$\boldsymbol{s}=(4\sqrt{2},4\sqrt{2})$,

所以$W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}=(2\sqrt{3}-2)\times4\sqrt{2}+(4\sqrt{3}+2)\times4\sqrt{2}=24\sqrt{6}$.

答:合力$\boldsymbol{F}$所做的功为$24\sqrt{6}$ J.

20.**解:**(1)$\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2=(1,1)$,$3\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2=(3,2)$.

设经过ts后$P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,

则$\overrightarrow{P_0P}=(x_1+1,y_1-2)=t(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)=(t,t)$,$\overrightarrow{Q_0Q}=(x_2+2,y_2+1)=t(3\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2)=(3t,2t)$.

从而可得$x_1=t-1$,$y_1=t+2$,$x_2=3t-2$,$y_2=2t-1$.

所以$\overrightarrow{PQ}=(x_2-x_1,y_2-y_1)=(2t-1,t-3)$.

所以$|\overrightarrow{PQ}|^2=(2t-1)^2+(t-3)^2=5t^2-10t+10=5(t-1)^2+5$.

所以当$t=1$时,$|\overrightarrow{PQ}|^2$取得最小值5.所以出发1s后$|\overrightarrow{PQ}|$最小,最小值是$\sqrt{5}$.

(2)由(1)知$\overrightarrow{PQ}=(2t-1,t-3)$,又$\overrightarrow{P_0Q_0}=(-1,-3)$,所以$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{P_0Q_0}=1-2t-3(t-3)=-5t+10$.

当$\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{P_0Q_0}$时,有$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{P_0Q_0}=-5t+10=0$,解得$t=2$.所以出发2s后$\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{P_0Q_0}$.

21.(1)**解:**由题意,得$M\left(0,\frac{1}{2}\right)$,$N\left(2,\frac{1}{2}\right)$.

所以$\overrightarrow{MP}=\left(t,\frac{1}{2}\right)$,$\overrightarrow{NP}=\left(t-2,\frac{1}{2}\right)$.

因为$MP\perp NP$,

所以$\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{NP}=t(t-2)+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=0$,

解得$t=\frac{2\pm\sqrt{3}}{2}$.

(2)**证明:**设$R(x,y)$,

则$\overrightarrow{MR}=\left(x,y-\frac{1}{2}\right)$.

因为$\overrightarrow{MP}$与$\overrightarrow{MR}$共线,

所以$t\left(y-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}x=0$. ①

又$\overrightarrow{QN}=\left(2-t,\frac{1}{2}\right)$,

$\overrightarrow{NR}=\left(x-2,y-\frac{1}{2}\right)$,$\overrightarrow{QN}$与$\overrightarrow{NR}$共线,

所以$(2-t)\left(y-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}(x-2)=0$. ②

联立①②,解得$x=\frac{t}{t-1}$,$y=\frac{t}{2t-2}$.

所以$\overrightarrow{AR}=\left(\frac{t}{t-1},\frac{t}{2t-2}\right)$.

又$\overrightarrow{AC}=(2,1)$,$\frac{t}{t-1}\cdot1-\frac{t}{2t-2}\cdot2=0$,

所以$\overrightarrow{AR}$与$\overrightarrow{AC}$共线.

因为$\overrightarrow{AR}$与$\overrightarrow{AC}$有公共点A,

所以R,A,C三点共线.

22.**解:**(1)$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$,

又$\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$,所以$x=\frac{1}{3}$,$y=\frac{2}{3}$.

(2)由$\overrightarrow{BP}$与$\overrightarrow{AD}$共线,可设$\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{AD}$,$\lambda\in\mathbf{R}$.

因为$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$,所以$\overrightarrow{BP}=\frac{\lambda}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2\lambda}{3}\overrightarrow{AC}$.

所以$\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{AB}=-\left(\frac{\lambda}{3}+1\right)\overrightarrow{AB}-\frac{2\lambda}{3}\cdot\overrightarrow{AC}$,$\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AC}=-\left(\frac{\lambda}{3}+1\right)\overrightarrow{AB}+\left(1-\frac{2\lambda}{3}\right)\overrightarrow{AC}$.

所以$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=\left(\frac{\lambda}{3}+1\right)^2|\overrightarrow{AB}|^2+\left(\frac{\lambda}{3}+1\right)\left(\frac{4\lambda}{3}-1\right)\cdot\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\frac{2\lambda}{3}\left(1-\frac{2\lambda}{3}\right)\cdot|\overrightarrow{AC}|^2$. ①

因为$AB=2$,$AC=5$,$\cos\angle CAB=\frac{3}{5}$,所以$|\overrightarrow{AB}|^2=4$,$|\overrightarrow{AC}|^2=25$,$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=6$. ②

把②代入①并整理,

得$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=\frac{128}{9}\lambda^2-8\lambda-2$.

因为$\overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{PC}$,所以$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=0$,

即$\frac{128}{9}\lambda^2-8\lambda-2=0$,

解得$\lambda_1=\frac{3}{4}$,$\lambda_2=-\frac{3}{16}$,

所以$\frac{|\overrightarrow{BP}|}{|\overrightarrow{AD}|}=|\lambda|=\frac{3}{4}$或$\frac{3}{16}$.

第28期

第3~4版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.A

提示:由已知得$\cos C=2\cos^2\frac{C}{2}-1=2\times\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2-1=-\frac{3}{5}$,所以$AB^2=BC^2+AC^2-2BC\cdot AC\cdot\cos C=1^2+5^2-2\times1\times5\times\left(-\frac{3}{5}\right)=32$,所以$AB=4\sqrt{2}$.

2.A

提示:由余弦定理,得$AB^2=BC^2+AC^2-2BC\cdot AC\cdot\cos C$,即$(\sqrt{13})^2=3^2+AC^2-2\times3\times AC\times\cos120°$,解得$AC=1$.

3.B

提示:由正弦定理得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$,又$\frac{b}{\sqrt{3}\cos B}=\frac{a}{\sin A}$,所以$\sin B=\sqrt{3}\cos B$,即$\tan B=\sqrt{3}$.又$0<B<\pi$,所以$B=\frac{\pi}{3}$,所以$\cos B=\frac{1}{2}$.

4.D

提示:由已知式结合正弦定理可得$2\sin B\cos B=\sin A\cos C+\sin C\cos A=\sin(A+C)=\sin B\Rightarrow\cos B=\frac{1}{2}\Rightarrow B=\frac{\pi}{3}$.

5.D

提示:由$\lg b+\lg\frac{1}{c}=\lg\frac{b}{c}=-\lg\sqrt{2}=\lg\frac{\sqrt{2}}{2}$,

得$\frac{b}{c}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,即$c=\sqrt{2}b$.

由$\lg\sin A=-\lg\sqrt{2}$,得$\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$,又A为锐角,所以$A=45°$.

由余弦定理,得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+(\sqrt{2}b)^2-2b\cdot\sqrt{2}b\cos45°=b^2$,

所以$a=b$.

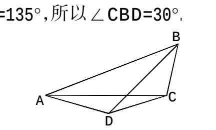
故$B=A=45°$,$C=90°$.故$\triangle ABC$是等腰直角三角形.

6.B

提示:设A船在C处追上B船,BC=x,则$AC=\sqrt{2}x$,在$\triangle ABC$中,B=135°,由正弦定理,得$\frac{BC}{\sin\angle BAC}=\frac{AC}{\sin B}$,所以$\sin\angle BAC=\frac{BC\sin B}{AC}=\frac{1}{2}$,所以$\angle BAC=30°$,可得A船行驶的角度为南偏西45°-30°=15°.

7.D

提示:如图,在$\triangle BCD$中,CD=80,$\angle BDC=15°$,$\angle BCD=120°+15°=135°$,所以$\angle CBD=30°$.



(第7题图)