第32期

第2~3版专题检测参考答案

一、选择题

1~6.ABDDBC　　7~12.ABBACD

二、填空题

13.$\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{3}=1$　　14.$2\sqrt{5}-1$

15.$\left(\frac{1}{3},1\right)$　　16.$0,\frac{25}{3}$

三、解答题

17.**解**:(1)由题意,得圆心在直线$y=-3$上,联立$\begin{cases}y=-3,\\2x-y-7=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=2,\\y=-3,\end{cases}$则圆心C的坐标为$(2,-3)$,则圆C的半径$r=\sqrt{(2-0)^2+(-3+2)^2}=\sqrt{5}$,所以圆C的方程为$(x-2)^2+(y+3)^2=5$.

(2)因为圆心$C(2,-3)$到直线$2x-y-1=0$的距离为$d=\frac{|4+3-1|}{\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$,圆C的半径为$\sqrt{5}$,所以圆C上的点到直线$2x-y-1=0$的距离最大值为$\frac{6\sqrt{5}}{5}+\sqrt{5}=\frac{11\sqrt{5}}{5}$,最小值为$\frac{6\sqrt{5}}{5}-\sqrt{5}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

18.**解**:(1)当$x=0$时,即$2-t-t^2=0$,解得$t=-2$或$t=1$(舍去),代入$y=2-3t+t^2$,可得$y=12$;当$y=0$时,即$2-3t+t^2=0$,解得$t=2$或$t=1$(舍去),代入$x=2-t-t^2$,可得$x=-4$.所以曲线C与坐标轴的交点为$(-4,0)$,$(0,12)$,则$|AB|=\sqrt{(-4)^2+12^2}=4\sqrt{10}$.

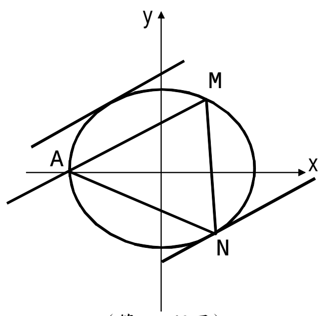
(2)由(1)可得直线AB过点$(0,12)$,$(-4,0)$,可得AB的方程为$\frac{y}{12}-\frac{x}{4}=1$,即$3x-y+12=0$,

将$x=\rho\cos\theta$,$y=\rho\sin\theta$代入,得直线AB的极坐标方程为$3\rho\cos\theta-\rho\sin\theta+12=0$.

19.**解**:(1)由题意知,直线AM的方程为$y-3=\frac{1}{2}(x-2)$,即$x-2y=-4$,当$y=0$时,解得$x=-4$,所以$a=4$.因为椭圆C:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$(a>b>0)$过点$M(2,3)$,所以$\frac{4}{16}+\frac{9}{b^2}=1$,解得$b^2=12$,所以椭圆C的方程为$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$.

(2)设与直线AM平行的直线方程为$x-2y=m$,当直线$x-2y=m$与椭圆C相切且与直线AM之间的距离比较远时,记切点为N,此时△AMN的面积取得最大值.联立$\begin{cases}x-2y=m,\\\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1,\end{cases}$化简得$16y^2+12my+3m^2-48=0$,所以$\Delta=144m^2-4\times16(3m^2-48)=0$,即$m^2=64$,解得$m=\pm8$,所以与直线AM距离比较远的直线方程为$x-2y=8$,则直线AM与直线$x-2y=8$之间的距离为$d=\frac{|8+4|}{\sqrt{1+4}}=\frac{12\sqrt{5}}{5}$,$|AM|=\sqrt{(2+4)^2+3^2}=3\sqrt{5}$.

所以△AMN的面积的最大值为$\frac{1}{2}\cdot|AM|\cdot d=\frac{1}{2}\times3\sqrt{5}\times\frac{12\sqrt{5}}{5}=18$.



(第 19 题图)

20.**解**:(1)因为曲线C的参数方程是$\begin{cases}x=\frac{1}{k^2}+k^2,\\y=\frac{1}{k}-k\end{cases}$(k为参数),消去参数k得$y^2=x-2$,因为将曲线C的图象按$\begin{cases}x'=x-2,\\y'=2y\end{cases}$变换得到曲线E,则$\left(\frac{y'}{2}\right)^2=x'+2-2$,化简得$y'^2=4x'$,即曲线E的普通方程为$y^2=4x$.

(2)把直线l的参数方程$\begin{cases}x=1+\frac{1}{2}t,\\y=\frac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$(t为参数)代入$y^2=4x$,得$3t^2-8t-16=0$,所以$t_1+t_2=\frac{8}{3}$,$t_1t_2=-\frac{16}{3}$,则$|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=\frac{16}{3}$,所以$\frac{1}{|PA|}+\frac{1}{|PB|}=\left|\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}\right|=\left|\frac{t_1-t_2}{t_1t_2}\right|=1$.

21.**解**:(1)易知直线l_1斜率存在,设直线l_1的方程为$y+1=k(x-1)$,与抛物线$y^2=x$联立,得$ky^2-y-k-1=0$.因为直线l_1与抛物线相切,所以$\Delta=1+4k(k+1)=0$,解得$k=-\frac{1}{2}$,则直线l_1的方程为$y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$.

(2)设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,

设直线l_1的方程为$y-y_1=k_1(x-x_1)$,联立$\begin{cases}y-y_1=k_1(x-x_1),\\y^2=x,\end{cases}$得$k_1y^2-y+y_1-k_1x_1=0$,所以$\Delta=1-4k_1(y_1-k_1x_1)=4k_1^2x_1-4k_1y_1+1=0$,又$y_1^2=x_1$,所以$\Delta=4k_1^2y_1^2-4k_1y_1+1=(2k_1y_1-1)^2=0$.得$k_1=\frac{1}{2y_1}$,则直线$l_1$的方程为$y_1y=\frac{x+x_1}{2}$,同理,直线$l_2$的方程为$y_2y=\frac{x+x_2}{2}$,则$M\left(0,\frac{y_1}{2}\right)$,$N\left(0,\frac{y_2}{2}\right)$.设点$P(x_0,y_0)$,则$\begin{cases}y_1y_0=\frac{x_0+x_1}{2},\\y_2y_0=\frac{x_0+x_2}{2},\end{cases}$所以直线AB方程为$y_0y=\frac{x_0+x}{2}$,联立$\begin{cases}yy_0=\frac{x_0+x}{2},\\y^2=x,\end{cases}$得$y^2-2y_0y+x_0=0$,则$y_1+y_2=2y_0$,$y_1y_2=x_0$.则$|MN|=\frac{1}{2}|y_1-y_2|$,$|AB|=\sqrt{4y_0^2+1}|y_1-y_2|$,因为点$P(x_0,y_0)$在圆$(x+2)^2+y^2=1$,所以$y_0\in[-1,1]$所以$\frac{|MN|}{|AB|}=\frac{1}{2\sqrt{4y_0^2+1}}\in\left[\frac{\sqrt{5}}{10},\frac{1}{2}\right]$,即$\frac{|MN|}{|AB|}$的取值范围为$\left[\frac{\sqrt{5}}{10},\frac{1}{2}\right]$.

22.**解**:(1)因为当$k=\frac{\sqrt{3}}{2}$时,△OAB的面积为$\frac{ab}{2}$,所以此时点B为椭圆的下顶点.所以$k=\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$|AB|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{7}$,解得$a^2=4$,$b^2=3$.所以椭圆E的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)设$B(x_B,y_B)$,因为直线l的方程为$y=k(x-2)$,联立$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\y=k(x-2),\end{cases}$得$(4k^2+3)x^2-16k^2x+16k^2-12=0$.解得$x=2$或$x=\frac{8k^2-6}{4k^2+3}$,由题意得$x_B=\frac{8k^2-6}{4k^2+3}$,所以$y_B=\frac{-12k}{4k^2+3}$.因为$|MA|=|MO|$,所以点M的坐标为$(1,-k)$,因此直线MH的方程为$y=-\frac{1}{k}x+\frac{1}{k}-k$,则点H的坐标为$\left(0,\frac{1}{k}-k\right)$,由(1)知,$F(1,0)$,则$\overrightarrow{FH}=\left(-1,\frac{1}{k}-k\right)$,$\overrightarrow{BF}=\left(\frac{9-4k^2}{4k^2+3},\frac{12k}{4k^2+3}\right)$,因为$BF\perp HF$,所以$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{HF}=0$,即$\frac{4k^2-9}{4k^2+3}+\frac{12k}{4k^2+3}\left(\frac{1}{k}-k\right)=0$,解得$k=-\frac{\sqrt{6}}{4}$或$k=\frac{\sqrt{6}}{4}$,所以k的值为$-\frac{\sqrt{6}}{4}$或$\frac{\sqrt{6}}{4}$.

第29期

第2~3版专题检测参考答案

一、选择题

1~6.CACCAB　　7~12.DBCCCA

二、填空题

13.4　　14.$\sqrt{3}+1$

15.$\sqrt{2}+1$　　16.3

三、解答题

17.**解**:(1)$f(x)=m\cdot n+1=2\sqrt{3}\cdot\sin x\cos x-2\cos^2x+1=\sqrt{3}\sin2x-\cos2x=2\cdot\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$,所以函数$f(x)$的最小正周期为$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

(2)因为$f(a)=2\sin\left(2a-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{8}{5}$,所以$\sin\left(2a-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4}{5}$,因为$a\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{7\pi}{12}\right]$,所以$2a-\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$,所以$\cos\left(2a-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{3}{5}$,所以$\cos2a=\cos\left[\left(2a-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=\cos\left(2a-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\frac{\pi}{6}-\sin\left(2a-\frac{\pi}{6}\right)\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{-4-3\sqrt{3}}{10}$.

18.**解**:(1)因为$\frac{\cos A-2\cos C}{\cos B}=\frac{2c-a}{b}$,所以由正弦定理可得$\frac{\cos A-2\cos C}{\cos B}=\frac{2\sin C-\sin A}{\sin B}$,则有$\sin B\cos A-2\sin B\cos C=2\cos B\sin C-\cos B\sin A$,则$\sin B\cos A+\cos B\cdot\sin A=2(\sin B\cos C+\cos B\sin C)$,$\sin(A+B)=2\sin(B+C)$,所以$\sin C=2\sin A$,即$\frac{\sin C}{\sin A}=2$.

(2)由(1)得$\frac{\sin C}{\sin A}=2$,由正弦定理得$c=2a$,因为$B=\frac{\pi}{3}$,$b=\sqrt{2}$,所以由余弦定理的推论$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$,得$\frac{a^2+4a^2-2}{4a^2}=\frac{1}{2}$,解得$a=\frac{\sqrt{6}}{3}$,所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=a^2\sin B=\frac{\sqrt{3}}{3}$,即△ABC的面积为$\frac{\sqrt{3}}{3}$.

19.**解**:(1)由题意可知$AB=(\sqrt{3}-1)$海里,$AC=2$海里,$\angle BAC=120°$,在△ABC中,由余弦定理得$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos120°=6$,所以$BC=\sqrt{6}$海里.由正弦定理得$\frac{AC}{\sin\angle ABC}=\frac{BC}{\sin\angle BAC}$,则$\frac{2}{\sin\angle ABC}=\frac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$,解得$\sin\angle ABC=\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以$\angle ABC=45°$.

所以C船与B船相距$\sqrt{6}$海里,C船在B船的正西方向.

(2)由(1)知$BC=\sqrt{6}$,由题意知$\angle DBC=120°$,设t小时后缉私艇在D处追上走私船,则$BD=10t$海里,$CD=10\sqrt{3}t$海里,在△BCD中,由正弦定理得$\frac{10\sqrt{3}t}{\sin120°}=\frac{10t}{\sin\angle BCD}$,解得$\sin\angle BCD=\frac{1}{2}$,所以$\angle BCD=30°$,所以△BCD是等腰三角形,所以$10t=\sqrt{6}$,即$t=\frac{\sqrt{6}}{10}$.

所以缉私艇沿北偏东60°方向行驶$\frac{\sqrt{6}}{10}$小时才能最快追上走私船.

20.**解**:(1)由余弦定理可得$n=(\cos B,\cos A)$,可得$m\cdot n=\frac{a}{4}\cdot\cos B+\frac{b}{4}\cdot\cos A=\frac{2\times2\times\sin A}{4}\cos B+\frac{2\times2\times\sin B}{4}\cos A=\sin A\cdot\cos B+\cos A\sin B=\sin(A+B)=\sin C$,又$m\cdot n=\sin2C$,所以$\sin C=2\sin C\cos C$,因为$C\in(0,\pi)$,所以$\sin C\neq0$,所以$\cos C=\frac{1}{2}$,可得$C=\frac{\pi}{3}$.

(2)因为$\sin A$,$\sin C$,$\sin B$成等差数列,所以$2\sin C=\sin A+\sin B$,由正弦定理得$2c=a+b$,又$\overrightarrow{CA}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=18$,所以$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=ab\cos60°=\frac{1}{2}ab=18$,则$ab=36$,由余弦定理得$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=(a+b)^2-3ab$,即$c^2=(2c)^2-108$,解得$c=6$.

21.**解**:(1)因为$c\sin C-b\sin B=a(\sin A-\sin B)$,所以由正弦定理得$c^2-b^2=a^2-ab$,所以$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{ab}{2ab}=\frac{1}{2}$,又$0<C<\pi$,所以$C=\frac{\pi}{3}$.

(2)在△ACD中,由余弦定理得$AC^2=AD^2+CD^2-2AD\cdot CD\cos\angle ADC$,即$b^2=1+CD^2-2CD\cos\angle ADC$.①

在△BCD中,由余弦定理得$BC^2=BD^2+CD^2-2BD\cdot CD\cos\angle BDC$,即$a^2=1+CD^2-2CD\cos\angle BDC$.②

因为$\angle ADC+\angle BDC=\pi$,

所以$\cos\angle ADC=-\cos\angle BDC$,

由①+②得$CD^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2)-1$,

由(1)知$C=\frac{\pi}{3}$,又$c=2$,由余弦定理得$a^2+b^2-c^2=2ab\cos c$,即$a^2+b^2-4=ab\leqslant\frac{1}{2}(a^2+b^2)$,所以$a^2+b^2\leqslant8$,所以$CD^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2)-1\leqslant3$,即$CD\leqslant\sqrt{3}$,当且仅当$a=b=2$时,等号成立,所以CD长度的最大值为$\sqrt{3}$.

22.**解**:(1)因为$f(x)=\sin x(\sin x-\sqrt{3}\cdot\cos x)=\sin^2x-\sqrt{3}\sin x\cos x=\frac{1-\cos2x}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2x=\frac{1}{2}-\sin\left(\frac{\pi}{6}+2x\right)$,令$\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi$,$k\in Z$,可得$\frac{\pi}{6}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}+k\pi$,$k\in Z$,所以$f(x)$的单调递增区间为$\left[\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{2\pi}{3}+k\pi\right]$,$k\in Z$.

(2)由$f(A)=\frac{3}{2}$,得$\sin\left(2A+\frac{\pi}{6}\right)=-1$,由$A\in(0,\pi)$,可得$2A+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{13\pi}{6}\right)$,则$2A+\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{2}$,解得$A=\frac{2\pi}{3}$.又$a=2$,由余弦定理得$4=b^2+c^2-2bc\cos\frac{2\pi}{3}=(b+c)^2-bc\geqslant(b+c)^2-\left(\frac{b+c}{2}\right)^2=\frac{3}{4}(b+c)^2$,当且仅当$b=c$时取等号,解得$b+c\leqslant\frac{4\sqrt{3}}{3}$,又$b+c>a=2$,故$4<a+b+c\leqslant\frac{4\sqrt{3}}{3}+2$.

所以△ABC周长的取值范围为$\left(4,\frac{4\sqrt{3}}{3}+2\right]$.

第30期
第2~3版专题检测参考答案

一、选择题

1~6.DBBBDD　　7~12.ACCCDA

二、填空题

13.n^2+2n　　14.27

15.2　　16.363

三、解答题

17.解：(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为d,等比数列$\{b_n\}$的公比为q,因为$a_n>0$,$b_n>0$,$a_5=13$,$b_1=6$,$a_2+b_3=31$,$a_3+b_2=21$, 所以$\begin{cases}13-3d+6q^2=31,\\13-2d+6q=21,\\d>0,\\q>0,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}d=2,\\q=2,\end{cases}$又$a_5=13$,所以$a_n=13+2(n-5)=2n+3$,又$b_1=6$,所以$b_n=6\cdot2^{n-1}=3\cdot2^n$.

所以$a_n=2n+3$,$b_n=3\cdot2^n$.

(2)记$\{a_n+b_n\}$的前n项和为S_n,则$S_n=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_n+b_n)=(a_1+a_2+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+\cdots+b_n)=5n+\frac{n(n-1)}{2}\times2+\frac{6\times(1-2^n)}{1-2}=n^2+4n-6+3\times2^{n+1}$.

所以$\{a_n+b_n\}$的前n项和为$n^2+4n-6+3\times2^{n+1}$.

18.解：(1)因为$a_2=16$,$3S_n=a_{n+1}-4$.①

所以当n=1时,$3a_1=a_2-4$,解得$a_1=4$.

当$n\geq2$时,$3S_{n-1}=a_n-4$,②

由①-②得$3a_n=a_{n+1}-a_n$, 所以$a_{n+1}=4a_n$,故$\frac{a_{n+1}}{a_n}=4$,当n=1时,$\frac{a_2}{a_1}=4$,上式成立.

所以数列$\{a_n\}$是以4为首项,4为公比的等比数列.所以$a_n=4\cdot4^{n-1}=4^n$.

(2)因为$b_n=\log_2a_n=\log_24^n=\log_22^{2n}=2n$,

所以$\frac{1}{b_nb_{n+1}}=\frac{1}{2n\cdot2(n+1)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$.

所以数列$\left\{\frac{1}{b_nb_{n+1}}\right\}$的前n项和$T_n=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{n}{4(n+1)}$,

故$T_{2020}=\frac{505}{2021}$.

19.解：(1)因为数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=n^2-4n$,①

所以当n=1时,$a_1=-3$,当$n\geq2$时,$S_{n-1}=(n-1)^2-4(n-1)$,②

两式相减得$a_n=S_n-S_{n-1}=2n-5$ $(n\geq2)$,当n=1时,上式成立,所以$a_n=2n-5(n\in N_+)$.

因为数列$\{b_n\}$的前n项和T_n满足$2T_n+b_n-1=0$,①

所以当n=1时,$2b_1+b_1-1=0$, 解得$b_1=\frac{1}{3}$,当$n\geq2$时,$2T_{n-1}+b_{n-1}-1=0$,②

由①-②得$b_n=\frac{1}{3}b_{n-1}$, 故$\frac{b_n}{b_{n-1}}=\frac{1}{3}$,所以数列$\{b_n\}$是以$\frac{1}{3}$为首项,$\frac{1}{3}$为公比的等比数列.所以$b_n=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

(2)由(1)得$a_n\cdot b_n=(2n-5)\cdot\frac{1}{3^n}$.故$A_n=(-3)\times\frac{1}{3}+(-1)\times\frac{1}{3^2}+\cdots+(2n-5)\cdot\frac{1}{3^n}$,①

$\frac{1}{3}A_n=(-3)\times\frac{1}{3^2}+(-1)\times\frac{1}{3^3}+\cdots+(2n-5)\cdot\frac{1}{3^{n+1}}$,②

①-②得$\frac{2}{3}A_n=-1+2\times\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots\frac{1}{3^n}\right)-(2n-5)\cdot\frac{1}{3^{n+1}}=-1+2\times\frac{\frac{1}{9}\times\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]}{1-\frac{1}{3}}-(2n-5)\cdot\frac{1}{3^{n+1}}=-\frac{2}{3}-\frac{2(n-1)}{3^{n+1}}$,

所以$A_n=-1-\frac{n-1}{3^n}\leq-1$.

20.(1)证明：因为$S_n=2a_n-n$,①

故$S_{n+1}=2a_{n+1}-n-1$,②

由②-①得$a_{n+1}=2a_{n+1}-n-1-2a_n+n$,即$a_{n+1}=2a_n+1$, 所以$a_{n+1}+1=2(a_n+1)$, 所以$\frac{a_{n+1}+1}{a_n+1}=2$,当n=1时,$a_1=S_1=2a_1-1$,则$a_1=1$,$a_1+1=2$,所以数列$\{a_n+1\}$是首项和公比均为2的等比数列.

(2)解：由(1)可得$a_n+1=2^n$,$a_n=2^n-1$,

所以$b_n=\frac{a_n+1}{a_na_{n+1}}=\frac{2^n}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}=\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}$,故$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\left(\frac{1}{2-1}-\frac{1}{2^2-1}\right)+\left(\frac{1}{2^2-1}-\frac{1}{2^3-1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}\right)=1-\frac{1}{2^{n+1}-1}$,因为$T_n\geq\frac{30}{31}$,即$1-\frac{1}{2^{n+1}-1}\geq\frac{30}{31}$,解得$n\geq4$, 又$n\in N_+$, 所以满足不等式$T_n\geq\frac{30}{31}$的最小正整数n的值为4.

21.(1)证明：因为$2a_na_{n+1}+a_n+3a_{n+1}+2=0$,所以$a_na_{n+1}=\frac{-a_n-3a_{n+1}-2}{2}$, 则$\frac{1}{a_{n+1}+1}-\frac{1}{a_n+1}=\frac{a_n-a_{n+1}}{(a_{n+1}+1)(a_n+1)}=\frac{a_n-a_{n+1}}{a_na_{n+1}+a_n+a_{n+1}+1}=\frac{a_n-a_{n+1}}{\frac{-a_n-3a_{n+1}-2}{2}+a_n+a_{n+1}+1}=\frac{a_n-a_{n+1}}{\frac{1}{2}(a_n-a_{n+1})}=2$,又$a_1=0$,所以$\frac{1}{a_1+1}=1$,所以数列$\left\{\frac{1}{a_n+1}\right\}$是以1为首项,2为公差的等差数列,所以$\frac{1}{a_n+1}=1+2(n-1)=2n-1$,所以$a_n=\frac{1}{2n-1}-1=\frac{2-2n}{2n-1}$.

(2)解：因为$b_n=\frac{2^n}{a_n+1}=(2n-1)\cdot2^n$,所以$S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=1\times2^1+3\times2^2+\cdots+(2n-1)\cdot2^n$,①

$2S_n=1\times2^2+3\times2^3+\cdots+(2n-1)\cdot2^{n+1}$,②

由①-②得$-S_n=2+2\times2^2+\cdots+2\times2^n-(2n-1)\cdot2^{n+1}=(3-2n)\cdot2^{n+1}-6$,所以$S_n=(2n-3)\cdot2^{n+1}+6$.

因为不等式$(-1)^n\lambda<S_n+3\times2^{n+1}$对一切$n\in N_+$恒成立,所以$(-1)^n\lambda<n\cdot2^{n+2}+6$对一切$n\in N_+$恒成立.

当n为偶数时,$\lambda<n\cdot2^{n+2}+6$恒成立,得$\lambda<38$;当n为奇数时,$-\lambda<n\cdot2^{n+2}+6$恒成立,得$\lambda>-14$.

综上所述,λ的取值范围为$(-14,38)$.

22.解：(1)因为$S_{n+1}-2S_n=1$,所以$S_{n+1}+1=2(S_n+1)$,又因为$a_1=S_1=1$,所以$S_1+1=2$,所以$\frac{S_{n+1}+1}{S_n+1}=2$,所以数列$\{S_n+1\}$是首项和公比均为2的等比数列,所以$S_n+1=2\cdot2^{n-1}=2^n$,则$S_n=2^n-1$.

又因为$S_{n-1}=2^{n-1}-1(n\geq2)$,所以当$n\geq2$时,$a_n=S_n-S_{n-1}=2^{n-1}$, 当n=1时,$a_1=1$也满足上式,所以$a_n=2^{n-1}$,$n\in N_+$.

(2)因为$b_n=\frac{n}{a_n}=\frac{n}{2^{n-1}}$,

所以$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\frac{1}{2^0}+\frac{2}{2^1}+\cdots+\frac{n}{2^{n-1}}$,$\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2^1}+\frac{2}{2^2}+\cdots+\frac{n}{2^n}$,两式相减得$\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n}=\frac{1\times\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}$,

所以$T_n=4-\frac{n+2}{2^{n-1}}$.

(3)假设存在正整数n使得$T_n\cdot2^{n-1}=n+50$成立,由(2)可得$T_n\cdot2^{n-1}=2^{n+1}-n-2$,所以$2^{n+1}-n-2=n+50$,即$2^n-n-26=0$,

所以$2^n=n+26$,即存在正整数n,使得$\frac{n+26}{2^n}=1$.令$f(n)=\frac{n+26}{2^n}$,则$f(n+1)-f(n)=\frac{-n-25}{2^{n+1}}<0$,所以$f(n+1)<f(n)$,所以$f(n)$在$n\in N_+$上单调递减,又$f(1)=\frac{27}{2}$,$f(2)=7$,$f(3)=\frac{29}{8}$,$f(4)=\frac{15}{8}$,$f(5)=\frac{31}{32}$,所以当$n>5$时,$f(n)<1$,所以不存在正整数n使得$T_n\cdot2^{n-1}=n+50$成立.

第31期
第2~3版专题检测参考答案

一、选择题

1~6.CBBCAC　　7~12.BACABC

二、填空题

13.<　　14.$\frac{2\sqrt{15}}{5}$

15.-3　　16.(1,3]

三、解答题

17.证明：(1)因为$a>0$,$b>0$,$\frac{a^2+b^2}{2}=\frac{2(a^2+b^2)}{4}\geq\frac{a^2+b^2+2ab}{4}=\frac{(a+b)^2}{4}=4$,所以$a^2+b^2\geq8$, 当且仅当a=b=2时取等号,所以$\sqrt{a^2+b^2}\geq2\sqrt{2}$.

(2)因为a+b=4,所以a+2+b=6,所以$\frac{1}{a+2}+\frac{2}{b}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{a+2}+\frac{2}{b}\right)(a+2+b)=\frac{1}{6}\left(1+2+\frac{b}{a+2}+\frac{2(a+2)}{b}\right)\geq\frac{1}{6}(3+2\sqrt{2})=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{3}$, 当且仅当$\sqrt{2}(a+2)=b$,即$a=6\sqrt{2}-8$,$b=12-6\sqrt{2}$时取等号. 所以$\frac{1}{a+2}+\frac{2}{b}\geq\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{3}$.

18.解：(1)$f(x)<0$即$x^2-\left(m+\frac{1}{m}\right)x+1<0$, 因为不等式$f(x)<0$的解集为$\left\{x\middle|\frac{1}{3}<x<3\right\}$,所以$\frac{1}{3}$和3是方程$x^2-\left(m+\frac{1}{m}\right)x+1=0$的两根,所以$m+\frac{1}{m}=3+\frac{1}{3}$,解得m=3或$m=\frac{1}{3}$.

(2)$f(x)\geq0$即$x^2-\left(m+\frac{1}{m}\right)x+1\geq0$,所以$(x-m)\left(x-\frac{1}{m}\right)\geq0$.因为m>0,所以当$m=\frac{1}{m}$,即m=1时,不等式化为$(x-1)^2\geq0$,该不等式恒成立,则解集为**R**;当m>1,即$m>\frac{1}{m}$时,解不等式得$x\leq\frac{1}{m}$或$x\geq m$;当0<m<1,即$m<\frac{1}{m}$时,解不等式得$x\geq\frac{1}{m}$或$x\leq m$.

综上,当m=1时,不等式的解集为**R**; 当m>1时,不等式的解集为$\left\{x\middle|x\leq\frac{1}{m}或x\geq m\right\}$;当0<m<1时,不等式的解集为$\left\{x\middle|x\geq\frac{1}{m}或x\leq m\right\}$.

19.解：(1)当a=1时,$f(x)=|x+2|+|x-1|=\begin{cases}-2x-1,x\leq-2,\\3,-2<x<1,\\2x+1,x\geq1,\end{cases}$ 当$x\geq1$时,$2x+1\leq5$,解得$x\leq2$,所以$1\leq x\leq2$;当$-2<x<1$时,$3\leq5$,成立,所以$-2<x<1$;当$x\leq-2$时,$-2x-1\leq5$,解得$x\geq-3$,所以$-3\leq x\leq-2$.

综上,不等式$f(x)\leq5$的解集是$[-3,2]$.

(2)$f(x)\geq1-a$对任意实数x都成立,即$|x+2|+|x-a|\geq1-a$恒成立, 因为$|x+2|+|x-a|\geq|x+2+a-x|=|2+a|$,所以$|2+a|\geq1-a$,解得$a\geq-\frac{1}{2}$.故实数a的取值范围为$\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$.

20.解：(1)设年利润为z万元,根据题意得$z=16x-\left(\frac{x^2}{10}-30x+4000\right)=-\frac{x^2}{10}+46x-4000=-\frac{1}{10}(x-230)^2+1290$ $(150\leq x\leq250)$, 所以当x=230吨时,$z_{max}=1290$,所以年产量为230吨时,可获得最大利润,最大利润为1290万元.

(2)设每吨的平均成本为W万元,因为$y=\frac{x^2}{10}-30x+4000$,所以$W=\frac{y}{x}=\frac{x}{10}+\frac{4000}{x}-30$ $(150\leq x\leq250)$, 因为$\frac{x}{10}+\frac{4000}{x}\geq2\sqrt{\frac{x}{10}\cdot\frac{4000}{x}}=40$, 当且仅当$\frac{x}{10}=\frac{4000}{x}$,即x=200时,等号成立,所以当x=200时,$W_{min}=40-30=10$.

故年产量为200吨时, 每吨的平均成本最低,最低成本为10万元.

21.解：(1)因为不等式$f(x)-g(x)\geq t-1$的解集非空,所以$(|x|-|x-1|)_{max}\geq t-1$,由$|x|-|x-1|\leq|x-(x-1)|=1$,当$x(x-1)\geq0$,且$|x|\geq|x-1|$,即$x\geq1$时,取得等号,则$t-1\leq1$,解得$t\leq2$,所以实数t的取值范围为$(-\infty,2]$.

(2)$f(mx)\geq g(x)(m>0)$,即$m|x|\geq|x-1|$,即$[(m+1)x-1][(m-1)x+1]\geq0$,

当m=1时,$2x-1\geq0$,解得$x\geq\frac{1}{2}$,解集不符合题意;当m>1时,$\frac{1}{1+m}>\frac{1}{1-m}$,解得$x\geq\frac{1}{1+m}$或$x\leq\frac{1}{1-m}$,解集不符合题意;当0<m<1时,$\frac{1}{1+m}<\frac{1}{1-m}$, 解得$\frac{1}{1+m}\leq x\leq\frac{1}{1-m}$,因为原不等式的解集中恰有4个整数解,且$\frac{1}{2}<\frac{1}{1+m}<1$,所以以上不等式的解集中的4个整数解为1,2,3,4, 则$4\leq\frac{1}{1-m}<5$,解得$\frac{3}{4}\leq m<\frac{4}{5}$.

所以实数m的取值范围是$\left[\frac{3}{4},\frac{4}{5}\right)$.

22.(1)解：因为$f(x)=ax-\ln x$,所以$f'(x)=a-\frac{1}{x}(x>0)$,当$a\leq0$时,$f'(x)<0$恒成立,则$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减,所以$f(x)$无极值;当a>0时,令$f'(x)>0$,得$x>\frac{1}{a}$;令$f'(x)<0$,得$0<x<\frac{1}{a}$,则$f(x)$在$\left(0,\frac{1}{a}\right)$上单调递减,在$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$上单调递增,$f(x)$有极小值$f\left(\frac{1}{a}\right)=1+\ln a$,无极大值.

综上,当$a\leq0$时,$f(x)$无极值;当a>0时,$f(x)$有极小值$1+\ln a$,无极大值.

(2)证明：$g(x)=e^x\left[\frac{2}{ex}+ax-f(x)\right]=e^x\left[\frac{2}{ex}+\ln x\right]$,故要证$g(x)\geq1$,只需证$\frac{2}{ex}+\ln x\geq\frac{1}{e^x}$,故只需证$\frac{2}{e}+x\ln x\geq\frac{x}{e^x}$,令$\omega(x)=\frac{2}{e}+x\ln x$,所以$\omega'(x)=\ln x+1$,定义域为$(0,+\infty)$,令$\omega'(x)=0$,解得$x=\frac{1}{e}$,所以当$x\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$时,$\omega'(x)<0$,$\omega(x)$单调递减;当$x\in\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$时,$\omega'(x)>0$,$\omega(x)$单调递增,所以$\omega(x)_{min}=\omega\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}$;令$\Phi(x)=\frac{x}{e^x}$,所以$\Phi'(x)=\frac{1-x}{e^x}$,定义域为$(0,+\infty)$,令$\Phi'(x)=0$,解得$x=1$,所以当$x\in(0,1)$时,$\Phi'(x)>0$,$\Phi(x)$单调递增;当$x\in(1,+\infty)$时,$\Phi'(x)>0$,$\Phi(x)$单调递减,所以$\Phi(x)_{max}=\Phi(1)=\frac{1}{e}$.所以$\omega(x)\geq\frac{1}{e}$,$\Phi(x)\leq\frac{1}{e}$,即$\frac{2}{e}+x\ln x\geq\frac{x}{e^x}$,所以$g(x)\geq1$.