第 24 期

第 2~3 版同步周测参考答案

一、选择题

1~6.ABBBCA　　7~12.CCCCBA

二、填空题

13.$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　14.$\rho=4\cos\theta$

15.$\sqrt{2}$　　16.$(x-2)^2+(y-2)^2=2$

三、解答题

17.**解**:(1)因为 $A\left(\rho_1,\frac{\pi}{3}\right)$ 在直线 l:$\rho\cos\theta=2$ 上,所以 $\rho_1\cos\frac{\pi}{3}=2$,解得 $\rho_1=4$.

因为点 $B\left(\rho_2,\ \frac{\pi}{6}\right)$ 在圆 C:$\rho=4\sin\theta$ 上,所以 $\rho_2=4\sin\frac{\pi}{6}=2$,又圆 C 经过极点,且极点的极坐标 $\rho=0$,极角为任意角,即点 $\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$ 也在圆 C 上,因此 $\rho_2=2$ 或 0.

(2)由直线 l 与圆 C 得方程组 $\begin{cases}\rho\cos\theta=2,\\ \rho=4\sin\theta,\end{cases}$ 则 $\sin2\theta=1$.因为 $\rho\geqslant0,\theta\in[0,2\pi)$,所以 $2\theta=\frac{\pi}{2}$,所以 $\theta=\frac{\pi}{4}$.所以 $\rho=4\times\sin\frac{\pi}{4}=2\sqrt{2}$.故直线 l 与圆 C 的公共点的极坐标为 $\left(2\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)$.

18.(1)**解**:圆 O 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos\theta,\\ y=\sin\theta\end{cases}$ (θ 为参数),经过变换 $\begin{cases}x'=2x,\\ y'=y,\end{cases}$ 得曲线 C 的参数方程 $\begin{cases}\frac{x'}{2}=\cos\theta,\\ y'=\sin\theta\end{cases}$ (θ 为参数),

转化为直角坐标方程为 $\frac{x'^2}{4}+y'^2=1$,转化为极坐标方程为 $\frac{\rho^2\cos^2\theta}{4}+\rho^2\sin^2\theta=1$.

(2)**证明**:不妨设 $A(\rho_1,\theta)$,$B\left(\rho_2,\theta+\frac{\pi}{2}\right)$,

由曲线 C 的极坐标方程 $\frac{1}{\rho^2}=\frac{\cos^2\theta}{4}+\sin^2\theta$,

得 $\begin{cases}\frac{1}{\rho_1^2}=\frac{\cos^2\theta}{4}+\sin^2\theta,\\ \frac{1}{\rho_2^2}=\frac{\cos^2\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}{4}+\sin^2\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right),\end{cases}$

所以 $\frac{1}{\rho_1^2}+\frac{1}{\rho_2^2}=\frac{5}{4}$,

即 $\frac{1}{|OA|^2}+\frac{1}{|OB|^2}=\frac{5}{4}$.

19.**解**:(1)当 $k=1$ 时,曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos t,\\ y=\sin t\end{cases}$ (t 为参数),

消去参数 t,可得 $x^2+y^2=1$,故 C_1 是以 (0,0) 为圆心,以 1 为半径的圆.

(2)当 $k=4$ 时,C_1:$\begin{cases}x=\cos^4t,\\ y=\sin^4t,\end{cases}$ 消去 t 得到 C_1 的直角坐标方程为 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$,

C_2 的极坐标方程为 $4\rho\cos\theta-16\rho\sin\theta+3=0$,得 C_2 的直角坐标方程为 $4x-16y+3=0$,

联立 $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=1,\\ 4x-16y+3=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\frac{1}{4},\\ y=\frac{1}{4}.\end{cases}$

所以 C_1 与 C_2 的公共点的直角坐标为 $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$.

20.**解**:(1)圆心 $C\left(5,\frac{\pi}{4}\right)$,又 $x=\rho\cos\theta$,$y=\rho\sin\theta$,即 C 的直角坐标为 $\left(\frac{5\sqrt{2}}{2},\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$,

由圆 C 的半径为 3,可得圆 C 的直角坐标方程为 $\left(x-\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2=9$,

即 $x^2+y^2-5\sqrt{2}x-5\sqrt{2}y+16=0$,由 $x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta,x^2+y^2=\rho^2$,

可得圆 C 的极坐标方程为

$\rho^2-5\sqrt{2}\rho(\cos\theta+\sin\theta)+16=0$,

即 $\rho^2-10\rho\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)+16=0$.

(2)P 点在线段 OQ 上,且 $|OP|:|PQ|=2:3$,即 $\overrightarrow{OP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{PQ}$.设 $O(0,0)$,$P(x,y)$,$Q(m,n)$,可得 $x=\frac{\frac{2}{3}m}{1+\frac{2}{3}}$,$y=\frac{\frac{2}{3}n}{1+\frac{2}{3}}$,即 $m=\frac{5}{2}x$,$n=\frac{5}{2}y$,由 $m^2+n^2-5\sqrt{2}m-5\sqrt{2}n+16=0$,可得 $25x^2+25y^2-50\sqrt{2}x-50\sqrt{2}y+64=0$,即 $x^2+y^2-2\sqrt{2}x-2\sqrt{2}y+\frac{64}{25}=0$,即为动点 P 的轨迹方程.

21.**解**:(1)曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=4\cos^2\theta,\\ y=4\sin^2\theta\end{cases}$ (θ 为参数),转化为普通方程为 $x+y-4=0$,所以 C_1 的普通方程为 $x+y=4(0\leqslant x\leqslant4)$.曲线 C_2 的参数方程为 $\begin{cases}x=t+\frac{1}{t},\\ y=t-\frac{1}{t}\end{cases}$ (t 为参数).

由 $x^2=t^2+\frac{1}{t^2}+2$,$y^2=t^2+\frac{1}{t^2}-2$,

得 $x^2-y^2=4$,

所以 C_2 的普通方程为 $x^2-y^2=4$.

(2)由 $\begin{cases}x+y=4,\\ \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=\frac{5}{2},\\ y=\frac{3}{2},\end{cases}$

即 P 的直角坐标为 $\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$.

设所求圆的圆心的直角坐标为 $(x_0,0)$,由题意得 $x_0^2=\left(x_0-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$,

解得 $x_0=\frac{17}{10}$,因此,所求圆的极坐标方程为 $\rho=\frac{17}{5}\cos\theta$.

22.**解**:(1)由 $\rho=4\sqrt{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=4\cos\theta-4\sin\theta$,得 $\rho^2=4\rho\cos\theta-4\rho\sin\theta$,

所以 $x^2+y^2=4x-4y$,即 $(x-2)^2+(y+2)^2=8$.

所以曲线 C_2 的直角坐标方程为 $(x-2)^2+(y+2)^2=8$,表示以 $(2,-2)$ 为圆心,以 $2\sqrt{2}$ 为半径的圆.

(2)将 $\begin{cases}x=t\cos\alpha,\\ y=-2+t\sin\alpha\end{cases}$ (t 为参数,$0\leqslant\alpha<\pi$)代入 $(x-2)^2+(y+2)^2=8$,

整理得 $t^2-4t\cos\alpha-4=0$.

设 A,B 所对应的参数分别为 t_1,t_2,则 $t_1+t_2=4\cos\alpha$,$t_1t_2=-4$.

所以 $\frac{1}{|MA|}+\frac{1}{|MB|}=\frac{|MA|+|MB|}{|MA|\cdot|MB|}=\frac{|t_1|+|t_2|}{|t_1t_2|}=\frac{|t_1-t_2|}{4}=\frac{\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}}{4}=\frac{\sqrt{16\cos^2\alpha+16}}{4}=\frac{\sqrt{17}}{4}$,解得 $\cos^2\alpha=\frac{1}{16}$,

则 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{15}}{4}$.

第21期

第 2~3 版同步周测参考答案

一、选择题

1~6.DBABDB　　7~12.CBDDAC

二、填空题

13.$\sqrt{19}$　　14.4

15.2　　16.2×7^n

三、解答题

17.**证明**:若证 $\frac{|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|}\leqslant\sqrt{2}$,

只需证 $|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|\leqslant\sqrt{2}|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$,

只需证 $(|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|)^2\leqslant(\sqrt{2}|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|)^2$,

即证 $\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+2|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\leqslant2\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{b}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,

因为非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,

所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,

即证 $2|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\leqslant\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2$,

即证 $(|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|)^2\geqslant0$,显然成立,

所以原不等式成立.

18.**解**:(1)因为 $z=\frac{a}{2+i}+i$

$=\frac{a(2-i)}{(2+i)(2-i)}+i$

$=\frac{2a}{5}+\frac{5-a}{5}i$,

又 $z\in\mathbf{R}$,

所以 $\frac{5-a}{5}=0$,即 $a=5$,所以 $z=2$.

(2)因为 z 在复平面内对应的点位于第四象限,所以 $\begin{cases}\frac{2a}{5}>0,\\ \frac{5-a}{5}<0,\end{cases}$ 解得 $a>5$.

所以 a 的取值范围为 $(5,+\infty)$.

19.**解**:(1)当 $a=1,b=2,c=3,d=4$ 时,

$|z_1|=|1+2i|=\sqrt{5}$,$|z_2|=|3+4i|=5$,

$|z_1\cdot z_2|=|(1+2i)(3+4i)|=|-5+10i|=5\sqrt{5}$.

(2)由(1)猜测,$|z_1|\cdot|z_2|=|z_1\cdot z_2|$.

证明如下:因为 $z_1=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$,$z_2=c+di(c,d\in\mathbf{R})$,

所以 $|z_1|=\sqrt{a^2+b^2}$,$|z_2|=\sqrt{c^2+d^2}$,

$|z_1|\cdot|z_2|=\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$

$=\sqrt{a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2}$;

$z_1\cdot z_2=(a+bi)(c+di)$

$=(ac-bd)+(ad+bc)i$,

所以 $|z_1\cdot z_2|=\sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2}$

$=\sqrt{a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2}$.

所以 $|z_1|\cdot|z_2|=|z_1\cdot z_2|$.

20.**解**:(1)$y=\begin{cases}\sin x,-\pi\leqslant x<0,\\ \cos x,0\leqslant x\leqslant\pi.\end{cases}$

(2)当 $-\pi\leqslant x<0$ 时,$y=\sin x$,$\sin x>\frac{1}{2}$ 在 $[-\pi,0)$ 上无解;

当 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 时,$y=\cos x$,$\cos x>\frac{1}{2}$ 在 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 上,解集为 $\left[0,\frac{\pi}{3}\right)$.

所以所求的概率为 $\frac{\frac{\pi}{3}}{2\pi}=\frac{1}{6}$.

21.(1)**解**:$\overrightarrow{MA}=(1-a,-3-2a)$,

$\overrightarrow{MB}=(3-a,-1-2a)$,

当 $|\overrightarrow{MA}|=|\overrightarrow{MB}|$ 时,得

$(1-a)^2+(-3-2a)^2=(3-a)^2+(-1-2a)^2$,

解得 $a=0$.

(2)**证明**:$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(1-a)(3-a)+(-3-2a)(-1-2a)=5a^2+4a+6=5\left(a+\frac{2}{5}\right)^2+\frac{26}{5}>0$,

所以 $\angle AMB$ 恒为锐角或 0 角,

当 $\angle AMB=0$ 时,

有 $\overrightarrow{MA}$ 与 $\overrightarrow{MB}$ 同向,

即 $(-3-2a)(3-a)=(1-a)(-1-2a)$,

得 $a=-4$,

这与题设 $a\neq-4$ 相矛盾,

故 $\angle AMB\neq0$,即 $\angle AMB$ 恒为锐角.

22.**解**:(1)$S_n=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$,

可得 $n=1$ 时,$a_1=S_1=1$;

$n\geqslant2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}(n-1)^2-\frac{1}{2}(n-1)=n$,对 $n=1$ 也成立,

所以 $a_n=n,n\in\mathbf{N}_+$.

(2)$b_n=a_n\cdot2^{a_n}=n\cdot2^n$,

可得前 n 项和

$T_n=1\times2+2\times2^2+3\times2^3+\cdots+n\cdot2^n$,

$2T_n=1\times2^2+2\times2^3+3\times2^4+\cdots+n\cdot2^{n+1}$,

相减可得 $-T_n=2+2^2+2^3+\cdots+2^n-n\cdot2^{n+1}=\frac{2(1-2^n)}{1-2}-n\cdot2^{n+1}$,

所以 $T_n=2+(n-1)\cdot2^{n+1}$.

(3)$T_n\leqslant2+\lambda\cdot2^{a_{2n+1}}(n\in\mathbf{N}_+)$ 恒成立,

即为 $2+(n-1)\cdot2^{n+1}\leqslant2+\lambda\cdot2^{2n+1}$,

即 $\lambda\geqslant\frac{n-1}{2^n}$ 恒成立.

设 $c_n=\frac{n-1}{2^n}$,

$c_{n+1}-c_n=\frac{n}{2^{n+1}}-\frac{n-1}{2^n}=\frac{2-n}{2^{n+1}}$,

当 $n\leqslant2$ 时,$c_{n+1}-c_n\geqslant0$,

当 $n\geqslant3$ 时,$c_{n+1}-c_n<0$,

可得 $c_1<c_2=c_3>c_4>c_5>\cdots$,

则 c_n 的最大值为 $\frac{1}{4}$,可得 $\lambda\geqslant\frac{1}{4}$.

所以 λ 的取值范围是 $\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$.

第 22 期

第2~3版同步周测参考答案

一、选择题

1~6.BBBCCD　　7~12.DBBBBB

二、填空题

13.03　　14.36

15.60　　16.99.5%

三、解答题

17.**解**:(1)用频率估计概率,从而得到"该市一天空气中 PM2.5 浓度不超过 75,且 SO_2 浓度不超过 150"的概率 $P=\frac{32+18+6+8}{100}=0.64$.

(2)根据所给数据,可得下面的 2×2 列联表:

PM2.5 \ SO_2	[0,150]	(150,475]
[0,75]	64	16
(75,115]	10	10

(3)根据(2)中的列联表,

得 K^2 的观测值为

$$k=\frac{100\times(64\times10-16\times10)^2}{80\times20\times74\times26}$$

$\approx7.484>6.635$,

故有 99%的把握认为该市一天空气中 PM2.5 浓度与 SO_2 浓度有关.

18.**解**:(1)由已知,$\sum\limits_{i=1}^{20}y_i=1200$,

所以 20 个样区野生动物数量的平均数为 $\bar{y}=\frac{1}{20}\sum\limits_{i=1}^{20}y_i=60$,

所以该地区这种野生动物数量的估计值为 60×200=12000.

(2)因为 $\sum\limits_{i=1}^{20}(x_i-\bar{x})^2=80$, $\sum\limits_{i=1}^{20}(y_i-\bar{y})^2=9000$, $\sum\limits_{i=1}^{20}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=800$,

所以 $r=\frac{\sum\limits_{i=1}^{20}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{20}(x_i-\bar{x})^2\sum\limits_{i=1}^{20}(y_i-\bar{y})^2}}=\frac{800}{\sqrt{80\times9000}}=\frac{800}{600\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\approx0.94$.

(3)更合理的抽样方法是分层抽样,根据植物覆盖面积的大小对地块分层,再对 200 个地块进行分层抽样.

理由如下:由(2)知各样区的这种野生动物数量与植物覆盖面积有很强的正相关.由于各地块间植物覆盖面积差异很大,从而各地块间这种野生动物数量差异也很大,采用分层抽样的方法较好地保持了样本结构与总体结构的一致性,提高了样本的代表性,从而可以获得该地区这种野生动物数量更准确的估计.

19.**解**:(1)由题意知脐橙在[350,400),[400,450)的比例为 3:2,故应分别在质量为[350,400),[400,450)的脐橙中各抽取 3 个和 2 个.记抽取质量在[350,400)的为 A,B,C,质量在[400,450)的为 D,E,则从这 5 个脐橙中随机抽取 2 个的方法共有以下 10 种:$AB,AC,AD,AE,BC,BD,BE,CD,CE,DE$,其中 2 个脐橙质量都不小于 400 克的方法只有 DE 这 1 种.

故 2 个脐橙质量都不小于 400 克的概率为 $\frac{1}{10}$.

(2)方案乙更好,理由如下:

由频率分布直方图知[200,250),[250,300),[300,350),[350,400),[400,450),[450,500]的频率分别为 0.05,0.16,0.24,0.3,0.2,0.05.

若用甲方案,由于各质量区间脐橙数量分别为 500,1600,2400,3000,2000,500,

故总收益为(225×0.05+275×0.16+325×0.24+375×0.3+425×0.2+475×0.05)×10000÷1000×10=35450 元;

若用乙方案,脐橙低于 350 克的有(0.05+0.16+0.24)×10000=4500 个,

不低于 350 克的有 5500 个,则总收益为 4500×2+5500×5=36500 元.

所以乙方案收益更高,选择方案乙.

20.**解**:(1)根据题意,$\bar{x}=6$,$\bar{y}=8.3$,

则 $7\bar{x}\bar{y}=348.6$,

$$\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{7}x_iy_i-7\bar{x}\,\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{359.6-348.6}{7}=\frac{11}{7}\approx1.571,$$

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}\approx8.3-1.571\times6=-1.126$,

所以回归方程为 $\hat{y}=1.571x-1.126$.

(2)将 $x=8.0$ 代入方程得

$\hat{y}=1.571\times8.0-1.126=11.442$,

所以小明家的"超级大棚"当年的利润大约为 11.442 万元.

(3)无丝豆亩平均利润的平均数为 $m=\frac{1.5+1.7+2.1+2.2+2.5}{5}=2$,

方差 $s_1^2=\frac{1}{5}[(1.5-2)^2+(1.7-2)^2+(2.1-2)^2+(2.2-2)^2+(2.5-2)^2]=0.128$.

彩椒亩平均利润的平均数为

$n=\frac{1.8+1.9+1.9+2.2+2.2}{5}=2$,

方差 $s_2^2=\frac{1}{5}[(1.8-2)^2+(1.9-2)^2+(1.9-2)^2+(2.2-2)^2+(2.2-2)^2]=0.028$.

因为 $m=n$,$s_1^2>s_2^2$,

所以种植彩椒比较好.

21.**解**:(1)由频率分布直方图得,

10×(0.035+0.020+0.014+0.004+0.002)=0.75,

$a=(1-0.75)\div10=0.025$.

设总共调查了 N 个人,则不满意的为

$N\times(0.002+0.004)\times10=120$,

解得 $N=2000$ 人,

所以基本满意人数为

$N\times(0.014+0.02)\times10=680$ 人.

(2)在等级为不满意的 120 个市民中按年龄分层抽取 6 人,则老年人抽取 $6\times\frac{1}{3}=2$ 人,中年人抽取 $6\times\frac{2}{3}=4$ 人,从中选取 2 人担任治理监察员,基本事件总数 $n=C_6^2=15$,至少有一位老年监察员包含的基本事件个数 $m=C_2^2+C_2^1C_4^1=9$,所以至少有一位老年监察员的概率 $P=\frac{m}{n}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$.

(3)所选样本满意程度的平均分为

45×0.02+55×0.04+65×0.14+75×0.2+85×0.35+95×0.25=80.7.

所以市民满意指数为 0.807,

又 0.75<0.807<0.85,

所以该市在本次对该项工作的验收中的达标情况为:达标级,没有获得优质奖.

22.**解**:(1)该市一天的空气质量等级为 1 的概率为 $\frac{2+16+25}{100}=\frac{43}{100}$;

该市一天的空气质量等级为 2 的概率为 $\frac{5+10+12}{100}=\frac{27}{100}$;

该市一天的空气质量等级为 3 的概率为 $\frac{6+7+8}{100}=\frac{21}{100}$;

该市一天的空气质量等级为 4 的概率为 $\frac{7+2+0}{100}=\frac{9}{100}$.

(2)由题意可得,一天中到该公园锻炼的平均人次的估计值为 $\bar{x}=\frac{1}{100}\times(100\times20+300\times35+500\times45)=350$.

(3)根据所给数据,可得下面的 2×2 列联表:

	人次≤400	人次>400	总计
空气质量好	33	37	70
空气质量不好	22	8	30
总计	55	45	100

由表中数据可得,K^2 的观测值为

$$k=\frac{100\times(33\times8-37\times22)^2}{70\times30\times55\times45}\approx5.820>3.841,$$

所以有 95%的把握认为一天中到该公园锻炼的人次与该市当天的空气质量有关.

第 23 期

第2~3版同步周测参考答案

一、选择题

1~6.ACACDB　　7~12.BBABCB

二、填空题

13.0.2

14.240

15.$\frac{2}{5}$

16.$\frac{1}{r-1}$,$P(A_{k+1})=[1-P(A_k)]\cdot\frac{1}{r-1}$

三、解答题

17.**解**:(1)由 $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^nx^n$,$n\geqslant4$,

可得 $a_2=C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$,

$a_3=C_n^3=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$,

$a_4=C_n^4=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$,

由 $a_3^2=2a_2a_4$,得 $\left[\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\right]^2=2\cdot\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$,

解得 $n=5$.

(2)$(1+\sqrt{3})^5=C_5^0+C_5^1\sqrt{3}+C_5^2(\sqrt{3})^2+C_5^3(\sqrt{3})^3+C_5^4(\sqrt{3})^4+C_5^5(\sqrt{3})^5=a+b\sqrt{3}$,

由于 $a,b\in\mathbf{N}_+$,可得 $a=C_5^0+3C_5^2+9C_5^4=1+30+45=76$,$b=C_5^1+3C_5^3+9C_5^5=44$,

可得 $a^2-3b^2=76^2-3\times44^2=-32$.

18.**解**:(1)从 7 月至 11 月中任选两个月份,所有可能的结果为 $\Omega=\{(7,8),(7,9),(7,10),(7,11),(8,9),(8,10),(8,11),(9,10),(9,11),(10,11)\}$,共 10 种情况.

记事件 A="至少有一个月份这两年该国产品牌 SUV 销量相同",

则 $A=\{(7,8),(7,11),(8,9),(8,10),(8,11),(9,11),(10,11)\}$,共 7 种情况,所以 $P(A)=\frac{7}{10}$,即至少有一个月份这两年该国产品牌 SUV 销量相同的概率为 $\frac{7}{10}$.

(2)$\bar{x}_{2018}=\frac{1}{5}(2.8+3.9+3.5+4.4+5.4)=4$,

$\bar{x}_{2019}=\frac{1}{5}(3.8+3.9+4.5+4.9+5.4)=4.5$,

$s_{2018}^2=\frac{1}{5}[(2.8-4)^2+(3.9-4)^2+(3.5-4)^2+(4.4-4)^2+(5.4-4)^2]=0.764$,

$s_{2019}^2=\frac{1}{5}[(3.8-4.5)^2+(3.9-4.5)^2+(4.5-4.5)^2+(4.9-4.5)^2+(5.4-4.5)^2]=0.364$,

因为 $\bar{x}_{2018}=4$,$\bar{x}_{2019}=4.5$,$s_{2018}^2>s_{2019}^2$,

所以 2019 年销售量比较稳定.

19.**解**:(1)设"该校男生支持方案一"为事件 A,"该校女生支持方案一"为事件 B,则 $P(A)=\frac{200}{200+400}=\frac{1}{3}$,$P(B)=\frac{300}{300+100}=\frac{3}{4}$.

(2)由(1)知,$P(A)=\frac{1}{3}$,$P(B)=\frac{3}{4}$,设"这 3 人中恰有 2 人支持方案一"为事件 C,则 $P(C)=C_2^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(1-\frac{3}{4}\right)+C_2^1\times\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{3}{4}=\frac{13}{36}$.

(3)$p_0>p_1$.

20.**解**:(1)甲连胜四场只能是前四场全胜,$P=\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$.

(2)根据赛制,至少需要进行四场比赛,至多需要进行五场比赛,比赛四场结束,共有三种情况,甲连胜四场的概率为 $\frac{1}{16}$,乙连胜四场比赛的概率为 $\frac{1}{16}$,丙上场后连胜三场的概率为 $\frac{1}{8}$,所以需要进行第五场比赛的概率为 $P=1-\frac{1}{16}-\frac{1}{16}-\frac{1}{8}=\frac{3}{4}$.

(3)丙最终获胜,有两种情况:比赛四场结束且丙最终获胜的概率为 $\frac{1}{8}$;比赛五场结束且丙最终获胜,则从第二场开始的四场比赛按丙的胜、负、轮空结果有三种情况:胜胜负胜,胜负空胜,负空胜胜,概率分别为 $\frac{1}{16}$,$\frac{1}{8}$,$\frac{1}{8}$,所以丙最终获胜的概率 $P=\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{7}{16}$.

21.**解**:(1)由频率分布直方图得(1.25×0.2+1.75×0.3+2.25×0.4+2.75×0.6+3.25×0.4+3.75×0.1)×0.5=2.5,所以这 100 名学生双休日两天家务劳动的平均时间为 2.5 小时.

(2)"双休日两天家务劳动的时间不少于 3 小时"的概率为(0.4+0.1)×0.5=$\frac{1}{4}$,所以从该校所有学生中随机抽取 4 个人,恰好有 1 个人是"双休日两天家务劳动的时间不少于 3 小时"的概率为 $P=C_4^1\times\frac{1}{4}\times\left(1-\frac{1}{4}\right)^3=\frac{27}{64}$.

(3)用分层抽样的方法从这 100 人抽取 8 人,其中"双休日两天家务劳动的时间不少于 3 小时"有 $8\times\frac{1}{4}=2$ 人,则 Y 的可能取值为 0,1,2,$P(Y=0)=\frac{C_6^2}{C_8^2}=\frac{15}{28}$,$P(Y=1)=\frac{C_2^1C_6^1}{C_8^2}=\frac{3}{7}$,$P(Y=2)=\frac{C_2^2}{C_8^2}=\frac{1}{28}$,

所以 Y 的分布列为

Y	0	1	2
P	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{28}$

所以 $E(Y)=0\times\frac{15}{28}+1\times\frac{3}{7}+2\times\frac{1}{28}=\frac{1}{2}$.

22.**解**:(1)设方案一中每组的检验次数为 X,则 X 的取值为 1,6,

$P(X=1)=0.992^5=0.961$.

$P(X=6)=1-P(X=1)=1-0.961=0.039$,

所以 X 的分布列为

X	1	6
P	0.961	0.039

则 $E(X)=1\times0.961+6\times0.039=1.195$.

故方案一的检验总次数的期望为 $10E(X)=10\times1.195=11.95$.

设方案二中每组的检验次数为 Y,则 Y 的取值为 1,11,

则 $P(Y=1)=0.992^{10}=0.923$,

$P(Y=11)=1-0.992^{10}=0.077$,

则 Y 的分布列为

Y	1	11
P	0.923	0.077

则 $E(Y)=1\times0.923+11\times0.077=1.77$.

故方案二的检验总次数的期望为 $5E(Y)=5\times1.77=8.85$.

因为 11.95>8.85,

则方案二的检测次数更少.

(2)①由已知得 $\xi_1=k$,$\xi_2=1$ 或 $\xi_2=k+1$,

则 $P(\xi_2=1)=(1-p)^k$,

$P(\xi_2=k+1)=1-(1-p)^k$,

则 $E(\xi_2)=(1-p)^k+(1+k)[1-(1-p)^k]=k+1-k(1-p)^k$,

因为 $E(\xi_1)=E(\xi_2)$,

所以 $k=k+1-k(1-p)^k$,

所以 $p=1-\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}(k\geqslant2,k\in\mathbf{N}_+)$,

②令 $f(k)=1-\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}(k\geqslant2,k\in\mathbf{N}_+)$,

则 $f(2)=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$,$f(3)=1-\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$,

所以 $f(2)-f(3)=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}<0$,

当 $k\geqslant3$ 时,

$f(k+1)-f(k)=\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}-\left(\frac{1}{k+1}\right)^{\frac{1}{k+1}}$,

令 $g(x)=-\frac{\ln x}{x}(x\geqslant3)$,

则 $g'(x)=\frac{\ln x-1}{x^2}$,

当 $k\geqslant3$ 时,$-\frac{1}{k}\ln k<-\frac{1}{k+1}\ln(k+1)$,

所以 $\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}<\left(\frac{1}{k+1}\right)^{\frac{1}{k+1}}$,

所以当 $k\geqslant3$ 时,$f(k+1)-f(k)<0$,

所以 $f(2)<f(3)>f(4)>f(5)>\cdots$,

所以当 $k=3$ 时,$f(k)$最大,

所以当 $k=3$ 时,p 取最大值,且最大值为 $p=f(3)=1-\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$.