第28期

第2~3版专题检测参考答案

一、选择题

1~6.BDCDDB　7~12.CCDCBD

二、填空题

13.$\sqrt{3}$　14.$-\frac{7}{9}$

15.$\sqrt{6}$　16.3

三、解答题

17.解:(1)因为 $\sin x+\cos x=\frac{1}{2}$,所以 $(\sin x+\cos x)^2=1+2\sin x\cos x=\frac{1}{4}$,所以 $\sin x\cos x=-\frac{3}{8}$,所以 $(\sin x-\cos x)^2=1-2\sin x\cos x=1+\frac{3}{4}=\frac{7}{4}$,因为 $0<x<\pi$,所以 $\sin x>0,\cos x<0$,所以 $\sin x-\cos x=\frac{\sqrt{7}}{2}$.

(2) $\frac{\sin 2x+2\sin^2 x}{1-\tan x}$

$=\frac{2\sin x(\cos x+\sin x)}{1-\frac{\sin x}{\cos x}}$

$=\frac{2\sin x\cos x(\cos x+\sin x)}{\cos x-\sin x}$,

由 $\sin x+\cos x=\frac12$,

$\sin x-\cos x=\frac{\sqrt7}{2}$,$2\sin x\cos x=-\frac34$,

得 $\frac{\sin2x+2\sin^2x}{1-\tan x}=\frac{-\frac34\times\frac12}{-\frac{\sqrt7}{2}}=\frac{3\sqrt7}{28}$.

18.解:(1)因为 $f(x)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac12\cos2x+\frac{\sqrt3}{2}\sin2x+(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x)=\frac12\cos2x+\frac{\sqrt3}{2}\sin2x-\cos2x=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$,所以最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.由 $2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z$,得 $x=\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2},k\in Z$,所以f(x)图象的对称轴方程为 $x=\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2},k\in Z$.

(2)因为 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$,所以 $2x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}\right]$,所以当 $2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$,即 $x=\frac{\pi}{3}$ 时,$[f(x)]_{max}=1$;当 $2x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{2}$,即 $x=-\frac{\pi}{6}$ 时,$[f(x)]_{min}=-1$.

19.解:(1)函数 $f(x)=\sqrt3\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{12}\right)=\sqrt3\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+1-\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+1$,

令 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\le 2x-\frac{\pi}{3}\le 2k\pi+\frac{3\pi}{2},k\in Z$,得 $k\pi+\frac{5\pi}{12}\le x\le k\pi+\frac{11\pi}{12},k\in Z$.

所以函数f(x)的单调递减区间为 $\left[k\pi+\frac{5\pi}{12},k\pi+\frac{11\pi}{12}\right],k\in Z$.

(2)对于函数 $f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+1$,当 $f(x)$ 取得最大值时,$2x-\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z$,即 $x=k\pi+\frac{5\pi}{12},k\in Z$,故 $f(x)$ 取得最大值时 x 的集合为 $\left\{x\middle|x=k\pi+\frac{5\pi}{12},k\in Z\right\}$.

20.解:(1)选①②时,因为函数 $f(x)$ 的周期为 π,所以 $\omega=\frac{2\pi}{\pi}=2$.因为 $x=\frac{\pi}{3}$ 是函数 $f(x)$ 的对称轴,所以 $\frac{2\pi}{3}+\varphi=k\pi,k\in Z$,解得 $\varphi=k\pi-\frac{2\pi}{3},k\in Z$.由 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,解得 $\varphi=\frac{\pi}{3}$,所以 $f(x)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

选①③时,由函数 $f(x)$ 的周期为 π,得 $\omega=\frac{2\pi}{\pi}=2$.又 $f\left(\frac{7\pi}{12}\right)=0$,得 $\frac{7\pi}{12}\times2+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z$,解得 $\varphi=k\pi-\frac{2\pi}{3},k\in Z$.由 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,解得 $\varphi=\frac{\pi}{3}$,所以 $f(x)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

选②③时,由 $x=\frac{\pi}{3}$ 是函数 $f(x)$ 的对称轴,且 $f\left(\frac{7\pi}{12}\right)=0$,所以 $\frac{T}{4}=\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{4}$,解得 $T=\pi$,所以 $\omega=\frac{2\pi}{\pi}=2$.所以 $\frac{2\pi}{3}+\varphi=k\pi,k\in Z$,解得 $\varphi=k\pi-\frac{2\pi}{3},k\in Z$.由 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,解得 $\varphi=\frac{\pi}{3}$,所以 $f(x)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

(2)因为 $-\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{\pi}{3}$,所以 $-\frac{\pi}{3}\le 2x+\frac{\pi}{3}\le\pi$,所以当 $2x+\frac{\pi}{3}=0$,即 $x=-\frac{\pi}{6}$ 时,$f(x)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 取得最大值2;当 $2x+\frac{\pi}{3}=\pi$,即 $x=\frac{\pi}{3}$ 时,$f(x)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 取得最小值-2.

21.解:(1) $g(x)=4\sin x\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=2\sqrt3\sin x\cos x-2\sin^2x=\sqrt3\sin2x-1+\cos2x=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-1$,由题意得,$f(x)=2\sin\left(2x+2\varphi+\frac{\pi}{6}\right)-1$.

由 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称,得 $2\varphi+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z$,即 $\varphi=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},k\in Z$.又 $0<\varphi\le\frac{\pi}{2}$,所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$,$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)-1=2\cos2x-1$,所以 $f(\varphi)=f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\cos\frac{\pi}{3}-1=0$.

(2)由 $x\in\left(\pi,\frac{7\pi}{6}\right)$,得 $2x+2\varphi+\frac{\pi}{6}\in\left(2\varphi+2\pi+\frac{\pi}{6},2\varphi+2\pi+\frac{\pi}{2}\right)$,因为 $0<\varphi\le\frac{\pi}{2}$,所以 $\frac{\pi}{6}+2\varphi\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$,$2\varphi+\frac{\pi}{2}\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$,因为 $f(x)$ 在 $\left(\pi,\frac{7\pi}{6}\right)$ 上是单调函数,所以 $\frac{\pi}{6}+2\varphi\ge\frac{\pi}{2}$,且 $0<\varphi\le\frac{\pi}{2}$,解得 $\frac{\pi}{6}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$.所以 φ 的取值范围是 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$.

22.解:(1)因为 H 关于 t 的函数关系式为 $H(t)=A\sin(\omega t+\varphi)+B$,由 $\begin{cases}B+A=145,\\B-A=21,\end{cases}$ 解得 $A=62,B=83$,又函数 H(t) 的周期为30,所以 $\omega=\frac{2\pi}{30}=\frac{\pi}{15}$,可得 $H(t)=62\sin\left(\frac{\pi}{15}t+\varphi\right)+83$,又 $H(0)=62\sin\left(\frac{\pi}{15}\times0+\varphi\right)+83=21$,所以 $\sin\varphi=-1$,又 $|\varphi|\le\frac{\pi}{2}$,所以 $\varphi=-\frac{\pi}{2}$,所以摩天轮转动一周的解析式为 $H(t)=62\sin\left(\frac{\pi}{15}t-\frac{\pi}{2}\right)+83$,$0\le t\le30$.

(2) $H(t)=62\sin\left(\frac{\pi}{15}t-\frac{\pi}{2}\right)+83=-62\cos\frac{\pi}{15}t+83$,所以 $-62\cos\frac{\pi}{15}t+83=52$,即 $\cos\frac{\pi}{15}t=\frac12$,又 $0\le t\le30$,则 t=5,或 t=25(舍去),所以 t=5.所以游客甲坐上摩天轮后5分钟,距离地面的高度第一次恰好达到52米.

(3)由(2)知,经过 t 分钟后游客甲距离地面高度的解析式为 $H_{甲}(t)=-62\cos\frac{\pi}{15}t+83$,乙与甲间隔的时间为 $\frac{30}{36}\times6=5$ 分钟,所以乙距离地面高度的解析式为 $H_{乙}(t)=-62\cos\frac{\pi}{15}(t-5)+83$,$5\le t\le30$,所以两人离地面的高度差 $h=|H_{甲}-H_{乙}|=\left|-62\cos\frac{\pi}{15}t+62\cos\frac{\pi}{15}(t-5)\right|=62\left|\sin\left(\frac{\pi}{15}t-\frac{\pi}{6}\right)\right|$,$5\le t\le30$,所以当 $\frac{\pi}{15}t-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{3\pi}{2}$,即 $t=10$ 或 25 时,h 取最大值为62.

第25期

第2~3版专题检测参考答案

一、选择题

1~6.ABAADB　7~12.ADBCCC

二、填空题

13.$\sqrt[3]{3}$　14.$y=2x$

15.[2,4]　16.(1,2)

三、解答题

17.解:(1)因为 $f(-2)=f(2)$,所以 $4=2\times2+a$,解得 $a=0$.

(2)由(1)知,$f(x)=\begin{cases}x^2,x\le0,\\2x,x>0,\end{cases}$ 且 $f(4)=8$,所以不等式 $f(x)\ge f(4)$ 可化为 $f(x)\ge8$,所以 $\begin{cases}x\le0,\\x^2\ge8,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x>0,\\2x\ge8,\end{cases}$ 解得 $x\le-2\sqrt2$ 或 $x\ge4$,所以不等式的解集为 $(-\infty,-2\sqrt2]\cup[4,+\infty)$.

18.解:因为函数 $f(x)=\log_a x(a>0,a\ne1)$ 的图象过点 $\left(\frac14,-2\right)$,故 $\log_a\frac14=-2$,解得 $a=2$,所以 $f(x)=\log_2x$.

(1)函数 $g(x)=f(1+x)+f(1-x)=\log_2(1+x)+\log_2(1-x)=\log_2(1-x^2)$ 的定义域为(-1,1),关于原点对称,且 $g(-x)=g(x)$,故 $g(x)$ 为偶函数,又由 $1-x^2\in(0,1]$,故 $g(x)\in(-\infty,0]$,即 $g(x)$ 的值域为 $(-\infty,0]$.

(2)因为关于 x 的方程 $f(x^2-tx+8)=2$ 在[1,4]上有解,所以 $x^2-tx+8=4$,即 $x^2-tx+4=0$ 在[1,4]上有解,即 $t=\frac{x^2+4}{x}=x+\frac4x$ 在[1,4]上有解,由对勾函数的图象和性质可得,当 $x=2$ 时,$x+\frac4x$ 取最小值4;当 $x=1$,或 $x=4$ 时,$x+\frac4x$ 取最大值5,故实数 t 的取值范围是[4,5].

19.(1)证明:当 $a=e$ 时 $f(x)=e^{x-1}-e\ln x$,
即证 $e^{x-1}-e\ln x\ge0$,即 $e^{x-2}\ge\ln x$,
先证:$e^{x-2}\ge x-1$,
令 $g(x)=e^{x-2}-x+1$,$g'(x)=e^{x-2}-1$,
当 $x>2$ 时,$g'(x)>0$;
当 $x<2$ 时,$g'(x)<0$,
所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,2)$ 上单调递减,在 $(2,+\infty)$ 上单调递增,
故 $[g(x)]_{min}=g(2)=0$,所以 $e^{x-2}\ge x-1$.
再证:$x-1\ge\ln x$,
令 $h(x)=x-1-\ln x$,$h'(x)=1-\frac1x=\frac{x-1}{x}$,
当 $0<x<1$ 时,$h'(x)<0$;
当 $x>1$ 时,$h'(x)>0$,
所以 $h(x)$ 在(0,1)上单调递减,
在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,
所以 $[h(x)]_{min}=h(1)=0$,
所以 $x-1\ge\ln x$,
所以 $e^{x-2}\ge x-1\ge\ln x$,
即 $e^{x-2}\ge\ln x$,所以 $f(x)\ge0$.

(2)解:$f'(x)=e^{x-1}-\frac ax$,
因为 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值,
所以 $f'(1)=1-a=0$,解得 $a=1$.
当 $a=1$ 时,
$f'(x)=e^{x-1}-\frac1x$,$f''(x)=e^{x-1}+\frac1{x^2}>0$,
所以 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,
当 $0<x<1$ 时,$f'(x)<f'(1)=0$,
当 $x>1$ 时,$f'(x)>f'(1)=0$,
此时 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极小值点.
综上所述,$a=1$.

20.(1)解法一:设 $h(x)=f(x)-2x-c$,
则 $h(x)=2\ln x-2x+1-c$,
其定义域为 $(0,+\infty)$,$h'(x)=\frac2x-2$.
当 $0<x<1$ 时,$h'(x)>0$;
当 $x>1$ 时,$h'(x)<0$.
所以 $h(x)$ 在区间(0,1)单调递增,在区间 $(1,+\infty)$ 单调递减.
从而当 $x=1$ 时,$h(x)$ 取得最大值,最大值为 $h(1)=-1-c$,
故当且仅当 $-1-c\le0$,
即 $c\ge-1$ 时,$f(x)\le2x+c$,
所以 c 的取值范围为 $[-1,+\infty)$.
解法二:因为 $f(x)\le2x+c$,
所以 $c\ge2\ln x-2x+1$,
令 $m(x)=2\ln x-2x+1$,则 $m'(x)=\frac2x-2$,
由 $m'(x)=\frac2x-2>0$,得 $0<x<1$;
由 $m'(x)=\frac2x-2<0$,得 $x>1$.
所以 $m(x)$ 在区间(0,1)单调递增,在区间 $(1,+\infty)$ 单调递减,
从而当 $x=1$ 时,$m(x)$ 取得最大值,最大值为 $m(1)=-1$,所以 $c\ge-1$,
所以 c 的取值范围为 $[-1,+\infty)$.

(2)解:$g(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{2(\ln x-\ln a)}{x-a}$,$x\in(0,a)\cup(a,+\infty)$.

$g'(x)=\frac{2\left(\frac{x-a}{x}+\ln a-\ln x\right)}{(x-a)^2}=\frac{2\left(1-\frac ax+\ln\frac ax\right)}{(x-a)^2}$.

取 $c=-1$,得 $h(x)=2\ln x-2x+2$,$h(1)=0$,
则由(1)知,当 $x\ne1$ 时,$h(x)<0$,
即 $1-x+\ln x<0$,令 $\frac ax=t$,$t>0$ 且 $t\ne1$,
则 $2\left(1-\frac ax+\ln\frac ax\right)=h(t)<0$,
从而 $g'(x)<0$.所以 $g(x)$ 在区间 $(0,a)$,$(a,+\infty)$ 单调递减.

21.解:(1)因为 $f'(x)=e^x\left(x\ln x+\ln x+\frac2e+1\right)$,所以 $f'(1)=e+2$,因为 $f(1)=2$,所以所求切线方程为 $y-2=(e+2)(x-1)$,即 $(e+2)x-y-e=0$.

(2)由 $f(1)>g(1)$,得 $a<2$,因为 $a\in Z$,所以考虑证明不等式 $e^x\left(x\ln x+\frac2e\right)>x$ 恒成立,即证 $x\ln x+\frac2e>\frac{x}{e^x}$ 恒成立,令 $m(x)=x\ln x+\frac2e$,$h(x)=\frac{x}{e^x}(x>0)$,因为 $m'(x)=\ln x+1$,所以当 $0<x<\frac1e$ 时,$m'(x)<0$,$m(x)$ 单调递减,当 $x>\frac1e$ 时,$m'(x)>0$,$m(x)$ 单调递增,所以 $[m(x)]_{min}=m\left(\frac1e\right)=\frac1e$.因为 $h'(x)=\frac{1-x}{e^x}$,所以当 $0<x<1$ 时,$h'(x)>0$,$h(x)$ 单调递增,当 $x>1$ 时,$h'(x)<0$,$h(x)$ 单调递减,所以 $[h(x)]_{max}=h(1)=\frac1e$,所以 $m(x)\ge\frac1e\ge h(x)$ 且等号不同时取得,所以 $x\ln x+\frac2e>\frac{x}{e^x}$,即 $e^x\left(x\ln x+\frac2e\right)>x$ 恒成立.综上,a 的最大值为1.

22.(1)解:由 $f(x)=x^3+bx+c$,得 $f'(x)=3x^2+b$,所以 $f'\left(\frac12\right)=3\times\left(\frac12\right)^2+b=0$,即 $b=-\frac34$.

(2)证明:设 x_0 为 $f(x)$ 的一个零点,根据题意,$f(x_0)=x_0^3-\frac34x_0+c=0$,且 $|x_0|\le1$,

则 $c=-x_0^3+\frac34x_0$,由 $|x_0|\le1$,

令 $c(x)=-x^3+\frac34x(-1\le x\le1)$,

所以 $c'(x)=-3x^2+\frac34=-3\left(x+\frac12\right)\left(x-\frac12\right)$.

当 $x\in\left(-1,-\frac12\right)\cup\left(\frac12,1\right)$ 时,$c'(x)<0$;

当 $x\in\left(-\frac12,\frac12\right)$ 时,$c'(x)>0$.

可知 $c(x)$ 在 $\left(-1,-\frac12\right)$,$\left(\frac12,1\right)$ 上单调递减,在 $\left(-\frac12,\frac12\right)$ 上单调递增.

又 $c(-1)=\frac14$,$c(1)=-\frac14$,$c\left(-\frac12\right)=-\frac14$,$c\left(\frac12\right)=\frac14$,所以 $-\frac14\le c\le\frac14$.

设 x_1 为 $f(x)$ 的零点,

则必有 $f(x_1)=x_1^3-\frac34x_1+c=0$,

即 $-\frac14\le c=-x_1^3+\frac34x_1\le\frac14$,

所以
$\begin{cases}4x_1^3-3x_1-1=(x_1-1)(2x_1+1)^2\le0,\\4x_1^3-3x_1+1=(x_1+1)(2x_1-1)^2\ge0,\end{cases}$
得 $-1\le x_1\le1$,即 $|x_1|\le1$.

所以 $f(x)$ 所有零点的绝对值都不大于1.

第 26 期

第 2~3 版专题检测参考答案

一、选择题

1~6.ADBCDD　　7~12.CBADAC

二、填空题

13.2,9　　14.$x+y-3=0$

15.-3　　16.$\left[\dfrac{2+\ln 3}{3},+\infty\right)$

三、解答题

17.**解**:(1)由于 $e^x>0$ 恒成立,故 $f(x)>0$,即 $2x^2-3x>0$,即 $x(2x-3)>0$,所以所求不等式的解集为$\left\{x\,\middle|\,x<0,或\ x>\dfrac{3}{2}\right\}$.

(2)由题意知,$f'(x)=e^x(2x^2+x-3)$,当 $x\in[0,1)$时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减,当$x\in(1,2]$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增,且 $f(0)=e^0\times0=0$,$f(1)=e^1\times(-1)=-e$,$f(2)=e^2\times2=2e^2$,故函数 $f(x)$在$[0,2]$上的最大值为$2e^2$,最小值为$-e$.

18.**解**:(1)当 $a=e$ 时,$f(x)=e^x-\ln x+1$,所以$f'(x)=e^x-\dfrac{1}{x}$,所以 $f'(1)=e-1$,因为 $f(1)=e+1$,所以曲线 $y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为 $y-(e+1)=(e-1)(x-1)$.当 $x=0$时,$y=2$,当 $y=0$ 时,$x=\dfrac{-2}{e-1}$,所以曲线 $y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积 $S=\dfrac{1}{2}\times2\times\dfrac{2}{e-1}=\dfrac{2}{e-1}$.

(2)由 $f(x)\geqslant1$,可得 $ae^{x-1}-\ln x+\ln a\geqslant1$,即 $e^{x-1+\ln a}-\ln x+\ln a\geqslant1$,即 $e^{x-1+\ln a}+\ln a+x-1\geqslant\ln x+x=e^{\ln x}+\ln x$.令 $g(t)=e^t+t$,则 $g'(t)=e^t+1>0$,所以 $g(t)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,因为 $g(\ln a+x-1)\geqslant g(\ln x)$,所以 $\ln a+x-1\geqslant\ln x$,即 $\ln a\geqslant\ln x-x+1$.令 $h(x)=\ln x-x+1$,所以 $h'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}$,当 $0<x<1$ 时,$h'(x)>0$,函数 $h(x)$单调递增,当 $x>1$ 时,$h'(x)<0$,函数 $h(x)$单调递减,所以 $h(x)\leqslant h(1)=0$,所以 $\ln a\geqslant0$,所以 $a\geqslant1$,故 a 的取值范围为$[1,+\infty)$.

19.**解**:(1)由函数 $f(x)$是偶函数,得 $f(-x)=f(x)$,即 $me^{-x}-(-x)^2+3=me^x-x^2+3$ 对于任意实数 x 都成立,所以 $m=0$.此时 $h(x)=xf(x)=-x^3+3x$,则 $h'(x)=-3x^2+3$,当 $h'(x)=-3x^2+3\leqslant0$ 时,解得 $x\leqslant-1$ 或 $x\geqslant1$,所以 $h(x)$的单调递减区间为$(-\infty,-1]$,$[1,+\infty)$.

(2)由 $f(x)=me^x-x^2+3=0$,得 $m=\dfrac{x^2-3}{e^x}$.所以"$f(x)$在区间$[-3,4]$上有两个零点"等价于"直线 $y=m$ 与曲线 $g(x)=\dfrac{x^2-3}{e^x}$在 $x\in[-3,4]$上有且只有两个公共点".由 $g(x)=\dfrac{x^2-3}{e^x}$,得 $g'(x)=\dfrac{-x^2+2x+3}{e^x}$.由 $g'(x)=0$,解得 $x_1=-1$,$x_2=3$.当 x 变化时,$g'(x)$与 $g(x)$的变化情况如下表所示:

x	$(-3,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,4)$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	↘	极小值	↗	极大值	↘

所以 $g(x)$在$(-3,-1)$,$(3,4)$上单调递减,在$(-1,3)$上单调递增.又因为 $g(-3)=6e^3$,$g(-1)=-2e$,$g(3)=\dfrac{6}{e^3}<g(-3)$,$g(4)=\dfrac{13}{e^4}>g(-1)$,所以当$-2e<m<\dfrac{13}{e^4}$或 $m=\dfrac{6}{e^3}$时,直线 $y=m$ 与曲线 $g(x)=\dfrac{x^2-3}{e^x}$在 $x\in[-3,4]$上有且只有两个公共点.所以 m 的取值范围为$\left\{m\,\middle|\,-2e<m<\dfrac{13}{e^4},或\ m=\dfrac{6}{e^3}\right\}$.

20.(1)**解**:当 $k=2$ 时,$f(x)=2x-x\ln x$,$f'(x)=1-\ln x$,由 $f'(x)>0$,解得 $0<x<e$;由 $f'(x)<0$,解得 $x>e$,因此函数 $f(x)$的单调递增区间为$(0,e)$,单调递减区间为$(e,+\infty)$.

(2)**解**:$f(x)=kx-x\ln x$,故 $f'(x)=k-1-\ln x$.当 $k\geqslant1$ 时,因为 $0<x\leqslant1$,所以 $k-1\geqslant0\geqslant\ln x$,因此 $f'(x)\geqslant0$ 恒成立,即 $f(x)$在$(0,1]$上单调递增,所以 $f(x)\leqslant f(1)=k$ 恒成立.当 $k<1$ 时,令 $f'(x)=0$,解得 $x=e^{k-1}\in(0,1)$,当 $x\in(0,e^{k-1})$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增;当 $x\in(e^{k-1},1)$时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减,于是 $f(e^{k-1})>f(1)=k$,与 $f(x)\leqslant k$ 恒成立相矛盾.

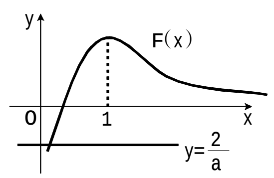
综上,k 的取值范围为$[1,+\infty)$.

(3)**证明**:由(2)知,当 $0<x\leqslant1$ 时,$x-x\ln x\leqslant1$.令 $x=\dfrac{1}{n^2}(n\in\mathbf{N}_+)$,则$\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{n^2}\ln\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}\ln n\leqslant1$,即 $2\ln n\leqslant n^2-1$,因此$\dfrac{\ln n}{n+1}\leqslant\dfrac{n-1}{2}$,所以$\dfrac{\ln1}{2}+\dfrac{\ln2}{3}+\cdots+\dfrac{\ln n}{n+1}\leqslant\dfrac{0}{2}+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{n-1}{2}=\dfrac{n(n-1)}{4}$.

21.(1)**解**:因为 $f(x)=x^2-ax\ln x(x>0)$,所以 $f'(x)=2x-a(\ln x+1)$,因为函数 $f(x)$恰有一个极值点,所以方程 $2x-a(\ln x+1)=0$在$(0,+\infty)$上恰有一个变号实根.所以$\dfrac{2}{a}=\dfrac{\ln x+1}{x}$在$(0,+\infty)$上恰有一个变号实根.令 $F(x)=\dfrac{\ln x+1}{x}$,则 $F'(x)=\dfrac{-\ln x}{x^2}$.

可得 $x\in(0,1)$时,$F'(x)>0$,函数 $F(x)$单调递增;$x\in(1,+\infty)$时,$F'(x)<0$,函数 $F(x)$单调递减.

函数 $F(x)$的大致图象如下,



(第 21 题图)

可得$\dfrac{2}{a}<0$,所以 $a<0$.所以实数 a 的取值范围为$(-\infty,0)$.

(2)**证明**:要证明:$\dfrac{f(x)}{x}\leqslant g(x)\Leftrightarrow$证明 $x-a\ln x\leqslant\left(1-\dfrac{a}{e}\right)x\Leftrightarrow$证明 $a\ln x\geqslant\dfrac{a}{e}x$,即证明 $\ln x\leqslant\dfrac{x}{e}$.

令 $h(x)=\ln x-\dfrac{x}{e}$,则 $h'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e}=\dfrac{e-x}{ex}$,$x\in(0,e)$时,$h'(x)>0$,函数 $h(x)$单调递增;$x\in(e,+\infty)$时,$h'(x)<0$,$h(x)$单调递减.

所以 $h(x)\leqslant h(e)=0$,即原不等式成立.

要证明 $g(x)<\dfrac{e^x}{x}$,即证明$\dfrac{e^x}{x^2}>1-\dfrac{a}{e}$.

因为 $a\in(-1,0)$,所以 $1-\dfrac{a}{e}<1+\dfrac{1}{e}$.

故只需证明$\dfrac{e^x}{x^2}\geqslant1+\dfrac{1}{e}$即可.

令 $G(x)=\dfrac{e^x}{x^2}$,则 $G'(x)=\dfrac{e^x(x-2)}{x^3}$.

$x\in(0,2)$时,$G'(x)<0$,函数 $G(x)$单调递减;$x\in(2,+\infty)$时,$G'(x)>0$,函数 $G(x)$单调递增.

所以$\dfrac{e^2}{x^2}\geqslant\dfrac{e^2}{4}$,则$\dfrac{e^2}{4}>1+\dfrac{1}{e}$,故原不等式成立.

综上,$\dfrac{f(x)}{x}\leqslant g(x)<\dfrac{e^x}{x}$.

22.**解**:(1)当 $a=1$ 时,$f(x)=e^x+x^2-x$,$f'(x)=e^x+2x-1$,

显然 $f'(x)$为增函数,又 $f'(0)=0$,

所以当 $x\in(-\infty,0)$时,$f'(x)<0$;

当 $x\in(0,+\infty)$时,$f'(x)>0$.

所以 $f(x)$的单调递增区间为$(0,+\infty)$,单调递减区间为$(-\infty,0)$.

(2)由 $f(x)\geqslant\dfrac{1}{2}x^3+1$,

得 $e^x+ax^2-x\geqslant\dfrac{1}{2}x^3+1$.

①当 $x=0$ 时,不等式显然成立;

②当 $x>0$ 时,分离参数 a 得,

$a\geqslant-\dfrac{e^x-\frac{1}{2}x^3-x-1}{x^2}$.

记 $g(x)=-\dfrac{e^x-\frac{1}{2}x^3-x-1}{x^2}$,

$g'(x)=-\dfrac{(x-2)\left(e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1\right)}{x^3}$.

令 $h(x)=e^x-\dfrac{1}{2}x^2-x-1(x\geqslant0)$,

则 $h'(x)=e^x-x-1$,$h''(x)=e^x-1\geqslant0$,

故 $h'(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增,$h'(x)\geqslant h'(0)=0$,故函数 $h(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增,所以 $h(x)\geqslant h(0)=0$.由 $h(x)\geqslant0$,可得 $e^x-\dfrac{1}{2}x^2-x-1\geqslant0$ 恒成立,故当 $x\in(0,2)$时,$g'(x)>0$,$g(x)$单调递增;当 $x\in(2,+\infty)$时,$g'(x)<0$,$g(x)$单调递减.因此,$[g(x)]_{\max}=g(2)=\dfrac{7-e^2}{4}$.

综上可得,实数 a 的取值范围是$\left[\dfrac{7-e^2}{4},+\infty\right)$.

第 27 期

第 2~3 版专题检测参考答案

一、选择题

1~6.DDBCCC　　7~12.BDDDDA

二、填空题

13.$\dfrac{6\pi}{5}$　　14.7047

15.$\sqrt{2}+1$　　16.$\sqrt{3}-1$,$\dfrac{2}{3}$

三、解答题

17.**证明**:(1)取 AA_1 的中点 F,连接 DF,EF.因为 D,E 分别是 BB_1,A_1C 的中点,所以 $DF\parallel AB$,$EF\parallel AC$.又 AB,$AC\subset$平面 ABC,$DF\not\subset$平面 ABC,$EF\not\subset$平面 ABC,所以 $DF\parallel$平面 ABC,$EF\parallel$平面 ABC,又 $DF\cap EF=F$,DF,$EF\subset$平面DEF,所以平面 $DEF\parallel$平面ABC.又 $DE\subset$平面 DEF,所以 $DE\parallel$平面 ABC.

(2)因为 AA_1,BB_1 为圆柱的母线,所以 $AB\parallel A_1B_1$.因为 $AA_1\perp$平面 ABC,所以 $AA_1\perp AB$.又 BC 是底面圆的直径,所以 $AB\perp AC$.又 $AC\cap AA_1=A$,AC,$AA_1\subset$平面 A_1AC,所以$AB\perp$平面 A_1AC,又$A_1B_1\parallel AB$,所以 $A_1B_1\perp$平面 A_1AC.

18.(1)**证明**:连接 A_1C,因为在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,点 E,F 分别为 B_1C_1 和 BC 的中点,B_1A 与 A_1B 相交于点 G,所以 $EF\parallel AA_1$,G 是 A_1B 的中点,所以 $GF\parallel A_1C$,又 $AA_1\subset$平面 A_1ACC_1,$EF\not\subset$平面 A_1ACC_1,所以 $EF\parallel$平面 A_1ACC_1,又 $A_1C\subset$平面 A_1ACC_1,$GF\not\subset$平面 A_1ACC_1,所以 $GF\parallel$平面 A_1ACC_1,因为 $EF\cap GF=F$,所以平面 $EFG\parallel$平面 A_1ACC_1.

(2)**解**:取 A_1B_1 中点 D,连接 DE,DG,因为点 E,F 分别为 B_1C_1 和 BC 的中点,所以 $DG\parallel AA_1$,$DE\parallel AC$,所以$\angle DEG$(或其补角)是异面直线 GE 和 AC 所成角,因为 $AA_1\perp AC$ 且 $AA_1=AC$,所以$DE\perp DG$ 且 $DE=DG$,所以$\angle DEG=\dfrac{\pi}{4}$.所以异面直线 GE 和 AC 所成角的大小为$\dfrac{\pi}{4}$.

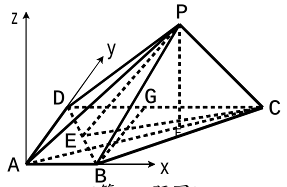
19.(1)**证明**:因为 AB 为圆 O 的直径,点 F 在圆 O 上,所以 $AF\perp BF$,又矩形 $ABCD$ 所在平面和圆 O 所在平面垂直且它们的交线为 AB,$CB\perp AB$,所以 $CB\perp$圆 O 所在平面,所以 $AF\perp BC$,又 $BC\cap BF=B$,所以 $AF\perp$平面 CBF,又$AF\subset$平面 DAF,所以平面 $DAF\perp$平面 CBF.

(2)**解**:连接 OE,因为 $AB=2$,$EF=1$,$AB\parallel EF$,所以 $OA=OE=1$,即四边形$OEFA$为菱形,所以 $AF=OA=OF=1$.所以在等边三角形 OAF 中,点 F 到边 OA 的距离为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.又矩形 $ABCD$ 所在平面和圆 O所在平面垂直,所以点 F 到边 OA 的距离即为四棱锥 F-$ABCD$ 的高,所以四棱锥 $F-ABCD$ 的高 $h=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.又 $BC=1$,所以矩形 $ABCD$ 的面积 $S_{ABCD}=AB\cdot BC=2\times1=2$,所以 $V_{F-ABCD}=\dfrac{1}{3}\times2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

20.(1)**证明**:取 BD 的中点 E,连接 PE,CE,过 B 作 $BG\perp CD$ 于 G,因为$AB\parallel CD$,$AB\perp AD$,$BG\perp CD$,所以四边形$ABGD$是矩形,所以 $DG=AB=2$,$BG=AD=4$,又 $BC=5$,所以 $CG=3$,故 $CD=5$,所以 $BC=CD$,所以 $CE\perp BD$,又 $PB=PD$,所以$PE\perp BD$,又 $PE\cap CE=E$,所以 $BD\perp$平面PCE,又 $PC\subset$平面 PCE,所以 $BD\perp PC$.

(2)**解**:过 P 作 $PF\perp AC$ 于 F,因为 $PA=PC$,所以 F 为 AC 的中点,因为平面 $PAC\perp$平面 $ABCD$,平面 $PAC\cap$平面 $ABCD=AC$,$PF\perp AC$,所以 $PF\perp$平面 $ABCD$,由 $AD=4$,$CD=5$,可得 $AC=\sqrt{AD^2+CD^2}=\sqrt{41}$,故 $AF=\dfrac{\sqrt{41}}{2}$,所以 $PF=\sqrt{PA^2-AF^2}=\dfrac{\sqrt{11}}{2}$.以 A 为原点,以 AB 所在直线为 x 轴,以 AD 所在直线为 y 轴,以平面 $ABCD$ 的过 A 点的垂线为 z 轴建立空间直角坐标系 $A-xyz$,则 $A(0,0,0)$,$B(2,0,0)$,$D(0,4,0)$,$C(5,4,0)$,所以 $P\left(\dfrac{5}{2},2,\dfrac{\sqrt{11}}{2}\right)$,所以$\overrightarrow{BP}=\left(\dfrac{1}{2},2,\dfrac{\sqrt{11}}{2}\right)$,$\overrightarrow{AD}=(0,4,0)$,$\overrightarrow{AP}=\left(\dfrac{5}{2},2,\dfrac{\sqrt{11}}{2}\right)$,设平面 PAD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}4y=0,\\ \dfrac{5}{2}x+2y+\dfrac{\sqrt{11}}{2}z=0,\end{cases}$令 $z=\sqrt{11}$,得 $\boldsymbol{n}=\left(-\dfrac{11}{5},0,\sqrt{11}\right)$,设 PB 与平面 PAD 所成角为 θ,所以 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{BP}\rangle|=\left|\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BP}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{BP}|}\right|=\dfrac{\frac{22}{5}}{\frac{6\sqrt{11}}{5}\times\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{77}}{21}$,

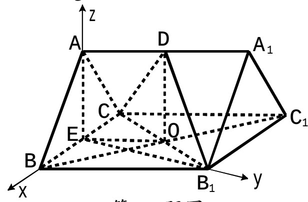
所以 PB 与平面 PAD 所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{77}}{21}$.



(第 20 题图)

21.(1)**证明**:设菱形 BB_1C_1C 的对角线交点为 O,BC 的中点为 E,连接 OD,OE,AE,因为$\triangle ABC$ 是等边三角形,所以 $AE\perp BC$,因为平面 $ABC\perp$平面 BCC_1B_1,平面 $ABC\cap$平面 $BCC_1B_1=BC$,$AE\perp BC$,所以 $AE\perp$平面 BCC_1B_1,又 $BC_1\subset$平面 BCC_1B_1,所以 $AE\perp BC_1$,因为 O,E 分别是 BC_1,BC 的中点,所以 $OE\parallel CC_1$,$OE=\dfrac{1}{2}CC_1$,因为 D 是三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧棱 AA_1 的中点,所以 $AD\parallel CC_1$,$AD=\dfrac{1}{2}CC_1$,所以 $AD\parallel OE$,$AD=OE$,所以四边形 $ADOE$ 是平行四边形,所以 $OD\parallel AE$,所以 $BC_1\perp OD$,因为四边形 BB_1C_1C 是菱形,所以 $BC_1\perp B_1C$,又 $OD\cap B_1C=O$,所以 $BC_1\perp$平面 DCB_1.

(2)**解**:连接 B_1E,因为四边形BB_1C_1C是菱形,$\angle CBB_1=60°$,所以$\triangle BCB_1$ 是等边三角形,所以 $B_1E\perp BC$,以 E 为原点,分别以 EB,EB_1,EA 所在直线为 x 轴,y 轴,z 轴建立空间直角坐标系 $E-xyz$,如图所示,则 $B(1,0,0)$,$B_1(0,\sqrt{3},0)$,$C(-1,0,0)$,$C_1(-2,\sqrt{3},0)$,$D\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{3}\right)$,所以$\overrightarrow{CC_1}=(-1,\sqrt{3},0)$,$\overrightarrow{CD}=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{3}\right)$,$\overrightarrow{BC_1}=(-3,\sqrt{3},0)$,因为$BC_1\perp$平面 DCB_1,所以$\overrightarrow{BC_1}$是平面DCB_1的一个法向量,设平面 DCC_1的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CC_1}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-x+\sqrt{3}y=0,\\ \dfrac{1}{2}x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}y+\sqrt{3}z=0,\end{cases}$令 $y=1$,得 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},1,-1)$,所以 $\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{BC_1}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC_1}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{BC_1}|}=\dfrac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{5}\times2\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$,由图形可知二面角 B_1-DC-C_1 为锐二面角,所以二面角 B_1-DC-C_1 的余弦值为$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

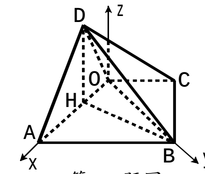


(第 21 题图)

22.(1)**证明**:因为在矩形 $ABCD$ 中,$AB=2AD=2$,O 为 CD 的中点,所以 $AD=OD=1$,$AO=OB=\sqrt{2}$,所以 $AO^2+BO^2=AB^2$,所以 $OB\perp OA$.因为 $OD^2+OB^2=DB^2$,所以 $OB\perp OD$,又 $OA\cap OD=O$,OA,$OD\subset$平面AOD,所以 $OB\perp$平面 AOD,又 $OB\subset$平面 $ABCO$,所以平面 $AOD\perp$平面 $ABCO$.

(2)**解**:以 O 为坐标原点,分别以直线 OA,OB 为 x 轴和 y 轴,以过点 O 且垂直平面 $ABCO$ 的直线为 z 轴,建立如图所示的空间直角坐标系 O-xyz,取 OA 的中点 H,连接 DH,则 $DH\perp AO$,由(1)知平面 $AOD\perp$平面 $ABCO$,平面 $AOD\cap$平面$ABCO=AO$,$DH\subset$平面 AOD,所以 $DH\perp$平面 $ABCO$,所以平面AOB的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$.$B(0,\sqrt{2},0)$,$A(\sqrt{2},0,0)$,$D\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$,$\overrightarrow{OA}=(\sqrt{2},0,0)$,$\overrightarrow{BD}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\sqrt{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

设$\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{BD}$,$0\leqslant\lambda\leqslant1$,则 $M\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\lambda,\sqrt{2}-\sqrt{2}\lambda,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\lambda\right)$,设平面 MOA 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{OA}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{OM}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}x=0,\\ y=\dfrac{\lambda}{2\lambda-2}z,\end{cases}$取 $\boldsymbol{n}=(0,\lambda,2\lambda-2)$,因为二面角 $M-OA-B$ 的平面角的正切值为$\dfrac{1}{2}$,由图可知二面角 $M-OA-B$ 的平面角为锐角,所以其余弦值为$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$,故$|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\left|\dfrac{2\lambda-2}{\sqrt{\lambda^2+(2\lambda-2)^2}}\right|=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$,解得 $\lambda=\dfrac{1}{2}$,所以 M 是 BD 的中点.



(第 22 题图)