第 4 期

第 3~4 版同步周测参考答案

一、选择题

1.C

2.B

提示:四面体的各面均为三角形.

3.B

提示:该数列可写为$\frac{7}{9}\times(10-1)$,$\frac{7}{9}\times(100-1)$,$\frac{7}{9}\times(1000-1)$,…,从而通项公式 $a_n=\frac{7}{9}(10^n-1)$.

4.D

提示:A 为类比推理,B 为归纳推理,C 为类比推理,D 为演绎推理.

5.A

提示:菱形的对角线不一定相等,所以大前提错误.

6.B

7.A

8.C

提示:通过计算,得 $a_2=1$,$a_3=\frac{4}{3}$,$a_4=2$,$a_5=0$.依此类推,知$\{a_n\}$是周期为 4 的数列,因此 a_{100} 的值为 2.故选 C.

9.D

提示:自然数 n^2 的分拆中最大的数是 $2n-1$,故 289 的分拆中最大的数是 $2\times17-1=33$,所以中位数是$\frac{1}{2}\times(1+33)=17$.

10.A

11.B

提示:令 $A=A_1+A_2+\cdots+A_n$,其中$\frac{1}{n+1}<A_1<\frac{1}{n}$,$\frac{1}{n+2}<A_2<\frac{1}{n+1}$,…,$\frac{1}{2n}<A_n<\frac{1}{2n-1}$,

则 $A_1=\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx=\ln x\big|_n^{n+1}=\ln(n+1)-\ln n$,同理可得 $A_2=\ln(n+2)-\ln(n+1)$,…,$A_n=\ln(2n)-\ln(2n-1)$.

所以 $A=[\ln(n+1)-\ln n]+[\ln(n+2)-\ln(n+1)]+\cdots+[\ln(2n)-\ln(2n-1)]=\ln(2n)-\ln n=\ln2$.

12.C

二、填空题

13.②

14.$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<\frac{2n-1}{n}$($n\geqslant2$,$n\in N_+$)

15.2

16.2×7^n

三、解答题

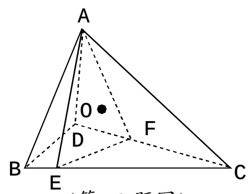
17.**解:**(1)补充表格如下:

	交点数	边数	区域数
(A)	4	5	2
(B)	5	8	4
(C)	8	12	5
(D)	10	15	6

(2)观察表格,若记一个平面图形的交点数、边数、区域数分别为 E、F、G,

猜想 E、F、G 之间的数量关系为 E+G-F=1.

18.**解:**如图,截面 AEF 经过四面体 ABCD 的内切球(与四个面都相切的球)的球心 O,且与 BC,DC 分别交于 E,F,若截面将四面体分为体积相等的两部分,则四棱锥 A-BEFD 与三棱锥 A-EFC 的表面积相等.



(第 18 题图)

19.**解:**$x+y=(x+y)\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}\right)=a+b+\frac{ay}{x}+\frac{bx}{y}\geqslant a+b+2\sqrt{ab}=18$.

又 $a+b=10$, ①

所以 $ab=16$. ②

由①②及 $a>b$,

解得 $a=8$,$b=2$.

20.**证明:**一般地,如果对于函数 $f(x)$的定义域内任意一个 x,都有 $f(-x)=-f(x)$,那么函数 $f(x)$就叫做奇函数,(大前提)

而 $f(-x)=\frac{2^{-x}-1}{2^{-x}+1}=-\frac{2^x-1}{2^x+1}=-f(x)$,(小前提)

所以 $f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}$是奇函数.(结论)

21.**解:**(1)选择②式,计算如下:

$\sin^2 15°+\cos^2 15°-\sin 15°\cos 15°=1-\frac{1}{2}\sin30°=\frac{3}{4}$.

(2)三角恒等式:$\sin^2\alpha+\cos^2(30°-\alpha)-\sin\alpha\cos(30°-\alpha)=\frac{3}{4}$.

证明如下:

$\sin^2\alpha+\cos^2(30°-\alpha)-\sin\alpha\cos(30°-\alpha)$

$=\frac{1-\cos2\alpha}{2}+\frac{1+\cos(60°-2\alpha)}{2}-\sin\alpha\cdot(\cos30°\cos\alpha+\sin30°\sin\alpha)$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos2\alpha+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\cos60°\cos2\alpha+\sin60°\sin2\alpha)-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin^2\alpha$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos2\alpha+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cos2\alpha+\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\sin2\alpha-\frac{\sqrt{3}}{4}\sin2\alpha-\frac{1}{4}(1-\cos2\alpha)$

$=1-\frac{1}{4}\cos2\alpha-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cos2\alpha=\frac{3}{4}$.

22.(1)**解:**因为 $2=1+1$,$4=2+2$,$6=2+4$,所以数集$\{1,2,4,6\}$具有性质 P.

因为不存在 $a_i,a_j\in\{1,3,4,7\}$,使得 $3=a_i+a_j$,所以数集$\{1,3,4,7\}$不具有性质 P.

(2)**证明:**因为数集 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$具有性质 P,

所以 $\exists i,j(1\leqslant i\leqslant j\leqslant n)$,使得 $a_4=a_i+a_j$.

又因为 $1=a_1<a_2<\cdots<a_n$,$n\geqslant4$,所以 $a_i,a_j\leqslant a_3$.所以 $a_4=a_i+a_j\leqslant2a_3$.

同理可得 $a_3\leqslant2a_2$,$a_2\leqslant2a_1$.

将以上各不等式相加,得 $a_2+a_3+a_4\leqslant2(a_1+a_2+a_3)$,所以 $a_4\leqslant2a_1+a_2+a_3$.

(3)**解:**由(2)可知 $a_2\leqslant2a_1$,$a_3\leqslant2a_2$,…,

因为 $a_1=1$,所以 $a_2\leqslant2$,$a_3\leqslant2^2$,…,$a_n\leqslant2^{n-1}$.若 $a_n=72$,则 $2^{n-1}\geqslant72$.

又 $2^6<72<2^7$,所以 $n-1>6$,得 $n>7$.

故 n 的最小值为 8.

第 1 期

第 3~4 版同步周测参考答案

一、选择题

1~5.DACDB

6~10.CDDDB

11.A

提示:由 $f'(x)+f(x)=2xe^{-x}$,得 $e^xf'(x)+e^xf(x)=2x$.令 $g(x)=e^xf(x)$,则 $g'(x)=e^xf(x)+e^xf'(x)=2x$,所以 $g(x)=x^2+C$(其中 C 为常数),所以 $f(x)=\frac{x^2+C}{e^x}$.由 $f(0)=1$,得 $C=1$,所以 $f(x)=\frac{x^2+1}{e^x}$,$f'(x)=\frac{2x-x^2-1}{e^x}$.

所以 $\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{2x-x^2-1}{x^2+1}=\frac{2x}{x^2+1}-1$.当 $x=0$时,$\frac{f'(x)}{f(x)}=-1$;当 $x\neq0$ 时,$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{2}{x+\frac{1}{x}}-1$,由 $x+\frac{1}{x}\in(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$,得$\frac{f'(x)}{f(x)}\in[-2,0]$.

12.B

提示:当 MN 垂直于曲线在点 N 处的切线时,$|MN|$取得最小值,此时设 $N(m,e^m)$,由 $y'=e^x$,可得 $e^m\cdot\frac{e^m}{m-1}=-1$,则 $e^{2m}+m=1$.易知 $f(x)=e^{2x}+x$ 单调递增,且 $f(0)=1$,所以 $m=0$,$N(0,1)$.所以$|MN|$的最小值为$\sqrt{2}$.

二、填空题

13.$a<c<b$

14.2

提示:由已知,得 $f(-x)=\frac{2e^x}{e^x+1}-\sin x$,$f'(x)=-\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}+\cos x$,可得 $f'(x)-f'(-x)=0$,$f(x)+f(-x)=2$.所以 $f(2020)+f(-2020)+f'(2020)-f'(-2020)=2$.

15.$y=2x$

16.$\left(\frac{1}{2},1\right)$

提示:由题设知,在$[0,a]$上存在 $x_1,x_2(0<x_1<x_2<a)$,满足 $f'(x_1)=f'(x_2)=\frac{f(a)-f(0)}{a}=a^2-a$,又 $f'(x)=3x^2-2x$,故等价于关于 x 的方程 $3x^2-2x=a^2-a$ 在$(0,a)$上有两个不相等的实数根.

令 $g(x)=3x^2-2x-a^2+a(0<x<a)$,则

$$\begin{cases}\Delta=4-12(-a^2+a)>0,\\ g(0)=-a^2+a>0,\\ g(a)=2a^2-a>0,\end{cases}$$

解得$\frac{1}{2}<a<1$.

三、解答题

17.**解:**(1)$y'=(3^xe^x)'-(2^x)'+(e)'$

$=(3^x)'e^x+3^x(e^x)'-(2^x)'$

$=3^x\ln3\cdot e^x+3^xe^x-2^x\ln2$

$=(\ln3+1)\cdot(3e)^x-2^x\ln2$.

(2)y'

$=\frac{(x+\cos x)'(x+\sin x)-(x+\cos x)(x+\sin x)'}{(x+\sin x)^2}$

$=\frac{(1-\sin x)(x+\sin x)-(x+\cos x)(1+\cos x)}{(x+\sin x)^2}$

$=\frac{-x\cos x-x\sin x+\sin x-\cos x-1}{(x+\sin x)^2}$.

18.**解:**(1)该物体在第 1s 内的平均速度$\bar{v}=\frac{s(1)-s(0)}{1-0}=\frac{9}{2}$(m/s).

(2)$s'(t)=\frac{3}{2}t^2+2t+3$,则 $s'(2)=\frac{3}{2}\times2^2+2\times2+3=13$,表示该物体在第 2s 末的瞬时速度为 13m/s.

(3)令 $s'(t)=\frac{3}{2}t^2+2t+3=19$,解得 $t=-4$(舍去),或 $t=\frac{8}{3}$,故经过$\frac{8}{3}$s 该物体的运动速度达到 19m/s.

19.**解:**$y'=2x-1$.

(1)直线 $x+y-3=0$ 的斜率为-1,故令 $2x-1=1$,可得 $x=1$,

从而可知垂直于直线 $x+y-3=0$ 的切线过点(1,0),则切线方程为 $y=x-1$.

(2)设切点为 $P(m,m^2-m)$,可得切线方程为 $y-(m^2-m)=(2m-1)(x-m)$.

又点(1,-4)在切线上,可得 $-4-(m^2-m)=(2m-1)(1-m)$,解得 $m=-1$,或 $m=3$.

所以切线方程为 $y=-3x-1$,或 $y=5x-9$.

20.**解:**(1)函数是一条直线,其斜率是一个大于零的常数,故导函数的大致图象如图 1.

(2)$f'(x)>0$,并且随着 x 的增大,$f'(x)$的值逐渐减小,故导函数的大致图象如图 2.

(3)当 $x<0$ 时,$f'(x)>0$;当 $x>0$时,$f'(x)<0$,并且随着 x 的增大,$f'(x)$的值逐渐减小,故导函数的大致图象如图 3.

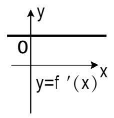


图 1

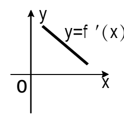


图 2

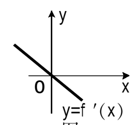


图 3

21.(1)**解:**$f'(x)=x^2-4x+3=(x-2)^2-1\geqslant-1$,故切线斜率的取值范围为$[-1,+\infty)$.

(2)**解:**结合(1)可知,

$f'(x)\geqslant-1$ 且$-\frac{1}{f'(x)}\geqslant-1$,

即$-1\leqslant f'(x)<0$ 或 $f'(x)\geqslant1$,

解得 $x\leqslant2-\sqrt{2}$,或 $1<x<3$,或 $x\geqslant2+\sqrt{2}$.

故切点横坐标的取值范围为$(-\infty,2-\sqrt{2}]\cup(1,3)\cup[2+\sqrt{2},+\infty)$.

(3)**证明:**假设存在切线 l 与曲线 C 同时切于不同的两点 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$x_1\neq x_2$,

则在点 A 处的切线方程是

$y-\left(\frac{1}{3}x_1^3-2x_1^2+3x_1\right)=(x_1^2-4x_1+3)(x-x_1)$,

即 $y=(x_1^2-4x_1+3)x+\left(-\frac{2}{3}x_1^3+2x_1^2\right)$;

同理,在点 B 处的切线方程是

$y=(x_2^2-4x_2+3)x+\left(-\frac{2}{3}x_2^3+2x_2^2\right)$.

由于两切线是同一直线,

则有 $x_1^2-4x_1+3=x_2^2-4x_2+3$

且$-\frac{2}{3}x_1^3+2x_1^2=-\frac{2}{3}x_2^3+2x_2^2$,

化简得 $x_1+x_2=4$

且$(x_1+x_2)^2-3(x_1+x_2)-x_1x_2=0$.

解得 $x_1=2$,$x_2=2$.

这与 $x_1\neq x_2$ 矛盾,所以不存在与曲线 C 同时切于两个不同点的直线.

22.**解:**(1)由题意知,C 在点 M 处的切线的斜率 $k=2$.

因为 $y'=2x+4$,所以 $2x_0+4=2$,

解得 $x_0=-1$.

所以 $y_0=\frac{1}{2}$.所以 $M\left(-1,\frac{1}{2}\right)$.

(2)设 $M(x_0,y_0)$为 C 上一点.

①若 $x_0=-2$,则 C 上点 $M\left(-2,-\frac{1}{2}\right)$处的切线斜率 $k=0$,过点 M 的法线方程为 $x=-2$,此法线过点 $P(-2,a)$.

②若 $x_0\neq-2$,则过点 $M(x_0,y_0)$的法线方程为 $y-y_0=-\frac{1}{2x_0+4}(x-x_0)$. ①

若法线过点 $P(-2,a)$,

则 $a-y_0=-\frac{1}{2x_0+4}(-2-x_0)$,

即$(x_0+2)^2=a$. ②

若 $a>0$,则 $x_0=-2\pm\sqrt{a}$,从而 $y_0=\frac{2a-1}{2}$,代入①中,化简,得 $x+2\sqrt{a}y+2-2a\sqrt{a}=0$ 或 $x-2\sqrt{a}y+2+2a\sqrt{a}=0$;

若 $a=0$,与 $x_0\neq-2$ 矛盾,舍去;

若 $a<0$,则②式无解,舍去.

综上,当 $a>0$ 时,在 C 上存在三个点$\left(-2+\sqrt{a},\frac{2a-1}{2}\right)$,$\left(-2-\sqrt{a},\frac{2a-1}{2}\right)$及$\left(-2,-\frac{1}{2}\right)$满足要求,其方程分别为 $x+2\sqrt{a}y+2-2a\sqrt{a}=0$,$x-2\sqrt{a}y+2+2a\sqrt{a}=0$,$x=-2$;当 $a\leqslant0$ 时,在 C 上存在一个点$\left(-2,-\frac{1}{2}\right)$满足要求,其方程为 $x=-2$.

①

第 2 期

第 3~4 版同步周测参考答案

一、选择题

1~6.CCDDBC

7~12.AAAABD

二、填空题

13.$(-\infty,2)$

14.3

提示： 由题设条件得 $f'(1)=0$ 且 $f(1)=1$，代入解得 $a=2,b=1$.所以 $a+b=3$.

15.2

提示： 设底面边长为 a，

则高 $h=\sqrt{12-\frac{a^2}{2}}$，

所以体积 $V=\frac{1}{3}a^2h=\frac{1}{3}\sqrt{12a^4-\frac{a^6}{2}}$.

设 $y=12a^4-\frac{1}{2}a^6$，则 $y'=48a^3-3a^5$.

令 $y'=0(a>0)$，解得 $a=4$.

此时，体积最大，则高 $h=2$.

16.$[2,+\infty)$

提示： $g'(x)=kx-1$.由题设，可得 $kx-1=x^2\ln x+x$ 有解，即 $k=x\ln x+1+\frac{1}{x}$ 有解.

令 $h(x)=x\ln x+1+\frac{1}{x}$，则定义域为 $(0,+\infty)$，

$h'(x)=1+\ln x-\frac{1}{x^2}$，$[h'(x)]'=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}>0$，所以 $h'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，又 $h'(1)=0$，所以当 $x>1$ 时，$h'(x)>0$；当 $0<x<1$ 时，$h'(x)<0$，所以 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $[h(x)]_{\min}=h(1)=2$.所以实数 k 的取值范围是 $[2,+\infty)$.

三、解答题

17.**解：** 函数 y 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

由题意，得 $y'=e^x-1$，令 $y'=0$，解得 $x=0$.

因为在 $(-\infty,0)$ 内，$y'<0$，

所以函数 y 在 $(-\infty,0]$ 上单调递减；

因为在 $(0,+\infty)$ 内，$y'>0$，

所以函数 y 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增.

18.**解：**（1）$f'(x)=x^2-m^2$.由已知得 $f'(1)=1-m^2=0(m>0)$，解得 $m=1$.

所以 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x$.

（2）令 $f'(x)=0$，得 $x=\pm m$.当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,-m)$	$-m$	$(-m,m)$	m	$(m,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以 $f(-m)=-\frac{m^3}{3}+m^3\geqslant\frac{2}{3}$，解得 $m\geqslant1$.故实数 m 的取值范围为 $[1,+\infty)$.

19.**解：**（1）$f'(x)=e^{\sqrt{3}x}\cdot\sqrt{3}(\sin x-1)+e^{\sqrt{3}x}\cos x=e^{\sqrt{3}x}(\sqrt{3}\sin x+\cos x-\sqrt{3})$.所以 $f'(0)=1-\sqrt{3}$.又 $f(0)=-1$，所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(0,f(0))$ 处切线的方程为 $y+1=(1-\sqrt{3})x$，即 $(1-\sqrt{3})x-y-1=0$.

（2）令 $f'(x)=0$，可得 $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，结合 $x\in[0,\pi]$，解得 $x=\frac{\pi}{6}$，或 $x=\frac{\pi}{2}$.

因为 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}e^{\frac{\sqrt{3}\pi}{6}}$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$，$f(0)=-1$，$f(\pi)=-e^{\sqrt{3}\pi}$，所以最小值为 $-e^{\sqrt{3}\pi}$，最大值为 0.

所以 $f(x)$ 在区间 $[0,\pi]$ 上的值域为 $[-e^{\sqrt{3}\pi},0]$.

20.**解：**（1）设 AA_1,BB_1,CD_1,EF_1 都与 MN 垂直，A_1,B_1,D_1,F_1 是相应垂足.

由条件知，当 $O'B=40$ 时，$BB_1=-\frac{1}{800}\times40^3+6\times40=160$，则 $AA_1=160$.

由 $\frac{1}{40}O'A^2=160$，得 $O'A=80$.

所以 $AB=O'A+O'B=80+40=120$（米）.

（2）以 O 为原点，ON，OO' 所在直线分别为 x 轴、y 轴建立平面直角坐标系，

设 $F(x,y_2)$，$x\in(0,40)$，则 $y_2=-\frac{1}{800}\cdot x^3+6x$，$EF=160-y_2=160+\frac{1}{800}x^3-6x$.

因为 $CE=80$，所以 $O'C=80-x$.

设 $D(x-80,y_1)$，则 $y_1=\frac{1}{40}(80-x)^2$，

所以 $CD=160-y_1=160-\frac{1}{40}(80-x)^2=-\frac{1}{40}x^2+4x$.

记桥墩 CD 和 EF 的总造价为 $f(x)$，

则 $f(x)=k\left(160+\frac{1}{800}x^3-6x\right)+\frac{3}{2}k\cdot\left(-\frac{1}{40}x^2+4x\right)=k\left(\frac{1}{800}x^3-\frac{3}{80}x^2+160\right)(0<x<40)$，$f'(x)=k\left(\frac{3}{800}x^2-\frac{3}{40}x\right)=\frac{3k}{800}x(x-20)$.

令 $f'(x)=0$，得 $x=20$.当 $0<x<20$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $20<x<40$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，所以当 $x=20$ 时，$f(x)$ 取得最小值.

答：（1）桥 AB 的长度为 120 米；（2）当 $O'E$ 为 20 米时，桥墩 CD 与 EF 的总造价最低.

21.（1）**解：** $f'(x)=x-\frac{a}{x}=\frac{x^2-a}{x}(x>0)$，

当 $a\leqslant0$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$；

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)>0$，得 $x>\sqrt{a}$，

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(\sqrt{a},+\infty)$，单调递减区间为 $(0,\sqrt{a})$.

（2）**证明：** 设 $F(x)=\frac{2}{3}x^3-\left(\frac{1}{2}x^2+\ln x\right)$，

故 $F'(x)=2x^2-x-\frac{1}{x}=\frac{(x-1)(2x^2+x+1)}{x}$.

因为 $x>1$，所以 $F'(x)>0$.

所以 $F(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上为增函数.

所以 $F(x)>F(1)=\frac{1}{6}>0$.

所以当 $x>1$ 时，$\frac{1}{2}x^2+\ln x<\frac{2}{3}x^3$.

22.**解：**（1）当 $a=1$ 时，$f(x)=e^x-x-2$，则 $f'(x)=e^x-1$.

当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$.所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递减，在 $(0,+\infty)$ 单调递增.

（2）$f'(x)=e^x-a$.

当 $a\leqslant0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递增，故 $f(x)$ 至多存在 1 个零点，不合题意.

当 $a>0$ 时，由 $f'(x)=0$，可得 $x=\ln a$.当 $x\in(-\infty,\ln a)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x\in(\ln a,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.故当 $x=\ln a$ 时，$f(x)$ 取得最小值，为 $f(\ln a)=-a(1+\ln a)$.

若 $0<a\leqslant\frac{1}{e}$，则 $f(\ln a)\geqslant0$，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 至多存在 1 个零点，不合题意.

若 $a>\frac{1}{e}$，则 $f(\ln a)<0$.由于 $f(-2)=e^{-2}>0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 存在唯一零点.

由（1）知，当 $x>2$ 时，$e^x-x-2>0$，所以当 $x>4$ 且 $x>2\ln(2a)$ 时，

$f(x)=e^{\frac{x}{2}}\cdot e^{\frac{x}{2}}-a(x+2)>e^{\ln(2a)}\cdot\left(\frac{x}{2}+2\right)-a(x+2)=2a>0$.

故 $f(x)$ 在 $(\ln a,+\infty)$ 存在唯一零点.从而 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 有两个零点.

综上，a 的取值范围是 $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$.

第 3 期

第 3~4 版章节测试参考答案

一、选择题

1.A 2.B 3.A 4.C 5.C 6.D 7.B

8.D

提示： 因为 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+a\ln x$ 有两个不同的极值点，所以 $f'(x)=x-1+\frac{a}{x}=\frac{x^2-x+a}{x}=0$ 在 $(0,+\infty)$ 有 2 个不同的零点，所以 $x^2-x+a=0$ 在 $(0,+\infty)$ 有 2 个不同的零点，所以 $\begin{cases}\Delta=1-4a>0,\\ a>0,\end{cases}$ 解得 $0<a<\frac{1}{4}$.故选 D.

9.D

10.C

提示： 由题意，$A=1$，$\frac{T}{2}=\frac{2\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\pi$，所以 $T=2\pi$，$\omega=\frac{2\pi}{2\pi}=1$，所以 $f(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$，故当 $x=\frac{\pi}{6}$ 时，$f(x)=0$.

所以阴影面积为 $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left[-\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right]dx=\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$.故选 C.

11.B

提示： 定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f'(x)>-1$，令 $g(x)=f(x)+x$，则 $g'(x)=f'(x)+1>0$，可得函数 $g(x)$ 是单调增函数，又由不等式 $f(2x)+x+1>f(x-1)$，化为 $f(2x)+2x>f(x-1)+(x-1)$，有 $g(2x)>g(x-1)$，可得 $2x>x-1$，即 $x>-1$.故选 B.

12.B

提示： 由题意，知 $xe^x+x^2+2x=-a$ 恰有两个不同的实数解.

设 $f(x)=xe^x+x^2+2x$，

则 $f'(x)=e^x+xe^x+2x+2=(x+1)(e^x+2)$.

当 $x<-1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

当 $x>-1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

故 $f(x)$ 的最小值为 $f(-1)=-\frac{1}{e}-1$.

所以 $-a>-\frac{1}{e}-1$，解得 $a<\frac{1}{e}+1$.

故选 B.

二、填空题

13.152m

14.$\frac{4}{3}$

提示： 设圆锥的高为 h，底面半径为 r，则 $1^2=(h-1)^2+r^2$，即 $r^2=2h-h^2$.所以圆锥的体积 $V(h)=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{2}{3}\pi h^2-\frac{\pi}{3}h^3$.令 $V'(h)=\frac{4}{3}\pi h-\pi h^2=0$，解得 $h=\frac{4}{3}$ 或 $h=0$（舍去）.

易知当 $h=\frac{4}{3}$ 时，$V(h)$ 取得极大值也是最大值，故当圆锥的体积最大时，圆锥的高为 $\frac{4}{3}$.

15.（3）（4）

提示： 令 $F(x)=f(x)-g(x)$，则 $F'(x)=f'(x)-g'(x)>0$，所以 $F(x)$ 在 **R** 上单调递增.又 $a<x<b$，所以 $F(a)<F(x)<F(b)$，即 $f(a)-g(a)<f(x)-g(x)<f(b)-g(b)$.从而可知（3）（4）正确.

16.$\left(-\infty,\frac{9}{4}\right]$

提示： 因为 $y=ax^3+3(a-1)x^2-6x$，$x\in[0,1]$ 的最大值为 0，所以 $x\in[0,1]$ 时，$ax^3+3(a-1)\cdot x^2-6x\leqslant0$ 恒成立，显然当 $x=0$ 时，不等式恒成立，

所以当 $x\in(0,1]$ 时，$a\leqslant\frac{3(x+2)}{x(x+3)}$ 恒成立，

所以只需 $a\leqslant\left[\frac{3(x+2)}{x(x+3)}\right]_{\min}$，因为函数 $g(x)=\frac{3(x+2)}{x(x+3)}=\frac{3}{(x+2)-\frac{2}{x+2}-1}$，在 $(0,1]$ 上单调递减，所以 $a\leqslant\left[\frac{3(x+2)}{x(x+3)}\right]_{\min}=g(1)=\frac{9}{4}$，

所以 a 的取值范围为 $\left(-\infty,\frac{9}{4}\right]$.

三、解答题

17.**解：**（1）化简，得 $f(x)=\frac{2e^x}{1-x}$.

因为 $f'(x)=\left(\frac{2e^x}{1-x}\right)'$

$=\frac{(2e^x)'(1-x)-2e^x(1-x)'}{(1-x)^2}$

$=\frac{2e^x(2-x)}{(1-x)^2}$，所以 $f'(2)=0$.

（2）因为 $f'(x)=\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)'-x'+(\ln x)'$

$=-\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}-1+\frac{1}{x}$，所以 $f'(1)=-\frac{3}{2}$.

18.**解：**（1）$f'(x)=3x^2-3$.因为 P 为切点，所以直线 l 的斜率 $k_1=f'(1)=0$，所以直线 l 的方程为 $y=-2$.

（2）设切点坐标为 $(x_0,x_0^3-3x_0)(x_0\neq1)$，则直线 l 的斜率 $k_2=f'(x_0)=3x_0^2-3$，所以直线 l 的方程为 $y-(x_0^3-3x_0)=(3x_0^2-3)(x-x_0)$.又直线 l 过点 $P(1,-2)$，所以 $-2-(x_0^3-3x_0)=(3x_0^2-3)(1-x_0)$，解得 $x_0=1$（舍去）或 $x_0=-\frac{1}{2}$.故所求直线 l 的斜率 $k_2=3x_0^2-3=-\frac{9}{4}$，所以直线 l 的方程为 $y-(-2)=-\frac{9}{4}\cdot(x-1)$，即 $9x+4y-1=0$.

19.**解：**（1）$f'(x)=e^x-2$.

令 $f'(x)>0$，解得 $x>\ln2$；

令 $f'(x)<0$，解得 $x<\ln2$.

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln2)$ 上单调递减，

在 $(\ln2,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $f(x)$ 有极小值 $f(\ln2)=2-\ln4$，无极大值.

（2）令 $g(x)=f(x)-x^2-(a-2)x-1=e^x-x^2-ax-1$，

则 $g'(x)=e^x-2x-a=f(x)-a$.

结合（1）可得

$[g'(x)]_{\min}=[f(x)]_{\min}-a=2-\ln4-a$.

因为 $a<2-\ln4$，所以 $g'(x)>0$.

所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $g(x)>g(0)=0$，

即 $f(x)>x^2+(a-2)x+1$.

20.**解：**（1）设 $f(x)=kx+b(k\neq0)$.

由 $f(x)=x\int_0^2 f(t)dt+1$，

得 $kx+b=x\int_0^2(kt+b)dt+1=x\cdot\left(\frac{kt^2}{2}+bt\right)\Big|_0^2+1=x(2k+2b)+1$，所以 $\begin{cases}2k+2b=k,\\ 1=b,\end{cases}$ 解得 $k=-2,b=1$.

所以 $f(x)=-2x+1$.

（2）$g(x)=xf(x)=-2x^2+x$.

由 $\begin{cases}y=-2x^2+x,\\ y=-3,\end{cases}$ 得 $x=\frac{3}{2}$ 或 $x=-1$.

结合图形可知曲线 $y=g(x)$ 与直线 $y=-3$ 所围成区域的面积 $S=\int_{-1}^{\frac{3}{2}}(-2x^2+x+3)dx=\left(-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+3x\right)\Big|_{-1}^{\frac{3}{2}}=\frac{125}{24}$.

21.**解：**（1）种花区的造价为 $\frac{3a}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$，种草区的造价为 $2a\left(\frac{\theta}{2}-\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta\right)$，

故总造价

$f(\theta)=a\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\theta}{2}-\sin\theta\cos\theta\right)$，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$.

（2）$f'(\theta)$

$=a\left[-\frac{1}{2}-(\cos\theta\cos\theta-\sin\theta\sin\theta)\right]$

$=a\left(-\frac{1}{2}-\cos2\theta\right)\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$.

令 $f'(\theta)=0$，解得 $\theta=\frac{\pi}{3}$.

当 θ 变化时，$f'(\theta)$，$f(\theta)$ 的变化情况如下表：

θ	$\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$	$\frac{\pi}{3}$	$\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$
$f'(\theta)$	−	0	+
$f(\theta)$	↘	极小值	↗

故当 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 时，总造价最小，最小值为

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=a\left(\frac{7}{12}\pi-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

22.（1）**解：** 由 $f(x)=x^3+bx+c$，得 $f'(x)=3x^2+b$，所以 $f'\left(\frac{1}{2}\right)=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+b=0$，即 $b=-\frac{3}{4}$.

（2）**证明：** 设 x_0 为 $f(x)$ 的一个零点，根据题意，$f(x_0)=x_0^3-\frac{3}{4}x_0+c=0$，且 $|x_0|\leqslant1$，

则 $c=-x_0^3+\frac{3}{4}x_0$，由 $|x_0|\leqslant1$，

令 $c(x)=-x^3+\frac{3}{4}x(-1\leqslant x\leqslant1)$，

所以 $c'(x)=-3x^2+\frac{3}{4}=-3\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$.

当 $x\in\left(-1,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},1\right)$ 时，$c'(x)<0$；

当 $x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 时，$c'(x)>0$.

可知 $c(x)$ 在 $\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$，$\left(\frac{1}{2},1\right)$ 上单调递减，在 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 上单调递增.

又 $c(-1)=\frac{1}{4}$，$c(1)=-\frac{1}{4}$，$c\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$，$c\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$，所以 $-\frac{1}{4}\leqslant c\leqslant\frac{1}{4}$.

设 x_1 为 $f(x)$ 的零点，

则必有 $f(x_1)=x_1^3-\frac{3}{4}x_1+c=0$，

即 $-\frac{1}{4}\leqslant c=-x_1^3+\frac{3}{4}x_1\leqslant\frac{1}{4}$，

所以

$\begin{cases}4x_1^3-3x_1-1=(x_1-1)(2x_1+1)^2\leqslant0,\\ 4x_1^3-3x_1+1=(x_1+1)(2x_1-1)^2\geqslant0,\end{cases}$

得 $-1\leqslant x_1\leqslant1$，即 $|x_1|\leqslant1$.

所以 $f(x)$ 所有零点的绝对值都不大于 1.