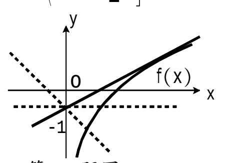
$\ln x+x$,定义域为$(0,+\infty)$.所以$f'(x)=\frac{1}{x}+1>0$,且$f'(x)$单调递减.所以$f(x)$单调递增且增加的越来越慢,由此作出$f(x)$的大致图象如图所示.

直线$l:y=2kx-1$过定点$(0,-1)$,当直线l与曲线$f(x)$相切时,设切点为$(x_0,\ln x_0+x_0)$,则切线方程为$y-(\ln x_0+x_0)=\left(\frac{1}{x_0}+1\right)(x-x_0)$.把$(0,-1)$代入,可得$x_0=1$,则$2k=\frac{1}{x_0}+1=2$,解得$k=1$.又$f'(x)=\frac{1}{x}+1>1(x>0)$,由图可知,当$2k\in(-\infty,1]$,即$k\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$时,曲线$f(x)$与直线$l$有且只有一个公共点.综上可得,实数$k$的取值范围为$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]\cup\{1\}$.



(第12题图)

二、填空题

13.$A>B>C$

14.包公祠

提示:由乙说:我没去过逍遥津,则乙可能去过包公祠,明教寺.但甲说:我去过的地方比乙多,但没去过明教寺,则乙只可能去过包公祠,明教寺中的一个,再由丙说:我们三人去过同一个地方,由此可判断乙去过的地方为包公祠.

15.$a_{n+1}-a_n=5\cdot 2^{n-2}$

16.5

提示:设$z=x+y\mathrm{i},x,y\in\mathbf{R}$.由$|z-2|=|\mathrm{Re}z+2|$,得$\sqrt{(x-2)^2+y^2}=|x+2|$,化简,得$z$在复平面内对应的点的轨迹是抛物线$y^2=8x$.而$|z-3-2\mathrm{i}|+|z-2|$可表示抛物线上的点$P$到定点$Q(3,2)$与焦点$F(2,0)$的距离之和,过点$Q$作准线$l:x=-2$的垂线,垂足为$H$,由平面几何知识可得$|z-3-2\mathrm{i}|+|z-2|$的最小值为$|QH|=5$.

三、解答题

17.**解**:设$z=x+y\mathrm{i},x,y\in\mathbf{R}$,代入原方程,得$x^2+y^2+2x\mathrm{i}=\frac{3-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}=1-\mathrm{i}$,

所以$\begin{cases}x^2+y^2=1,\\2x=-1,\end{cases}$解得$x=-\frac{1}{2},y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

所以$z=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

18.(1)**解**:原方程可化为$x^2-x\tan\theta-2-(x+1)\mathrm{i}=0$,若该方程有实数根,则有$\begin{cases}x^2-x\tan\theta-2=0,\\x+1=0.\end{cases}$

解得$x=-1,\tan\theta=1$.

所以锐角$\theta=\frac{\pi}{4}$,实数根是$x=-1$.

(2)**证明**:假设方程有纯虚数根,设其为$b\mathrm{i}(b\in\mathbf{R}$且$b\neq0)$,将$x=b\mathrm{i}$代入原方程并化简,得$b^2-b+2+\mathrm{i}(b\tan\theta+1)=0$,所以$b^2-b+2=0$,解得$b=\frac{1\pm\sqrt{7}\mathrm{i}}{2}\notin\mathbf{R}$,与假设矛盾.所以原方程无纯虚数根.

19.**解**:(1)已知$n\in\mathbf{N}_+$,则$\sqrt{n}-\sqrt{n-1}>\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.

(2)该命题是真命题.证明如下:

要证$\sqrt{n}-\sqrt{n-1}>\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$,可证$2\sqrt{n}>\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}$,即证$4n>2n+2\sqrt{(n-1)(n+1)}$,即证$n>\sqrt{(n-1)(n+1)}$,即证$n^2>(n-1)(n+1)$,即证$n^2>n^2-1$,即证$0>-1$.上式显然成立,故原命题是真命题.

20.(1)**解**:$f'(x)=\frac{3}{4}x^2-2x+1$.令$f'(x)=1$,解得$x=0$,或$x=\frac{8}{3}$.又$f(0)=0,f\left(\frac{8}{3}\right)=\frac{8}{27}$,所以切线方程为$y=x$和$y-\frac{8}{27}=x-\frac{8}{3}$,即$y=x$和$y=x-\frac{64}{27}$.

(2)**证明**:令$g(x)=f(x)-x=\frac{1}{4}x^3-x^2$,$x\in[-2,4]$,则$g'(x)=\frac{3}{4}x^2-2x=\frac{3}{4}x\left(x-\frac{8}{3}\right)$.

令$g'(x)=0$,解得$x=0$,或$x=\frac{8}{3}$.列表:

x	$(-2,0)$	0	$\left(0,\frac{8}{3}\right)$	$\frac{8}{3}$	$\left(\frac{8}{3},4\right)$
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	↗	极大值0	↘	极小值$-\frac{64}{27}$	↗

又$g(-2)=-6,g(4)=0$,所以$g(x)$在$[-2,4]$上的最大值为0,最小值为-6,即$-6\leqslant g(x)\leqslant0$,即$-6\leqslant f(x)-x\leqslant0$,所以$x-6\leqslant f(x)\leqslant x$.

(3)**解**:由(2)可得,$F(x)=|f(x)-(x+a)|=|f(x)-x-a|=|g(x)-a|$,且在$[-2,4]$上,$-6\leqslant g(x)\leqslant0$.

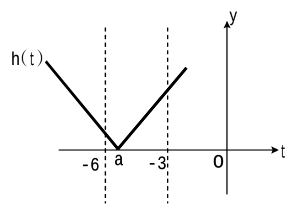
令$t=g(x),h(t)=|t-a|$,则问题转化为当$t\in[-6,0]$时,$h(t)$的最大值$M(a)$的问题.

画出$h(t)$的图象如图所示.

①当$a\leqslant-3$时,$M(a)=h(0)=|a|=-a\geqslant3$,当$a=-3$时,$M(a)$取得最小值3;

②当$a>-3$时,$M(a)=h(-6)=|-6-a|=|6+a|=6+a$,当$a=-3$时,$M(a)$取得最小值3.

综上可知,当$M(a)$最小时,a的值为-3.



(第20题图)

21.(1)**解**:由题设,得

$\begin{cases}f(1)=a+b+c+1=2,\\f(2)=8a+4b+2c+1=4,\\f(3)=27a+9b+3c+1=8,\end{cases}$

解得$a=\frac{1}{6},b=0,c=\frac{5}{6}$.

(2)**证明**:用数学归纳法证明空间内n个平面最多可将空间分成$f(n)=\frac{1}{6}n^3+\frac{5}{6}n+1$个部分,$n\in\mathbf{N}_+$,证明如下:

①当$n=1$时,由(1)可知结论显然成立.

②假设当$n=k$时结论成立,即空间内k个平面最多可将空间分成$f(k)=\frac{1}{6}k^3+\frac{5}{6}k+1$个部分,

那么当$n=k+1$时,在k个平面的基础上再添上第$k+1$个平面,它与前k个平面都相交,可得到互不平行且不共点的k条交线,且其中任何3条直线不共点,这k条交线可以把第$k+1$个平面划分成$\frac{1}{2}k^2+\frac{1}{2}k+1$个部分,每个部分把它所在的原有空间区域划分成两个区域,因此,空间区域的总数增加了$\frac{1}{2}k^2+\frac{1}{2}k+1$个,所以$f(k+1)=f(k)+\frac{1}{2}k^2+\frac{1}{2}k+1=\frac{1}{6}k^3+\frac{5}{6}k+1+\frac{1}{2}k^2+\frac{1}{2}k+1=\frac{1}{6}(k+1)^3+\frac{5}{6}(k+1)+1$,即$n=k+1$时,结论也成立.

根据①②可知,原结论成立.

22.**解**:(1)当$a=1$时,$f(x)=\mathrm{e}^x+x^2-x$,$f'(x)=\mathrm{e}^x+2x-1$,

显然$f'(x)$为增函数,又$f'(0)=0$,

所以当$x\in(-\infty,0)$时,$f'(x)<0$;当$x\in(0,+\infty)$时,$f'(x)>0$.

所以$f(x)$的单调递增区间为$(0,+\infty)$,单调递减区间为$(-\infty,0)$.

(2)由$f(x)\geqslant\frac{1}{2}x^3+1$,

得$\mathrm{e}^x+ax^2-x\geqslant\frac{1}{2}x^3+1$.

①当$x=0$时,不等式显然成立;

②当$x>0$时,分离参数a得,

$$a\geqslant-\frac{\mathrm{e}^x-\frac{1}{2}x^3-x-1}{x^2}.$$

记$g(x)=-\frac{\mathrm{e}^x-\frac{1}{2}x^3-x-1}{x^2}$,

$$g'(x)=-\frac{(x-2)\left(\mathrm{e}^x-\frac{1}{2}x^2-x-1\right)}{x^3}.$$

令$h(x)=\mathrm{e}^x-\frac{1}{2}x^2-x-1(x\geqslant0)$,

则$h'(x)=\mathrm{e}^x-x-1,h''(x)=\mathrm{e}^x-1\geqslant0$,

故$h'(x)$单调递增,$h'(x)\geqslant h'(0)=0$,故函数$h(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增,

所以$h(x)\geqslant h(0)=0$.

由$h(x)\geqslant0$,可得$\mathrm{e}^x-\frac{1}{2}x^2-x-1\geqslant0$恒成立,故当$x\in(0,2)$时,$g'(x)>0$,$g(x)$单调递增;

当$x\in(2,+\infty)$时,$g'(x)<0,g(x)$单调递减.因此,$[g(x)]_{\max}=g(2)=\frac{7-\mathrm{e}^2}{4}$.

综上可得,实数a的取值范围是$\left[\frac{7-\mathrm{e}^2}{4},+\infty\right)$.

第9~12期

第9~10版综合测试(一)参考答案

一、选择题

1.A 2.B 3.A

4.B

提示:$(1+a\mathrm{i})(3-\mathrm{i})=3-\mathrm{i}+3a\mathrm{i}+a=(a+3)+(3a-1)\mathrm{i}$,

由题意得,$a+3+3a-1=0$,

解得$a=-\frac{1}{2}$,故选B.

5.B

提示:$f'(x)=-a\cos\pi x$.

又$\lim\limits_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)=2$,

所以$-a\cos\pi=2$,解得$a=2$.

6.A

提示:$f'(x)=6x^2-12x=6x(x-2)$,易知$f(x)$在$(-2,0)$上单调递增,在$(0,2)$上单调递减.所以$f(x)$在$[-2,2]$上的最大值是$f(0)=m=3$.所以$f(-2)=-37,f(2)=-5$.所以最小值是-37.

7.A

8.B

提示:易得甲产品的利润与投入资金满足$y=\frac{1}{4}x$,乙产品的利润与投入资金满足$y=\frac{5}{4}\sqrt{x}$.设乙产品的投入资金为x万元,则甲产品的投入资金为$(10-x)$万元,其中$0\leqslant x\leqslant10$,则可获得的利润$y=\frac{1}{4}(10-x)+\frac{5}{4}\sqrt{x}$.从而$y'=-\frac{1}{4}+\frac{5}{8\sqrt{x}}$.令$y'=0$,解得$x=\frac{25}{4}$.此时函数$y$取得最大值,为$\frac{65}{16}$万元.

9.D

10.A

提示:分别将$2+a\mathrm{i},b+\mathrm{i}$代入方程得

$\begin{cases}(2+a\mathrm{i})^2+p(2+a\mathrm{i})+q=0, & ①\\(b+\mathrm{i})^2+p(b+\mathrm{i})+q=0, & ②\end{cases}$

对①②整理,由复数相等的充要条件得

$\begin{cases}2p+q-a^2+4=0,\\(p+4)a=0,\\pb+q+b^2-1=0,\\p+2b=0.\end{cases}$

解得$p=-4,q=5$.

11.D

提示:$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$.当$x>3$时,$f'(x)<0$,所以$f(x)$在$(3,+\infty)$上是减函数.因为$b>a>3$,所以$b>\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}>a>3$,所以$f(b)<f\left(\frac{a+b}{2}\right)<f(\sqrt{ab})<f(a)$.故选D.

12.B

提示:因为相邻音阶的频率之比为$1:\sqrt[12]{2}$,而键盘f^2是b^1后的第6个音阶,故频率之比为$1:(\sqrt[12]{2})^6=1:\sqrt{2}$,故选B.

二、填空题

13.$\frac{a+b\mathrm{i}}{b-a\mathrm{i}}=\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$

14.3

提示:由$(1+\mathrm{i})^{2n}=-2^n\cdot\mathrm{i}$,得$(2\mathrm{i})^n=2^n\cdot\mathrm{i}^n=-2^n\cdot\mathrm{i}$,所以$\mathrm{i}^n=-\mathrm{i}$,即$n=4k+3,k\in\mathbf{N}$,所以最小的正整数为3.

15.$a>4$

提示:因为$f(x)=\left(1-\frac{a}{x}\right)\mathrm{e}^x(x>0)$,所以$f'(x)=\left(\frac{a}{x^2}-\frac{a}{x}+1\right)\mathrm{e}^x$.因为函数$f(x)$既有极大值又有极小值,所以$f'(x)=\left(\frac{a}{x^2}-\frac{a}{x}+1\right)\mathrm{e}^x=0$有2个不等实数根,所以$x^2-ax+a=0$有2个不等的正实数根,所以$\Delta=a^2-4a>0$且$a>0$,所以$a>4$.

16.-3

提示:由题意可知,$f'(x)=3x^2+2ax+b,f'(0)=0$,所以$b=0$,所以$f(x)=x^2(x+a)$,有$\frac{27}{4}=\int_0^{-a}[0-(x^3+ax^2)]\mathrm{d}x=-\left(\frac{x^4}{4}+\frac{ax^3}{3}\right)\Big|_0^{-a}=\frac{a^4}{12}$,所以$a=\pm3$.又$-a>0\Rightarrow a<0$,得$a=-3$.

三、解答题

17.**解**:(1)当点M在虚轴上时,有$m^2+m-12=0$,解得$m=-4$,或$m=3$.

(2)当点M位于第四象限时,有$\begin{cases}m^2+m-12>0,\\m^2-8m+15<0,\end{cases}$解得$3<m<5$.

所以实数m的取值范围是$(3,5)$.

18.**解**:(1)设$z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$,则$\bar{z}=a-b\mathrm{i}$,所以$z+\bar{z}=2a=6$,解得$a=3$.

又$|z|=\sqrt{9+b^2}=5$,所以$b=\pm4$,所以复数z的虚部为±4.

(2)由(1)可知$z=3\pm4\mathrm{i}$.当$z=3+4\mathrm{i}$时,$\frac{z}{1-\mathrm{i}}=\frac{3+4\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\frac{(3+4\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\frac{-1+7\mathrm{i}}{2}$,故其实部为$-\frac{1}{2}$;当$z=3-4\mathrm{i}$时,$\frac{z}{1-\mathrm{i}}=\frac{3-4\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\frac{(3-4\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\frac{7-\mathrm{i}}{2}$,故其实部为$\frac{7}{2}$.

综上,复数$\frac{z}{1-\mathrm{i}}$的实部为$-\frac{1}{2}$或$\frac{7}{2}$.

19.(1)**解**:由$9^x>5^x+4^x$,两边同除以9^x,可得$1>\left(\frac{5}{9}\right)^x+\left(\frac{4}{9}\right)^x$.

由于$0<\frac{4}{9}<\frac{5}{9}<1$,显然函数$f(x)=\left(\frac{5}{9}\right)^x+\left(\frac{4}{9}\right)^x$在$\mathbf{R}$上为单调递减函数,

而$f(1)=\frac{4}{9}+\frac{5}{9}=1$,

故当$x>1$时,有$f(x)=\left(\frac{5}{9}\right)^x+\left(\frac{4}{9}\right)^x<f(1)=1$,所以原不等式的解集为$\{x|x>1\}$.

(2)**证明**:将方程$5^x+12^x=13^x$两边同除以13^x,可得$\left(\frac{5}{13}\right)^x+\left(\frac{12}{13}\right)^x=1$.

由于$0<\frac{5}{13}<\frac{12}{13}<1$,显然函数$g(x)=\left(\frac{5}{13}\right)^x+\left(\frac{12}{13}\right)^x$在$\mathbf{R}$上为单调递减函数,而$g(2)=\left(\frac{5}{13}\right)^2+\left(\frac{12}{13}\right)^2=1$,

故当$x>2$时,$g(x)=\left(\frac{5}{13}\right)^x+\left(\frac{12}{13}\right)^x<g(2)=1$;当$x<2$时,$g(x)=\left(\frac{5}{13}\right)^x+\left(\frac{12}{13}\right)^x>g(2)=1$.

由此可得,当且仅当$x=2$时$g(x)=1$,即方程$5^x+12^x=13^x$有唯一解$x=2$.

20.**解**:(1)当$m=3$时,$f(x)=\frac{3}{x}+\ln x$,$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,$f'(x)=-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x-3}{x^2}$.令$f'(x)=0$,解得$x=3$.当$0<x<3$时,$f'(x)<0,f(x)$是减函数;当$x>3$时,$f'(x)>0,f(x)$是增函数.所以$f(x)$有极小值,为$f(3)=1+\ln3$,没有极大值.

(2)$g'(x)=3x^2+2x-1=(3x-1)(x+1)$.当$x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$时,$g'(x)>0$,所以$g(x)$是增函数,$[g(x)]_{\max}=g(2)=10$.若对于任意$s,t\in\left[\frac{1}{2},2\right]$,都有$f(s)\geqslant\frac{1}{10}g(t)$恒成立,则对于任意$x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$,$f(x)=\frac{m}{x}+\ln x\geqslant1$恒成立,即对于任意$x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$,$m\geqslant x-x\ln x$恒成立.令$h(x)=x-x\ln x$,则$h'(x)=1-\ln x-1=-\ln x$.当$0<x<1$时,$h'(x)>0$,$h(x)$是增函数;当$x>1$时,$h'(x)<0$,$h(x)$是减函数.所以当$x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$时,$h(x)$的最大值为$h(1)=1$.所以$m\geqslant1$,即实数$m$的取值范围是$[1,+\infty)$.

21.(1)**解**:由$6S_n=(2n+5)a_n-3n$,

当$n=1$时,有$6a_1=(2+5)a_1-3$,解得$a_1=3$;

当$n=2$时,有$6(a_1+a_2)=(2\times2+5)a_2-3\times2$,解得$a_2=8$;

当$n=3$时,有$6(a_1+a_2+a_3)=(2\times3+5)a_3-3\times3$,解得$a_3=15$;

当$n=4$时,有$6(a_1+a_2+a_3+a_4)=(2\times4+5)a_4-3\times4$,解得$a_4=24$.

(2)**解**:由(1)可知,$a_1=1\times3,a_2=2\times4,a_3=3\times5,a_4=4\times6$,猜想$a_n=n(n+2)(n\in\mathbf{N}_+)$,证明如下:

①当$n=1$时,$a_1=3=1\times3$,猜想成立.

②假设当$n=k(k\geqslant2)$时,猜想成立,即$a_k=k(k+2)$,那么当$n=k+1$时,

$a_{k+1}=S_{k+1}-S_k=\frac{1}{6}[(2k+7)a_{k+1}-3(k+1)]-\frac{1}{6}[(2k+5)a_k-3k]$

③ $=\frac{1}{6}(2k+7)a_{k+1}-\frac{1}{6}(2k+5)\cdot a_k-\frac{1}{2}$，

化简，得 $(2k+1)a_{k+1}=(2k+5)a_k+3=(2k+5)k(k+2)+3=2k^3+9k^2+10k+3=(2k^3+8k^2+6k)+(k^2+4k+3)=(2k+1)(k+1)(k+3)$，

所以 $a_{k+1}=(k+1)(k+3)$，

即当 $n=k+1$ 时猜想也成立.

由①②可知，$a_n=n(n+2)(n\in\mathbf{N}_+)$.

22.(1)**解法一**：设 $h(x)=f(x)-2x-c$，则 $h(x)=2\ln x-2x+1-c$，其定义域为 $(0,+\infty)$，$h'(x)=\frac{2}{x}-2$.

当 $0<x<1$ 时，$h'(x)>0$；当 $x>1$ 时，$h'(x)<0$.

所以 $h(x)$ 在区间 $(0,1)$ 单调递增，在区间 $(1,+\infty)$ 单调递减，

从而当 $x=1$ 时，$h(x)$ 取得最大值，最大值为 $h(1)=-1-c$.

故当且仅当 $-1-c\leqslant0$，即 $c\geqslant-1$ 时，$f(x)\leqslant2x+c$，

所以 c 的取值范围为 $[-1,+\infty)$.

解法二：因为 $f(x)\leqslant2x+c$，所以 $c\geqslant2\ln x-2x+1$.

令 $m(x)=2\ln x-2x+1$，则 $m'(x)=\frac{2}{x}-2$，

由 $m'(x)=\frac{2}{x}-2>0$，得 $0<x<1$；

由 $m'(x)=\frac{2}{x}-2<0$，得 $x>1$.

所以 $m(x)$ 在区间 $(0,1)$ 单调递增，在区间 $(1,+\infty)$ 单调递减，

从而当 $x=1$ 时，$m(x)$ 取得最大值，最大值为 $m(1)=-1$，所以 $c\geqslant-1$，

所以 c 的取值范围为 $[-1,+\infty)$.

(2)**解**：$g(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{2(\ln x-\ln a)}{x-a}$，$x\in(0,a)\cup(a,+\infty)$.

$g'(x)=\frac{2\left(\frac{x-a}{x}+\ln a-\ln x\right)}{(x-a)^2}$

$=\frac{2\left(1-\frac{a}{x}+\ln\frac{a}{x}\right)}{(x-a)^2}$.

取 $c=-1$，得 $h(x)=2\ln x-2x+2$，$h(1)=0$，

则由(1)知，当 $x\neq1$ 时，$h(x)<0$，即 $1-x+\ln x<0$，

令 $\frac{a}{x}=t$，则 $2\left(1-\frac{a}{x}+\ln\frac{a}{x}\right)=h(t)<0$，从而 $g'(x)<0$，

所以 $g(x)$ 在区间 $(0,a)$，$(a,+\infty)$ 单调递减.

第 11~12 版综合测试(二)参考答案

一、选择题

1.C 2.C 3.C 4.B 5.C 6.A

7.D

提示：当 $m=0$ 时，C 符合题意. 当 $m\neq0$ 时，$f'(x)=3mx^2-2x-2m$，$\Delta=4+24m^2>0$，设 $3mx^2-2x-2m=0$ 的两根为 x_1,x_2，则 $x_1x_2=-\frac{2}{3}<0$，故两个极值点 x_1,x_2 异号，则 A，B 符合题意，D 不符合题意.故选 D.

8.B

提示：由雷达图得，甲同学物理，历史，地理科目的分数高于年级平均分，生物科目的分数等于年级平均分，但物理，历史中只能选择 1 科为考试科目，甲同学物理比历史更有优势，则甲同学这学校为理想的选科为物理+生物+地理.故选 B.

9.B

提示：若存在实数 m，使直线 l 是曲线 $y=f(x)$ 的切线，因为 $f'(x)=2\sin x\cos x+2a=\sin2x+2a$，所以方程 $\sin2x+2a=-1$ 有解，所以 $-1\leqslant a\leqslant0$，故所求 a 的取值范围是 $(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$.

10.A

提示：由已知条件，得 $a^3-2a>m+a$，故 $m<a^3-3a$ 在 $a\in[0,+\infty)$ 上恒成立.令 $f(a)=a^3-3a(a\geqslant0)$，则 $f'(a)=3a^2-3=3(a+1)(a-1)$，可知 $f(a)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，故 $[f(a)]_{\min}=f(1)=-2$.所以 m 的取值范围为 $(-\infty,-2)$.

11.C

提示：计算得 $f(1)=36$，$f(2)=3\times36$，$f(3)=10\times36$，$f(4)=34\times36$，由此猜想 $m=36$，用数学归纳法可得证.故选 C.

12.B

提示：依题意，记 $g(x)=xf(x)$，则 $g'(x)=xf'(x)+f(x)$，$g(0)=0$.当 $x>0$ 时，$g'(x)=x\left[f'(x)+\frac{f(x)}{x}\right]>0$，$g(x)$ 是增函数，$g(x)>0$；当 $x<0$ 时，$g'(x)=x\left[f'(x)+\frac{f(x)}{x}\right]<0$，$g(x)$ 是减函数，$g(x)>0$.在同一坐标系内画出函数 $y=g(x)$ 与 $y=-\frac{1}{x}$ 的大致图象，结合图象可知，它们共有 1 个公共点，因此函数 $F(x)=xf(x)+\frac{1}{x}$ 的零点个数是 1，选 B.

二、填空题

13.$\frac{8}{3}+\pi$

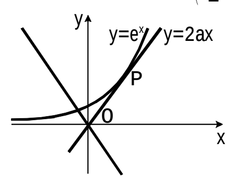
14.$[\sqrt2-1,\sqrt2+1]$

提示：因为 $\overrightarrow{OZ_1}\cdot\overrightarrow{OZ_2}=0$，所以 $\overrightarrow{OZ_1}\perp\overrightarrow{OZ_2}$.又 $|z_1|=|z_2|=1$，即 $|\overrightarrow{OZ_1}|=|\overrightarrow{OZ_2}|=1$，由平行四边形法则易得 $|\overrightarrow{OZ_1}+\overrightarrow{OZ_2}|=\sqrt2$. 设 z_3 对应的向量为 $\overrightarrow{OZ_3}$，则 $|\overrightarrow{OZ_1}+\overrightarrow{OZ_2}|-|\overrightarrow{OZ_3}|\leqslant|\overrightarrow{OZ_1}+\overrightarrow{OZ_2}-\overrightarrow{OZ_3}|\leqslant|\overrightarrow{OZ_1}+\overrightarrow{OZ_2}|+|\overrightarrow{OZ_3}|$，即 $\sqrt2-1\leqslant|z_1+z_2-z_3|\leqslant\sqrt2+1$. 故 $|z_1+z_2-z_3|$ 的取值范围是 $[\sqrt2-1,\sqrt2+1]$.

15.6

16.$(-\infty,0)\cup\left(\frac{e}{2},+\infty\right)$

提示：$f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f'(x)=e^x-2ax$.由题意得，$f'(x)$ 不恒大于 0 也不恒小于 0，且关于 x 的方程 $e^x-2ax=0$ 有实根. 在同一平面直角坐标系中作出 $y=e^x$ 和 $y=2ax$ 的图象，如图所示.当直线 $y=2ax$ 与曲线 $y=e^x$ 相切时，设切点为 $P(x_0,y_0)$，则 $\begin{cases}2a=e^{x_0},\\y_0=e^{x_0},\\y_0=2ax_0,\end{cases}$ 解得 $a=\frac{e}{2}$.由图可知 $a\in(-\infty,0)\cup\left(\frac{e}{2},+\infty\right)$.



(第 16 题图)

三、解答题

17.**解**：$z_2=\frac{15-5i}{(2+i)^2}=\frac{15-5i}{3+4i}$

$=\frac{5(3-i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}=\frac{5-15i}{5}=1-3i$.

(1)$z_1+\bar{z}_2=(2-3i)+(1+3i)=3$.

(2)$z_1\cdot z_2=(2-3i)(1-3i)=2-9-9i=-7-9i$.

(3)$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2-3i}{1-3i}=\frac{(2-3i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)}$

$=\frac{2+9+3i}{10}=\frac{11}{10}+\frac{3}{10}i$.

18.**解**：(1)设 $z_1=x+yi$，$x,y\in\mathbf{R}$，由 $z_1\cdot\bar{z}_1+3(z_1+\bar{z}_1)+5=0$，得 $x^2+y^2+6x+5=0$，整理得 $(x+3)^2+y^2=4$，所以点 P 的轨迹方程为 $(x+3)^2+y^2=4$.

(2)设 $z_2=x+yi$，$x,y\in\mathbf{R}$，$\frac{z_2+3}{z_2-3}=\frac{x+3+yi}{x-3+yi}=\frac{x^2+y^2-9-6yi}{(x-3)^2+y^2}$，因为 $\frac{z_2+3}{z_2-3}$ 为纯虚数，所以 $x^2+y^2=9$ 且 $y\neq0$，所以点 Q 的轨迹方程为 $x^2+y^2=9(y\neq0)$.

19.**证明**：若已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=1$，当 $n\geqslant2$ 时，$\frac{a_n}{a_{n-1}}=2$，则通项 $a_n=2^{n-1}$，前 n 项和 $S_n=\frac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$.

从而可知，要证 $S_n\geqslant2^n-1$，可以先证 $a_n\geqslant2^{n-1}$，只需证 $\frac{a_n}{a_{n-1}}\geqslant2(n\geqslant2)$.

因为当 $x\geqslant0$ 时，$f(x)=x^3+1\geqslant1$，所以由 $a_1=1$，可得 $a_n=f(a_{n-1})\geqslant1$.

所以 $a_n=a_{n-1}^3+1\geqslant a_{n-1}^2+1\geqslant2a_{n-1}$，故 $\frac{a_n}{a_{n-1}}\geqslant2$.得证.

20.**解**：(1)若 $m=1$，则 $f(x)=e^x-x^2$，$f'(x)=e^x-2x$.所以 $f'(0)=1$.又 $f(0)=1$，故所求切线方程为 $y-1=x$，即 $x-y+1=0$.

(2)由 $f(x)\geqslant x(4-me^x)$，得 $me^x(x+1)\geqslant x^2+4x$，则问题转化为当 $x\geqslant0$ 时，$m\geqslant\frac{x^2+4x}{e^x(x+1)}$ 恒成立.令 $g(x)=\frac{x^2+4x}{e^x(x+1)}(x\geqslant0)$，则 $g'(x)=\frac{-(x+2)(x^2+2x-2)}{(x+1)^2e^x}$.令 $g'(x)=0$，结合 $x\geqslant0$，得 $x=\sqrt3-1$.当 $x\in(0,\sqrt3-1)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；当 $x\in(\sqrt3-1,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减.所以 $[g(x)]_{\max}=g(\sqrt3-1)=2e^{1-\sqrt3}$.所以 $m\geqslant2e^{1-\sqrt3}$，即实数 m 的取值范围为 $[2e^{1-\sqrt3},+\infty)$.

21.(1)**证明**：依题意，$a_n=\sqrt{n^2+1}$，$b_n=n$，$c_n=\sqrt{n^2+1}-n$.

假设 $\{c_n\}$ 是等差数列，则 $2c_2=c_1+c_3$，所以 $2(\sqrt5-2)=\sqrt2-1+\sqrt{10}-3$.

所以 $2\sqrt5=\sqrt2+\sqrt{10}$，产生矛盾，所以 $\{c_n\}$ 不是等差数列.

假设 $\{c_n\}$ 是等比数列，则 $c_2^2=c_1c_3$，即 $(\sqrt5-2)^2=(\sqrt2-1)(\sqrt{10}-3)$.

有 $6=6\sqrt5-3\sqrt2-\sqrt{10}$，产生矛盾，所以 $\{c_n\}$ 也不是等比数列.

(2)**解**：因为 $c_{n+1}=\sqrt{(n+1)^2+1}-(n+1)>0$，$c_n=\sqrt{n^2+1}-n>0$，

所以 $\frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{\sqrt{(n+1)^2+1}-(n+1)}{\sqrt{n^2+1}-n}$

$=\frac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt{(n+1)^2+1}+(n+1)}$.

因为 $0<\sqrt{n^2+1}<\sqrt{(n+1)^2+1}$，又 $0<n<n+1$，

所以 $\sqrt{n^2+1}+n<\sqrt{(n+1)^2+1}+n+1$，

所以 $0<\frac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt{(n+1)^2+1}+(n+1)}<1$，

所以 $0<\frac{c_{n+1}}{c_n}<1$，即 $c_{n+1}<c_n$.

22.**解**：(1)由题意知，$f'(x)=3x^2-k$，

当 $k=0$ 时，$f(x)=x^3$，

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递增；

当 $k<0$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递增；

当 $k>0$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=\pm\sqrt{\frac{k}{3}}$.

令 $f'(x)<0$，得 $-\sqrt{\frac{k}{3}}<x<\sqrt{\frac{k}{3}}$；

令 $f'(x)>0$，得 $x<-\sqrt{\frac{k}{3}}$，或 $x>\sqrt{\frac{k}{3}}$.

所以 $f(x)$ 在 $\left(-\sqrt{\frac{k}{3}},\sqrt{\frac{k}{3}}\right)$ 单调递减，在 $\left(-\infty,-\sqrt{\frac{k}{3}}\right)$，$\left(\sqrt{\frac{k}{3}},+\infty\right)$ 单调递增.

(2)由(1)知，

当 $k\leqslant0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递增，$f(x)$ 不可能有三个零点.

当 $k>0$ 时，$x=-\sqrt{\frac{k}{3}}$ 为 $f(x)$ 的极大值点，$x=\sqrt{\frac{k}{3}}$ 为 $f(x)$ 的极小值点.

此时，$-k-1<-\sqrt{\frac{k}{3}}<\sqrt{\frac{k}{3}}<k+1$，且 $f(-k-1)<0$，$f(k+1)>0$，$f\left(-\sqrt{\frac{k}{3}}\right)>0$.

根据 $f(x)$ 的单调性，

当且仅当 $f\left(\sqrt{\frac{k}{3}}\right)<0$，

即 $k^2-\frac{2}{3}k\sqrt{\frac{k}{3}}<0$ 时，$f(x)$ 有三个零点，解得 $0<k<\frac{4}{27}$.

综上，k 的取值范围为 $\left(0,\frac{4}{27}\right)$.

第 13~14 版综合测试(三)参考答案

一、选择题

1.D

2.B

提示：由 $z_1=1+i$，可知 $z_2=1-i$.所以 $\frac{z_1}{z_2-i}=\frac{1+i}{1-2i}=\frac{(1+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i$.

3.A

提示：$\bar{z}=\frac{2-i}{1+2i}=\frac{(2-i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{-5i}{5}=-i$，则 $z=i$，则复数 z 的虚部是 1，故选 A.

4.C

提示：记 $11^n\times248$ 的十位数为 a_n，则 $a_0=4$，$a_1=2$，$a_2=0$，$a_3=8$，$a_4=6$，$a_5=4$，$a_6=2$，…，归纳得出 $\{a_n\}$ 的周期为 5，则 $a_{99}=a_4=6$.

5.B

6.C

提示：因为 $a>b>c$，所以 $a-b>0$，$b-c>0$，$a-c>0$. 又 $\frac{a-c}{a-b}+\frac{a-c}{b-c}=\frac{a-b+b-c}{a-b}+\frac{a-b+b-c}{b-c}=2+\frac{b-c}{a-b}+\frac{a-b}{b-c}\geqslant2+2=4$，而 $k\leqslant\frac{a-c}{a-b}+\frac{a-c}{b-c}$，所以 $k\leqslant4$.故最大的正整数 k 等于 4.

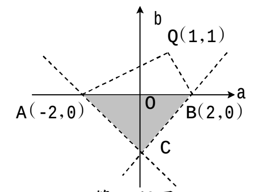
7.D

8.A

提示：由题意设，易得 $f'(x)=e^{x-2}(ax+a-1)$，则曲线 $f(x)$ 在点 $(2,2a-1)$ 处的切线斜率为 $f'(2)=3a-1$.又 $f(2)=2a-1$，切线过点 $(3,3)$，所以 $\frac{(2a-1)-3}{2-3}=3a-1$，解得 $a=1$.所以 $f'(x)=xe^{x-2}$.令 $f'(x)>0$，解得 $x>0$.所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$.

9.A

提示：由题设，得 $f'(x)=x^2+ax+2b=0$ 的两个根为 x_1,x_2，且 x_1,x_2 分别在区间 $(-2,0)$ 与 $(0,2)$ 内，所以 $\begin{cases}f'(-2)>0,\\f'(0)<0,\\f'(2)>0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2-a+b>0,\\b<0,\\2+a+b>0.\end{cases}$ 画出可行域如图中阴影部分所示.设 $Q(1,1)$，$\triangle ABC$ 内部的点为 $P(a,b)$，由 $k_{AQ}=\frac{1}{3}$，$k_{BQ}=-1$，可得 $\frac{b-1}{a-1}$ 的取值范围为 $(-\infty,-1)\cup\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$.



(第 9 题图)

10.C

提示：设 $f(x)=\frac{x}{\sin x}$，$x\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$，

则 $f'(x)=\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^2x}$.

设 $g(x)=\sin x-x\cos x$，$x\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$，则 $g'(x)=\cos x-(\cos x-x\sin x)=x\sin x>0$，所以 $g(x)$ 单调递增，$g(x)>g\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{6}\times\frac{\sqrt3}{2}>0$，所以 $f'(x)>0$.所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$ 上单调递增.所以 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)<f(x)<f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$，即 $\frac{\pi}{3}<f(x)<\frac{5\pi}{3}$.所以 $n-m$ 的最小值为 $\frac{5\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}$.

11.C

提示：由 $\sqrt{1-x^2}+x^{\frac{4}{5}}=-\sqrt{1-x^2}+x^{\frac{2}{7}}$，解得 $x=\pm1$.当 $x>0$ 时，“心形”图案在 y 轴右侧的面积 $S_1=\int_0^1\left[\sqrt{1-x^2}+x^{\frac{4}{5}}-\left(-\sqrt{1-x^2}+x^{\frac{2}{7}}\right)\right]dx=\int_0^1\left(2\sqrt{1-x^2}+x^{\frac{4}{5}}-x^{\frac{2}{7}}\right)dx=2\times\frac{\pi}{4}+\left(\frac{5}{9}x^{\frac{9}{5}}-\frac{7}{9}x^{\frac{9}{7}}\right)\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}-\frac{2}{9}$，故“心形”图案的面积 $S_2=2S_1=\pi-\frac{4}{9}$. 又靶子的面积 $S=8\pi$，故此箭恰好命中“心形”图案的概率 $P=\frac{S_2}{S}=\frac{1}{8}-\frac{1}{18\pi}$.

12.A

提示：因为 $z=(1+i)(m-i)=(m+1)+(m-1)i$ 在复平面内对应的点位于实轴上，所以 $m-1=0$，解得 $m=1$.所以 $f(x)=$