第 8 期

第 2~3 版章节测试参考答案

一、选择题

1.D　2.D　3.C　4.B

5.A

提示：由$\frac{1-i}{1+i}=-i$，得$\overrightarrow{OA}=(0,-1)$，$\overrightarrow{OB}=(1,-\sqrt{3})$.

所以$|\overrightarrow{OA}|=1$，$|\overrightarrow{OB}|=2$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\sqrt{3}$.

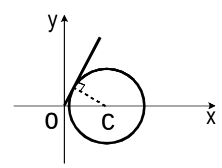
所以$\cos\angle AOB=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

又$0\leqslant\theta\leqslant\pi$，所以$\theta=\frac{\pi}{6}$.

6.A　7.B

8.D

提示：因为$|(x-2)+yi|=\sqrt{3}$，所以$(x-2)^2+y^2=3$，所以点(x,y)在以$C(2,0)$为圆心，以$\sqrt{3}$为半径的圆上，如图，由平面几何知识知$-\sqrt{3}\leqslant\frac{y}{x}\leqslant\sqrt{3}$.



（第 8 题图）

9.B

10.B

提示：$z^*\bar{z}=\frac{|z|+|\bar{z}|}{2}=\frac{2\sqrt{a^2+b^2}}{2}=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(a+b)^2-2ab}$，又因为$ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$，所以$-ab\geqslant-\frac{9}{4}$，$z^*\bar{z}\geqslant\sqrt{9-2\times\frac{9}{4}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

11.C

提示：由题意知，$z=x+yi$，所以$z-i=x+(y-1)i$.

因为$|z-i|=1$，所以$\sqrt{x^2+(y-1)^2}=1$，所以$x^2+(y-1)^2=1$，故选C.

12.D

提示：由条件知$A=\{-2,-1,0,1,2\}$，

若$z\in\mathbf{R}$，则$a^2-a-2=0$，所以$a=-1$或2，所以$p_1=\frac{2}{5}$；

若$z=0$，则$\begin{cases}a^2-1=0,\\a^2-a-2=0,\end{cases}$所以$a=-1$，所以$p_3=\frac{1}{5}$；

若z为虚数，则$a^2-a-2\neq0$，

所以$a\neq-1$且$a\neq2$，所以$p_2=\frac{3}{5}$；

若z为纯虚数，则$\begin{cases}a^2-1=0,\\a^2-a-2\neq0,\end{cases}$所以$a=1$，所以$p_4=\frac{1}{5}$.

所以$p_3=p_4<p_1<p_2$.

二、填空题

13.2　14.$\frac{9}{2}$

15.24

16.①②

提示：当z为纯虚数时，z与$\bar{z}$对应的点均在虚轴上，故P_1,O,P_2三点共线，①正确；显然③错误；当$z=0$时，$\overrightarrow{OP_1}$，$\overrightarrow{OP_2}$对应的复数均为0，此时有$\overrightarrow{OP_1}=\overrightarrow{OP_2}$，故②正确，④错误.

三、解答题

17.**解**：$z=\frac{(1+i)^2+3(1-i)}{2+i}=\frac{2i+3(1-i)}{2+i}=\frac{3-i}{2+i}=\frac{(3-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=1-i$，

将$z=1-i$代入$z^2+az+b=1+i$，

得$(1-i)^2+a(1-i)+b=1+i$，

即$(a+b)-(a+2)i=1+i$，

所以$\begin{cases}a+b=1,\\-(a+2)=1.\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-3,\\b=4.\end{cases}$

18.**解**：设原方程的一个实根为$t=t_0$，则有$(t_0^2+2t_0+2xy)+(t_0+x-y)i=0$.

根据复数相等的充要条件有

$\begin{cases}t_0^2+2t_0+2xy=0,&①\\t_0+x-y=0,&②\end{cases}$

把②代入①中消去t_0，得$(y-x)^2+2(y-x)+2xy=0$，

即$(x-1)^2+(y+1)^2=2$.

故所求点的轨迹方程为$(x-1)^2+(y+1)^2=2$.

19.**解**：(1)设$z=x+yi(x,y\in\mathbf{R}$且$y\neq0)$.

由$|2z+5|=|z+10|$，

得$(2x+5)^2+(2y)^2=(x+10)^2+y^2$.

化简得$x^2+y^2=25$.所以$|z|=5$.

(2)若存在实数m，使得$\frac{z}{m}+\frac{m}{z}=\frac{x+yi}{m}+\frac{m}{x+yi}=\left(\frac{x}{m}+\frac{mx}{x^2+y^2}\right)+\left(\frac{y}{m}-\frac{my}{x^2+y^2}\right)i$为实数，则$\frac{y}{m}-\frac{my}{x^2+y^2}=0$.

又$y\neq0$，且$x^2+y^2=25$，

所以$\frac{1}{m}-\frac{m}{25}=0$，解得$m=\pm5$.

所以存在$m=\pm5$满足要求.

(3)$(1-2i)z=(1-2i)(x+yi)=(x+2y)+(y-2x)i$.

依题意，得$x+2y=y-2x$，即$y=-3x$.

代入$x^2+y^2=25$，

解得$\begin{cases}x=\frac{\sqrt{10}}{2},\\y=-\frac{3\sqrt{10}}{2},\end{cases}$或$\begin{cases}x=-\frac{\sqrt{10}}{2},\\y=\frac{3\sqrt{10}}{2}.\end{cases}$

所以$z=\frac{\sqrt{10}}{2}-\frac{3\sqrt{10}}{2}i$，

或$z=-\frac{\sqrt{10}}{2}+\frac{3\sqrt{10}}{2}i$.

20.**解**：(1)因为$z_0=\lg(a^2-4a+4)+(a^2-3a+2)i$为纯虚数，

所以$\begin{cases}\lg(a^2-4a+4)=0,\\a^2-3a+2\neq0\end{cases}$

即$\begin{cases}a^2-4a+4=1,\\a^2-3a+2\neq0,\end{cases}$解得$a=3$.

此时$z_0=2i$，由韦达定理得

$\begin{cases}z_0+b=3+2i,\\z_0b=6i,\end{cases}$

解得$b=3$.

(2)复数z满足$1\leqslant|z|\leqslant|a+bi|$，即$1\leqslant|z|\leqslant3\sqrt{2}$，

不等式$|z|\geqslant1$的解集是圆$|z|=1$的外部(包括边界)所有点组成的集合，

不等式$|z|\leqslant3\sqrt{2}$的解集是圆$|z|=3\sqrt{2}$的内部(包括边界)所有点组成的集合，

所以所求点Z的集合是以原点为圆心，以1和$3\sqrt{2}$为半径的两个圆所夹的圆环，包括边界.

则$S_{圆环}=\pi[(3\sqrt{2})^2-1^2]=17\pi$.

21.(1)**解**：设$z_1=a+bi(a,b\in\mathbf{R}$且$b\neq0)$，则$z_2=z_1+\frac{1}{z_1}=a+bi+\frac{1}{a+bi}=\left(a+\frac{a}{a^2+b^2}\right)+\left(b-\frac{b}{a^2+b^2}\right)i$.

因为z_2是实数，$b\neq0$，于是有$a^2+b^2=1$，即$|z_1|=1$，还可得$z_2=2a$.

由$-1\leqslant z_2\leqslant1$，得$-1\leqslant2a\leqslant1$，解得$-\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$，即$z_1$的实部的取值范围是$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

(2)**证明**：$\omega=\frac{1-z_1}{1+z_1}=\frac{1-a-bi}{1+a+bi}=\frac{1-a^2-b^2-2bi}{(1+a)^2+b^2}=-\frac{b}{a+1}i$.

因为$a\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$，$b\neq0$，所以$\omega$为纯虚数.

22.**解**：(1)由z_1,z_2,m是实数，得$\alpha+\beta=-z_1$，$\alpha\beta=z_2+m$.

故$|\alpha-\beta|=2\sqrt{7}\Rightarrow(\alpha-\beta)^2=28\Rightarrow(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=28\Rightarrow z_1^2-4z_2-4m=28\Rightarrow16-4m=28$，解得$m=-3$.

(2)由z_1,z_2,m是复数，得$|\alpha-\beta|=2\sqrt{7}\Rightarrow|\alpha-\beta|^2=28\Rightarrow|(\alpha-\beta)^2|=28\Rightarrow|(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta|=28\Rightarrow|z_1^2-4z_2-4m|=28$.

设$m=a+bi\ (a,b\in\mathbf{R})$，则$z_1^2-4z_2-4m=16+20i-4(a+bi)=(16-4a)+(20-4b)i=4[(4-a)+(5-b)i]$.

所以$|4[(4-a)+(5-b)i]|=28\Rightarrow|(4-a)+(5-b)i|=7\Rightarrow(a-4)^2+(b-5)^2=7^2$.

故复数m表示的点$M(a,b)$在圆$(a-4)^2+(b-5)^2=7^2$上，可知点M与原点的距离的最大值为$7+\sqrt{41}$，最小值为$7-\sqrt{41}$，所以$|m|$的最大值为$7+\sqrt{41}$，最小值为$7-\sqrt{41}$.

第 5 期

第 3~4 版同步周测参考答案

一、选择题

1.D

提示：若$|a|=|b|$，则$a=b$，显然a、b异号不成立；

若$|a|>|b|$，则$a>b$，利用$a=-3$，$b=1$，满足条件，不满足结果，B不正确；

若$a=0<b=5$，则$|a|>|b|$不成立，C不正确；

若$|a|=|b|$，则$a=\pm b$，成立.故选D.

2.A

3.C

4.D

5.A

6.C

7.B

8.B

9.C

提示：假设$c/\!/b$，而由$c/\!/a$，可得$a/\!/b$，这与a,b异面矛盾，故c与b不可能是平行直线.故选C.

10.B

提示：分$\triangle ABC$的直线只能过一个顶点且与对边相交，如直线AD(点D在BC上)，则$\angle ADB+\angle ADC=180°$，若$\angle ADB$为钝角，则$\angle ADC$为锐角.而$\angle ADC>\angle BAD$，$\angle ADC>\angle ABD$，$\triangle ABD$与$\triangle ACD$不可能相似，与已知不符，只有当$\angle ADB=\angle ADC=\angle BAC=90°$时，才符合题意.

11.C

提示：由于a,b,c不全相等，则$a-b,b-c,c-a$中至少有一个不为0，故①正确；②显然成立；令$a=2,b=3,c=5$，满足$a\neq c,b\neq c,a\neq b$，故③错.

12.C

二、填空题

13.当$n=2$时，$2^2\geqslant2\times2$，命题成立

14.④

提示：因为$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$，所以$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}$，所以$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$，所以四边形ABCD为平行四边形.

15.$AC\perp BD$

提示：从结论出发，找一个使$A_1C\perp B_1D_1$成立的充分条件.因而可以是：$AC\perp BD$或四边形ABCD为正方形.

16.②③

三、解答题

17.**证明**：若证$\frac{|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|}\leqslant\sqrt{2}$，

只需证$|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|\leqslant\sqrt{2}|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$，

只需证$(|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|)^2\leqslant(\sqrt{2}|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|)^2$，

即证$\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+2|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\leqslant2\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{b}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，

因为非零向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，且$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，

所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，

即证$2|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\leqslant\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2$，

即证$(|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|)^2\geqslant0$，显然成立，

所以原不等式成立.

18.**证明**：假设$\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$成立，

则$\frac{2}{b}=\frac{a+c}{ac}=\frac{2b}{ac}$，所以$b^2=ac$.

又因为$b=\frac{a+c}{2}$，所以$\left(\frac{a+c}{2}\right)^2=ac$，即$a^2+c^2=2ac$，即$(a-c)^2=0$，

所以$a=c$，这与a,b,c两两不相等矛盾，

所以$\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$不成立.

19.**证明**：(1)当$n=1$时，

$x+\frac{1}{x}\geqslant2$成立.

当$n=2$时，$x^2+1+1+\frac{1}{x^2}\geqslant2+2>2+1$成立.

(2)假设当$n=k$时，$x^k+x^{k-2}+\cdots+\frac{1}{x^{k-2}}+\frac{1}{x^k}\geqslant k+1$成立，

那么，当$n=k+2$时，$x^{k+2}+x^k+\cdots+\frac{1}{x^k}+\frac{1}{x^{k+2}}\geqslant k+1+\left(x^{k+2}+\frac{1}{x^{k+2}}\right)\geqslant k+1+2=(k+2)+1$.

这表明，当$n=k+2$时命题也成立.根据(1)和(2)，可知原不等式成立.

20.(1)**解**：因为$S_n,S_{n+1},2S_1$成等差数列，

所以$S_{n+1}=\frac{S_n+2S_1}{2}$.

又$a_1=1$，

所以$S_1=a_1=1$，

$S_2=\frac{S_1+2S_1}{2}=\frac{3}{2}=\frac{2^2-1}{2^1}$，

$S_3=\frac{S_2+2S_1}{2}=\frac{7}{4}=\frac{2^3-1}{2^2}$，

$S_4=\frac{S_3+2S_1}{2}=\frac{15}{8}=\frac{2^4-1}{2^3}$，

猜想$S_n=\frac{2^n-1}{2^{n-1}}(n\in\mathbf{N}_+)$.

(2)**证明**：①当$n=1$时，左边$=a_1=1$，右边$=\frac{2^1-1}{2^{1-1}}=1$，

所以左边=右边，猜想成立.

②假设当$n=k$时，猜想成立，即

$S_k=\frac{2^k-1}{2^{k-1}}$，

那么，当$n=k+1$时，

$S_{k+1}=\frac{S_k+2S_1}{2}=\frac{\frac{2^k-1}{2^{k-1}}+2\times1}{2}=\frac{2^k-1+2^k}{2^k}=\frac{2^{k+1}-1}{2^{(k+1)-1}}$，

所以当$n=k+1$时猜想也成立.

根据①②，可知猜想对任何$n\in\mathbf{N}_+$都成立.

21.**解**：假设三个方程均无实根，

则$\begin{cases}\Delta_1=16a^2-4(-4a+3)<0,\\\Delta_2=(a-1)^2-4a^2<0,\\\Delta_3=4a^2-4(-2a)<0,\end{cases}$

解得$\begin{cases}-\frac{3}{2}<a<\frac{1}{2},\\a<-1或a>\frac{1}{3},\\-2<a<0,\end{cases}$即$-\frac{3}{2}<a<-1$，

所以当$a\geqslant-1$或$a\leqslant-\frac{3}{2}$时，三个方程至少有一个方程有实根.

所以实数a的取值范围是$\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right]\cup[-1,+\infty)$.

22.(1)**证明**：当$a+b\geqslant0$时，$a\geqslant-b$且$b\geqslant-a$.

因为$f(x)$在$\mathbf{R}$上是增函数，

所以$f(a)\geqslant f(-b)$，$f(b)\geqslant f(-a)$，

所以$f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$.

(2)**解**：(1)中命题的逆命题为"如果$f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$，那么$a+b\geqslant0$"，此命题成立.

用反证法证明如下：

假设$a+b<0$，则$a<-b$，

所以$f(a)<f(-b)$.

同理可得$f(b)<f(-a)$.

所以$f(a)+f(b)<f(-a)+f(-b)$，这与$f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$矛盾，

故假设不成立，

所以$a+b\geqslant0$成立，即(1)中命题的逆命题成立.

② 第6期

第2~3版章节测试参考答案

一、选择题

1.D　2.D　3.A　4.B　5.C

6.B

提示:由题意知,$\dfrac{1\times\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}>\dfrac{127}{64}$,整理得 $2^n>128$,解得 $n>7$,故初始值为 $n=8$.

7.C

8.C

提示:垂直于同一个平面的两条直线平行.

9.C

提示:假设 $\frac{a}{b},\frac{b}{c},\frac{c}{a}$ 的值均大于 1,由 $a>0,b>0,c>0$,得 $a>b,b>c,c>a$,显然矛盾,所以 $\frac{a}{b},\frac{b}{c},\frac{c}{a}$ 的值至少有一个不大于 1.

10.C

提示:因为 $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$,$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$,$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)$,

依此类推可得:$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}+\frac{1}{110}+\frac{1}{132}+\frac{1}{156}=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{13}\right)$,所以 $\frac{1}{m}=\frac{1}{13}$,$\frac{1}{n}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{1}{20}$,$m=13,n=20$,即 $1\leqslant x\leqslant 13,1\leqslant y\leqslant 20$. 又 $\frac{x+y+2}{x+1}=1+\frac{y+1}{x+1}$,把 $\frac{y+1}{x+1}$ 看成点 $(x,y),(-1,-1)$ 连线的斜率,结合 $m\leqslant n,m,n\in N_+$,在满足条件的点中,$(13,1),(-1,-1)$ 连线的斜率最小,为 $\frac{1+1}{13+1}=\frac{1}{7}$,故 $\frac{x+y+2}{x+1}$ 最小值为 $\frac{8}{7}$.故选 C.

11.A

提示:当 $n=k$ 时式子为 $4^{2k-1}+3^{k+1}$,则 $n=k+1$ 时,式子为 $4^{2k+1}+3^{k+2}=4^2\times4^{2k-1}+3\times3^{k+1}=16\times(4^{2k-1}+3^{k+1})-13\times3^{k+1}$,显然 A 正确,故选 A.

12.C

二、填空题

13.同角的补角相等

14.$(k+1)^2+k^2$

15.$\frac{a^3}{8}$　16.$\frac{1}{504}$

三、解答题

17.**解**:$f(a)+f(c)>2f(b)$.

证明如下:因为 a,b,c 是互不相等的正数,所以 $a+c>2\sqrt{ac}$.

因为 $b^2=ac$,

所以 $ac+2(a+c)>b^2+4b$.

即 $ac+2(a+c)+4>b^2+4b+4$.

从而 $(a+2)(c+2)>(b+2)^2$.

因为 $f(x)=\log_2x$ 是增函数,

所以 $\log_2[(a+2)(c+2)]>\log_2(b+2)^2$.

即 $\log_2(a+2)+\log_2(c+2)>2\log_2(b+2)$.

故 $f(a)+f(c)>2f(b)$.

18.**解**:根据类比猜想得出 $S^2_{AA_1C_1C}=S^2_{ABB_1A_1}+S^2_{BCC_1B_1}-2S_{ABB_1A_1}\cdot S_{BCC_1B_1}\cdot\cos\theta$,其中 θ 为侧面 ABB_1A_1 与 BCC_1B_1 所成的二面角的平面角.

证明如下:作斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的直截面 DEF,D,E,F 分别在棱 AA_1,CC_1,BB_1 上,则∠DFE 为平面 ABB_1A_1 与平面 BCC_1B_1 所成的角,设为 θ. 在△DEF 中有余弦定理:$DE^2=DF^2+EF^2-2DF\cdot EF\cos\theta$,

等式左右两边同乘以 AA_1^2,得

$DE^2\cdot AA_1^2=DF^2\cdot AA_1^2+EF^2\cdot AA_1^2-2DF\cdot AA_1\cdot EF\cdot AA_1\cos\theta$,

即 $S^2_{AA_1C_1C}=S^2_{ABB_1A_1}+S^2_{BCC_1B_1}-2S_{ABB_1A_1}\cdot S_{BCC_1B_1}\cdot\cos\theta$.

19.**证明**:(1)要证 $\sqrt{a_1}+\sqrt{a_3}<2\sqrt{a_2}$,只要证 $a_1+a_3+2\sqrt{a_1a_3}<4a_2$,

因为数列$\{a_n\}$是等差数列,所以 $a_1+a_3=2a_2$,只要证 $\sqrt{a_1a_3}<a_2$,只要证 $a_1a_3<a_2^2=\left(\frac{a_1+a_3}{2}\right)^2$.

因为数列$\{a_n\}$各项均为正数,所以 $a_1a_3<a_2^2=\left(\frac{a_1+a_3}{2}\right)^2$ 成立,所以 $\sqrt{a_1}+\sqrt{a_3}<2\sqrt{a_2}$.

(2)假设 $1-a_n,1-a_{n+1},1-a_{n+2}$ 能够成等比数列,

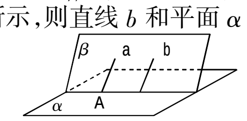
则 $(1-a_{n+1})^2=(1-a_n)(1-a_{n+2})$,

即 $1-2a_{n+1}+a^2_{n+1}=1+a_na_{n+2}-(a_n+a_{n+2})$,因为数列$\{a_n\}$是等比数列,所以 $a^2_{n+1}=a_na_{n+2}$,

所以 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$,所以数列$\{a_n\}$是等差数列,所以数列$\{a_n\}$是常数列,这与已知矛盾,

故假设不成立,所以 $1-a_n,1-a_{n+1},1-a_{n+2}$ 不可能成等比数列.

20.**证明**:原命题可用数学语言表述为:已知 $a/\!/b$,直线 $a\cap$平面 $\alpha=A$,如图所示,则直线 b 和平面 α 相交.



(第20题图)

假设 b 与平面 α 不相交,

则 $b\subset\alpha$,或 $b/\!/\alpha$.

(1)若 $b\subset\alpha$,因为 $a/\!/b,a\not\subset\alpha$,

所以 $a/\!/\alpha$,这与 $a\cap\alpha=A$ 相矛盾.

(2)若 $b/\!/\alpha$,因为 $a/\!/b$,所以 a 和 b 可确定一个平面 β,显然平面 α 与平面 β 相交.

设 $\alpha\cap\beta=c$,因为 $b/\!/\alpha$,所以 $b/\!/c$.

又 $a/\!/b$,所以 $a/\!/c$,且 $a\not\subset\alpha,c\subset\alpha$.

故 $a/\!/\alpha$,这与 $a\cap\alpha=A$ 矛盾.

根据(1)(2),可知假设不成立.故直线 b 与平面 α 相交,原命题得证.

21.**解**:由 $x_1=\frac{1}{2}$ 及 $x_{n+1}=\frac{1}{1+x_n}$,得 $x_2=\frac{2}{3},x_4=\frac{5}{8},x_6=\frac{13}{21}$,由 $x_2>x_4>x_6$ 猜想:数列$\{x_{2n}\}$是递减数列.

下面用数学归纳法证明:

(1)当 $n=1$ 时,已证命题成立.

(2)假设当 $n=k$ 时命题成立,

即 $x_{2k}>x_{2k+2}$,那么 $x_{2k+2}-x_{2k+4}=\frac{1}{1+x_{2k+1}}-\frac{1}{1+x_{2k+3}}=\frac{x_{2k+3}-x_{2k+1}}{(1+x_{2k+1})(1+x_{2k+3})}$

$=\dfrac{\frac{1}{1+x_{2k+2}}-\frac{1}{1+x_{2k}}}{(1+x_{2k+1})(1+x_{2k+3})}$

$=\dfrac{x_{2k}-x_{2k+2}}{(1+x_{2k})(1+x_{2k+1})(1+x_{2k+2})(1+x_{2k+3})}>0$,

即 $x_{2(k+1)}>x_{2(k+1)+2}$,

也就是说,当 $n=k+1$ 时命题也成立.结合(1)和(2)知命题成立.

22.(1)**解**:由于 $[(x-1)+(y+1)+(z+1)]^2$

$=(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2+2[(x-1)\cdot(y+1)+(y+1)(z+1)+(z+1)(x-1)]$

$\leqslant3[(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2]$,

因为 $x+y+z=1$,

所以 $(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2\geqslant\frac{4}{3}$,

当且仅当 $x=\frac{5}{3},y=-\frac{1}{3},z=-\frac{1}{3}$ 时,等号成立. 所以 $(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2$ 的最小值为 $\frac{4}{3}$.

(2)**证明**:由于 $[(x-2)+(y-1)+(z-a)]^2=(x-2)^2+(y-1)^2+(z-a)^2+2[(x-2)\cdot(y-1)+(y-1)(z-a)+(z-a)(x-2)]$

$\leqslant3[(x-2)^2+(y-1)^2+(z-a)^2]$,

因为 $x+y+z=1$,所以 $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-a)^2\geqslant\frac{(2+a)^2}{3}$,当且仅当 $x=\frac{4-a}{3},y=\frac{1-a}{3},z=\frac{2a-2}{3}$ 时,等号成立. 因此 $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-a)^2$ 的最小值为 $\frac{(2+a)^2}{3}$.由题设知 $\frac{(2+a)^2}{3}\geqslant\frac{1}{3}$,解得 $a\leqslant-3$ 或 $a\geqslant-1$.

第7期

第3~4版同步周测参考答案

一、选择题

1.C

提示:$i^{2021}=(i^4)^{505}\cdot i=i$.

2.B

提示:$z=\frac{1-i}{i^3}=(1-i)i=1+i$,所以 $\bar{z}=1-i$,所以 $\bar{z}$ 的虚部为 -1.

3.B　4.A　5.B　6.D　7.B　8.B

9.D

10.C

提示:设 $z=x+yi(x,y\in\mathbf{R})$.

由已知,得 $x^2+y^2+i(2yi)\leqslant0$,

即 $x^2+y^2-2y\leqslant0$,即 $x^2+(y-1)^2\leqslant1$.

故选 C.

11.C

提示:$z^2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,z^3=-1,z^4=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,z^5=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,z^6=1$,所以原式 $=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+(-1+\sqrt{3}i)+(-3)+(-2-2\sqrt{3}i)+\left(\frac{5}{2}-\frac{5\sqrt{3}}{2}i\right)+6=3-3\sqrt{3}i=6\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=6\bar{z}$.

12.A

提示:设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$,

所以 $|2z+1|=\sqrt{(2a+1)^2+4b^2}$,

$|z-i|=\sqrt{a^2+(b-1)^2}$,

所以 $\sqrt{(2a+1)^2+4b^2}=\sqrt{a^2+(b-1)^2}$,

整理得 $a^2+b^2+\frac{4}{3}a+\frac{2}{3}b=0$,

所以 z 对应的点的轨迹是圆.

故选 A.

二、填空题

13.$\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$

14.5,2

15.1

提示:复数 z_1 和 z_2 在复平面内对应的点 A 的坐标为 $(1,1)$,B 的坐标为 $(-1,1)$,所以 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\times2\times1=1$.

16.-1

提示:因为 $x+\frac{1}{x}=-1$,所以 $x^2+x+1=0$.

所以 $x=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$,所以 $x^3=1$.

因为 $2020=3\times673+1$,所以 $x^{2020}=x$,

所以 $x^{2020}+\frac{1}{x^{2020}}=x+\frac{1}{x}=-1$.

三、解答题

17.**解**:(1)$\frac{1-\sqrt{3}i}{(\sqrt{3}+i)^2}=\frac{1-\sqrt{3}i}{2+2\sqrt{3}i}$

$=\frac{(1-\sqrt{3}i)^2}{2(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)}$

$=-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i$.

(2)$\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^3(4+5i)}{(5-4i)(1-i)}$

$=\frac{2\sqrt{2}(1+i)^2(1+i)(4+5i)}{(5-4i)(1-i)}$

$=\frac{2\sqrt{2}\cdot2i\cdot2i(4+5i)(5+4i)}{(5-4i)(5+4i)(1-i)(1+i)}$

$=\frac{-8\sqrt{2}\times41i}{41\times2}=-4\sqrt{2}i$.

18.**解**:(1)由题意可得 $A(1,-3)$,$B(0,-1)$,$C(2,4)$,设 $D(x,y)$,

因为四边形 ABCD 是平行四边形,所以 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$,因为 $\overrightarrow{AD}=(x-1,y+3)$,$\overrightarrow{BC}=(2,5)$,所以 $\begin{cases}x-1=2,\\y+3=5.\end{cases}$ 解得 $x=3,y=2$,故 $z_0=3+2i$.

(2)因为 $z=(1-3i)\times m-(2+4i)=(m-2)-(3m+4)i$,

复数 z 表示的点位于第二或第四象限,所以 $\begin{cases}m-2<0,\\3m+4<0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m-2>0,\\3m+4>0,\end{cases}$ 解得 $m<-\frac{4}{3}$ 或 $m>2$.

19.**解**:(1)因为 $z=\cos A+i\sin A$,所以 $z+1=1+\cos A+i\sin A$.

所以 $|z+1|=\sqrt{(1+\cos A)^2+\sin^2A}=\sqrt{2+2\cos A}$.

因为 $|z+1|=1$,所以 $2+2\cos A=1$.所以 $\cos A=-\frac{1}{2}$.又 $0<A<180°$,所以 $A=120°$.

所以 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

所以复数 $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

(2)由正弦定理,得 $a=2R\cdot\sin A,b=2R\cdot\sin B,c=2R\cdot\sin C$(其中 R 为△ABC 外接圆的半径),

所以原式 $=\frac{\sin B-\sin C}{\sin A\cdot\cos(60°+C)}$.

因为 $B=180°-A-C=60°-C$,

所以原式 $=\frac{\sin(60°-C)-\sin C}{\sin120°\cdot\cos(60°+C)}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C-\frac{3}{2}\sin C}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos(60°+C)}=\frac{\cos C-\sqrt{3}\sin C}{\cos(60°+C)}=\frac{2\cos(60°+C)}{\cos(60°+C)}=2$,即 $\frac{b-c}{a\cos(60°+C)}=2$.

20.**解**:因为 $(x+\sqrt{3}i)^3=\log_{\sqrt{2}}\frac{1}{2^4}=-8$,

所以 $\left(\frac{x+\sqrt{3}i}{-2}\right)^3=1$,

所以 $\frac{x+\sqrt{3}i}{-2}=1$ 或 $\frac{x+\sqrt{3}i}{-2}=\omega$ 或 $\frac{x+\sqrt{3}i}{-2}=\bar{\omega}$(其中 $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$).

若 $x+\sqrt{3}i=-2$,则 $x\notin\mathbf{R}$.

若 $x+\sqrt{3}i=-2\omega=1-\sqrt{3}i$,则 $x\notin\mathbf{R}$.

若 $x+\sqrt{3}i=-2\bar{\omega}=1+\sqrt{3}i$,则 $x=1$.

综上可知,存在满足题意的实数 x 且 $x=1$.

21.**解**:依题意得 z_1+z_2 为实数,因为 $z_1+z_2=\frac{3}{a+5}+\frac{2}{1-a}+[(a^2-10)+(2a-5)]i$,

所以 $\begin{cases}a^2+2a-15=0,\\a+5\neq0,\\1-a\neq0.\end{cases}$ 所以 $a=3$.

此时 $z_1=\frac{3}{8}-i,z_2=-1+i$,

即 $\overrightarrow{OZ_1}=\left(\frac{3}{8},-1\right)$,$\overrightarrow{OZ_2}=(-1,1)$.

所以 $\overrightarrow{OZ_1}\cdot\overrightarrow{OZ_2}=\frac{3}{8}\times(-1)+(-1)\times1=-\frac{11}{8}$.

22.**解**:(1)由 $z_1=z_2$,得 $m=\sin\alpha$ 且 $m-\cos\alpha=1$,所以 $\sin\alpha-\cos\alpha=1$,

即 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

因为 $\alpha\in[0,2\pi)$,

所以 $\alpha-\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right)$.

所以 $\alpha-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$ 或 $\alpha-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$,

解得 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 或 $\alpha=\pi$.

(2)①若 $\alpha=\frac{\pi}{2}$,则 $t=i$,$f(t)=1+i+i^2+\cdots+i^{n-1}=\frac{1-i^n}{1-i}$.

故当 $n=4k(k\in\mathbf{N}_+)$时,$f(t)=\frac{1-1}{1-i}=0$;

当 $n=4k+1(k\in\mathbf{N}_+)$时,$f(t)=\frac{1-i}{1-i}=1$;

当 $n=4k+2(k\in\mathbf{N}_+)$时,$f(t)=\frac{1-i^2}{1-i}=\frac{2}{1-i}=1+i$;

当 $n=4k+3(k\in\mathbf{N}_+)$时,$f(t)=\frac{1-i^3}{1-i}=\frac{1+i}{1-i}=i$.

②若 $\alpha=\pi$,则 $t=-1$,$f(t)=1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n-1}$.

故当 $n=2k(k\in\mathbf{N}_+)$时,$f(t)=0$;当 $n=2k+1(k\in\mathbf{N}_+)$时,$f(t)=1$.