第 5 期

第 2~3 版章节测试参考答案

一、选择题

1.D　2.D　3.C　4.B　5.C

6.A

提示:由题意知,$f(x)$在$(0,+\infty)$上为减函数,在 A、B、C、D 四选项中,由基本初等函数性质知,A 在$(0,+\infty)$上是减函数,故选 A.

7.C

8.C

提示:垂直于同一个平面的两条直线平行.

9.C

提示:假设$\frac{a}{b}$,$\frac{b}{c}$,$\frac{c}{a}$的值均大于 1,由 $a>0,b>0,c>0$,得 $a>b,b>c,c>a$,显然矛盾,所以$\frac{a}{b}$,$\frac{b}{c}$,$\frac{c}{a}$的值至少有一个不大于 1.

10.C

提示: 因为 $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$,$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$,$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)$,

依此类推可得:$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}+\frac{1}{110}+\frac{1}{132}+\frac{1}{156}=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{13}\right)$, 所以$\frac{1}{m}=\frac{1}{13}$,$\frac{1}{n}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{1}{20}$,$m=13,n=20$, 即 $1\leqslant x\leqslant 13,1\leqslant y\leqslant 20$. 又 $\frac{x+y+2}{x+1}=1+\frac{y+1}{x+1}$,把$\frac{y+1}{x+1}$看成点$(x,y)$,$(-1,-1)$连线的斜率,结合 $m\leqslant n,m,n\in\mathbf{N}_+$,在满足条件的点中,$(13,1)$,$(-1,-1)$连线的斜率最小,为$\frac{1+1}{13+1}=\frac{1}{7}$, 故$\frac{x+y+2}{x+1}$最小值为$\frac{8}{7}$.故选 C.

11.A

12.C

二、填空题

13.同角的补角相等

14.$(-\infty,1]$

提示:由已知,得 $A=\{x|x<1$ 或 $x\geqslant 2\}$,$B=\{x|x<a\}$.因为 p 是 q 的必要不充分条件,所以 $B\subsetneqq A$,可得 $a\leqslant 1$.故实数 a 的取值范围是$(-\infty,1]$.

15.$\frac{a^3}{8}$

16.$\frac{1}{504}$

三、解答题

17.**解**:$f(a)+f(c)>2f(b)$.

证明如下: 因为 a,b, c 是互不相等的正数,所以 $a+c>2\sqrt{ac}$.

因为 $b^2=ac$,

所以 $ac+2(a+c)>b^2+4b$.

即 $ac+2(a+c)+4>b^2+4b+4$.

从而$(a+2)(c+2)>(b+2)^2$.

因为 $f(x)=\log_2x$ 是增函数,

所以 $\log_2[(a+2)(c+2)]>\log_2(b+2)^2$.

即 $\log_2(a+2)+\log_2(c+2)>2\log_2(b+2)$.

故 $f(a)+f(c)>2f(b)$.

18.**解**:根据类比猜想得出 $S^2_{AA_1C_1C}=S^2_{ABB_1A_1}+S^2_{BCC_1B_1}-2S_{ABB_1A_1}\cdot S_{BCC_1B_1}\cdot\cos\theta$,其中 θ 为侧面 ABB_1A_1 与 BCC_1B_1 所成的二面角的平面角.

证明如下:作斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的直截面 DEF,D,E,F 分别在棱 AA_1,CC_1,BB_1 上,则$\angle DFE$ 为平面 ABB_1A_1 与平面 BCC_1B_1 所成的角,设为 θ.在$\triangle DEF$ 中有余弦定理:$DE^2=DF^2+EF^2-2DF\cdot EF\cos\theta$,

等式左右两边同乘以 AA_1^2,得

$DE^2\cdot AA_1^2=DF^2\cdot AA_1^2+EF^2\cdot AA_1^2-2DF\cdot AA_1\cdot EF\cdot AA_1\cos\theta$,

即 $S^2_{AA_1C_1C}=S^2_{ABB_1A_1}+S^2_{BCC_1B_1}-2S_{ABB_1A_1}\cdot S_{BCC_1B_1}\cdot\cos\theta$.

19.**证明**:(1)要证 $\sqrt{a_1}+\sqrt{a_3}<2\sqrt{a_2}$,只要证 $a_1+a_3+2\sqrt{a_1a_3}<4a_2$,

因为数列$\{a_n\}$是等差数列,所以 $a_1+a_3=2a_2$,只要证 $\sqrt{a_1a_3}<a_2$,只要证 $a_1a_3<a_2^2=\left(\frac{a_1+a_3}{2}\right)^2$.

因为数列$\{a_n\}$各项均为正数,所以 $a_1a_3<a_2^2=\left(\frac{a_1+a_3}{2}\right)^2$ 成立,所以 $\sqrt{a_1}+\sqrt{a_3}<2\sqrt{a_2}$.

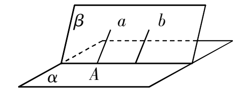
(2)假设 $1-a_n,1-a_{n+1},1-a_{n+2}$ 能够成等比数列,则$(1-a_{n+1})^2=(1-a_n)(1-a_{n+2})$,

即 $1-2a_{n+1}+a^2_{n+1}=1+a_na_{n+2}-(a_n+a_{n+2})$,因为数列$\{a_n\}$是等比数列,所以 $a^2_{n+1}=a_na_{n+2}$,

所以 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$,所以数列$\{a_n\}$是等差数列,所以数列$\{a_n\}$是常数列,这与已知矛盾,

故假设不成立,所以 $1-a_n,1-a_{n+1},1-a_{n+2}$不可能成等比数列.

20.**证明**:原命题可用数学语言表述为:已知 $a/\!/b$,直线 $a\cap$平面 $\alpha=A$,如图所示,则直线 b 和平面 α 相交.



(第20题图)

假设 b 与平面 α 不相交,

则 $b\subset\alpha$,或 $b/\!/\alpha$.

(1)若 $b\subset\alpha$,因为 $a/\!/b$,$a\not\subset\alpha$,

所以 $a/\!/\alpha$,这与 $a\cap\alpha=A$ 相矛盾.

(2)若 $b/\!/\alpha$,因为 $a/\!/b$,所以 a 和 b 可确定一个平面 β,显然平面 α 与平面 β 相交.

设 $\alpha\cap\beta=c$,因为 $b/\!/\alpha$,所以 $b/\!/c$.

又 $a/\!/b$,所以 $a/\!/c$,且 $a\not\subset\alpha$,$c\subset\alpha$.

故 $a/\!/\alpha$,这与 $a\cap\alpha=A$ 矛盾.

根据(1)(2),可知假设不成立.故直线 b 与平面 α 相交,原命题得证.

21.**解**:$\triangle ABC$ 是锐角三角形.

因为 $c^n=a^n+b^n(n>2)$,所以 $c>a,c>b$,由 c 是$\triangle ABC$ 的最大边,所以要证$\triangle ABC$ 是锐角三角形,只需证角 C 为锐角,即证 $\cos C>0$.

因为 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$,

所以要证 $\cos C>0$,

只要证 $a^2+b^2>c^2$,　①

注意到条件:$a^n+b^n=c^n$,

于是将①等价变形为:

$(a^2+b^2)c^{n-2}>c^n$.　②

因为 $c>a,c>b,n>2$,

所以 $c^{n-2}>a^{n-2},c^{n-2}>b^{n-2}$,

即 $c^{n-2}-a^{n-2}>0,c^{n-2}-b^{n-2}>0$,

从而 $(a^2+b^2)c^{n-2}-c^n=(a^2+b^2)c^{n-2}-a^n-b^n=a^2(c^{n-2}-a^{n-2})+b^2(c^{n-2}-b^{n-2})>0$,

这说明②式成立,从而①式也成立.

故 $\cos C>0$,C 是锐角, 所以$\triangle ABC$ 为锐角三角形.

22.(1)**解**:由于$[(x-1)+(y+1)+(z+1)]^2$

$=(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2+2[(x-1)\cdot(y+1)+(y+1)(z+1)+(z+1)(x-1)]$

$\leqslant 3[(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2]$,

因为 $x+y+z=1$,

所以$(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2\geqslant\frac{4}{3}$,

当且仅当 $x=\frac{5}{3}$,$y=-\frac{1}{3}$,$z=-\frac{1}{3}$时,等号成立. 所以 $(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2$ 的最小值为$\frac{4}{3}$.

(2)**证明**:由于$[(x-2)+(y-1)+(z-a)]^2=(x-2)^2+(y-1)^2+(z-a)^2+2[(x-2)\cdot(y-1)+(y-1)(z-a)+(z-a)(x-2)]$

$\leqslant 3[(x-2)^2+(y-1)^2+(z-a)^2]$,

因为 $x+y+z=1$,所以$(x-2)^2+(y-1)^2+(z-a)^2\geqslant\frac{(2+a)^2}{3}$,当且仅当 $x=\frac{4-a}{3}$,$y=\frac{1-a}{3}$,$z=\frac{2a-2}{3}$ 时,等号成立.

因此$(x-2)^2+(y-1)^2+(z-a)^2$ 的最小值为$\frac{(2+a)^2}{3}$. 由题设知$\frac{(2+a)^2}{3}\geqslant\frac{1}{3}$,解得 $a\leqslant -3$ 或 $a\geqslant -1$.

第 8 期

第 3~4 版章节测试参考答案

一、选择题

1.C

2.D

3.C

提示:结构图除了可以表示结构设置的层次之外,还可以表示事物的分类;而流程图表示的是时间先后顺序.

4.A

5.A

提示: 题中结构图表达的是从属关系.

6.A

提示:由组织结构图,可知科研处由业务副校长直接领导.

7.D

提示:根据已知可得该结构图为证明方法的结构图:因为由已知到可知,进而得到结论的是综合法,

由未知到需知,进而找到与已知的关系为分析法,故①②两条流程线与"推理与证明"中的思维方法匹配的是①–综合法,②–分析法,故选 D.

8.B

提示:由流程图可知加工零件有三道工序:粗加工、返修加工和精加工,每道工序完成都要对产品进行检验,粗加工的合格品进入精加工,不合格品进入返修加工;返修加工的合格品进入精加工,不合格品作为废品处理;精加工的合格品为成品,不合格品为废品.由上可知一件成品至少要经过粗加工、检验、精加工、最后检验四道程序.

9.B

提示:由流程图知 $f(x)$为有零点的奇函数,A,C 中函数 $f(x)$无零点;D 中函数 $f(x)$为偶函数;B 中函数 $f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$满足 $f(0)=0$,且 $f(-x)=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}=-\ln(\sqrt{x^2+1}-x)=-f(x)$,故选 B.

10.C

提示:要清楚数据拟合的基本过程.

11.A

12.C

提示:由题意知,要使所用的时间最少,所用时间为 5+13+8=26(分钟),故选 C.

二、填空题

13.结构图

提示: 直线与圆有三种位置关系:相交,相切,相离.这三种关系之间是并列关系,都从属于直线与圆的位置关系,故宜用结构图表示.

14.副班长,5,副班长

提示:由题中结构图,可知"班长"的"下位"是"副班长";"副班长"的"下位"为"生活委员""学习委员""文娱委员""体育委员""纪律委员",共 5 个;"学习委员"的"上位"是"副班长".

15.20kg

提示:由题意可得,流程图的功能是计算并输出 $c=\begin{cases}0.5w,w\leqslant 50,\\25+(w-50)\times 0.8,w>50\end{cases}$的值,

由 $c=10$, 可得$\begin{cases}w\leqslant 50,\\10=0.5w,\end{cases}$或$\begin{cases}w>50,\\10=25+(w-50)\times 0.8,\end{cases}$解得 $w=20$.

16.(1)3^{m-1};(2)3

提示:(1)由③知 $f(m,1)=3f(m-1,1)=3^2f(m-2,1)=\cdots=3^{m-1}f(1,1)=3^{m-1}$.

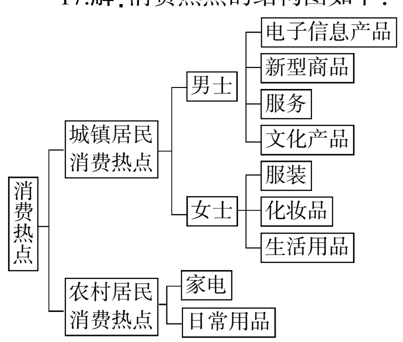
(2)由②知 $f(m,n)=f(m,n-1)+3=f(m,n-2)+3\times 2=\cdots=f(m,1)+3(n-1)=3^{m-1}+3(n-1)$,

令 $30=3^{m-1}+3(n-1)$,结合 m,n 为正整数解得$\begin{cases}m=2,\\n=10,\end{cases}$或$\begin{cases}m=3,\\n=8,\end{cases}$或$\begin{cases}m=4,\\n=2.\end{cases}$

所以满足 $f(m,n)=30$ 的平面上的点(m,n)有 3 个.

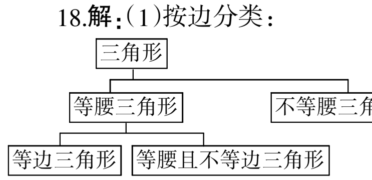
三、解答题

17.**解**:消费热点的结构图如下:



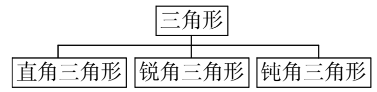
(第 17 题图)

18.**解**:(1)按边分类:



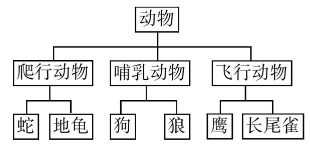
(第 18 题图 1)

(2)按角分类:



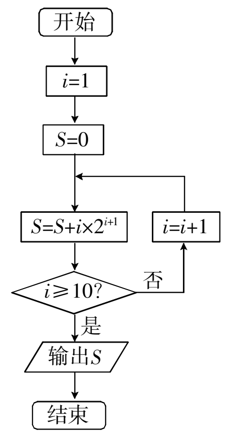
(第 18 题图 2)

19.**解**:结构图为:



(第 19 题图)

20.**解**:程序框图如图:



(第 20 题图)

21.**解**:若将打印出来的数列的前 5 项依次记为 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,

则 $a_1=1$,$a_2=a_1+3=1+3=4$,$a_3=a_2+3=4+3=7$,$a_4=a_3+3=7+3=10$,$a_5=a_4+3=10+3=13$.

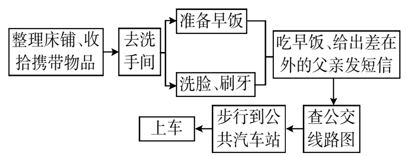
于是得到数列的递推公式

$\begin{cases}a_1=1,\\a_{n+1}=a_n+3(n\in\mathbf{N}_+).\end{cases}$

因为 $a_{n+1}-a_n=3(n\in\mathbf{N}_+)$,

所以这个数列是等差数列.

22.**解**:流程图如图所示:



(第 22 题图)

所用时间为 8+2+15+10+5+10=50(分钟),正好赶上公共汽车.(答案不唯一)

第 6 期

第 3~4 版同步周测参考答案

一、选择题

1.C

提示：$i^{2021}=(i^4)^{505}\cdot i=i$.

2.B

提示：$z=\frac{1-i}{i^3}=(1-i)i=1+i$，所以$\bar{z}=1-i$,所以$\bar{z}$的虚部为$-1$.

3.B　4.A　5.B　6.D　7.B　8.B

9.D

10.C

提示：设 $z=x+yi(x,y\in\mathbf{R})$.

由已知,得 $x^2+y^2+i(2yi)\leqslant 0$,

即 $x^2+y^2-2y\leqslant 0$,即 $x^2+(y-1)^2\leqslant 1$.

故选 C.

11.C

提示：$z^2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$,$z^3=-1$,$z^4=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$,$z^5=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$,$z^6=1$,所以原式$=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+(-1+\sqrt{3}i)+(-3)+(-2-2\sqrt{3}i)+\left(\frac{5}{2}-\frac{5\sqrt{3}}{2}i\right)+6=3-3\sqrt{3}i=6\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=6\bar{z}$.

12.A

提示：设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$,

所以$|2z+1|=\sqrt{(2a+1)^2+4b^2}$,

$|z-i|=\sqrt{a^2+(b-1)^2}$,

所以$\sqrt{(2a+1)^2+4b^2}=\sqrt{a^2+(b-1)^2}$,

整理得 $a^2+b^2+\frac{4}{3}a+\frac{2}{3}b=0$,

所以 z 对应的点的轨迹是圆.

故选 A.

二、填空题

13.$\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$

14.5,2

15.1

提示：复数 z_1 和 z_2 在复平面内对应的点 A 的坐标为(1,1),B 的坐标为(-1,1),所以 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\times 2\times 1=1$.

16.-1

提示：因为 $x+\frac{1}{x}=-1$,所以 $x^2+x+1=0$.

所以 $x=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$,所以 $x^3=1$.

因为 $2020=3\times 673+1$,所以 $x^{2020}=x$,

所以 $x^{2020}+\frac{1}{x^{2020}}=x+\frac{1}{x}=-1$.

三、解答题

17.**解**：(1)$\frac{1-\sqrt{3}i}{(\sqrt{3}+i)^2}=\frac{1-\sqrt{3}i}{2+2\sqrt{3}i}=\frac{(1-\sqrt{3}i)^2}{2(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)}=-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i$.

(2)$\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^3(4+5i)}{(5-4i)(1-i)}$

$=\frac{2\sqrt{2}(1+i)^2(1+i)(4+5i)}{(5-4i)(1-i)}$

$=\frac{2\sqrt{2}\cdot 2i\cdot 2i(4+5i)(5+4i)}{(5-4i)(5+4i)(1-i)(1+i)}$

$=\frac{-8\sqrt{2}\times 41i}{41\times 2}=-4\sqrt{2}i$.

18.**解**：(1)由题意可得 $A(1,-3)$,$B(0,-1)$,$C(2,4)$,设 $D(x,y)$,

因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形,所以$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$,因为$\overrightarrow{AD}=(x-1,y+3)$,$\overrightarrow{BC}=(2,5)$,所以$\begin{cases}x-1=2,\\y+3=5.\end{cases}$解得 $x=3$,$y=2$,故 $z_0=3+2i$.

(2)因为 $z=(1-3i)\times m-(2+4i)=(m-2)-(3m+4)i$,

复数 z 表示的点位于第二或第四象限,所以$\begin{cases}m-2<0,\\3m+4<0,\end{cases}$或$\begin{cases}m-2>0,\\3m+4>0,\end{cases}$解得 $m<-\frac{4}{3}$或 $m>2$.

19.**解**：(1)因为 $z=\cos A+i\sin A$,所以 $z+1=1+\cos A+i\sin A$.

所以 $|z+1|=\sqrt{(1+\cos A)^2+\sin^2 A}=\sqrt{2+2\cos A}$.

因为$|z+1|=1$,所以 $2+2\cos A=1$.所以 $\cos A=-\frac{1}{2}$.又 $0<A<180°$,所以 $A=120°$.

所以 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

所以复数 $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

(2)由正弦定理,得 $a=2R\cdot\sin A$,$b=2R\cdot\sin B$,$c=2R\cdot\sin C$(其中 R 为$\triangle ABC$外接圆的半径),

所以原式$=\frac{\sin B-\sin C}{\sin A\cdot\cos(60°+C)}$.

因为 $B=180°-A-C=60°-C$,

所以原式$=\frac{\sin(60°-C)-\sin C}{\sin 120°\cdot\cos(60°+C)}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C-\frac{3}{2}\sin C}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos(60°+C)}=\frac{\cos C-\sqrt{3}\sin C}{\cos(60°+C)}=\frac{2\cos(60°+C)}{\cos(60°+C)}=2$,

即$\frac{b-c}{a\cos(60°+C)}$的值为 2.

20.**解**：因为$(x+\sqrt{3}i)^3=\log_{\sqrt{2}}\frac{1}{2^4}=-8$,

所以$\left(\frac{x+\sqrt{3}i}{-2}\right)^3=1$,

所以 $\frac{x+\sqrt{3}i}{-2}=1$ 或 $\frac{x+\sqrt{3}i}{-2}=\omega$ 或$\frac{x+\sqrt{3}i}{-2}=\bar{\omega}$$\left(其中\ \omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$.

若 $x+\sqrt{3}i=-2$,则 $x\notin\mathbf{R}$.

若 $x+\sqrt{3}i=-2\omega=1-\sqrt{3}i$,则 $x\notin\mathbf{R}$.

若 $x+\sqrt{3}i=-2\bar{\omega}=1+\sqrt{3}i$,则 $x=1$.

综上可知,存在满足题意的实数 x 且 $x=1$.

21.**解**：依题意得 z_1+z_2 为实数,因为 $z_1+z_2=\frac{3}{a+5}+\frac{2}{1-a}+[(a^2-10)+(2a-5)]i$,

所以$\begin{cases}a^2+2a-15=0,\\a+5\neq 0,\\1-a\neq 0.\end{cases}$　所以 $a=3$.

此时 $z_1=\frac{3}{8}-i$,$z_2=-1+i$,

即$\overrightarrow{OZ_1}=\left(\frac{3}{8},-1\right)$,$\overrightarrow{OZ_2}=(-1,1)$.

所以$\overrightarrow{OZ_1}\cdot\overrightarrow{OZ_2}=\frac{3}{8}\times(-1)+(-1)\times 1=-\frac{11}{8}$.

22.**解**：(1)由 $z_1=z_2$,

得 $m=\sin\alpha$ 且 $m-\cos\alpha=1$,

所以 $\sin\alpha-\cos\alpha=1$,

即 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

因为 $\alpha\in[0,2\pi)$,

所以 $\alpha-\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right)$.

所以 $\alpha-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$或 $\alpha-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$,

解得 $\alpha=\frac{\pi}{2}$或 $\alpha=\pi$.

(2)①若 $\alpha=\frac{\pi}{2}$,则 $t=i$,$f(t)=1+i+i^2+\cdots+i^{n-1}=\frac{1-i^n}{1-i}$.

故当 $n=4k(k\in\mathbf{N}_+)$时,$f(t)=\frac{1-1}{1-i}=0$;

当 $n=4k+1(k\in\mathbf{N}_+)$时,$f(t)=\frac{1-i}{1-i}=1$;

当 $n=4k+2(k\in\mathbf{N}_+)$时,$f(t)=\frac{1-i^2}{1-i}=\frac{2}{1-i}=1+i$;

当 $n=4k+3(k\in\mathbf{N}_+)$时,$f(t)=\frac{1-i^3}{1-i}=\frac{1+i}{1-i}=i$.

②若 $\alpha=\pi$,则 $t=-1$,$f(t)=1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n-1}$.

故当 $n=2k(k\in\mathbf{N}_+)$时,$f(t)=0$;当 $n=2k+1(k\in\mathbf{N}_+)$时,$f(t)=1$.

第 7 期

第 2~3 版章节测试参考答案

一、选择题

1.D　2.D　3.C　4.B

5.A

提示：由$\frac{1-i}{1+i}=-i$,得$\overrightarrow{OA}=(0,-1)$,$\overrightarrow{OB}=(1,-\sqrt{3})$.

所以$|\overrightarrow{OA}|=1$,$|\overrightarrow{OB}|=2$,$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\sqrt{3}$.

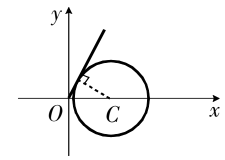
所以$\cos\angle AOB=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

又 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$,所以 $\theta=\frac{\pi}{6}$.

6.A　7.B

8.D

提示：因为$|(x-2)+yi|=\sqrt{3}$,所以$(x-2)^2+y^2=3$,所以点(x,y)在以 $C(2,0)$为圆心,以$\sqrt{3}$为半径的圆上,如图,由平面几何知识知$-\sqrt{3}\leqslant\frac{y}{x}\leqslant\sqrt{3}$.



(第 8 题图)

9.B

10.B

提示：$z*\bar{z}=\frac{|z|+|\bar{z}|}{2}=\frac{2\sqrt{a^2+b^2}}{2}=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(a+b)^2-2ab}$,又因为 $ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$,所以$-ab\geqslant-\frac{9}{4}$,$z*\bar{z}\geqslant\sqrt{9-2\times\frac{9}{4}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

11.C

提示：由题意知,$z=x+yi$,所以 $z-i=x+(y-1)i$.

因为$|z-i|=1$,所以$\sqrt{x^2+(y-1)^2}=1$,所以 $x^2+(y-1)^2=1$,故选 C.

12.D

提示：由条件知 $A=\{-2,-1,0,1,2\}$,

若 $z\in\mathbf{R}$,则 $a^2-a-2=0$,所以 $a=-1$或 2,所以 $p_1=\frac{2}{5}$;

若 $z=0$,则$\begin{cases}a^2-1=0,\\a^2-a-2=0,\end{cases}$所以 $a=-1$,所以 $p_3=\frac{1}{5}$;

若 z 为虚数,则 $a^2-a-2\neq 0$,

所以 $a\neq-1$ 且 $a\neq 2$,所以 $p_2=\frac{3}{5}$;

若 z 为纯虚数,则$\begin{cases}a^2-1=0,\\a^2-a-2\neq 0,\end{cases}$所以 $a=1$,所以 $p_4=\frac{1}{5}$.

所以 $p_3=p_4<p_1<p_2$.

二、填空题

13.2　14.$\frac{9}{2}$

15.24

16.①②

提示：当 z 为纯虚数时,z 与$\bar{z}$对应的点均在虚轴上,故 P_1,O,P_2 三点共线,①正确;显然③错误;当 $z=0$ 时,$\overrightarrow{OP_1}$,$\overrightarrow{OP_2}$对应的复数均为 0,此时有$\overrightarrow{OP_1}=\overrightarrow{OP_2}$,故②正确,④错误.

三、解答题

17.**解**：$z=\frac{(1+i)^2+3(1-i)}{2+i}=\frac{2i+3(1-i)}{2+i}=\frac{3-i}{2+i}=\frac{(3-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=1-i$,

将 $z=1-i$ 代入 $z^2+az+b=1+i$,得$(1-i)^2+a(1-i)+b=1+i$,

即$(a+b)-(a+2)i=1+i$,

所以$\begin{cases}a+b=1,\\-(a+2)=1.\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-3,\\b=4.\end{cases}$

18.**解**：设原方程的一个实根为 $t=t_0$,则有$(t_0^2+2t_0+2xy)+(t_0+x-y)i=0$.

根据复数相等的充要条件有

$\begin{cases}t_0^2+2t_0+2xy=0, & ①\\t_0+x-y=0, & ②\end{cases}$

把②代入①中消去 t_0,得$(y-x)^2+2(y-x)+2xy=0$,

即$(x-1)^2+(y+1)^2=2$.

故所求点的轨迹方程为 $(x-1)^2+(y+1)^2=2$.

19.**解**：(1)设 $z=x+yi(x,y\in\mathbf{R}$ 且 $y\neq 0)$.

由$|2z+5|=|z+10|$,

得$(2x+5)^2+(2y)^2=(x+10)^2+y^2$.

化简得 $x^2+y^2=25$.所以$|z|=5$.

(2)若存在实数 m,使得$\frac{z}{m}+\frac{m}{z}=\frac{x+yi}{m}+\frac{m}{x+yi}=\left(\frac{x}{m}+\frac{mx}{x^2+y^2}\right)+\left(\frac{y}{m}-\frac{my}{x^2+y^2}\right)i$为实数,则$\frac{y}{m}-\frac{my}{x^2+y^2}=0$.

又 $y\neq 0$,且 $x^2+y^2=25$,

所以$\frac{1}{m}-\frac{m}{25}=0$,解得 $m=\pm 5$.

所以存在 $m=\pm 5$ 满足要求.

(3)$(1-2i)z=(1-2i)(x+yi)=(x+2y)+(y-2x)i$.

依题意,得 $x+2y=y-2x$,即 $y=-3x$.

代入 $x^2+y^2=25$,

解得$\begin{cases}x=\frac{\sqrt{10}}{2},\\y=-\frac{3\sqrt{10}}{2},\end{cases}$或$\begin{cases}x=-\frac{\sqrt{10}}{2},\\y=\frac{3\sqrt{10}}{2}.\end{cases}$

所以 $z=\frac{\sqrt{10}}{2}-\frac{3\sqrt{10}}{2}i$,

或 $z=-\frac{\sqrt{10}}{2}+\frac{3\sqrt{10}}{2}i$.

20.**解**：(1)因为 $z_0=\lg(a^2-4a+4)+(a^2-3a+2)i$ 为纯虚数,

所以$\begin{cases}\lg(a^2-4a+4)=0,\\a^2-3a+2\neq 0\end{cases}$

即$\begin{cases}a^2-4a+4=1,\\a^2-3a+2\neq 0,\end{cases}$解得 $a=3$.

此时 $z_0=2i$,由韦达定理得

$\begin{cases}z_0+b=3+2i,\\z_0b=6i,\end{cases}$

解得 $b=3$.

(2)复数 z 满足 $1\leqslant|z|\leqslant|a+bi|$,即 $1\leqslant|z|\leqslant 3\sqrt{2}$,

不等式$|z|\geqslant 1$的解集是圆$|z|=1$的外部(包括边界)所有点组成的集合,

不等式$|z|\leqslant 3\sqrt{2}$的解集是圆$|z|=3\sqrt{2}$的内部(包括边界)所有点组成的集合,

所以所求点 Z 的集合是以原点为圆心,以 1 和 $3\sqrt{2}$ 为半径的两个圆所夹的圆环,包括边界.

则 $S_{圆环}=\pi[(3\sqrt{2})^2-1^2]=17\pi$.

21.(1)**解**：设 $z_1=a+bi(a,b\in\mathbf{R}$ 且$b\neq 0)$,则 $z_2=z_1+\frac{1}{z_1}=a+bi+\frac{1}{a+bi}=\left(a+\frac{a}{a^2+b^2}\right)+\left(b-\frac{b}{a^2+b^2}\right)i$.

因为 z_2 是实数,$b\neq 0$,于是有 $a^2+b^2=1$,即$|z_1|=1$,还可得 $z_2=2a$.

由$-1\leqslant z_2\leqslant 1$,得$-1\leqslant 2a\leqslant 1$,解得$-\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$,即 z_1 的实部的取值范围是$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

(2)**证明**：$\omega=\frac{1-z_1}{1+z_1}=\frac{1-a-bi}{1+a+bi}=\frac{1-a^2-b^2-2bi}{(1+a)^2+b^2}=-\frac{b}{a+1}i$.

因为 $a\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$,$b\neq 0$,所以 ω 为纯虚数.

22.**解**：(1)由 z_1,z_2,m 是实数,得 $\alpha+\beta=-z_1$,$\alpha\beta=z_2+m$.

故$|\alpha-\beta|=2\sqrt{7}\Rightarrow(\alpha-\beta)^2=28\Rightarrow(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=28\Rightarrow z_1^2-4z_2-4m=28\Rightarrow 16-4m=28$,解得 $m=-3$.

(2)由 z_1,z_2,m 是复数,得$|\alpha-\beta|=2\sqrt{7}\Rightarrow|\alpha-\beta|^2=28\Rightarrow|(\alpha-\beta)^2|=28\Rightarrow|(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta|=28\Rightarrow|z_1^2-4z_2-4m|=28$.

设 $m=a+bi$ $(a,b\in\mathbf{R})$,则 $z_1^2-4z_2-4m=16+20i-4(a+bi)=(16-4a)+(20-4b)i=4[(4-a)+(5-b)i]$.

所以$|4[(4-a)+(5-b)i]|=28\Rightarrow|(4-a)+(5-b)i|=7\Rightarrow(a-4)^2+(b-5)^2=7^2$.

故复数 m 表示的点 $M(a,b)$在圆$(a-4)^2+(b-5)^2=7^2$上,可知点 M 与原点的距离的最大值为 $7+\sqrt{41}$,最小值为 $7-\sqrt{41}$,所以$|m|$的最大值为 $7+\sqrt{41}$,最小值为 $7-\sqrt{41}$.