

第 1 期

第 3~4 版同步周测参考答案

一、选择题

1.A
2.C

提示:根据题意知,每一项的冠军有 5 种可能,则三项冠军的不同种数是 $5 \times 5 \times 5 = 5^3$.

3.C

提示:根据分类加法计数原理与分步乘法计数原理可得不同的执行路径条数是 $(2+2+3) \times (4+3) = 49$.

4.C

提示: $m = A_3^2 = 20, n = C_3^2 = 10$,故选 C.

5.B

6.C

提示:依次安排甲场馆、乙场馆、丙场馆,根据分步乘法计数原理,不同的安排方法共有 $C_3^1 \times C_2^2 \times C_3^1 = 60$ (种).

7.A

提示:由组合数的性质 2,得原式 $= (C_n^{m+1} + C_n^m) + (C_n^m + C_n^{m-1}) = C_{n+1}^{m+1} + C_{n+1}^m = C_{n+2}^{m+1}$.

8.B

提示:①甲同学选择牛,则选法有 $1 \times 2 \times 10 = 20$ (种);②甲同学选择马,则选法有 $1 \times 3 \times 10 = 30$ (种).所以不同的选法种数为 $20 + 30 = 50$.

9.C

提示:先排 5 个独唱节目,然后在 5 个空档(不包括第一个空档)中插入 3 个合唱节目,故共有 $A_5^3 \times A_3^3$ 种不同的排法.

10.D

提示:若甲景区最后旅游,则乙、丙、丁三个景区任意排,有 $A_3^3 = 6$ 种排法;若丙景区最后旅游,有 $A_3^2 \times A_2^2 = 4$ 种排法,故共有 $6 + 4 = 10$ 种不同的旅游方法.

11.D

提示:当 $a_3 = 1$ 时,从剩下的 4 个数字中选 2 个放在 a_1, a_2 位置,则 a_1, a_2 位置确定,有 $C_4^2 = 6$ 种结果;当 $a_3 = 2$ 时,同理,有 6 种结果;当 $a_3 = 3$ 时,4 和 5 只能放在 a_2 或 a_1 位置,余下的 2 个数字在 a_2 或 a_1 位置,有 $A_2^2 \times A_2^2 = 4$ 种结果.综上可知共有 $6 + 6 + 4 = 16$ 个满足条件的排列.

12.C

提示:① C_6^2 是 6 间电脑室只开放 2 间的方案数,错误;② 6 间电脑室是否开放有 2 种方案,其中都不开放和只开放 1 间有 $C_6^0 + C_6^1 = 7$ 种方案,则 $2^6 - 7$ 表示至少开放 2 间,正确;③ 因为 $C_6^2 = C_6^4$,所以 $C_6^2 + 2C_6^4 + C_6^5 + C_6^6 = C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 + C_6^6$,表示电脑室开放 2 间、3 间、4 间、5 间、6 间的方案种数之和,正确.故②与③正确.

所以恰有 2 次取到红球的概率为

$$P(X=2) = C_3^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{80}{243}$$

20.解:(1)已知 $a_1 = 1$,要使 $X = 3$,只需后四位数字中出现 2 个 0 和 2 个 1.

$$\text{所以 } P(X=3) = C_4^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{27}$$

(2)

X 的取值可以是 1, 2, 3, 4, 5.

$$P(X=1) = C_5^0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{81}$$

$$P(X=2) = C_5^1 \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{8}{81}$$

$$P(X=3) = C_5^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

$$P(X=4) = C_5^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \frac{1}{3} = \frac{32}{81}$$

$$P(X=5) = C_5^4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$$

所以 X 的分布列为

X	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{16}{81}$

21.解:(1)甲连胜四场只能是前四场全胜, $P_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$.

(2)根据赛制,至少需要进行四场比赛,至多需要进行五场比赛,比赛四场结束,共有三种情况:甲连胜四场的概率为 $\frac{1}{16}$,乙连胜四场的概率为 $\frac{1}{16}$,丙上场后连胜三场的概率为 $\frac{1}{8}$,所以需要

要进行第五场比赛的概率为 $P_2 = 1 - \frac{1}{16} - \frac{1}{16} - \frac{1}{8} = \frac{3}{4}$.

(3)丙最终获胜,有两种情况:比赛四场结束且丙最终获胜的概率为 $\frac{1}{8}$;比赛五场结束且丙最终获胜,则从第二场开始的四场比赛按丙的胜、负、轮空结果有三种情况:胜胜负胜,胜负空胜,负空胜胜,概率分别为 $\frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}$,所以丙最终获胜的概率 $P_3 = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{7}{16}$.

22.解:(1) $X = 2$ 就是 10:10 平后,两人又打了 2 个球该局比赛结束,则这 2 个球均由甲得分,或者均由乙得分.因此 $P(X=2) = 0.5 \times 0.4 + (1-0.5) \times (1-0.4) = 0.5$.

(2) $X = 4$ 且甲获胜就是 10:10 平后,两人又打了 4 个球该局比赛结束,且这 4 个球的得分情况为:前两球甲、乙各得 1 分,后两球均为甲得分.因此 $P(X=4 \text{ 且甲获胜}) = [0.5 \times (1-0.4) + (1-0.5) \times 0.4] \times 0.5 \times 0.4 = 0.1$.

的概率为 $\frac{1}{5}$.

14. $\frac{1}{6}$

提示:设事件 A 表示“抽到红心 1”,事件 B 表示“抽到红心 2”,事件 C 表示“抽到红心 3”,显然事件 B 与事件 C 互斥.而 $P(B|A) = \frac{1}{12}, P(C|A) = \frac{1}{12}$,所以所求概率 $P = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$.

15. $\frac{11}{27}$

提示:因为 $X \sim B(2, p)$,所以 $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - C_2^0 \cdot (1-p)^2 = \frac{5}{9}$,解得 $p = \frac{1}{3}$.

又 $Y \sim B(4, p)$,所以 $P(Y \geq 2) = 1 - P(Y=0) - P(Y=1) = 1 - C_4^0 \left(\frac{1}{3}\right)^4 - C_4^1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{11}{27}$.

16. $\frac{1}{r-1} \cdot P(A_{k+1}) = \frac{1}{r-1} [1 - P(A_k)]$

提示: A_2 为第 2 次取单恰好是从 1 号店取单,由于每天第 1 次取单都是从 1 号店开始,第 2 次不可能从 1 号店取单,所以 $P(A_2) = 0$.又 A_3 为第 3 次取单恰好是从 1 号店取单,故 $P(A_3) = P(\bar{A}_2 A_3) = P(\bar{A}_2)P(A_3|\bar{A}_2) = [1 - P(A_2)] \cdot \frac{1}{r-1} = \frac{1}{r-1}$,
 $P(A_{k+1}) = P(\bar{A}_k A_{k+1}) = P(\bar{A}_k)P(A_{k+1}|\bar{A}_k) = [1 - P(A_k)]P(A_{k+1}|\bar{A}_k) = \frac{1}{r-1} [1 - P(A_k)]$.

三、解答题

17.解:分别设 A, B 表示事件“云南干旱”、“广西干旱”,则 $P(A) = 20\%, P(B) = 18\%, P(AB) = 12\%$.

(1) 云南干旱时广西也干旱的概率为 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{12\%}{20\%} = \frac{3}{5}$.

(2) 广西干旱时云南也干旱的概率为 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{12\%}{18\%} = \frac{2}{3}$.

18.解:由已知,得 $P(A) = \frac{C_3^2}{C_3^3} = \frac{1}{2}, P(AB) = \frac{C_1^1}{C_3^3} = \frac{1}{5}$,所以 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{2}{5}$.

19.解:(1) 设“第 i 次取到红球”为事件 $A_i (i=1, 2)$,则恰好取到 1 个红球和 1 个白球可表示为 $A_1 \bar{A}_2 + \bar{A}_1 A_2$,其概率为 $P(A_1 \bar{A}_2 + \bar{A}_1 A_2) = P(A_1 \bar{A}_2) + P(\bar{A}_1 A_2) = \frac{2}{6} \times \frac{4}{5} + \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{8}{15}$.

(2) 采用放回抽样,则每次取到红球的概率 $P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.故连续取 5 次时取到红球的次数 $X \sim B\left(5, \frac{1}{3}\right)$,

第 4 期

第 3~4 版同步周测参考答案

一、选择题

1.A
2.B

提示:由 A, B 相互独立,得 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A) = 0.8$.

3.A

提示:设事件 A 表示“患某种疾病”,设事件 B 表示“血检呈阳性”,则 $P(A) = 0.5\%, P(B|A) = 99\%$,所以患该种疾病且血检呈阳性的概率为 $P(AB) = 0.5\% \times 99\% = 0.495\%$.

4.C

提示:两气象台预报不准确的概率分别为 0.2 与 0.1,且相互独立,所以都不准确的概率为 $0.2 \times 0.1 = 0.02$.

5.D

提示:由题意,得此题不能被他们解出的概率为 $\left(1 - \frac{1}{5}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{2}{5}$,则此题能被他们解出的概率为 $1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$.

6.C

提示: $\{X=3\}$ 表示第 3 次首次测到正品,而前两次都没有测到正品,故其概率是 $\left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \frac{3}{4}$,故选 C.

7.C

提示:未发芽的概率为 0.1, $P = C_3^2 \times 0.1^2 \times 0.9^3 = 0.0729 \approx 0.07$.

9.D

提示:从每箱中抽出一盒是正品的概率为 0.99,三盒都是正品的概率为 0.99^3 ,所以其对立事件“至少有一盒是次品”的概率为 $1 - 0.99^3$.

10.B

提示:设事件 A 表示“第一次抽到理科题”,B 表示“第二次抽到文科题”,C 表示“第三次抽到文科题”,则 $P(A) = \frac{4}{7}, P(ABC) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{35}$,所以 $P(BC|A) = \frac{P(ABC)}{P(A)} = \frac{1}{5}$.

11.D

提示:质点 P 从原点到点 (2, 3) 需向右移两次,向上移三次,故所求概率为 $C_2^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = C_5^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5$,故选 B.

二、填空题

13. $\frac{1}{5}$

提示:甲同学排在第一跑道后,还剩 5 条跑道,则乙同学排在第二跑道

第 2 期
第 3-4 版章节测试参考答案

一、选择题

1. A
2. C
3. C

提示:不同的安排方法共有 $C_3^2 \times A_2^2 = 6$ (种).

4. C

提示:不同的选修方案种数为 $C_4^2 \times C_3^2 = 96$.

5. D

提示: $T_n = C_n^r (x^2)^{n-r} \left(-\frac{1}{x}\right)^r = (-1)^r C_n^r x^{2n-3r}$,
 $r=0, 1, \dots, 6$. 故 x 的次数分别为
12, 9, 6, 3, 0, -3, -6. 结合选项可知选 D.

6. B

提示:由题意,得 $a=C_6^3=20$, $b=C_6^4 \times (-2)=-12$, 则 $\frac{a}{b}=-\frac{5}{3}$.

7. C

提示: x^3y^3 的系数来自因式 $x + \frac{y^2}{x}$ 与 $(x+y)^5$ 的乘积, 故含 x^3y^3 的项为 $x \cdot x^2y^3 \cdot C_5^3 + \frac{y^2}{x} \cdot x^4y \cdot C_5^3 = 15x^3y^3$. 故选 C.

8. C

提示:每个开关有“打开”或“闭合”2 种情况, 则四个开关有 $2^4=16$ 种情况, 其中电路接通可以是 1, 2, 4 闭合, 或 1, 3, 4 闭合, 或 1, 2, 3, 4 闭合, 有 3 种情况, 故电路不通的情况有 $16-3=13$ 种.

9. B

提示:因为 $\frac{n}{(n+1)!} = \frac{n+1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+1)!}$,
 $\frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$,

所以原式 $= \left(1 - \frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2019!} - \frac{1}{2020!}\right) = 1 - \frac{1}{2020!}$.

10. B

提示:将 C, D, E, F 全排列有 A_4^4 种排法, 把老师安排在中间有 1 种排法. 从 A, B 中任选 1 人安排在老师左边有 2 种排法, 剩下的 1 人安排在右边也有 2 种排法, 故共有不同的站法 $A_4^4 \times C_2^1 \times 2 \times 2 = 192$ 种.

11. C

提示:从 12 个顶点中任取 3 个, 有 $C_{12}^3 = 220$ 种取法. 其中不能构成三角形的情况有:①三点在 3 条水平边上, 有 $3C_3^3 = 12$ 种;②三点在 4 条竖直边上, 有 $4C_3^3 = 4$ 种;③三点在大正方形的对角线上, 有 4 种. 故可以构成三角形的组数为 $220-12-4-4=200$.

12. A

提示:因为 $a=C_{20}^0+C_{20}^1 \times 2+C_{20}^2 \times 2^2+\dots+C_{20}^{20} \times 2^{20} = (1+2)^{20} = 3^{20} = 9^{10} = (10-1)^{10} = C_{10}^0 \times$

$10^{10} - C_{10}^1 \times 10^9 + C_{10}^2 \times 10^8 + \dots - C_{10}^{10} \times 10 + C_{10}^{10}$, 所以 a 被 10 除得的余数为 1, 而选项中只有 2021 被 10 除得的余数是 1, 故选 A.

二、填空题

13. 126

提示:从西南角 A 地到东北角 B 地的最短路线即只向右、向上走, 共需 9 步, 其中 5 步向右, 4 步向上, 故共有 $C_9^5 = 126$ 条最短路线.

14. 180

提示:不同的安排情况有 $C_6^2 \times C_3^2 \times C_2^1 = 180$ (种).

15. 80, 122

提示: $a_4 = C_5^4 \times 2^4 = 80$.

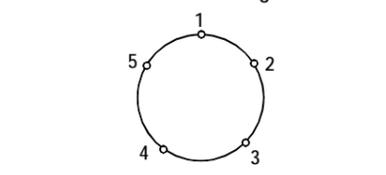
由已知式, 可得 $(1+2)^5 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$, ①

$(1-2)^5 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5$. ②

①-②并整理, 得 $a_1 + a_3 + a_5 = 122$.

16. 24

提示:先让 5 个匣子(分别记作 1, 2, 3, 4, 5)沿着如图所示圆环对号入座, 然后在每个匣子中放入其下方匣子的钥匙, 可得所有匣子相继打开的钥匙的放法数恰与 1, 2, 3, 4, 5 的环状排列数相等, 故钥匙的放法种数为 $\frac{5!}{5} = 24$.



(第 16 题图)

三、解答题

17. 解:(1)由 $A_{2n-1}^n = 140A_n^3$, 得

$$\begin{cases} 2x+1 \geq 4, \\ x \geq 3, \\ x \in \mathbb{N}_+, \\ (2x+1)2x(2x-1)(2x-2) = 140x(x-1)(x-2). \end{cases}$$

化简得 $\begin{cases} x \geq 3, \\ x \in \mathbb{N}_+, \\ 4x^2 - 35x + 69 = 0, \end{cases}$

解得 $x=3$.

(2)由 $C_{n+3}^{n+1} = C_{n+1}^{n+1} + C_n^{n+1} + C_{n-1}^{n+1}$, 得

$$C_{n+3}^{n+3} = C_{n+1}^{n+3} + C_n^{n+3} + C_{n-1}^{n+3},$$

所以 $C_{n+2}^{n+2} + C_{n+1}^{n+2} = C_{n+2}^{n+2} + C_n^{n+2}$, 即 $C_{n+2}^{n+2} = C_n^{n+2}$,

$$\text{即 } n+2 = \frac{n(n-1)}{2},$$

解得 $n=4$.

18. 解:(1)分步完成:

第 1 步, 在 4 个偶数中取 3 个, 有 C_4^3 种取法;

第 2 步, 在 5 个奇数中取 4 个, 有 C_5^4 种取法;

第 3 步, 3 个偶数和 4 个奇数进行排列, 有 A_7^7 种排法.

所以符合题意的七位数的个数是 $C_4^3 \times C_5^4 \times A_7^7 = 100800$.

(2)上述七位数中, 3 个偶数排在一起的个数是 $C_4^3 \times C_5^3 \times A_3^3 \times A_4^4 = 14400$.

(3)在(1)中的七位数中, 3 个偶数排在一起, 4 个奇数也排在一起的个数是 $C_4^3 \times C_4^4 \times A_3^3 \times A_4^4 \times A_3^3 = 5760$.

(4)在(1)中的七位数中, 偶数都不相邻, 可先把 4 个奇数排好, 再将 3 个偶数分别插入 5 个空档, 故满足条件的七位数的个数是 $C_4^4 \times C_5^3 \times A_4^4 \times A_3^3 = 28800$.

19. 解:满足甲、乙两人值班安排在相邻两天的方法共有 $A_2^2 \times A_5^5 = 1440$ 种, 其中满足甲、乙两人值班安排在相邻两天且丙在 10 月 1 日值班的方法共有 $C_5^2 \times A_2^2 \times A_1^1 = 240$ 种, 满足甲、乙两人值班安排在相邻两天且丁在 10 月 7 日值班的方法共有 $C_5^2 \times A_2^2 \times A_1^1 = 240$ 种, 满足甲、乙两人值班安排在相邻两天且丙在 10 月 1 日值班、丁在 10 月 7 日值班的方法共有 $C_4^2 \times A_2^2 \times A_1^1 = 48$ 种, 因此满足题意的方案共有 $1440-2 \times 240+48=1008$ 种.

20. 解:(1)由题设, 得 $2^{n-1}=64$, 解得 $n=7$. 故展开式中二项式系数最大的项为第四项和第五项.

又展开式中第 $r+1$ 项为 $T_{r+1} = C_7^r \times (2x^2)^{7-r} \times \left(-\frac{1}{x}\right)^r = C_7^r \times 2^{7-r} \times (-1)^r \times x^{14-3r}$,

所以展开式中二项式系数最大的项为 $T_4 = -560x^5$, $T_5 = 280x^2$.

(2)由(1)知 $n=7$, 且 $\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^7$ 的展开式中 x^{-1} 项为 $T_6 = -\frac{84}{x}$, x^2 项为 $T_5 = 280x^2$,

所以 $\left(2x + \frac{1}{x^2}\right) \left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^n$ 展开式中的常数项为 $2 \times (-84) + 1 \times 280 = 112$.

21. 解:(1)先选出 1 本, 再从余下的 5 本中选 2 本, 最后余下 3 本全选, 故不同的选法种数是 $C_1^1 C_5^2 C_3^3 = 60$.

(2)平均分成三份, 不同的选法种数是 $\frac{C_6^2 C_2^2 C_2^2}{A_3^3} = 15$.

(3)在(1)分组的基础上将 3 组全排列, 故不同的选法种数是 $C_1^1 C_5^2 C_3^3 A_3^3 = 360$.

(4)在(2)分组的基础上将 3 组全排列, 故不同的选法种数是 $\frac{C_6^2 C_2^2 C_2^2}{A_3^3} \cdot A_3^3 = 90$.

(5)分 3 种情况讨论:
①一人 4 本, 其余 2 人各 1 本, 有 $C_6^4 C_2^1 A_2^2 = 90$ 种分法;

②一人 1 本, 一人 2 本, 一人 3 本, 由(3)知有 360 种分法;

③每人 2 本, 由(4)知有 90 种分法. 故不同的选法种数是 $90+360+90=540$.

22. (1)解:含 x^r 项的系数为 C_{2n-1}^{2n-1} . 又 $(1+x)^{n-1} (1+x)^n$ 的展开式中含 x^r 项的系数为 $C_{n-1}^0 C_n^r + C_{n-1}^1 C_n^{r-1} + \dots + C_{n-1}^{r-1} C_n^1 = C_{2n-1}^r$.

(2)证明:当 $k \in \mathbb{N}_+$ 时, $kC_n^k = k \cdot \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = nC_{n-1}^{k-1}$.

结合(1), 可得 $(C_n^0)^2 + 2(C_n^1)^2 + \dots + n(C_n^n)^2 = nC_{n-1}^0 + nC_{n-1}^1 + \dots + nC_{n-1}^{n-1} = n(C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + \dots + C_{n-1}^{n-1}) = n(C_{n-1}^{n-1} + C_{n-1}^{n-2} + \dots + C_{n-1}^0) = nC_{n-1}^{n-1}$.

第 3 期

第 3-4 版同步周测参考答案

一、选择题

1. D
2. B
3. C

提示:C 的试验结果不能一一列出, 故不是离散型随机变量.

4. D
5. B
6. D

提示:根据离散型随机变量的分布列中概率和为 1 对选项一一验证, 可知选 D.

7. C

提示:由题意, 知 P (恰有 2 颗是白棋子) $= \frac{C_3^2 C_2^1}{C_5^3} = \frac{3}{5}$.

9. D

提示:2 件都是二等品的概率 $p_1 = \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10}$; 2 件中有 1 件是一等品, 1 件是二等品的概率 $p_2 = \frac{C_1^1 C_4^1}{C_5^2} = \frac{3}{5}$, 则 $p_1 +$

$p_2 = \frac{1}{10} + \frac{3}{5} = \frac{7}{10}$. 故选 D.

10. B

提示:依超几何分布的数学模型及计数公式, 也可以用排除法.

11. A

提示:设 10 件产品中存在 n 件次品, 由 $P(X=1) = \frac{16}{45}$, 得 $\frac{C_n^1 C_{10-n}^1}{C_{10}^2} = \frac{16}{45}$, 化简得 $n^2 - 10n + 16 = 0$, 解得 $n=2$, 或 $n=8$. 又次品率不超过 40%, 所以 $n \leq 4$, 故 $n=2$.

12. B

提示:由题设, 可得 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 1$, 由等差数列的性质可得 $a_1 + a_6 = \frac{1}{3}$. 所以 $a_1 a_6 \leq \left(\frac{a_1 + a_6}{2}\right)^2 = \frac{1}{36}$, 所以 $a_1 a_6$ 有最大值 $\frac{1}{36}$, 无最小值.

二、填空题

13. 第一次甲射击未中, 第二次乙射击也未中, 第三次甲射中

14. $\frac{1}{4}$

提示:由已知, 得 $a+b=1$. 所以 $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, 当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时, 等号成立. 所以 ab 的最大值为 $\frac{1}{4}$.

15. $\frac{4}{5}$

提示:易知女生人数 X 服从超几

何分布, 所以 $P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) = \frac{C_2^0 C_4^4 + C_2^1 C_3^3}{C_6^5} = \frac{4}{5}$.

16. $\frac{6}{31}$

提示:因为 $\frac{2^k}{(2^{k+1}-1)(2^k-1)}$

$= \frac{1}{2^k-1} - \frac{1}{2^{k+1}-1}$, 所以

$m \left[\frac{2}{(2^2-1)(2-1)} + \frac{2^2}{(2^2-1)(2^3-1)} + \dots + \frac{2^5}{(2^5-1)(2^6-1)} \right]$

$= m \cdot \left(\frac{1}{2-1} - \frac{1}{2^6-1} \right) = 1$, 解得 $m = \frac{63}{62}$.

所以 $P\left(\frac{3}{2} < X < \frac{5}{2}\right) = P(X=2) = \frac{63}{62} \times \frac{4}{3 \times 7} = \frac{6}{31}$.

三、解答题

17. 解:(1) X 可能取的值为 0, 1, 2, 3. (2) $\{X=1\}$ 表示取两次零件, 第一次取得次品, 第二次取得正品.

18. 解:(1) $P(\xi < 1) = P(\xi=0) = \frac{1}{2}$, $P(\xi \leq 1) = P(\xi=0) + P(\xi=1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$.

(2)根据题意, 当 $x < 0$ 时, $P(\xi \leq x) = 0$; 当 $0 \leq x < 1$ 时, $P(\xi \leq x) = P(\xi=0) = \frac{1}{2}$; 当 $1 \leq x < 2$ 时, $P(\xi \leq x) = P(\xi=0) +$

$P(\xi=1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$;

当 $x \geq 2$ 时, $P(\xi \leq x) = P(\xi=0) + P(\xi=1) + P(\xi=2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$.

所以 $F(x) = P(\xi \leq x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq x < 1, \\ \frac{5}{6}, & 1 \leq x < 2, \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$

19. 解:由题意知 X 的可能取值是 0, 1, 2, 3, 4, 且 X 服从超几何分布, 则 $P(X=k) = \frac{C_2^k C_4^{4-k}}{C_6^4}$, $k=0, 1, 2, 3, 4$.

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{70}$	$\frac{8}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{8}{35}$	$\frac{1}{70}$

20. 解:(1)该顾客中奖的概率为 $P = 1 - \frac{C_6^2}{C_{10}^2} = 1 - \frac{15}{45} = \frac{2}{3}$.

(2) X 的所有可能取值为 0, 10, 20, 50, 60. 其中

$P(X=0) = \frac{C_6^0}{C_{10}^3} = \frac{1}{120}$,

$P(X=10) = \frac{C_6^1 C_4^2}{C_{10}^3} = \frac{2}{15}$,

$P(X=20) = \frac{C_6^2 C_4^1}{C_{10}^3} = \frac{1}{15}$,

$P(X=50) = \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{2}{15}$,

$P(X=60) = \frac{C_6^4}{C_{10}^3} = \frac{1}{15}$.

所以 X 的分布列为

X	0	10	20	50	60
P	$\frac{1}{120}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$

21. 解:(1)从 10 个小球中任取 3 个, 不同的取法种数为 $C_{10}^3 = 120$, 其中取出的 3 个小球上的数字互不相同的取法种数为 $1 \times 2 \times 3 + 1 \times 2 \times 4 + 1 \times 3 \times 4 + 2 \times 3 \times 4 = 50$, 所以取出的 3 个小球上的数字互不相同的概率为 $\frac{50}{120} = \frac{5}{12}$.

(2) X 的可能取值有 2, 3, 4, 且 $P(X=2) = \frac{C_1^1 C_2^2}{C_{10}^3} = \frac{1}{120}$, $P(X=3) = \frac{C_1^1 C_2^1 C_7^1}{C_{10}^3} = \frac{19}{120}$, $P(X=4) = \frac{C_1^1 C_2^1 C_2^1 C_6^1}{C_{10}^3} = \frac{5}{6}$, 故 X 的分布列为

X	2	3	4
P	$\frac{1}{120}$	$\frac{19}{120}$	$\frac{5}{6}$

(3)得分介于 20 分到 40 分之间的概率为 $P(X=3) + P(X=4) = 1 - P(X=2) = \frac{119}{120}$.

22. 解:(1)设选该艺术课程的学生中既会唱歌又会跳舞的有 x 人, 画出 Venn 图如下图所示, 则选该艺术课程的学生共有 $7-x$ 人, 其中只会一项的有 $7-2x$ 人.

由 $P(X>0) = 1 - P(X=0) = \frac{7}{10}$,

得 $P(X=0) = \frac{3}{10}$, 即 $\frac{C_{7-x}^{2x}}{C_7^x} = \frac{3}{10}$,

解得 $x=2$.

所以选该艺术课程的学生共有 5 人.

(2)由题意知 X 的可能取值为 0, 1, 2, 其中 X 服从超几何分布, 且 $P(X=k) = \frac{C_2^k C_5^{5-k}}{C_7^k}$, $k=0, 1, 2$.

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$