

一、选择题

1.C 2.C 3.A 4.A 5.D

6.B

提示:设 a-2b 与 a 的夹角为 θ, 则 a-2b 在 a 方向上的投影为 |a-2b|cosθ = (a-2b)·a / |a| = (a^2 - 2ab) / |a| = 1.

7.D

提示:由已知,得 |a+b| = sqrt(a^2 + 2ab + b^2) = 7, 所以 cos(a, a+b) = (a·(a+b)) / (|a||a+b|) = (5^2 - 6 - 19) / (5 * 7) = 19 / 35.

8.B

提示:由 BC = AC - AB = (1-λ)AC - AB, CP = AP - AC = λAB - AC, 且 BC·CP = -2, AB=1, AC=2, AB·AC=0, 得 3λ-2=0, 解得 λ=2/3, 故选 B.

9.D

提示:设 AM = 2/5 AB, AN = 1/5 AC, 得 AP = AM + AN, 由平行四边形法则, 于是 NP // AB, 所以 S△ABP / S△ABC = |AN| / |AC| = 1/5. 同理可得 S△ABQ / S△ABC = 1/4, 所以 S△ABP / S△ABQ = 4/5.

10.B

11.C

提示:当点 P 在边 AB 上时, m ∈ [0, 1], n=0, 所以 m+n ∈ [0, 1].

取 AB 的中点 O, 连接 OC, 则 OC = AD. 当点 P 在边 BC 上时, 设 BP = λBC, λ ∈ [0, 1], 则 AP = AB + BP = AB + λBC = AB + λ(OC - OB) = AB + λ(AD - 1/2 AB) = (1 - λ/2)AB + λAD, 所以 m = 1 - λ/2, n = λ, 所以 m+n = 1 + λ/2 ∈ [1, 3/2].

当点 P 在边 AC 上时, 由向量加法的平行四边形法则, 得 n ∈ [0, 1], m ∈ [0, 1/2], 所以 m+n ∈ [0, 3/2].

所以 m+n 的取值范围是 [0, 3/2].

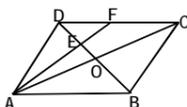
故选 C.

12.B

提示:设 AF = λAD + (1-λ)AC, 又 AE = 1/2 AD + 1/4 AC = 1/2 AD + 1/4 AC, 且存在实数 t 使得 AF = tAE, 所以 λAD + (1-λ)AC = t(1/2 AD + 1/4 AC), 所以

{ λ = 1/2 t, 1 - λ = 1/4 t, 所以 λ = 2/3, 1 - λ = 1/3.

所以 AF = 2/3 AD + 1/3 AC.



(第12题图)

所以 EF = AF - AE = 1/6 AD + 1/12 AC.

所以 BE·EF = (AE - AB)·EF = (AD + DE - AB)·EF = (AD + 1/4 DB - AB)·(1/6 AD + 1/12 AC) = (AD + 1/4 AB - 1/4 AD - AB)·(1/6 AD + 1/12 AC) = (3/4 AD - 3/4 AB)·(1/6 AD + 1/12 AC) = 3/16 |AD|^2 - 1/16 |AB|^2 - 1/8 AB·AD = 3/16 * 4 - 1/16 * 4 - 1/8 * 2 * 2 * 1/2 = 1/4.

故选 B.

二、填空题

13. sqrt(3)

14. 3/2

提示: EC = ED + DC, ED = 1/2 AD, DC = AB, 所以 EC = 1/2 AD + AB. 又 EC = λAD + μAB, 所以 λ = 1/2, μ = 1, 所以 λ + μ = 3/2.

15. 25N, 1000J

提示: F 在小车位移方向上的投影的大小为 |F|·cos60° = 50 * 1/2 = 25(N), 力 F 做的功 W = 25 * 40 = 1000(J).

16. 0 或 18/5

提示:以 A 为原点, AB, AC 所在直线分别为 x, y 轴建立平面直角坐标系, 则 A(0,0), B(4,0), C(0,3), 故 AB = (4,0), AC = (0,3).

由 PA = mPB + (3/2 - m)PC = m(PA + AB) + (3/2 - m)(PA + AC) = m(PA + AB) + (3/2 - m)(PA + AC), 整理得 PA = -2mAB + (2m-3)AC = (-8m, 6m-9). 又 AP=9, 所以 64m^2 + (6m-9)^2 = 81, 解得 m=0, 或 m=27/25.

当 m=0 时, PA = 3/2 PC, 此时 P, C, A 三点共线, 故 |CD|=0.

当 m=27/25 时, 直线 PA 的方程为 y = (9-6m)/8m x = 7/24 x, 直线 BC 的方程为 x/4 + y/3 = 1,

联立两方程可得 x = 72/25, y = 21/25, 所以 D(72/25, 21/25), 所以 |CD| = 18/5.

综上所述, CD 的长度是 0 或 18/5.

三、解答题

17. 解: (1) 由已知, 得 AB = (1,5), AC = (-3,1), 则 AB + AC = (-2,6), AB - AC = (4,4), 所以 |AB + AC| = 2sqrt(10), |AB - AC| = 4sqrt(2), 即两条对角线的长分别为 2sqrt(10) 和 4sqrt(2).

(2) 由题意, 可知 AD·CB = 0, 且 CD // CB. 设 D(x,y), 则 AD = (x-1,y), CD = (x+2,y-1), 又 CB = (4,4), 可得 { 4(x-1)+4y=0, 4(y-1)-4(x+2)=0, 解得 x=-1, y=2, 所以点 D 的坐标为 (-1,2).

18. (1) 证明: 当 a=1/3, b=2/3 时, OC = 1/3 OA + 2/3 OB, 可得 2/3 (OC - OB) = 1/3 (OA - OC), 即 2BC = CA, 则 BC 与 CA 共线, 即 A, B, C 三点共线, 则 AC // AB.

即存在 λ ∈ R, 使得 AC = λAB, 可得 OC - OA = λ(OB - OA), 即 OC = (1-λ)OA + λOB. 又 OC = aOA + bOB, 且 OA, OB 不共线, 由平面向量基本定理, 得 a=1-λ 且 b=λ, 所以 a+b 为定值 1.

19. 解: (1) 由 (2a-3b)·(2a+b)=61, 解得 a·b=-6.

所以 cosθ = (a·b) / (|a||b|) = -6 / (4 * 3) = -1/2. 又 0 ≤ θ ≤ π, 所以 θ = 2π/3.

(2) |a-b|^2 = a^2 - 2a·b + b^2 = 37, 所以 |a-b| = sqrt(37); |a+b|^2 = a^2 + 2a·b + b^2 = 13, 所以 |a+b| = sqrt(13).

20. (1) 解: 由题意, 得 M(0, 1/2), N(2, 1/2), 所以 MP = (t, 1/2), NP = (t-2, 1/2), 因为 MP ⊥ NP, 所以 MP·NP = t(t-2) + 1/2 * 1/2 = 0, 解得 t = 2 ± sqrt(3)/2.

(2) 证明: 设 R(x,y), 则 MR = (x,y-1/2), 因为 MP 与 MR 共线, 所以 t(y-1/2) - 1/2 x = 0. ①

又 ON = (2-t, 1/2), NR = (x-2, y-1/2), ON 与 NR 共线, 所以 (2-t)(y-1/2) - 1/2(x-2) = 0. ②

联立①②, 解得 x = t/(t-1), y = t/(2t-2).

所以 AR = (t/(t-1), t/(2t-2)). 又 AC = (2,1), t/(t-1) * 1 - t/(2t-2) * 2 = 0, 所以 AR 与 AC 共线. 因为 AR 与 AC 有公共点 A, 所以 R, A, C 三点共线.

21. 解: (1) 若 P 是 BC 的中点, 则 OP ⊥ BC. 在 Rt△BPO 中, OP = 1/2 OA = 1, OB = 2, 可得 ∠BOP = 60°, 所以 ∠BOC = 120°.

所以 OB·OC = |OB||OC|cos∠BOC = 2 * 2 * (-1/2) = -2.

(2) ① 因为 BP = 2PC, 所以 OP = OB + BP = OB + 2/3 BC = OB + 2/3 (OC - OB) = 1/3 OB + 2/3 OC. 又 OP = λOB + μOC, 且 OB 与 OC 不共线, 所以 λ = 1/3, μ = 2/3.

② 由①可得 OP = 1/3 OB + 2/3 OC, 所以 |OP|^2 = 1/9 |OB|^2 + 4/9 |OC|^2 + 4/9 OB·OC. 又 |OP|=1, |OB|=|OC|=2, 代入可得 OB·OC = -11/4. 所以 cos∠BOC = (OB·OC) / (|OB||OC|) = (-11/4) / (2 * 2) = -11/16.

22. 解: (1) 因为 AD = AC + CD = AC + 2/3 CB = AC + 2/3 (AB - AC) = 1/3 AC + 2/3 AB = 1/3 b + 2/3 a, 所以 x = 2/3, y = 1/3, 所以 x - y = 1/3.

(2) 设 AF = λAB (0 ≤ λ ≤ 1), 因为在 △ABC 中, AB = 2, AC = 1, ∠ACB = π/2, 所以 ∠CAB = π/3, 所以 CF·FA = (AF - AC)·(-AF) = (λAB - AC)·(-λAB) = -4λ^2 + λ * 1 * 2 * 1/2 = -4λ^2 + λ = -4(λ - 1/8)^2 + 1/16, 又 0 ≤ λ ≤ 1, 所以 CF·FA ∈ [-3, 1/16].

(3) 因为 A, M, D 三点共线, 所以设 CM = xCA + (1-x)CD = xCA + (1-x)(CA + 2/3 CB) = (1-x)CA + 2/3(1-x)CB, 所以 xCA + 2/3(1-x)CB = 1/2 tCA + 1/2 tCB, 所以 x = 1/2 t, 2/3(1-x) = 1/2 t, 解得 { x = 2/5, t = 4/5, 所以 CM·AB = (2/5 CA + 2/5 CB)·AB = (2/5 CA + 2/5 CB)·(2/5 CA + 2/5 CB) = 4/5 CA·AB + 2/5 |AB|^2 = 4/5 * 1 * 2 * (-1/2) + 2/5 * 4 = 4/5.

第7期

第3-4版同步周测参考答案

一、选择题

1.A 2.B 3.B 4.A 5.A

6.B

提示: 1 + tanα / 1 - tanα = tan(π/4 + α)

= tan[(α + β) - (β - π/4)] = 3/22.

7.C

提示: 原式

= tan60°(1 - tan10°tan50°) - tan60° / (tan10°tan50°) = -sqrt(3).

8.B

9.A

10.A

提示: 因为 sinA(sqrt(3)sinB + cosB) - sinC = 0, 所以 sqrt(3)sinAsinB + sinAcosB - (sinAcosB + cosAsinB) = 0, 所以 sqrt(3)sinAsinB = sinBcosA, 因为 sinB ≠ 0, 所以 sqrt(3)sinA = cosA, 所以 tanA = sqrt(3)/3, 因为 A ∈ (0, π), 所以 A = π/6.

所以 B + C = π - π/6 = 5π/6, 所以 cosB + sinC = cosB + sin(5π/6 - B) = cosB + sin5π/6 cosB - cos5π/6 sinB = 3/2 cosB + sqrt(3)/2 sinB = sqrt(3)sin(B + π/3), 因为 0 < B < 5π/6, 所以 π/3 < B + π/3 < 7π/6, 所以 -1/2 < sin(B + π/3) ≤ 1, 所以 -sqrt(3)/2 < sqrt(3)sin(B + π/3) ≤ sqrt(3), 所以 cosB + sinC 的取值范围为 (-sqrt(3)/2, sqrt(3)].

故选 A.

11.C

提示: 由两角和的余弦公式可知①正确; 令 α = π/2, β = 0, 可知②正确; 对于③, 公式成立还需保证 α + β ≠ kπ + π/2 及 tanα tanβ ≠ 1, 故③错误; 由两角差的正弦公式可知④错误. 故假命题是③④.

12.C

提示: f(x) = sinx - sin3x = sin(2x - x) - sin(2x + x) = -2cos2xsinx. 令 f(x) = 0, 得 cos2x = 0, 或 sinx = 0. 由 cos2x = 0, x ∈ [0, 2π], 得 2x = π/2 或 3π/2 或 5π/2 或 7π/2, 即 x = π/4 或 3π/4 或 5π/4 或 7π/4; 由 sinx = 0, x ∈ [0, 2π], 得 x = 0 或 π 或 2π. 所以 f(x) 的所有零点之和为 π/4 + 3π/4 + 5π/4 + 7π/4 + 0 + π + 2π = 7π.

二、填空题

13. sqrt(3)/2

14. (3/2, +∞)

提示: 在锐角 △ABC 中, 有 tanB = t - 1 > 0, ①

tanC = -tan(A+B) = -tanA + tanB / 1 - tanA tanB > 0, ②

即 1 - tanA tanB = 1 - 2(t-1) < 0.

由①②, 解得 t > 3/2.

15.1

提示: tan(α+β) = 1, tan(α-β) = 2,

sin2α / cos2β = [sin[(α+β)+(α-β)] / cos[(α+β)-(α-β)]] = [sin(α+β)cos(α-β) + cos(α+β)sin(α-β)] / [cos(α+β)cos(α-β) - sin(α+β)sin(α-β)], 分式同除以 cos(α+β)cos(α-β), 则 sin2α / cos2β = [tan(α+β) + tan(α-β)] / [1 + tan(α+β)tan(α-β)] = (1+2) / (1+1*2) = 1.

16. (0, sqrt(2) - 1]

三、解答题

17. 解: 由已知条件, 得 sin[(α-β)+β] = sinα = 3/5, 又 α ∈ (π/2, π), 所以 cosα = -4/5, 所以 tanα = -3/4, 所以 tan(α - 3π/4) = (tanα - tan3π/4) / (1 + tanα tan3π/4) = (1/7).

18. 证明: 因为 3sinβ = sin(2α+β), 所以 3sin[α+(α-β)] = sin[α+(α+β)], 所以 3sin(α+β)cosα - 3cos(α+β)sinα = sinαcos(α+β) + cosasin(α+β), 所以 2sin(α+β)cosα = 4cos(α+β)sinα, 所以 tan(α+β) = 2tanα.

19. 解: (1) 由于 π/2 < β < π, 故 π/4 < β - π/4 < 3π/4, 由已知 cos(β - π/4) = 1/3, 可得 sin(β - π/4) = 2sqrt(2)/3, 所以 tan(β - π/4) = sin(β - π/4) / cos(β - π/4) = 2sqrt(2).

所以 tanβ = tan[(β - π/4) + π/4] = (tan(β - π/4) + tanπ/4) / (1 - tan(β - π/4)tanπ/4) = (2sqrt(2) + 1) / (1 - 2sqrt(2)) = (9 + 4sqrt(2)) / 7.

(2) 由于 0 < α < π/2 < β < π, 故 π/2 < α + β < 3π/2, 由 sin(α+β) = 4/5, 可得 cos(α+β) = -3/5, 所以 cos(α + π/4) = cos[(α+β) - (β - π/4)] = cos(α+β)cos(β - π/4) + sin(α+β)sin(β - π/4) = -3/5 * 1/3 + 4/5 * 2sqrt(2)/3 = (8sqrt(2) - 3) / 15.

20. 解: (1) 由角 α 的终边过点 P(-3/5, -4/5), 得 sinα = -4/5, 所以 sin(α+π) = -sinα = 4/5. (2) 由角 α 的终边过点 P(-3/5, -4/5), 得 cosα = -3/5, 由 sin(α+β) = 5/13, 得 cos(α+β) = ±12/13. 由 β = (α+β) - α, 得 cosβ = cos(α+β)cosα + sin(α+β)sinα, 所以 cosβ = -56/65 或 cosβ = 16/65.

21. 解: (1) tanB = tan(∠AMC - ∠BAM) = (tan∠AMC - tan∠BAM) / (1 + tan∠AMC tan∠BAM) = -1. 又 0 < B < π, 所以 B = 3π/4. (2) 因为 α + β = B, 所以 β = B - α = 3π/4 - α, 所以 sqrt(2)sinα - sinβ = sqrt(2)sinα - sin(3π/4 - α) = sqrt(2)sinα - sqrt(2)/2 sinα - 1/2 cosα = sin(α - π/4). 因为 0 < α < 3π/4, 所以 -π/4 < α - π/4 < π/2, 所以 -sqrt(2)/2 < sin(α - π/4) < 1. 所以 sqrt(2)sinα - sinβ 的取值范围是 (-sqrt(2)/2, 1].

22. (1) 证明: 因为 a 与 b 共线, 所以 sinπx/2 cosπ/3 - sinπ/3 cosπx/2 = 0, 即 sin(πx/2 - π/3) = 0. (2) 解: 由 πx/2 - π/3 = π/2 + kπ (k ∈ Z), 得对称轴方程是 x = 5/3 + 2k (k ∈ Z).

(3) 解: 由 f(4A/π) = f(4B/π) = 1/2, 得 sin(2A - π/3) = sin(2B - π/3) = 1/2. 因为 0 < A < B < π, 所以 -π/3 < 2A - π/3 < 2B - π/3 < 5π/3, 所以 2A - π/3 = π/6, 2B - π/3 = 5π/6, 解得 A = π/4, B = 7π/12, 所以 C = π/6. 所以 sinB / sinC = sin7π/12 / sinπ/6 = 2sin(π/4 + π/3) = 2(sinπ/4 cosπ/3 + cosπ/4 sinπ/3) = sqrt(6) + sqrt(2).