第 20 期

第2~3版同步周测参考答案

一、单项选择题

1~8.DBDBCCAC

二、多项选择题

9.AD　　10.BC

11.ABD　　12.ABC

三、填空题

13.4　　14.$\frac{1}{2}$

15.$-\frac{1}{4}$　　16.α,β

四、解答题

17.**证明**:(1)因为 M 是棱柱的侧面 AA_1C_1C 对角线的交点，所以 M 是 AC_1 中点.因为 D 是 AB 中点,所以 $MD/\!/BC_1$,因为 $MD\not\subset$平面 A_1BC_1,$BC_1\subset$平面 A_1BC_1,所以 $MD/\!/$平面 A_1BC_1.

(2)因为 $AB=AC$,E 是 BC 中点,所以 $AE\perp BC$.因为 $AA_1\perp$平面 ABC,$AE\subset$平面 ABC,所以 $AA_1\perp AE$.

因为在三棱柱中 $BB_1/\!/AA_1$,

所以 $BB_1\perp AE$.

因为 $BB_1\cap BC=B$,

$BB_1\subset$平面 BCC_1B_1,

$BC\subset$平面 BCC_1B_1,

所以 $AE\perp$平面 BCC_1B_1.

因为 $AE\subset$平面 MAE,

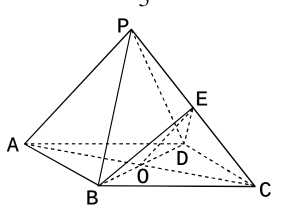
所以平面 $MAE\perp$平面 BCC_1B_1.

18.**证明**:(1)因为 $PA\perp$平面 $ABCD$,$AB\subset$平面 $ABCD$,所以 $AB\perp PA$.又 $AB\perp AD$,$PA\cap AD=A$，所以 $AB\perp$平面 PAD,因为 $PD\subset$平面 PAD,所以 $AB\perp PD$.

(2)因为 $CD=2AB$,E 为 CD 的中点,所以 $AB=DE$,又因为 $AB/\!/DE$,所以四边形 $ABED$ 为平行四边形,所以 $AD/\!/BE$.因为 E,F 分别是 CD 和 PC 的中点，所以 $EF/\!/PD$.因为 $EF\cap BE=E$,$PD\cap AD=D$,所以平面 $BEF/\!/$平面 PAD.

19.(1)**证明**:连接 AC 交 BD 于 O,连接 OE，因为 E 为 PC 中点,O 为 AC 中点,所以 $OE/\!/PA$,又 $PA\not\subset$平面 BDE,$OE\subset$平面 BDE,故 $PA/\!/$平面 BDE.

(2)**解**:由(1)可得,$\angle DEO$ 或其补角为异面直线 PA 与 DE 所成的角,设 $AB=2$,则 $EO=1$,$OD=\sqrt{2}$,$DE=\sqrt{3}$,由勾股定理,得$\triangle ODE$ 为直角三角形,则 $\cos\angle DEO=\frac{OE}{DE}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,故异面直线 PA 与DE所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$.



(第 19 题图)

20.(1)**证明**:因为 $SB=SC$,M 是 BC 的中点,所以 $SM\perp BC$,因为平面 $ABCD\perp$平面 SBC,平面 $ABCD\cap$平面 $SBC=BC$,所以 $SM\perp$平面 $ABCD$. 因为 $AM\subset$平面 $ABCD$,所以 $SM\perp AM$.因为四边形 $ABCD$ 是矩形,M 是 BC 的中点,$AB=1$,$BC=2$，所以 $AM^2+MD^2=AD^2$,所以 $AM\perp MD$,又 $SM\cap MD=M$,所以 $AM\perp$平面 SMD,又 $SD\subset$平面 SMD,所以 $AM\perp SD$.

(2)**解**:由(1)知$\triangle AMS$ 为直角三角形,$\angle AMS=90°$,$AM=\sqrt{2}$,

因为 $SM=\frac{\sqrt{6}}{3}$,

所以 $SA=SD=\frac{2\sqrt{6}}{3}$,

因为 $AM=MD=\sqrt{2}$,

所以 $S_{\triangle AMD}=\frac{1}{2}AM\cdot MD=\frac{1}{2}\times(\sqrt{2})^2=1$,

所以 $V_{S-ADM}=\frac{1}{3}\cdot SM\cdot S_{\triangle AMD}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{6}}{3}\times 1=\frac{\sqrt{6}}{9}$.

在$\triangle ADS$ 中,$SA=SD=\frac{2\sqrt{6}}{3}$,$AD=2$,

设 AD 边上的高为 h,

则$h=\sqrt{SD^2-\left(\frac{AD}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{24}{9}-1}=\frac{\sqrt{15}}{3}$,

所以$S_{\triangle ADS}=\frac{1}{2}h\cdot AD=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{15}}{3}\times 2=\frac{\sqrt{15}}{3}$.

设点 M 到平面 ADS 的距离为 d,由 $V_{S-ADM}=V_{M-ADS}$，得 $V_{M-ADS}=\frac{1}{3}d\cdot S_{\triangle ADS}=\frac{1}{3}d\cdot\frac{\sqrt{15}}{3}=\frac{\sqrt{6}}{9}$,所以 $d=\frac{\sqrt{10}}{5}$,故点 M 到平面 ADS 的距离为$\frac{\sqrt{10}}{5}$.

21.(1)**证明**:因为 M,N 分别为 BC,B_1C_1 的中点，所以 $MN/\!/CC_1$. 又在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$AA_1/\!/CC_1$,所以 $AA_1/\!/MN$.因为$\triangle A_1B_1C_1$ 是正三角形，所以 $B_1C_1\perp A_1N$. 又因为侧面 BB_1C_1C 是矩形，所以 $B_1C_1\perp CC_1$,所以 $B_1C_1\perp MN$,故 $B_1C_1\perp$平面 A_1AMN. 又 $B_1C_1\subset$平面 EB_1C_1F，所以平面 $A_1AMN\perp$平面 EB_1C_1F.

(2)**解**:由已知得 $AM\perp BC$.以 M 为坐标原点,$\overrightarrow{MA}$的方向为 x 轴正方向,$|\overrightarrow{MB}|$为单位长，建立如图所示的空间直角坐标系 $M-xyz$,则$|AB|=2$,$|AM|=\sqrt{3}$.连接 NP,则四边形 $AONP$ 为平行四边形,故 P 为 AM 的三等分点,

所以$|PM|=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,$E\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{1}{3},0\right)$.

由(1)知,平面 $A_1AMN\perp$平面 ABC,

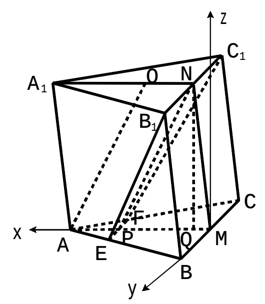
作 $NQ\perp AM$,垂足为 Q,则 $NQ\perp$平面 ABC.设 $Q(a,0,0)$,则在$\triangle NPQ$ 中,$|NQ|=\sqrt{4-\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}-a\right)^2}$,所以$B_1\left(a,1,\sqrt{4-\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}-a\right)^2}\right)$

故$\overrightarrow{B_1E}=\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}-a,-\frac{2}{3},-\sqrt{4-\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}-a\right)^2}\right)$,

$|\overrightarrow{B_1E}|=\frac{2\sqrt{10}}{3}$.

又 $\boldsymbol{n}=(0,1,0)$是平面 A_1AMN 的法向量,设直线 B_1E 与平面 A_1AMN 所成角为θ,则 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{B_1E}\rangle|=\left|\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{B_1E}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{B_1E}|}\right|=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

所以直线 B_1E 与平面 A_1AMN 所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{10}}{10}$.

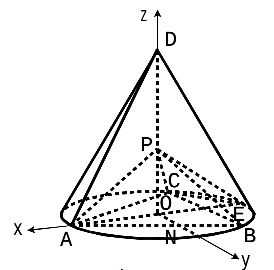


(第 21 题图)

22.(1)**证明**:以 O 为坐标原点,OA 所在直线为 x 轴，建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$,不妨设$|OA|=1$,则$|AD|=|AE|=2$,$|DO|=\sqrt{3}$,$|PO|=\frac{\sqrt{6}}{6}|DO|=\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以 $P\left(0,0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,$A(1,0,0)$,$B\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$,$C\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$,于是$\overrightarrow{PA}=\left(1,0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,$\overrightarrow{PB}=\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,$\overrightarrow{PC}=\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,所以$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=0$，所以 $PA\perp PB$,$PA\perp PC$,又 $PB\cap PC=P$,所以 $PA\perp$平面 PBC.

(2)**解**:由(1)知平面 PBC 的一个法向量为$\overrightarrow{PA}=\left(1,0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,又 $E(-1,0,0)$,所以$\overrightarrow{PE}=\left(-1,0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.设平面 PCE 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PE}=0,\end{cases}$

所以$\begin{cases}-\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y-\frac{\sqrt{2}}{2}z=0,\\ -x-\frac{\sqrt{2}}{2}z=0,\end{cases}$可取 $\boldsymbol{n}=\left(1,\frac{\sqrt{3}}{3},-\sqrt{2}\right)$,所以$\cos\langle\overrightarrow{PA},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{2}{\sqrt{\frac{3}{2}}\times\sqrt{\frac{10}{3}}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,所以二面角 $B-PC-E$ 的余弦值为$\frac{2\sqrt{5}}{5}$.



(第 22 题图)

2020-2021 学年

数学·新高考答案页第 5 期

学习周报® ⑤

第17期

第 2~3 版同步周测参考答案

一、单项选择题

1~8.DACBACBB

二、多项选择题

9.AB　　10.ABD

11.ABC　　12.ABD

三、填空题

13.2　14.2　15.8

16.$\frac{5}{16}-\frac{2n^2+6n+5}{4(n+1)^2(n+2)^2}$

四、解答题

17.**解**:(1)由条件可得

$a_{n+1}=\frac{2(n+1)}{n}a_n$.①

将 $n=1$ 代入①得,$a_2=4a_1$,

而 $a_1=1$,所以 $a_2=4$.

将 $n=2$ 代入①得,$a_3=3a_2$,

所以 $a_3=12$.

从而 $b_1=1$,$b_2=2$,$b_3=4$.

(2)$\{b_n\}$是首项为 1,公比为 2 的等比数列.

理由如下:

由条件可得$\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{2a_n}{n}$,

即 $b_{n+1}=2b_n$,又 $b_1=1$,所以$\{b_n\}$是首项为 1,公比为 2 的等比数列.

(3)由(2)可得$\frac{a_n}{n}=2^{n-1}$,

所以 $a_n=n\cdot 2^{n-1}$.

18.**解**:(1)设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q,且 $q>0$,

由 $a_1=2$,$a_3=2a_2+16$,得 $2q^2=4q+16$,

即 $q^2-2q-8=0$,

解得 $q=-2$(舍去)或 $q=4$.

所以 $a_n=a_1q^{n-1}=2\times 4^{n-1}=2^{2n-1}$.

(2)$b_n=\log_2a_n=\log_22^{2n-1}=2n-1$,

因为 $b_1=1$,$b_{n+1}-b_n=2(n+1)-1-2n+1=2$,

所以数列$\{b_n\}$是以 1 为首项,以 2 为公差的等差数列,则数列$\{b_n\}$的前 n 项和 $T_n=n\times 1+\frac{n(n-1)\times 2}{2}=n^2$.

19.**解**:(1)由已知,得 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2m}=\frac{3}{2}(a_2+a_4+\cdots+a_{2m})$,所以 $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2m-1}=\frac{1}{2}(a_2+a_4+\cdots+a_{2m})$,所以 $q=2$.

由 $a_5+2a_4=a_2a_4$,得 $a_3q^2+2a_3q=a_3^2$,

即 $q^2+2q=a_3$,

所以 $a_3=8$,

所以 $a_n=a_3q^{n-3}=2^n$.

(2)因为$\{b_n\}$是递增数列,

所以 $b_{n+1}>b_n$ 对 $n\in N_+$恒成立,

且 $n\in N_+$时,$(n+1-\lambda)2^{n+1}>(n-\lambda)2^n$,

得 $\lambda<n+2$ 对 $n\in N_+$恒成立,即 $\lambda<3$.

所以实数 λ 的取值范围是$(-\infty,3)$.

20.**解**:(1)因为 $2S_n=3^n+3$,

所以 $2a_1=3+3$,所以 $a_1=3$.

当 $n\geqslant 2$ 时,$2S_{n-1}=3^{n-1}+3$.

此时,$2a_n=2S_n-2S_{n-1}=3^n-3^{n-1}$,即 $a_n=3^{n-1}$.

所以 $a_n=\begin{cases}3,n=1,\\ 3^{n-1},n\geqslant 2.\end{cases}$

(2)因为 $a_nb_n=\log_3a_n$,所以 $b_1=\frac{1}{3}$;

当 $n\geqslant 2$ 时,$b_n=3^{1-n}\log_33^{n-1}=(n-1)\cdot 3^{1-n}$.

所以 $T_1=b_1=\frac{1}{3}$.

当 $n\geqslant 2$ 时,

$T_n=b_1+b_2+b_3+\cdots b_n=\frac{1}{3}+[1\times 3^{-1}+2\times 3^{-2}+\cdots+(n-1)3^{1-n}]$.

所以 $3T_n=1+[1\times 3^0+2\times 3^{-1}+\cdots+(n-1)3^{2-n}]$.

两式相减,得

$2T_n=\frac{2}{3}+(3^0+3^{-1}+3^{2-n})-(n-1)\cdot 3^{1-n}=\frac{2}{3}+\frac{1-3^{1-n}}{1-3^{-1}}-(n-1)\cdot 3^{1-n}=\frac{13}{6}-\frac{6n+3}{2\times 3^n}$,

所以 $T_n=\frac{13}{12}-\frac{6n+3}{4\times 3^n}$.

经检验,$n=1$ 时也适合,

综上,可得 $T_n=\frac{13}{12}-\frac{6n+3}{4\times 3^n}(n\in N_+)$.

21.(1)**解**:由 $S_n^2-(n^2+n-1)S_n-(n^2+n)=0$,得$[S_n-(n^2+n)](S_n+1)=0$.

因为$\{a_n\}$是正项数列,

所以 $S_n>0$,所以 $S_n=n^2+n$.

于是 $a_1=S_1=2$,$n\geqslant 2$ 时,

$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+n-(n-1)^2-(n-1)=2n$.

当 $n=1$ 时,也满足上式,所以数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2n$.

(2)**证明**:由于 $a_n=2n$,$b_n=\frac{n+1}{(n+2)^2a_n^2}$,则 $b_n=\frac{n+1}{4n^2(n+2)^2}=\frac{1}{16}\left[\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+2)^2}\right]$.

$T_n=\frac{1}{16}\times\left[1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^2}-\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+2)^2}\right]=\frac{1}{16}\times\left[1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{(n+2)^2}\right]<\frac{1}{16}\times\left(1+\frac{1}{2^2}\right)=\frac{5}{64}$.

22.(1)**证明**:因为 $2a_n=a_{n+1}+a_{n-1}(n\geqslant 2,n\in N_+)$,

所以$\{a_n\}$是等差数列.

又因为 $a_1=\frac{1}{4}$,$a_2=\frac{3}{4}$,

所以 $a_n=\frac{1}{4}+(n-1)\cdot\frac{1}{2}=\frac{2n-1}{4}$.

因为 $b_n=\frac{1}{3}b_{n-1}+\frac{n}{3}(n\geqslant 2,n\in N_+)$,

所以 $b_{n+1}-a_{n+1}=\frac{1}{3}b_n+\frac{n+1}{3}-\frac{2n+1}{4}=\frac{1}{3}b_n-\frac{2n-1}{12}=\frac{1}{3}\left(b_n-\frac{2n-1}{4}\right)=\frac{1}{3}(b_n-a_n)$.

又因为 $b_1-a_1=b_1-\frac{1}{4}\neq 0$,

所以$\{b_n-a_n\}$是以 $b_1-\frac{1}{4}$ 为首项,

以$\frac{1}{3}$为公比的等比数列.

(2)**证明**:因为 $b_n-a_n=\left(b_1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$,$a_n=\frac{2n-1}{4}$,

所以 $b_n=\left(b_1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{2n-1}{4}$.

当 $n\geqslant 2$ 时,$b_n-b_{n-1}=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\left(b_1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$.

又 $b_1<0$,所以 $b_n-b_{n-1}>0$.

所以$\{b_n\}$是单调递增数列.

(3)**解**:因为当且仅当 $n=3$ 时,S_n 取最小值,所以$\begin{cases}b_3<0,\\ b_4>0,\end{cases}$

即$\begin{cases}\frac{5}{4}+\left(b_1-\frac{1}{4}\right)\times\left(\frac{1}{3}\right)^2<0,\\ \frac{7}{4}+\left(b_1-\frac{1}{4}\right)\times\left(\frac{1}{3}\right)^3>0,\end{cases}$

解得 $-47<b_1<-11$,

所以 b_1 的取值范围是$(-47,-11)$.

第18期

第 2~3 版同步周测参考答案

一、单项选择题

1~8.CBACCCBD

二、多项选择题

9.BD　　10.AC

11.AD　　12.ABCD

三、填空题

13.40　　14.1009

15.4 或 5 或 32　　16.$\frac{1}{1010}$

四、解答题

17.**解**:(1)设$\{a_n\}$的公差为 d,$d\neq0$.

因为 a_1,a_2,a_7 成等比数列,

所以 $a_2^2=a_1a_7$,

所以$(a_1+d)^2=a_1(a_1+6d)$,

整理,得 $d^2-4da_1=0$.

又 $d\neq0$,所以 $d=4a_1$,　①

又 $a_4=a_1+3d=26$,　②

联立①②,解得$\begin{cases}a_1=2,\\d=8.\end{cases}$

所以 $a_n=2+8(n-1)=8n-6(n\in N_+)$.

(2)因为 $b_n=(-1)^{n+1}a_n=(-1)^{n+1}(8n-6)$,

所以 $T_{511}=b_1+b_2+\cdots+b_{511}=2-10+18-26+\cdots+4066-4074+4082=(2-10)+(18-26)+\cdots+(4066-4074)+4082=(-8)\times255+4082=2042$.

18.(1)**证明**:$2S_n=-a_n+n$,

当 $n\geqslant2$ 时,$2S_{n-1}=-a_{n-1}+n-1$,

两式相减,得 $2a_n=-a_n+a_{n-1}+1$,

即 $a_n=\frac{1}{3}a_{n-1}+\frac{1}{3}$.

所以 $a_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\left(a_{n-1}-\frac{1}{2}\right)$,

所以数列$\left\{a_n-\frac{1}{2}\right\}$为等比数列.

(2)**解**:由 $2S_1=-a_1+1$,得 $a_1=\frac{1}{3}$.

由(1)知,数列$\left\{a_n-\frac{1}{2}\right\}$是以$-\frac{1}{6}$为首项,$\frac{1}{3}$为公比的等比数列.

所以 $a_n-\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n$,

所以 $a_n=-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{2}$,

所以 $a_n-1=-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n-\frac{1}{2}$,

所以 $T_n=\dfrac{-\frac{1}{6}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{3}}-\frac{n}{2}=\frac{1}{4}\cdot\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n-1\right]-\frac{n}{2}$.

19.**解**:(1)因为$\{a_n\}$是等差数列,$a_1=-10$,且 a_2+10,a_3+8,a_4+6 成等比数列,

所以$(a_3+8)^2=(a_2+10)(a_4+6)$,

设公差为 d,所以$(-2+2d)^2=d(-4+3d)$,

化简得 $d^2-4d+4=0$,

解得 $d=2$,

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=-10+2n-2=2n-12$.

(2)由 $a_1=-10$,$d=2$,得

$S_n=-10n+\frac{n(n-1)}{2}\times2=n^2-11n$

$=\left(n-\frac{11}{2}\right)^2-\frac{121}{4}$,

所以 $n=5$ 或 $n=6$ 时,S_n 取最小值-30.

20.**解**:(1)由题意知,

当 $n=1$ 时,$S_1=2a_1-2$,得 $a_1=2$;

当 $n\geqslant2$ 时,由 $S_n=2a_n-2\Rightarrow S_{n-1}=2a_{n-1}-2$,

两式相减,得 $a_n=2a_{n-1}$,

所以数列$\{a_n\}$是首项、公比均为 2 的等比数列,所以 $a_n=2^n(n\in N_+)$.

(2)由(1)知,$b_n=\frac{n}{a_n}=\frac{n}{2^n}$,

因为 $T_n=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2^2}+3\times\frac{1}{2^3}+\cdots+n\cdot\frac{1}{2^n}$,　①

所以 $\frac{1}{2}T_n=1\times\frac{1}{2^2}+2\times\frac{1}{2^3}+\cdots+n\cdot\frac{1}{2^{n+1}}$,　②

由①-②,得 $\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}-n\cdot\frac{1}{2^{n+1}}=\dfrac{\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2^n}\right]}{1-\frac{1}{2}}-n\cdot\frac{1}{2^{n+1}}=1-(n+2)\cdot\frac{1}{2^{n+1}}$,所以 $T_n=2-\frac{n+2}{2^n}$,显然有 $T_n<2$.因为 $b_n=\frac{n}{2^n}>0$,所以 T_n 单调递增,且 $T_1=b_1=\frac{1}{2}$,所以 $\frac{1}{2}\leqslant T_n<2$.所以 T_n 的取值范围是$\left[\frac{1}{2},2\right)$.

21.**解**:(1)$A_n=n^2$,所以 $n\geqslant2$ 时,$a_n=A_n-A_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1$.当 $n=1$ 时,$a_1=A_1=1$.所以 $n=1$ 时,适合上式.所以 $a_n=2n-1(n\in N_+)$.

因为 $a_{n+1}-a_n=2(b_{n+1}-b_n)$,所以 $b_{n+1}-b_n=\frac{1}{2}\times2=1$,又 $b_1=2$,所以数列$\{b_n\}$是首项为 2,公差为 1 的等差数列.所以 $B_n=2n+\frac{n(n-1)}{2}\times1=\frac{n^2+3n}{2}$.

(2)对任意 $n\in\mathbf{N}_+$,都有 $a_n=B_n$,

所以 $a_{n+1}-a_n=B_{n+1}-B_n=b_{n+1}$.

所以 $b_{n+1}-b_n=\frac{1}{2}(a_{n+1}-a_n)=\frac{1}{2}b_{n+1}$.

所以 $b_{n+1}=2b_n$,$b_1>0$.所以数列$\{b_n\}$是等比数列,公比为 2.

所以 $B_n=\frac{2^n-1}{2-1}b_1=(2^n-1)b_1$.

又 $\frac{b_{n+1}}{a_na_{n+1}}=\frac{B_{n+1}-B_n}{B_{n+1}B_n}=\frac{1}{B_n}-\frac{1}{B_{n+1}}$,$\frac{b_2}{a_1a_2}+\frac{b_3}{a_2a_3}+\frac{b_4}{a_3a_4}+\cdots+\frac{b_{n+1}}{a_na_{n+1}}<\frac{1}{3}$成立,

所以 $\frac{1}{B_1}-\frac{1}{B_2}+\frac{1}{B_2}-\frac{1}{B_3}+\cdots+\frac{1}{B_n}-\frac{1}{B_{n+1}}=\frac{1}{B_1}-\frac{1}{B_{n+1}}=\frac{1}{b_1}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}-1}\right)<\frac{1}{3}$,

所以 $b_1>3\left(1-\frac{1}{2^{n+1}-1}\right)$,因为对任意 $n\in\mathbf{N}_+$,都成立,所以 $b_1\geqslant3$.所以正实数 b_1 的取值范围是$[3,+\infty)$.

22.**解**:(1)因为 $a_{n+1}^2=4S_n+4n+4$,所以 $a_n^2=4S_{n-1}+4(n-1)+4(n\geqslant2)$,两式相减,得 $a_{n+1}^2-a_n^2=4a_n+4$,即 $a_{n+1}^2=(a_n+2)^2(n\geqslant2)$,又因为数列$\{a_n\}$的各项均为正数,所以 $a_{n+1}=a_n+2(n\geqslant2)$,又因为 $a_2=4$,$16=4a_1+4+4$,所以 $a_1=2$,所以当 $n=1$ 时,上式成立,即数列$\{a_n\}$是首项为 1,公差为 2 的等差数列,所以 $a_n=2+2(n-1)=2n(n\in N_+)$.

(2)由(1)可知 $b_1=a_1=2$,$b_3=a_4=8$,

设$\{b_n\}$公比为 q,则 $q^2=4$,又 $b_n>0$,

所以 $q=2$,所以 $b_n=2^n$,

所以 $c_n=(n+1)\cdot2^{n+1}$.

$T_n=2\cdot2^2+3\cdot2^3+\cdots+n\cdot2^n+(n+1)\cdot2^{n+1}$,　①

$2T_n=2\cdot2^3+3\cdot2^4+\cdots+n\cdot2^{n+1}+(n+1)\cdot2^{n+2}$,　②

①-②,得$-T_n=8+2^3+2^4+\cdots+2^{n+1}-(n+1)\cdot2^{n+2}=4+(2^2+2^3+2^4+\cdots\cdots+2^{n+1})-(n+1)\cdot2^{n+2}=4+4(2^n-1)-(n+1)\cdot2^{n+2}=-n\cdot2^{n+2}$,

所以 $T_n=n\cdot2^{n+2}$,$T_n\cdot m\geqslant8n^2-28n$ 恒成立,等价于 $n\cdot2^{n+2}m\geqslant4n(2n-7)$恒成立,所以 $m\geqslant\frac{2n-7}{2^n}$恒成立.设 $k_n=\frac{2n-7}{2^n}$,则 $k_{n+1}-k_n=\frac{2n-5}{2^{n+1}}-\frac{2n-7}{2^n}=\frac{9-2n}{2^{n+1}}$,所以当 $n\leqslant4$ 时 $k_{n+1}>k_n$,当 $n>4$ 时 $k_{n+1}<k_n$,所以 $k_1<k_2<k_3<k_4<k_5>k_6>\cdots$,所以当 k_n 的最大值为 $k_5=\frac{3}{32}$,

故 $m\geqslant\frac{3}{32}$,所以实数 m 的取值范围是$\left[\frac{3}{32},+\infty\right)$.

第 19 期

第2~3版同步周测参考答案

一、单项选择题

1~8.ACCCACCB

二、多项选择题

9.CD　　10.AC

11.AC　　12.ABD

三、填空题

13.3π　　14.$\sqrt[3]{3}$

15.$\frac{\pi}{4}$　　16.$\frac{27}{8}$

四、解答题

17.**解**:(1)由题意,四棱锥为正四棱锥,因为该四棱锥的侧棱长为$\sqrt{2}a$,底面是边长为 a 的正方形,所以四棱锥的高为 $\frac{\sqrt{6}}{2}a$,设外接球的半径为 R,则有 $R^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{2}a-R\right)^2$,所以 $R=\frac{\sqrt{6}}{3}a$,

所以外接球的体积为

$\frac{4}{3}\pi\times\left(\frac{\sqrt{6}}{3}a\right)^3=\frac{8\sqrt{6}}{27}\pi a^3$.

(2)设内切球的半径为 r,则 $\frac{1}{3}\times a^2\times\frac{\sqrt{6}}{2}a=\frac{1}{3}\times\left(a^2+4\times\frac{1}{2}\times a\times\sqrt{2a^2-\frac{a^2}{4}}\right)\times r$,

所以 $r=\frac{\sqrt{42}-\sqrt{6}}{12}a$,

所以内切球的表面积为

$4\pi r^2=\frac{4-\sqrt{7}}{3}\pi a^2$.

18.**解**:(1)设圆锥底面半径为 $r$cm,母线的长为 $l$cm,则 $l=10$cm,且 $2\pi r=\pi l$,解得 $r=5$cm,

所以该圆锥的表面积 $S=\pi rl=50\pi$(cm²),

圆锥的高 $h=\sqrt{l^2-r^2}=5\sqrt{3}$(cm),

所以该圆锥的体积为

$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{125\sqrt{3}\pi}{3}$(cm³).

(2)由(1)知,圆锥的轴截面为等边三角形,且边长为 10cm,所以最高点到桌面的距离为等边三角形的高,$h'=5\sqrt{3}$ cm.故该圆锥被吹倒后,其最高点到桌面的距离 $d=5\sqrt{3}$ cm.

19.(1)**证明**:因为圆 O 的一条直径是 AB,$PA\perp$平面 ABC,C 在圆 O 上.

所以 $BC\perp AC$,$BC\perp PA$,

因为 $AC\cap PA=A$,

所以 $BC\perp$平面 PAC,

因为 $AF\subset$平面 PAC,

所以 $BC\perp AF$.

因为 $PB\perp$平面 AEF,所以 $AF\perp PB$,

又 $PB\cap BC=B$,所以 $AF\perp$平面 PBC,

所以 $AF\perp PC$.

(2)**解**:易得 $AE\perp PB$,所以 $AE=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

因为$\angle BAC=60°$,$AB=1$,$AC\perp BC$,

所以 $AC=\frac{1}{2}$.

因为$\frac{1}{2}AC\cdot AP=\frac{1}{2}PC\cdot AF$,又 $AP=1$,

所以 $AF=\frac{AC\cdot AP}{PC}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\sqrt{AC^2+AP^2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

因为$\triangle AFE$ 为直角三角形,

所以 $EF=\sqrt{AE^2-AF^2}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

所以 $S_{\triangle AEF}=\frac{1}{2}AF\cdot EF=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}=\frac{3\sqrt{2}}{20}$,

所以 $V_{P-AFE}=\frac{1}{3}S_{\triangle AEF}\cdot PE=\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{2}}{20}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{20}$,

所以三棱锥 P-AFE 的体积为$\frac{1}{20}$.

20.(1)**证明**:因为等腰梯形 $ABCD$,$AB=2$,$CD=6$,$AD=2\sqrt{2}$,E、F 分别是CD的两个三等分点,所以四边形 $ABEF$ 是正方形,所以 $BE\perp EF$.因为 $BE\perp PE$,且$PE\cap EF=E$,所以 $BE\perp$平面 PEF,又 $BE\subset$平面 $ABEF$,所以平面 $PEF\perp$平面 $ABEF$.

(2)**解**:在等腰梯形中,

由(1)知,$AF=FE=DF=CE=2$,

所以 $S_{梯形}=\frac{(2+6)\times2}{2}=8$,

即折起后 $S_{\triangle PAF}+S_{\triangle PBE}+S_{ABEF}=S_{梯形}=8$.

在$\triangle PAB$ 中,$PA=PB=2\sqrt{2}$,$AB=2$,

所以 $S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{8-1}=\sqrt{7}$.

在$\triangle PEF$ 中,$PE=PF=EF=2$,

所以 $S_{\triangle PEF}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times4=\sqrt{3}$.

所以四棱锥 P-ABEF 的表面积 $S=8+\sqrt{3}+\sqrt{7}$.

21.(1)**证明**:在等腰梯形 $ABCD$ 中,$AB\parallel DC$,$CD=8$,$BA=4$,

则$\triangle AOB\backsim\triangle COD$,

所以$\frac{AO}{OC}=\frac{AB}{CD}=\frac{1}{2}$,又$\frac{PE}{EC}=\frac{1}{2}$,

所以 $AP\parallel OE$,所以 $OE\parallel$平面 PAD.

(2)**解**:若直线 PB 与底面 $ABCD$ 所成的角为 45°,而 $PD\perp$平面 $ABCD$,所以$\angle PBD$ 为直线 PB 与底面 $ABCD$ 所成的角,所以$\angle PBD=45°$,所以 $PD=BD$.又在等腰梯形 $ABCD$ 中,$AC\perp BD$,所以$\triangle AOB$,$\triangle COD$ 均为等腰直角三角形,$OB=2\sqrt{2}$,$OD=4\sqrt{2}$,

所以 $BD=PD=6\sqrt{2}$,

所以 $V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}\times S_{ABCD}\times PD=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times(6\sqrt{2}\times6\sqrt{2})\times6\sqrt{2}=72\sqrt{2}$.

所以四棱锥 P-$ABCD$ 的体积为 $72\sqrt{2}$.

22.(1)**证明**:因为 P 在$\odot O$ 上,AB 是$\odot O$ 的直径,所以 $AP\perp BP$.因为$AA_1\perp$平面 PAB,所以 $AA_1\perp BP$,

又 $AP\cap AA_1=A$,所以 $BP\perp$平面PAA_1,

又 $A_1P\subset$平面 PAA_1,故 $BP\perp A_1P$.

(2)**解**:①由题意知,

$V_{圆柱}=\pi\cdot OA^2\cdot AA_1=4\pi\cdot AA_1=12\pi$,

解得 $AA_1=3$,

由 $OA=2$,$\angle AOP=120°$,

得$\angle BAP=30°$,$BP=2$,$AP=2\sqrt{3}$,

所以 $S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$,

所以三棱锥 A_1-APB 的体积

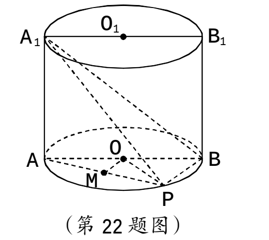
$V_{A_1-APB}=\frac{1}{3}S_{\triangle PAB}\cdot AA_1=\frac{1}{3}\times2\sqrt{3}\times3=2\sqrt{3}$.

②在 AP 上存在一点 M,当 M 为 AP 的中点时,使异面直线 OM 与 A_1B 所成角的余弦值为$\frac{2}{5}$.

证明:因为 O、M 分别为 AB、AP 的中点,则 $OM\parallel BP$,所以$\angle A_1BP$ 就是异面直线 OM 与 A_1B 所成的角,

因为 $AA_1=3$,$AB=4$,所以 $A_1B=5$.又 $BP\perp A_1P$,在 Rt$\triangle A_1PB$ 中,$\cos\angle A_1PB=\frac{BP}{A_1B}=\frac{2}{5}$.

所以在 AP 上存在一点 M,当 M 为 AP 的中点时,使异面直线 OM 与 A_1B 所成角的余弦值为$\frac{2}{5}$.



(第 22 题图)