## 第 16 期

### 第 2~3 版同步周测参考答案

**一、单项选择题**

1~8.CACACBCC

**二、多项选择题**

9.ABCD　　10.AD

11.BD　　12.BC

**三、填空题**

13.$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　14.8

15.$\frac{26}{61}$　　16.2

**四、解答题**

17.**解**：(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为$d$，由$a_4-a_3=2$，得$d=2$，

又由$a_1+a_2=10$，得$a_1+a_2=2a_1+d=10$，

解得$a_1=4$，

所以$a_n=4+(n-1)\cdot 2=2n+2(n\in N_+)$.

(2)设等比数列$\{b_n\}$的公比为$q$，

因为$b_2=a_3$，$b_3=a_7$，

所以$b_2=a_3=8$，$b_3=a_7=16$，

所以$q=\frac{b_3}{b_2}=2$，则$b_4=b_3\cdot q=32$，

由$2n+2=32$，解得$n=15$，

所以$b_4$与数列$\{a_n\}$的第 15 项相等.

18.**解**：(1)设$\{a_n\}$的公差为$d(d\neq 0)$，

由题意，得$a_6^2=a_2a_6$，

即$(a_1+4d)^2=(a_1+d)(a_1+5d)$，

化简，得$2a_1d+11d^2=0$.

又$a_1=11$，所以$d=-2$，或$d=0$(舍去)，

故$a_n=-2n+13$.

(2)由(1)知当$n\leqslant 6$时，$a_n>0$；

当$n\geqslant 7$时，$a_n<0$.

当$n\leqslant 6$时，$S_n=|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_n|=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=12n-n^2$.

当$n\geqslant 7$时，

$S_n=|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_6|+|a_7|+\cdots+|a_n|=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_6-(a_7+a_8+\cdots+a_n)=2(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_6)-(a_1+a_2+\cdots+a_n)=2S_6-\left[na_1+\frac{n(n-1)}{2}d\right]=72-(12n-n^2)=n^2-12n+72$.

所以$S_n=\begin{cases}12n-n^2, n\leqslant 6,\\ n^2-12n+72, n\geqslant 7.\end{cases}$

19.**解**：设等差数列$\{a_n\}$的公差为$d$，

则$S_n=na_1+\frac{1}{2}n(n-1)d$.

因为$S_7=7$，$S_{15}=75$，

所以$\begin{cases}7a_1+21d=7,\\ 15a_1+105d=75,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a_1=-2,\\ d=1.\end{cases}$

所以$\frac{S_n}{n}=a_1+\frac{1}{2}(n-1)d=-2+\frac{1}{2}(n-1)$，

因为$\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=\frac{1}{2}$，

所以数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是等差数列，

其首项为$-2$，公差为$\frac{1}{2}$，

所以$T_n=-2n+\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}n^2-\frac{9}{4}n$.

20.**解**：(1)由题意可设

$a_n=4+(n-1)d(d\neq 0)$，

又有$S_3=12+3d$，$S_4=16+6d$，$S_5=20+10d$，

因为$\left(\frac{1}{5}S_5\right)^2=\frac{1}{3}S_3\cdot\frac{1}{4}S_4$，

所以$(4+2d)^2=(4+d)\left(4+\frac{3}{2}d\right)$.

所以$d=-\frac{12}{5}$，或$d=0$(舍去).

所以$a_n=-\frac{12}{5}n+\frac{32}{5}$.

(2)$S_n=4n+\frac{n(n-1)}{2}\times\left(-\frac{12}{5}\right)=-\frac{6}{5}n^2+\frac{26}{5}n$，因为$S_n>0$，所以$-\frac{6}{5}n^2+\frac{26}{5}n>0$，即$0<n<\frac{13}{3}$，又因为$n\in N_+$，所以$n$的最大值为 4.

21.(1)**解**：设等差数列$\{a_n\}$的首项为$a_1$，

所以$a_n=dn+a_1-d$.

又因为$a_na_{n+1}=4n^2-1$，

解得$\begin{cases}a_1=1,\\ d=2,\end{cases}$或$\begin{cases}a_1=-1,\\ d=-2.\end{cases}$

又因为$d>0$，所以$a_1=1$，$d=2$，

所以$a_n=2n-1$.

(2)**证明**：因为$\frac{2}{a_na_{n+1}}=\frac{2}{4n^2-1}$

$=\frac{2}{(2n+1)(2n-1)}=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}$，

所以$\frac{2}{a_1a_2}+\frac{2}{a_2a_3}+\frac{2}{a_3a_4}+\cdots+\frac{2}{a_na_{n+1}}$

$=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=1-\frac{1}{2n+1}<1$.

22.**解**：(1)由题意可知，

当$n=1$时，$a_1=a$，

当$n\geqslant 2$时，$S_n=\frac{a}{a-1}(a_n-1)$，　①

$S_{n-1}=\frac{a}{a-1}(a_{n-1}-1)$，　②

由①-②，得$\frac{a_n}{a_{n-1}}=a$，

所以数列$\{a_n\}$是等比数列，

所以$a_n=a^n(n\in N_+)$.

(2)因为$b_n=a_n\cdot\lg a_n$，

所以$b_n=n\cdot a^n\cdot\lg a$，

对一切$n\in N_+$都有$b_n<b_{n+1}$，

即有$n\cdot a^n\cdot\lg a<(n+1)\cdot a^{n+1}\cdot\lg a$，

①当$\lg a>0$，即$a>1$时，

有$a>\frac{n}{n+1}$对一切$n\in N_+$都成立，

所以$a>1$；

②当$\lg a<0$，即$0<a<1$时，

有$a<\frac{n}{n+1}$对一切$n\in N_+$都成立，

所以$0<a<\frac{1}{2}$.

综上，可知$a$的取值范围是$\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup(1,+\infty)$.





## 第13期

### 第 2~3 版同步周测参考答案

**一、单项选择题**

1~8.CBDDBBBC

**二、多项选择题**

9.ABD　　10.CD

11.AC　　12.BCD

**三、填空题**

13.$\sqrt{3}$　　14.$\frac{3}{8}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$

15.$[-1,1]$　　16.$\frac{\pi}{3}$；$\frac{\sqrt{3}}{2}$

**四、解答题**

17.**解**：(1)因为$3\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OC}$，

所以$2(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$，

所以$2\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{BA}$，即$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{BC}$，

所以$k\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，解得$k=2$.

(2)因为$A$、$C$、$D$三点共线，

所以存在实数$\lambda$，使得$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{CD}$.

又$\overrightarrow{AC}=(k\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=(k+1)\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$，

所以$(k+1)\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}-2\lambda\boldsymbol{b}$，

即$k+1=\lambda$，且$-2\lambda=3$，解得$k=-\frac{5}{2}$.

18.**解**：(1)因为$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，所以$3x-36=0$，所以$x=12$，所以$\boldsymbol{b}=(9,12)$.

因为$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$，所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=12+4y=0$，

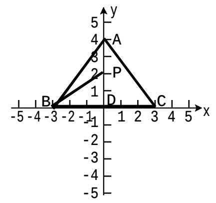
所以$y=-3$，所以$\boldsymbol{c}=(4,-3)$.

(2)$\boldsymbol{m}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-3,-4)$，$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}=(7,1)$，所以$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=-25$，$|\boldsymbol{m}|=5$，$|\boldsymbol{n}|=5\sqrt{2}$.设$\boldsymbol{m}$，$\boldsymbol{n}$的夹角为$\theta$，则$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，因为$\theta\in[0,\pi]$，所以$\theta=\frac{3\pi}{4}$，即向量$\boldsymbol{m}$与$\boldsymbol{n}$的夹角为$\frac{3\pi}{4}$.

19.**解**：(1)因为$\overrightarrow{BP}=\sin^2\theta\cdot\overrightarrow{BA}+\cos^2\theta\cdot\overrightarrow{BD}$，又$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，所以$A$，$P$，$D$三点共线，又$\sin^2\theta$，$\cos^2\theta\in[0,1]$，所以$P$在线段$AD$上.因为$D$为$BC$的中点，设$|PD|=x$，则$|AP|=4-x$，$x\in[0,4]$，所以$(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})\cdot\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{AP}=2x(4-x)=-2x^2+8x=-2(x-2)^2+8$，所以当$x=2$时，$(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})\cdot\overrightarrow{AP}$取最大值，最大值为 8.

(2)因为$\triangle ABC$为等腰三角形，且$AD$为底边的中线，

所以以$D$为坐标原点，$DC$，$DA$所在直线分别为$x$，$y$轴建立如图所示的平面直角坐标系，由(1)可得$P(0,2)$，又$|\overrightarrow{BD}|^2=5^2-4^2=9$，所以$B(-3,0)$，$C(3,0)$，所以$\overrightarrow{PB}=(-3,-2)$，$\overrightarrow{PC}=(3,-2)$，所以$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=-9+4=-5$.



(第 19 题图)

20.**解**：由题意知，$f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+1=2\cos^2x+2\sqrt{3}\sin x\cos x+1=\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x+2=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+2$.

(1)由$2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，

得$k\pi-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$，

所以函数$f(x)$的单调递增区间为$\left[k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{6}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

(2)因为$x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$，

所以$\frac{\pi}{6}\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{2\pi}{3}$，

所以$\frac{1}{2}\leqslant\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant 1$，

所以$3\leqslant 2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+2\leqslant 4$，

所以函数$y=f(x)$的值域为$[3,4]$.

21.**解**：(1)因为$\frac{AB}{AC}=\frac{DB}{DC}=\frac{1}{2}$，

即$\overrightarrow{BD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$，

所以$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

所以$\overrightarrow{AD}\cdot(2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=\frac{1}{3}(2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=\frac{1}{3}(4|\overrightarrow{AB}|^2-|\overrightarrow{AC}|^2)=0$.

(2)因为点$E$为$BC$的中点，设$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$的夹角为$\theta$，所以$\frac{1}{|\overrightarrow{AE}|^2}+\frac{1}{|\overrightarrow{BC}|^2}=\frac{4}{(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})^2}+\frac{1}{(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})^2}=\frac{4}{5+4\cos\theta}+\frac{1}{5-4\cos\theta}=\frac{1}{10}(5+4\cos\theta+5-4\cos\theta)\cdot\left(\frac{4}{5+4\cos\theta}+\frac{1}{5-4\cos\theta}\right)=\frac{1}{10}\left[5+\frac{5+4\cos\theta}{5-4\cos\theta}+\frac{4(5-4\cos\theta)}{5+4\cos\theta}\right]\geqslant\frac{1}{10}\times(5+4)=\frac{9}{10}$.

当且仅当$5+4\cos\theta=2(5-4\cos\theta)$，

即$\cos\theta=\frac{5}{12}$时取等号.

此时$\triangle ABC$的面积$S=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin\theta=\frac{1}{2}\times 1\times 2\times\sqrt{1-\left(\frac{5}{12}\right)^2}=\frac{\sqrt{119}}{12}$.

22.**解**：(1)依题意，设直线$l$的方程为$y=k(x-1)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

联立方程组$\begin{cases}x^2+y^2=4,\\ y=k(x-1),\end{cases}$

消去$y$并整理，得

$(1+k^2)x^2-2k^2x+k^2-4=0$，

显然$\Delta>0$，则由韦达定理，得

$x_1+x_2=\frac{2k^2}{1+k^2}$，$x_1x_2=\frac{k^2-4}{1+k^2}$，

①若$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-3$，则$x_1x_2+y_1y_2=-3$，

即$x_1x_2+k^2(x_1-1)(x_2-1)=-3$，

整理，得

$(1+k^2)x_1x_2-k^2(x_1+x_2)+k^2+3=0$，

所以$k^2-4-\frac{2k^4}{1+k^2}+k^2+3=0$，

所以$(2k^2-1)(1+k^2)-2k^4=0$，

化简，得$k^2=1$，

所以直线$l$的斜率为 1 或$-1$.

(2)如图，连接$OM$，$ON$，$PQ$，

因为$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=0$，所以$PM\perp PN$，

又$Q$为$MN$的中点，

所以$PQ=QM$.

因为$M$、$N$为圆上的两点，

所以$OM=ON=2$，又$Q$为$MN$的中点，

所以$OQ\perp MN$，

所以$OQ^2+QM^2=OM^2=4$，又$PQ=QM$，

故$OQ^2+PQ^2=4$.

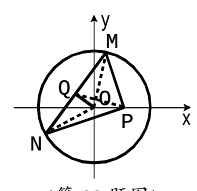
设点$Q$的坐标为$(x,y)$，

则$x^2+y^2+(x-1)^2+y^2=4$，

整理，得$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{7}{4}$，

所以点$Q$的轨迹为以$\left(\frac{1}{2},0\right)$为圆心，$\frac{\sqrt{7}}{2}$为半径的圆，

所以$OQ_{\min}=\frac{\sqrt{7}-1}{2}$.



(第 22 题图)

## 第2~3版同步周测参考答案

**一、单项选择题**

1~8.DCBBDABA

**二、多项选择题**

9.BC　　10.AC

11.BC　　12.ABD

**三、填空题**

13. $\frac{7}{9}$　　14.2

15. $\frac{\sqrt{6}\pi}{4}$　　16. $(-3,-2]$

**四、解答题**

17.解:

(1) $\frac{\tan150°\cos(-210°)\sin(-420°)}{\sin1050°\cos(-600°)}$

$=\frac{(-\tan30°)(-\cos30°)(-\sin60°)}{(-\sin30°)(-\cos60°)}$

$=-\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}$

$=-\sqrt{3}$.

(2) $\frac{\cos40°+\sin50°(1+\sqrt{3}\tan10°)}{\sin70°\sqrt{1+\cos40°}}$

$=\frac{\cos40°+\sin50°\left(\frac{\cos10°+\sqrt{3}\sin10°}{\cos10°}\right)}{\sin70°\sqrt{1+\cos40°}}$

$=\frac{\cos40°+\frac{2\sin40°\cos40°}{\cos10°}}{\sin70°\sqrt{1+\cos40°}}$

$=\frac{\cos40°+1}{\sin70°\sqrt{1+\cos40°}}$

$=\frac{2\cos^2 20°-1+1}{\cos20°\sqrt{1+2\cos^2 20°-1}}$

$=\frac{2\cos^2 20°}{\sqrt{2}\cos^2 20°}=\sqrt{2}$.

18.解:(1)

$f(x)=\sin\omega x\cdot\cos\omega x-\sqrt{3}\cos^2\omega x+\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{1}{2}\sin2\omega x-\frac{\sqrt{3}}{2}(1+\cos2\omega)+\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{1}{2}\sin2\omega x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos2\omega x=\sin\left(2\omega x-\frac{\pi}{3}\right)$,

因为$f(x)$图象上两相邻对称轴之间的距离为π,

所以$f(x)$的周期为2π,

所以$\frac{2\pi}{2\omega}=2\pi$,所以$\omega=\frac{1}{2}$.

(2)由(1)知$f(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$,

所以$f(x+\varphi)=\sin\left(x+\varphi-\frac{\pi}{3}\right)$.

因为$f(x+\varphi)$是奇函数,

所以$\varphi-\frac{\pi}{3}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$,

所以$\varphi=\frac{\pi}{3}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$,又$0<\varphi<\frac{\pi}{2}$,

所以$\varphi=\frac{\pi}{3}$,

所以$g(x)=\cos(2x-\varphi)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$,

由$2k\pi\leqslant2x-\frac{\pi}{3}\leqslant\pi+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,

得$\frac{\pi}{6}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$,

因为$x\in[0,\pi]$,

所以$g(x)$的单调递减区间为$\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$.

19.解:(1)$f(x)=\sin^2x+\sqrt{3}\sin x\cos x+2\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

$=\frac{1-\cos2x}{2}+\frac{\sqrt{3}\sin2x}{2}+\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$

$=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}$.

因为$x\in\left[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{4}\right]$,

所以$2x+\frac{\pi}{6}\in\left[0,\frac{2\pi}{3}\right]$.

则$f(x)_{\min}=f\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1}{2}$,

$f(x)_{\max}=f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}$.

(2)由(1)知$m=2$.

所以$g(x)=2\sin x+\lambda\cos x=\sqrt{4+\lambda^2}\sin(x+\alpha)\left(\tan\alpha=\frac{\lambda}{2}\right)$.

当$x\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$时,$x+\alpha\in\left(\alpha,\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$.要使$g(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$上存在最大值,必有$\frac{\pi}{3}+\alpha>\frac{\pi}{2}$,即有$\alpha>\frac{\pi}{6}$.所以$\frac{\lambda}{2}=\tan\alpha>\frac{\sqrt{3}}{3}$,

所以$\lambda>\frac{2\sqrt{3}}{3}$,所以$\lambda$的取值范围是$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$.

20.解:(1)$f(x)=2\sin(\pi-x)\cos x+2\cos^2x-1=2\sin x\cos x+\cos2x=\sin2x+\cos2x$

$=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin2x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos2x\right)$

$=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$,

所以最小正周期$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

(2)因为$x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$,

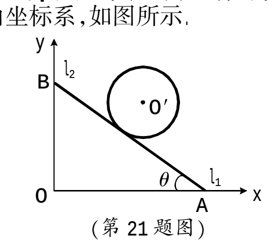
所以$2x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,

$2x+\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$.

所以当$2x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}$,即$x=-\frac{\pi}{4}$时,

$\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$有最小值$-\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以$f(x)$有最小值-1.因为当$x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$时,$f(x)\geqslant m$恒成立,所以$m\leqslant-1$,即$m$的取值范围是$(-\infty,-1]$.

21.解:(1)以点$O$为坐标原点建立平面直角坐标系,如图所示.




(第21题图)

则$O'(5,5)$,在Rt△$ABO$中,

$OA=L\cos\theta$,$OB=L\sin\theta$,

所以直线$AB$的方程为

$\frac{x}{L\cos\theta}+\frac{y}{L\sin\theta}=1$,

即$x\sin\theta+y\cos\theta-L\sin\theta\cos\theta=0$.

又直线$AB$与圆$O'$相切,

则$\frac{|5\sin\theta+5\cos\theta-L\sin\theta\cos\theta|}{\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta}}=2$.

因为圆心$O'$在直线$AB$的上方,

所以$5\sin\theta+5\cos\theta-2-L\sin\theta\cos\theta=0$,

解得$L=\frac{5(\sin\theta+\cos\theta)-2}{\sin\theta\cos\theta}$,

所以$L$关于$\theta$的函数解析式为

$L=\frac{5(\sin\theta+\cos\theta)-2}{\sin\theta\cos\theta}$,$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

(2)令$t=\sin\theta+\cos\theta$,则$\sin\theta\cos\theta=\frac{t^2-1}{2}$,

且$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\in(1,\sqrt{2}]$,

所以$L=2\cdot\frac{5t-2}{t^2-1}$,

因为$L'(t)=\frac{-2(5t^2-4t+5)}{(t^2-1)^2}<0$,

所以$L(t)$在$(1,\sqrt{2}]$上单调递减.

所以当$t=\sqrt{2}$,即$\theta=\frac{\pi}{4}$时,$L(t)$取得最小值,此时$L_{\min}=10\sqrt{2}-4$.

综上,$\theta=\frac{\pi}{4}$时,公路$AB$的长度最短.

22.解:$f(\theta)=4\cos^2\theta-4\cos\theta+3\sin^2\theta=\cos^2\theta-4\cos\theta+3$,$g(\theta)=m\cdot\cos\theta$.

(1)对任意的$\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$,若$f(\theta)\geqslant g(\theta)$,即$\cos^2\theta-4\cos\theta+3\geqslant m\cos\theta$,$\cos\theta\in(0,1]$,

所以$\cos\theta+\frac{3}{\cos\theta}-4\geqslant m$,设$\cos\theta=t$,$t\in(0,1]$,则$h(t)=t+\frac{3}{t}-4$在$(0,1]$上是减函数,

所以函数$h(t)=t+\frac{3}{t}-4$在$(0,1]$上的最小值为$h(1)=0$,

所以对任意的$\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$,若$f(\theta)\geqslant g(\theta)$恒成立,则$m\leqslant0$,所以$m$的取值范围为$(-\infty,0]$.

(2)对$\theta\in[-\pi,\pi]$,$f(\theta)=g(\theta)$有两个不等实根,即$\cos^2\theta-4\cos\theta+3=m\cos\theta$有两个不等实根,$\cos\theta\in[-1,1]$.当$\cos\theta=0$时,上述方程不成立,所以$\cos\theta\neq0$,所以两边同除以$\cos\theta$,得$\cos\theta+\frac{3}{\cos\theta}-4=m$有两个不等实根.设$\cos\theta=t$,$t\in[-1,0)\cup(0,1]$,则$F(t)=t+\frac{3}{t}-4$与$y=m$在$[-1,0)$和$(0,1]$上有交点,并且此函数在两个区间上是减函数,又函数$F(t)=t+\frac{3}{t}-4$在$(0,1]$上的最小值为$F(1)=0$,在$[-1,0)$的最大值为$F(-1)=-8$,所以要使对$\theta\in[-\pi,\pi]$,$f(\theta)=g(\theta)$有两个不等实根的$m$的取值范围为$(-\infty,-8]\cup[0,+\infty)$.





## 第15期

## 第2~3版同步周测参考答案

**一、单项选择题**

1~8.CCAADBDC

**二、多项选择题**

9.ACD　　10.ABD

11.BCD　　12.ACD

**三、填空题**

13. $\frac{\pi}{3}$　　14.3,$\sqrt{7}$

15. $\frac{3\sqrt{77}}{77}$　　16. $\sqrt{3}$

**四、解答题**

17.解:(1)由正弦定理,得

$3\sin A\cos B+\sin C\cos B+\sin B\cos C=0$,

$3\sin A\cos B+\sin(B+C)=0$,

所以$3\sin A\cos B+\sin A=0$,

因为$A\in(0,\pi)$,

所以$\sin A>0$,所以$\cos B=-\frac{1}{3}$,

所以$\sin B=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

(2)由余弦定理,得$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$,

即$12=9+c^2-2\times3c\times\left(-\frac{1}{3}\right)$,

化简得$c^2+2c-3=0$,

解得$c=1$或$c=-3$(舍去),

所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times3\times1\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=\sqrt{2}$.

18.解:(1)因为$a=3c$,$b=\sqrt{2}$,$\cos B=\frac{2}{3}$,所以由余弦定理,得$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{10c^2-2}{6c^2}=\frac{2}{3}$,解得$c=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(2)因为$\frac{\sin A}{a}=\frac{\cos B}{2b}$,所以由正弦定理,得$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\cos B}{2b}$,所以$2\sin B=\cos B$,因为$\sin^2B+\cos^2B=1$,所以$\sin B=\frac{\sqrt{5}}{5}$,$\cos B=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,所以$\sin\left(B+\frac{\pi}{2}\right)=\cos B=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

19.解:(1)因为$\angle BAC=45°$,$AB=2$,$\angle ACD=90°$,$BC=3$.

所以在△$ACB$中,由正弦定理

$\frac{AB}{\sin\angle ACB}=\frac{BC}{\sin\angle BAC}$,

得$\sin\angle ACB=\frac{AB\cdot\sin\angle BAC}{BC}=\frac{2\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{3}$.因为$AB<BC$,所以$\angle ACB$为锐角,

所以$\cos\angle ACB=\sqrt{1-\frac{2}{9}}=\frac{\sqrt{7}}{3}$.

(2)因为$DC=2\sqrt{2}$,

所以在△$BCD$中,$\cos\angle BCD=\cos(90°+\angle ACB)=-\sin\angle ACB=-\frac{\sqrt{2}}{3}$.

所以由余弦定理,得

$BD=\sqrt{CD^2+BC^2-2CD\cdot BC\cdot\cos\angle BCD}=\sqrt{8+9-2\times2\sqrt{2}\times3\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)}=5$.

20.解:(1)过$B$作圆$C$的切线$BE$,切点为$E$,连接$CE$,$BC$,则$CE\perp BE$.在Rt△$ABC$中,由$AC=6$,$AB=8$,得$BC=10$,$\tan\angle CBA=\frac{3}{4}$.在Rt△$BCE$中,由$BC=10$,$CE=5$,得$BE=5\sqrt{3}$,$\tan\angle CBE=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

所以$\tan\angle ABE=\tan(\angle ABC+\angle CBE)$

$=\frac{\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{3}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{48+25\sqrt{3}}{39}$.

答:当$AB$的长为8m时,最小摄像视角的正切值为$\frac{48+25\sqrt{3}}{39}$.

(2)以$B$为坐标原点建立如图所示的平面直角坐标系,设$BA=a$,则$C(a,6)$,

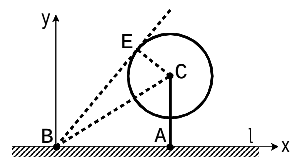
当$\angle ABE$的最大值为60°时,若直线$BE$与圆$C$相切,则$BA$的值最小.

所以直线$BE$的方程为$y=\sqrt{3}x$,

所以$CE=\frac{|\sqrt{3}a-6|}{2}=5$.

得$a=\frac{16\sqrt{3}}{3}$,或$a=-\frac{4\sqrt{3}}{3}$(舍去).

答:$B$距离$A$至少$\frac{16\sqrt{3}}{3}$m.




(第20题图)

21.解:(1)因为$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以$bc\sin A=\sqrt{3}$.

因为$bc\cos A+1=\frac{\sqrt{3}\cos A}{\sin A}+1=0$,

解得$\tan A=-\sqrt{3}$.

因为$0<A<\pi$,所以$A=\frac{2\pi}{3}$.

(2)由(1)知,

$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}bc\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以$bc=2$.

在△$ABC$中,因为$M$为$BC$的中点,

所以$2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

因为$AM=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以$3=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})^2=b^2+c^2+2bc\cdot\cos\frac{2\pi}{3}=b^2+c^2-2$,所以$b^2+c^2=5$.

又$bc=2$,解得$\begin{cases}c=2,\\b=1,\end{cases}$或$\begin{cases}c=1,\\b=2.\end{cases}$

由余弦定理,得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=7$,

所以$a=\sqrt{7}$,所以$BM=\frac{\sqrt{7}}{2}$.

因为$AN$为$\angle BAC$的角平分线,

$S_{\triangle ABN}=\frac{1}{2}AB\cdot AN\sin\frac{\pi}{3}$,

$S_{\triangle CAN}=\frac{1}{2}AC\cdot AN\sin\frac{\pi}{3}$,

所以$\frac{S_{\triangle ABN}}{S_{\triangle CAN}}=\frac{c}{b}=\frac{BN}{CN}=\frac{1}{2}$,或$\frac{BN}{CN}=2$,

所以$BN=\frac{\sqrt{7}}{3}$或$\frac{2\sqrt{7}}{3}$,

所以$MN=|BM-BN|=\frac{\sqrt{7}}{6}$.

22.解:(1)连接$AC$,在△$ABC$中,$AB=2$,$BC=4$,$B=120°$,

所以由余弦定理,得

$AC=\sqrt{AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos B}=2\sqrt{7}$.

在△$ACD$中,$AC=2\sqrt{7}$,$CD=5$,$\cos D=\frac{1}{5}$,

所以由余弦定理,得

$\sqrt{AD^2+CD^2-2AD\cdot CD\cdot\cos D}=AC$,

即$\sqrt{AD^2+5^2-2AD}=2\sqrt{7}$,

解得$AD=3$.

(2)在△$ABC$中,由余弦定理,得$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos B=20-16\cos B$.

在△$ACD$中,由余弦定理,得$AC^2=AD^2+DC^2-2AD\cdot DC\cdot\cos D=34-30\cos D$.

所以$20-16\cos B=34-30\cos D$,

即$15\cos D-8\cos B=7$,

而面积$S=\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin B+\frac{1}{2}AD\cdot CD\cdot\sin D=\frac{1}{2}(15\sin D+8\sin B)$,

所以$4S^2+49=225+64-240\cos(B+D)$,

即$S^2=60-60\cos(B+D)$,

所以$S^2=60-60\cos(B+D)\leqslant120$,

所以当$B+D=\pi$时,即$\cos D=\frac{7}{23}$,$\cos B=-\frac{7}{23}$时,四边形$ABCD$面积的最大值为$2\sqrt{30}$.