第 8 期

第 2~3 版同步周测

一、单项选择题

1~8.CDCBCAAA

二、多项选择题

9.ABC　　10.BD

11.BD　　12.AC

三、填空题

13.$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1$　　14.$\frac{2}{3}$

15.$2\sqrt{3+2\sqrt{3}}$　　16.$\frac{3}{4}$

四、解答题

17.**解**:(1)根据题意,要求椭圆的焦点在 x 轴上,焦距为 4,则 $c=2$,又由椭圆过点(0,2),则 $b=2$,则 $a^2=b^2+c^2=8$,故所求椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$.

(2)设椭圆的方程为 $mx^2+ny^2=1$,若椭圆过点 $M\left(1,\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$和 $N(\sqrt{2},1)$,则有$\begin{cases}m+\frac{3n}{2}=1,\\2m+n=1,\end{cases}$解得 $n=\frac{1}{2}$,$m=\frac{1}{4}$,所以椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

18.**解**:(1)根据题意,椭圆$\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{16}=1$中,$a=2\sqrt{5}$,$b=4$,则 $c=\sqrt{20-16}=2$,则 A(0,4),F(2,0).易知直线 BC 斜率存在,设为 k,再设 $B(x_1,y_1)$,$C(x_2,y_2)$,BC 的中点 $D(x_0,y_0)$,则有$\begin{cases}\frac{x_1^2}{20}+\frac{y_1^2}{16}=1,\\\frac{x_2^2}{20}+\frac{y_2^2}{16}=1,\end{cases}$两式相减,得$\frac{x_0}{5}+\frac{y_0k}{4}=0$,①

又由 F(2,0)为△ABC 的重心,得$\frac{x_1+x_2+0}{3}=\frac{2x_0}{3}=2$,$\frac{y_1+y_2+4}{3}=\frac{2y_0+4}{3}=0$,解得 $x_0=3$,$y_0=-2$,代入①得 $k=\frac{6}{5}$,则直线 BC 的方程为 6x-5y-28=0.

(2)根据题意,由(1)的结论,$\overrightarrow{AB}=(x_1,y_1-4)$,$\overrightarrow{AC}=(x_2,y_2-4)$,因为$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$,

所以 $x_1x_2+y_1y_2-4(y_1+y_2)+16=0$,②

易知直线 BC 斜率存在,设 BC 的方程为 y=kx+b,代入 $4x^2+5y^2=80$,可得$(4+5k^2)x^2+10bkx+5b^2-80=0$.

所以 $x_1+x_2=\frac{-10bk}{4+5k^2}$,$x_1\cdot x_2=\frac{5b^2-80}{4+5k^2}$,

$y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2b=\frac{8b}{4+5k^2}$,

$y_1\cdot y_2=k^2x_1x_2+bk(x_1+x_2)+b^2=\frac{4b^2-80k^2}{4+5k^2}$,

代入②得 $b=-\frac{4}{9}$,或 b=4(舍去).

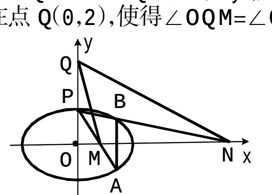
所以直线 BC 过定点 $E\left(0,-\frac{4}{9}\right)$,设 D(x,y),则$\frac{y+\frac{4}{9}}{x}\cdot\frac{y-4}{x}=-1$,即 $9x^2+9y^2-32y-16=0$,所以所求点 D 的轨迹方程是 $x^2+\left(y-\frac{16}{9}\right)^2=\left(\frac{20}{9}\right)^2(y\neq4)$.

19.**解**:(1)根据题意,直线 l 与椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$恰有一个公共点 P,即相切,由$\begin{cases}y=kx+m,\\\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\end{cases}$得$(a^2k^2+b^2)x^2+2a^2kmx+a^2(m^2-b^2)=0$,则 $\Delta=(2a^2km)^2-4\cdot(a^2k^2+b^2)a^2(m^2-b^2)=0$,化简,得 $m^2=a^2k^2+b^2$.

(2)因点 Q 与点 P 关于坐标原点 O 对称,故△QAB 的面积是△OAB 的面积的两倍.所以当 $k=-\frac{1}{2}$时,△OAB 的面积取到最大值$\frac{a^2}{2}$,此时 OA⊥OB,从而原点 O 到直线 l 的距离 $d=\frac{a}{\sqrt{2}}$,又 $d=\frac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}$,故$\frac{m^2}{k^2+1}=\frac{a^2}{2}$.再由(1),得$\frac{a^2k^2+b^2}{k^2+1}=\frac{a^2}{2}$,则 $k^2=1-\frac{2b^2}{a^2}$.又 $k=-\frac{1}{2}$,故 $k^2=1-\frac{2b^2}{a^2}=\frac{1}{4}$,即$\frac{b^2}{a^2}=\frac{3}{8}$,从而 $e^2=\frac{c^2}{a^2}=1-\frac{b^2}{a^2}=\frac{5}{8}$,即 $e=\frac{\sqrt{10}}{4}$.所以椭圆的离心率为$\frac{\sqrt{10}}{4}$.

20.**解**:(1)设椭圆的焦距为 2c,由题意可得,b=1,$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$a^2=b^2+c^2$,解得 a=2.所以椭圆 C 的标准方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)设 B(m,n),$M(x_M,0)$,$N(x_N,0)$,直线 BP 的方程为 $y-1=\frac{n-1}{m}x$,令 y=0,可得 $x_N=\frac{m}{1-n}$,所以 $N\left(\frac{m}{1-n},0\right)$.由点 A,B 关于 x 轴对称,所以 A(m,-n).同理,$M\left(\frac{m}{1+n},0\right)$.假设在 y 轴的正半轴上存在点 Q(0,t)(t>0),使得∠OQM=∠ONQ.由 tan∠OQM=tan∠ONQ,可得$\frac{|x_M|}{|t|}=\frac{|t|}{|x_N|}$,即 $t^2=|x_Mx_N|$,所以 $t^2=\frac{m^2}{1-n^2}$,又点 B 在椭圆 C 上,所以$\frac{m^2}{4}+n^2=1$,所以 $t^2=4$,又 t>0,解得 t=2.经过验证:t=2 时,∠OQM=∠ONQ.所以在 y 轴的正半轴上存在点 Q(0,2),使得∠OQM=∠ONQ.



(第 20 题图)

21.(1)**解**:椭圆的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$,则 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,得 $a=\sqrt{2}c$,$b=c$,所以椭圆 C 的方程为 $x^2+2y^2=2c^2$,由$\begin{cases}x=\frac{\sqrt{2}}{2}y+1,\\x^2+2y^2=2c^2,\end{cases}$得 $5y^2+2\sqrt{2}y+2-4c^2=0$,设 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,则 $y_1+y_2=-\frac{2\sqrt{2}}{5}$,$y_1y_2=\frac{2-4c^2}{5}$.由 $OM\perp ON$,得 $x_1x_2+y_1y_2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}y_1+1\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}y_2+1\right)+y_1y_2=\frac{3}{2}y_1y_2+\frac{\sqrt{2}}{2}(y_1+y_2)+1=\frac{3}{2}\cdot\frac{2-4c^2}{5}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{2\sqrt{2}}{5}+1=0$,

解得 $c=1$,则 $a=\sqrt{2}$,$b=1$,所以椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

(2)**证明**:$N(x_2,y_2)$,关于 x 轴的对称点为 $Q(x_2,-y_2)$,

由$\begin{cases}x=my+1,\\x^2+2y^2=2,\end{cases}$得$(2+m^2)y^2+2my-1=0$,

又 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,则 $y_1+y_2=-\frac{2m}{2+m^2}$,$y_1y_2=-\frac{1}{2+m^2}$,则 $k_{PM}=\frac{y_1}{x_1-2}$,$k_{QM}=\frac{y_2+y_1}{x_1-x_2}$,

$k_{PM}-k_{MQ}=\frac{x_1y_1-x_2y_1-x_1y_2-x_1y_1+2y_2+2y_1}{(x_1-2)(x_1-x_2)}$

$=\frac{-y_1(my_2+1)-(my_1+1)y_2+2y_1+2y_2}{(x_1-2)(x_1-x_2)}$

$=\frac{y_1+y_2-2my_1y_2}{(x_1-2)(x_1-x_2)}$

$=\frac{-\frac{2m}{2+m^2}+\frac{2m}{2+m^2}}{(x_1-2)(x_1-x_2)}=0$,

即 $k_{PM}=k_{MQ}$,则 P、M、Q 三点共线.

22.(1)**解**:在圆 E 中,令 $y=0$,得 $x=\pm\sqrt{3}$,所以由题意可得 $c=\sqrt{3}$.

圆 E 的方程可化为 $x^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{49}{16}$,

所以圆 E 的半径为$\frac{7}{4}$,

所以$|PF_1|=\frac{7}{2}$.

连接 PF_2,因为 F_2 在圆上,

所以 $PF_2\perp F_1F_2$,

又$|F_1F_2|=2c=2\sqrt{3}$,

则$|PF_2|=\sqrt{|PF_1|^2-|F_1F_2|^2}$

$=\sqrt{\frac{49}{4}-12}=\frac{1}{2}$,

由椭圆的定义,得 $2a=|PF_1|+|PF_2|=4$,

所以 $a=2$,$b^2=a^2-c^2=1$,

所以椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)**证明**:当直线 l 的斜率存在时,设 l 的斜率为 k,则 l 的方程为 $y=kx+\sqrt{\frac{3}{5}}$,

代入椭圆 C 的方程得 $x^2+4\left(kx+\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2=4$,即$(1+4k^2)x^2+8\sqrt{\frac{3}{5}}kx-\frac{8}{5}=0$,

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $x_1+x_2=-\sqrt{\frac{3}{5}}\cdot\frac{8k}{1+4k^2}$,$x_1x_2=-\frac{8}{5(1+4k^2)}$,

所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+\left(kx_1+\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\left(kx_2+\sqrt{\frac{3}{5}}\right)=(1+k^2)x_1x_2+\sqrt{\frac{3}{5}}k\cdot(x_1+x_2)+\frac{3}{5}=-\frac{8(1+k^2)}{5(1+4k^2)}-\frac{24k^2}{5(1+4k^2)}+\frac{3}{5}=-\frac{8(1+4k^2)}{5(1+4k^2)}+\frac{3}{5}=-1$;

当直线 l 的斜率不存在时,直线 l 与 y 轴重合,此时点 $A(0,-1)$,$B(0,1)$,$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-1$.

综上,$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-1$ 为定值.

第 5 期

第 2~3 版同步周测

一、单项选择题

1~8.CDAAABDA

二、多项选择题

9.BC　　10.ABC

11.CD　　12.ACD

三、填空题

13.$k_1>k_2$

14.$y=x+\frac{5}{27}$或 $y=x-1$

15.$(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$

16.$\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$

四、解答题

17.**解**:(1)化简,得 $f(x)=\frac{2e^x}{1-x}$.

因为 $f'(x)=\left(\frac{2e^x}{1-x}\right)'$

$=\frac{(2e^x)'(1-x)-2e^x(1-x)'}{(1-x)^2}$

$=\frac{2(2-x)e^x}{(1-x)^2}$,所以 $f'(2)=0$.

(2)因为 $f'(x)=\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)'-x'+(\ln x)'$

$=-\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}-1+\frac{1}{x}$,所以 $f'(1)=-\frac{3}{2}$.

18.**解**:$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$,$g'(x)=\frac{a}{x}(x>0)$.

由已知,得$\begin{cases}\sqrt{x}=a\ln x,\\\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{a}{x},\end{cases}$

解得 $a=\frac{e}{2}$,$x=e^2$.所以两条曲线的交点坐标为(e^2,e),切线的斜率 $k=f'(e^2)=\frac{1}{2e}$,所以切线的方程为 $y-e=\frac{1}{2e}(x-e^2)$,即$\frac{x}{2e}-y+\frac{e}{2}=0$.

19.(1)**解**:函数 f(x)的定义域为$(0,+\infty)$,$f'(x)=ae^x\ln x+\frac{a}{x}e^x-\frac{b}{x^2}e^{x-1}+\frac{b}{x}e^{x-1}$,

由题意可得 f(1)=2,f′(1)=e,

则$\begin{cases}b=2,\\ae-b+b=e,\end{cases}$解得 a=1,b=2.

(2)**证明**:由(1),知 $f(x)=e^x\ln x+\frac{2}{x}e^{x-1}$,

从而 f(x)>1 等价于 $x\ln x>xe^{-x}-\frac{2}{e}$.

设函数 g(x)=xlnx,则 g′(x)=1+lnx,

所以当 $x\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$时,g′(x)<0;

当 $x\in\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$时,g′(x)>0.

故 g(x)在$\left(0,\frac{1}{e}\right)$上单调递减,

在$\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$上单调递增,

从而 g(x)在$(0,+\infty)$上的最小值为 $g\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$.

设函数 $h(x)=xe^{-x}-\frac{2}{e}$,

则 $h'(x)=e^{-x}(1-x)$.

所以当 $x\in(0,1)$时,h′(x)>0;

当 $x\in(1,+\infty)$时,h′(x)<0,

故 h(x)在(0,1)上单调递增,

在$(1,+\infty)$上单调递减,

从而 h(x)在$(0,+\infty)$上的最大值为 $h(1)=-\frac{1}{e}$.

综上,当 x>0 时,g(x)>h(x),即 f(x)>1.

20.**解**:(1)$f'(x)=e^x-2ex+a$,由 $f(x)$在(0,1)上单调,知在(0,1)上 $f'(x)\geqslant0$ 或 $f'(x)\leqslant0$ 恒成立.令 $g(x)=e^x-2ex+a$,则 $g'(x)=e^x-2e$,令 $g'(x)=0$,解得 $x=\ln(2e)$,当 $0<x<1<\ln(2e)$时,$g'(x)<0$,$g(x)$在(0,1)上单调递减,所以由题意得,$g(1)\geqslant0$ 或 $g(0)\leqslant0$,解得 $a\leqslant-1$ 或 $a\geqslant e$,所以实数 a 的取值范围为$(-\infty,-1]\cup[e,+\infty)$.

(2)$y=e^x-ex^2+ax+ex\ln x$ 的图象恒在 x 轴上方,即当 $x\in(0,+\infty)$时,$y>0$ 恒成立,亦即 $a>ex-\frac{e^x}{x}-e\ln x$ 在$(0,+\infty)$上恒成立.令 $h(x)=ex-\frac{e^x}{x}-e\ln x$,

则 $h'(x)=\frac{ex^2-ex-e^x(x-1)}{x^2}$

$=\frac{(ex-e^x)(x-1)}{x^2}$,

令 $h'(x)>0$,解得 $0<x<1$;

令 $h'(x)<0$,解得 $x>1$,所以函数 $h(x)$在(0,1)上单调递增,在$(1,+\infty)$上单调递减,所以 $h(x)$在 $x=1$ 处取得最大值,最大值为 $h(1)=0$,所以 a>0,所以实数 a 的取值范围为$(0,+\infty)$.

21.**解**:(1)设 AC=c.在△ABM 中,

$\tan\angle BMA=\frac{a}{\frac{c}{2}}=\frac{2a}{c}$.

在△CDM 中,

$\tan\angle DMC=\frac{b}{\frac{c}{2}}=\frac{2b}{c}$.

因为∠BMD=90°,所以∠BMA+∠DMC=90°,所以 tan∠BMA·tan∠DMC=1,

即 $c^2=4ab$,所以 $c=2\sqrt{ab}$,所以 $AC=2\sqrt{ab}$.

(2)$\lambda=\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}=\frac{2k}{1+k^2}=\frac{2}{k+\frac{1}{k}}$.

在△CBD 中,过点 B 作 CD 的垂线,垂足为 E,

所以 $\tan\angle CBE=\frac{a}{c}$,

$\tan\angle DBE=\frac{b-a}{c}$,

所以 $\tan\angle CBD=\tan(\angle CBE+\angle DBE)=\frac{\tan\angle CBE+\tan\angle DBE}{1-\tan\angle CBE\cdot\tan\angle DBE}=\frac{\frac{a}{2\sqrt{ab}}+\frac{b-a}{2\sqrt{ab}}}{1-\frac{a}{2\sqrt{ab}}\cdot\frac{b-a}{2\sqrt{ab}}}=\frac{\frac{b}{2\sqrt{ab}}}{1-\frac{b-a}{4b}}=1$,

所以$\sqrt{\frac{b}{a}}=\frac{3}{2}+\frac{a}{2b}$,

因为 $k=\sqrt{\frac{b}{a}}$,所以 $k=\frac{3}{2}+\frac{1}{2k^2}$,

即 $2k^3-3k^2-1=0$,

设 $f(x)=2x^3-3x^2-1$,$x>1$,

所以 $f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)>0$,

所以函数 $f(x)$单调递增.

若 $\lambda\in(0.8,1)$,则 $2<k+\frac{1}{k}<\frac{5}{2}$,

即 $1<k<2$,

因为 $f(1)=-2<0$,$f(2)=3>0$,

所以 $1<k<2$ 成立,所以 $\lambda\in(0.8,1)$成立,所以能满足委托单位的设计要求.

22.**解**:(1)$F(x)=f(x)-g(x)=m\ln x-\frac{x-1}{x}$,$F'(x)=\frac{m}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{mx-1}{x^2}$.当 $m\leqslant0$ 时,$F'(x)<0$,则 $F(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减;当 $m>0$ 时,由 $F'(x)<0$,得 $0<x<\frac{1}{m}$,由 $F'(x)>0$,得 $x>\frac{1}{m}$,所以函数 $F(x)$在$\left(0,\frac{1}{m}\right)$上单调递减,在$\left(\frac{1}{m},+\infty\right)$上单调递增.

(2)函数 $f(x)=m\ln x$ 在点$(a,m\ln a)$处的切线方程为 $y-m\ln a=\frac{m}{a}(x-a)$,即 $y=\frac{m}{a}x+m\ln a-m$.函数 $g(x)=\frac{x-1}{x}$在点$\left(b,1-\frac{1}{b}\right)$处的切线方程为 $y-\left(1-\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{b^2}(x-b)$,即 $y=\frac{1}{b^2}x-\frac{2}{b}+1$,又 $y=f(x)$与 $y=g(x)$的图象有唯一一条公切线,

故$\begin{cases}\frac{m}{a}=\frac{1}{b^2},①\\m\ln a-m=1-\frac{2}{b},②\end{cases}$

由①得,$m=\frac{a}{b^2}$代入②消去 m,整理得 $b^2-2b-a\ln a+a=0$,③

则此关于 $b(b>0)$的方程③有唯一解,令 $G(b)=b^2-2b-a\ln a+a=(b-1)^2-a\ln a+a-1$,令 $h(a)=-a\ln a+a-1$,$h'(a)=-\ln a$,由 $h'(a)>0$,得 $0<a<1$,由 $h'(a)<0$,得 $a>1$,所以函数 $h(a)$在(0,1)上单调递增,在$(1,+\infty)$上单调递减,则 $h(a)\leqslant h(1)=0$.

(i)当 $h(a)=0$ 时,方程③有唯一解 $b=1$,由 $h(a)=-a\ln a+a-1=0$,得 $a=1$,此时 $m=\frac{a}{b^2}=1$;

(ii)当 $h(a)<0$ 时,二次函数 $G(b)=(b-1)^2-a\ln a+a-1$ 在 $b\in(1,+\infty)$上显然有一个零点.$b\in(0,1)$时,由方程② $m\ln a-m=1-\frac{2}{b}$,可得 $m(\ln a-1)=\frac{b-2}{b}<0$,而 $m>0$,则 $\ln a-1<0$,则 $G(0)=-a\ln a+a=-a(\ln a-1)>0$,所以二次函数 $g(b)=(b-1)^2-a\ln a+a-1$ 在 $b\in(0,1)$上也有一个零点,不合题意.

综上,$m=1$.

第 6 期

第 2~3 版同步周测

一、单项选择题

1~8.CDDABCCD

二、多项选择题

9.BC　　10.BCD

11.AB　　12.CD

三、填空题

13.$x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

14.0

15.6

16.$\left[\frac{2}{3}e\sqrt{e}-\sqrt{e},+\infty\right)$

四、解答题

17.**解**:(1)当 $k=0,a=2$ 时,$f(x)=-\sin 2x+2\sin x$,$f'(x)=-2\cos 2x+2\cos x=-4\cos^2x+2\cos x+2=2(2\cos x+1)(1-\cos x)$,

当 $x\in[0,\pi]$时,令 $f'(x)=0$,

解得 $x=\frac{2\pi}{3}$ 或 $x=0$,

所以 $f(0)=0,f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2},f(\pi)=0$,

所以 $f(x)_{max}=f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

(2)当 $k=4$ 时,$f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,则 $f'(x)=4-2(\cos^2x-\sin^2x)+a\cos x\geqslant 0$ 对 $\forall x\in\mathbf{R}$ 恒成立.

得 $4\cos^2x-a\cos x-6\leqslant 0$,

设 $t=\cos x\in[-1,1]$,$g(t)=4t^2-at-6$,

则 $g(t)\leqslant 0$ 在$[-1,1]$上恒成立,由二次函数图象,知$\begin{cases}g(-1)\leqslant 0,\\ g(1)\leqslant 0,\end{cases}$得$-2\leqslant a\leqslant 2$.所以 a 的取值范围是$[-2,2]$.

18.(1)**解**:当 $m=0$ 时,$f(x)=e^x-ex$,$f'(x)=e^x-e$,又 $f'(x)$是增函数,且 $f'(1)=0$,所以当 $x>1$ 时,$f'(x)>0$,当 $x<1$ 时,$f'(x)<0$,所以 $f(x)$在$(-\infty,1)$上单调递减,在$(1,+\infty)$上单调递增,所以当 $x=1$ 时,$f(x)$取得极小值 $f(1)=0$,无极大值.

(2)**证明**:$f'(x)=e^x-2mx+m-e$,令 $g(x)=f'(x)=e^x-2mx+m-e$,则 $g'(x)=e^x-2m$,当 $m<0$ 时,则 $g'(x)>0$,故 $g(x)=f'(x)$在$(0,1)$上单调递增,又 $g(0)=f'(0)=1+m-e<0,g(1)=f'(1)=-m>0$,所以存在 $x_0\in(0,1)$,使得 $g(x_0)=f'(x_0)=0$,且当 $x\in(0,x_0)$时,$f'(x)<0$,$f(x)$是减函数,当 $x\in(x_0,1)$时,$f'(x)>0$,$f(x)$是增函数,又因为 $f(0)=1,f(1)=0$,所以 $f(x)$在$(0,1)$上存在唯一零点.

19.**解**:(1)扇形 EOC 的面积为$\frac{1}{2}\times\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\times 50^2=\frac{2500\pi}{6}-\frac{2500}{2}\theta$,四边形 $OCBF$ 的面积为 $30\times 50-\frac{1}{2}\times 30\times\frac{30}{\tan\theta}$,

故阴影部分的面积为 $S(\theta)=1500+\frac{2500\pi}{6}-50\left(\frac{9}{\tan\theta}+25\theta\right)$.

当 F 与 B 重合时,∠FOC 最小,设为 θ_0,所以 $\theta\in\left[\theta_0,\frac{\pi}{3}\right]$,$\tan\theta_0=\frac{3}{5}$,

所以 $\tan\theta\in\left[\frac{3}{5},\sqrt{3}\right]$.

(2)设 $h(\theta)=\frac{9}{\tan\theta}+25\theta$,

则$h'(\theta)=\frac{-9\sin^2\theta-9\cos^2\theta}{\sin^2\theta}+25=\frac{-9}{\sin^2\theta}+25$,

令 $h'(\theta)=0$,得 $\tan\theta=\frac{3}{4}\in\left[\frac{3}{5},\sqrt{3}\right]$,

记其解为 θ_1,并且 $h(\theta)$在$[\theta_0,\theta_1)$上单调递减,在$\left(\theta_1,\frac{\pi}{3}\right]$上单调递增,

所以 $h(\theta)_{min}=h(\theta_1)$,阴影部分的面积的最大值为 $1500+\frac{2500\pi}{6}-50h(\theta_1)$,

此时 $\tan\theta_1=\frac{3}{4}$,

故监控区域 S 最大时,角 θ 的正切值为$\frac{3}{4}$.

20.**解**:(1)函数 f(x)的定义域为$(0,+\infty)$,$f'(x)=2x\ln x+x=2x\left(\ln x+\frac{1}{2}\right)$.

令 $f'(x)=0$,解得 $x=\frac{\sqrt{e}}{e}$.

当 $0<x<\frac{\sqrt{e}}{e}$时,$f'(x)<0$,

$f(x)$在$\left(0,\frac{\sqrt{e}}{e}\right)$上单调递减;

当 $x>\frac{\sqrt{e}}{e}$时,$f'(x)>0$,

$f(x)$在$\left(\frac{\sqrt{e}}{e},+\infty\right)$上单调递增.

综上,$f(x)$的单调递减区间为$\left(0,\frac{\sqrt{e}}{e}\right)$,单调递增区间为$\left(\frac{\sqrt{e}}{e},+\infty\right)$.

(2)因为 $f(x)-ax+1\geqslant 0$ 恒成立,即 $x^2\ln x-ax+1\geqslant 0$ 恒成立等价于 $a\leqslant x\ln x+\frac{1}{x}$ 恒成立.

令 $g(x)=x\ln x+\frac{1}{x}$,$g'(x)=\ln x+1-\frac{1}{x^2}$,

令 $h(x)=\ln x+1-\frac{1}{x^2}$,则 $h'(x)=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}>0$ 在$(0,+\infty)$上恒成立,所以 $g'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,因为 $g'(1)=0$,所以 $0<x<1$ 时,$g'(x)<0$,$g(x)$在$(0,1)$上单调递减,$x>1$ 时,$g'(x)>0$,$g(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增,所以 $g(x)_{min}=g(1)=1$,所以 $a\leqslant 1$,即实数 a 的取值范围为$(-\infty,1]$.

21.**解**:(1)由已知得当 $a=1$ 时,$f'(x)=2xe^x+x^2e^x+2x+4=(xe^x+2)(x+2)$,令 $g(x)=xe^x+2$,则 $g'(x)=(x+1)e^x$,当 $x<-1$ 时,$g'(x)<0$,当 $x>-1$ 时,$g'(x)>0$,所以函数 $g(x)$在$(-\infty,-1)$上单调递减,在$(-1,+\infty)$上单调递增,所以 $g(x)_{min}=g(-1)=-\frac{1}{e}+2>0$,故 $g(x)=xe^x+2>0$,所以当 $x<-2$ 时,$f'(x)<0$,当 $x>-2$ 时,$f'(x)>0$,所以函数 $f(x)$在$(-\infty,-2)$上单调递减,在$(-2,+\infty)$上单调递增,所以 $f(x)_{min}=f(-2)=4e^{-2}-4$.

(2)$f'(x)=2xe^x+x^2e^x+2ax+4a=(xe^x+2a)(x+2)$,令 $h(x)=xe^x+2a(x>0)$.

①当 $a\geqslant 0$ 时,$h(x)=xe^x+2a>0$,又因为 $x+2>0$,故 $f'(x)=(xe^x+2a)(x+2)>0$,

此时 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,$f(x)$无极值;

②当 $a<0$ 时,$h'(x)=(x+1)e^x>0$,$h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,又 $h(0)=2a<0$,$h(-2a)=-2a(e^{-2a}-1)>0$,

所以 $h(x)=xe^x+2a$ 在$(0,+\infty)$上存在唯一零点,设为 $x_0(x_0>0)$,所以当 $x\in(0,x_0)$时,$h(x)<0$,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减,当 $x\in(x_0,+\infty)$时,$h(x)>0$,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增,所以当 $a<0$ 时,函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$上存在极值点 x_0.

综上,实数 a 的取值范围为$(-\infty,0)$.

22.(1)**解**:因为 $f(x)=e^x-ax-1$,定义域为$\mathbf{R}$,所以 $f(0)=e^0-a\cdot 0-1=0$,$f'(x)=e^x-a$,当$a\leqslant 0$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$为增函数,而 $f(0)=0$,所以 $f(x)$仅有一个零点,满足题意;当$a>0$ 时,令 $f'(x)>0$,解得 $x>\ln a$,令 $f'(x)<0$,解得 $x<\ln a$,所以在$(-\infty,\ln a)$上,$f(x)$单调递减,在$(\ln a,+\infty)$上,$f(x)$单调递增,所以 $f(x)_{min}=f(\ln a)$.

①当 $\ln a=0$,即 $a=1$ 时,$f(x)_{min}=f(\ln a)=f(0)=0$,$f(x)=e^x-x-1$,

当 $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$时,$f(x)>0$,此时 $f(x)$仅有一个零点,满足题意;

②当 $\ln a<0$,即 $0<a<1$ 时,$\ln a-\frac{1}{a}<\ln a$,

在$(\ln a,+\infty)$上,$f(x)$单调递增,$f(0)=0$,$f(x)$有一个零点,所以 $f(\ln a)<0$,

在$(-\infty,\ln a)$上,$f(x)$单调递减,而 $f\left(\ln a-\frac{1}{a}\right)=e^{\ln a-\frac{1}{a}}-a\left(\ln a-\frac{1}{a}\right)-1=e^{\ln a-\frac{1}{a}}-a\ln a>0$,

由零点存在性定理,得 $f(x)$在$(-\infty,\ln a)$上也有一个零点,不满足题意;

③当 $\ln a>0$,即 $a>1$ 时,在$(-\infty,\ln a)$上,$f(x)$单调递减,$f(0)=0$,$f(x)$有一个零点,所以 $f(\ln a)<0$.在$(\ln a,+\infty)$上,$f(x)$单调递增,由①知,$e^a>a+1$,$e^a>a$,即 $a>\ln a$,$3a\in(\ln a,+\infty)$,所以 $f(3a)=e^{3a}-3a^2-1=(e^a)^3-3a^2-1>(a+1)^3-3a^2-1=a^3+3a>0$,由零点存在性定理可得 $f(x)$在$(\ln a,+\infty)$上也有一个零点,不满足题意.

综上所述,实数 a 的取值范围为$(-\infty,0]\cup\{1\}$.

(2)**证明**:$xe^{2x}-xe^x-e^x\ln x=e^x(xe^x-x-\ln x)$,令 $g(x)=xe^x-x-\ln x$,则 $g'(x)=(x+1)e^x-1-\frac{1}{x}=(x+1)\left(e^x-\frac{1}{x}\right)$,令 $h(x)=e^x-\frac{1}{x}$,则 $h'(x)=e^x+\frac{1}{x^2}>0$,即 $h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,又 $h\left(\frac{1}{2}\right)<0$,$h(1)>0$,所以 $h(x)$在$(0,+\infty)$有且仅有一个零点,设为 x_0,$x_0\in(0,+\infty)$,则 $e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$,即 $x_0=-\ln x_0$,$g'(x_0)=0$,所以 $x\in(0,x_0)$时,$g'(x)<0$,$x\in(x_0,+\infty)$时,$g'(x)>0$,所以 $g(x)$的最小值为 $g(x_0)=x_0e^{x_0}-x_0-\ln x_0=1-x_0-(-x_0)=1$,即 $xe^x-x-\ln x\geqslant 1$,当且仅当 $x=x_0$ 时取等号,又由(1)知,$e^x\geqslant x+1$,当且仅当 $x=0$ 时取等号,

可得 $e^x(xe^x-x-\ln x)\geqslant e^x\geqslant x+1$,而以上两式不同时取等,故 $xe^{2x}-xe^x-e^x\ln x>x+1$.

第 7 期

第 2~3 版同步周测

一、单项选择题

1~8.ADBCDBAD

二、多项选择题

9.BD　　10.BD

11.AC　　12.BC

三、填空题

13.3 或 5

14.$x+y+8=0$ 或 $3x-5y=0$

15.6

16.$x^2+\frac{y^2}{3}=1(y\neq 0)$

四、解答题

17.**解**:(1)因为△ABC 的顶点为 $A(0,4)$,$B(1,-2)$,$C(-3,-4)$,所以 BC 的中点 $M(-1,-3)$,所以中线 AM 所在直线的斜率为 $k=\frac{4+3}{0+1}=7$,所以 BC 边上的中线 AM 所在的直线方程为 $y=7x+4$.

(2)因为直线 AB 的斜率为 $k_{AB}=\frac{-2-4}{1-0}=-6$,所以 AB 边上的高所在的直线方程为 $y+4=\frac{1}{6}(x+3)$,即 $x-6y-21=0$.

18.**解**:(1)直线 l:$(k-1)x-2y+5-3k=0(k\in\mathbf{R})$可化为$(x-3)k-x-2y+5=0$,

令$\begin{cases}x-3=0,\\ -x-2y+5=0,\end{cases}$得定点 P 的坐标为$(3,1)$.

(2)易知圆心在 AP 的垂直平分线上,设 AP 垂直平分线上的点为(x,y),则$\sqrt{(x-5)^2+(y+1)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}$,化简得 $x-y-4=0$,

又因为圆心在直线 $x-2y+2=0$ 上,

所以由$\begin{cases}x-2y+2=0,\\ x-y-4=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=10,\\ y=6,\end{cases}$

所以圆 C 的圆心坐标为$(10,6)$,

半径 $r=\sqrt{(10-3)^2+(6-1)^2}=\sqrt{74}$,

所以圆 C 的方程为$(x-10)^2+(y-6)^2=74$.

19.**解**:(1)根据题意,圆$(x-3)^2+(y-4)^2=4$ 的圆心为$(3,4)$,半径 $r=2$,

分 2 种情况讨论:

①当直线的斜率不存在时,直线方程为 $x=1$,与圆相切,符合题意;

②当直线的斜率存在时,设切线的方程为 $y=k(x-1)$,

则有$\frac{|3k-4-k|}{\sqrt{1+k^2}}=2$,解得 $k=\frac{3}{4}$,此时切线的方程为 $y=\frac{3}{4}(x-1)$,即 $3x-4y-3=0$.

综上,所求的切线方程为 $x=1$ 或 $3x-4y-3=0$.

(2)根据题意,设 $P(m,n)$,

则$|AP|^2+|BP|^2=(m+1)^2+n^2+(m-1)^2+n^2=2(m^2+n^2)+2$,

又由 $OP=\sqrt{m^2+n^2}$(O 为坐标原点),则当 OP 最小时,$|AP|^2+|BP|^2$取得最小值,

又由 P 在圆$(x-3)^2+(y-4)^2=4$ 上,

则$|OP|_{min}=5-2=3$,

即(m^2+n^2)的最小值为 9,此时$|AP|^2+|BP|^2$取得最小值,且其最小值为 $2\times 9+2=20$,

此时 $m=3\times\frac{3}{5}=\frac{9}{5}$,$n=3\times\frac{4}{5}=\frac{12}{5}$,

即点 P 的坐标为$\left(\frac{9}{5},\frac{12}{5}\right)$.

20.**解**:(1)根据题意,圆 C:$x^2+y^2-6x-10y-6t=0$ 变形可得$(x-3)^2+(y-5)^2=34+6t$,

故圆心为 C(3,5),半径 $r=\sqrt{34+6t}$,

则圆心 C 到直线 l 的距离为

$d=\frac{|3+15+12|}{\sqrt{10}}=3\sqrt{10}$,

又弦长为 $2\sqrt{10}$,

则 $r^2=(3\sqrt{10})^2+(\sqrt{10})^2=100$,

即 $34+6t=100$,解得 $t=11$.

(2)当 $t=1$ 时,圆 C 的方程为 $x^2+y^2-6x-10y-6=0$,①

变形可得$(x-3)^2+(y-5)^2=40$,

则圆心为 C(3,5),半径 $r=2\sqrt{10}<3\sqrt{10}$,圆 C 与直线 l 相离.

假设在直线 AB 上存在一个定点满足条件,设动点 P(m,n).

由已知得 PA⊥AC,PB⊥BC,

则 A,B 在以 CP 为直径的圆$(x-3)\cdot(x-m)+(y-5)(y-n)=0$ 上,

该圆的方程可化为 $x^2+y^2-(3+m)x-(5+n)y+3m+5n=0$.②

由①-②得,直线 AB 的方程为$(m-3)x+(n-5)y-3m-5n-6=0$.③

又点 P(m,n)在直线 l 上,则 $m+3n+12=0$,即 $m=-3n-12$,代入③式得

$(-3n-15)x+(n-5)y+4n+30=0$,

即直线 AB 的方程为 $15x+5y-30+n\cdot(3x-y-4)=0$.

因为上式对任意 n 都成立,

故$\begin{cases}3x-y-4=0,\\ 15x+5y-30=0,\end{cases}$得$\begin{cases}x=\frac{5}{3},\\ y=1,\end{cases}$

故直线 AB 恒过一个定点,定点坐标为$\left(\frac{5}{3},1\right)$.

21.**解**:(1)过点 $B(4,0)$与 $C(8,-4)$的直线方程为 $x+y-4=0$.

依题意,知 A,B 两球碰撞时,球 A 的球心在直线 $x+y-4=0$ 上,且在第一象限,

此时$|AB|=2$,设 A,B 两球碰撞时球 A 的球心坐标为(a,b),

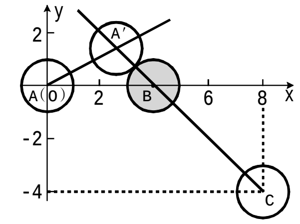
则$\begin{cases}a+b-4=0,\\ \sqrt{(a-4)^2+b^2}=2,\\ a>0,b>0,\end{cases}$

解得 $a=4-\sqrt{2}$,$b=\sqrt{2}$,

即 A,B 两球碰撞时球 A 的球心坐标为 $A'(4-\sqrt{2},\sqrt{2})$,

所以母球 A 球心运动的直线方程为

$y=\frac{\sqrt{2}}{4-\sqrt{2}}x=\frac{2\sqrt{2}+1}{7}x$.



(第 21 题图)

(2)$A(0,-2)$,$A'(4-\sqrt{2},\sqrt{2})$,因为$\overrightarrow{AA'}=(4-\sqrt{2},2+\sqrt{2})$,$\overrightarrow{CA'}=(-4-\sqrt{2},\sqrt{2}+4)$,所以$\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{CA'}=6\sqrt{2}-4>0$,所以$\angle AA'C$ 为锐角,故 B 在直线 AA' 上的射影在线段 AA' 上,该点到 B 的距离小于 2,故球 A 经过该点之前就会与球 B 碰撞,故不可能让母球 A 击打目标球 B 球后,使目标球 B 向 C(8,-4)运动.

22.**解**:(1)设点 $A\left(\frac{y_0^2}{4},y_0\right)$,

则 $S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\cdot 2y_0\cdot\frac{y_0^2}{4}=2$,

解得 $y_0=2$,所以 $A(1,2)$,

故 $r^2=1^2+2^2=5$.

所以圆 O 的方程是 $x^2+y^2=5$.

(2)由$\begin{cases}y=k(x-1),\\ x^2+y^2=5,\end{cases}$

得$(1+k^2)x^2-2k^2x+k^2-5=0$,且 $k<0$.

设 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,

则 $x_1+x_2=\frac{2k^2}{1+k^2}$,$x_1x_2=\frac{k^2-5}{1+k^2}$,

所以$\frac{k_1k_2}{k}=\frac{y_1y_2}{k(x_1-3)(x_2-3)}$

$=\frac{k^2(x_1-1)(x_2-1)}{k(x_1-3)(x_2-3)}$

$=k\cdot\frac{x_1x_2-(x_1+x_2)+1}{x_1x_2-3(x_1+x_2)+9}$

$=k\cdot\frac{\frac{k^2-5}{1+k^2}-\frac{2k^2}{1+k^2}+1}{\frac{k^2-5}{1+k^2}-3\left(\frac{2k^2}{1+k^2}\right)+9}$

$=k\cdot\frac{k^2-5-2k^2+1+k^2}{k^2-5-6k^2+9(1+k^2)}=\frac{-k}{1+k^2}$,

又 $k<0$,

所以$\frac{-k}{1+k^2}=\frac{1}{-\frac{1}{k}-k}\leqslant\frac{1}{2}$,

当且仅当 $k=-1$ 时,等号成立,

所以$\frac{k_1k_2}{k}$的最大值为$\frac{1}{2}$,

此时直线 l 的方程为 $y=-x+1$.