第 12 期

第 2~3 版同步周测

一、单项选择题

1~8.DBDCBCCB

二、多项选择题

9.BC　　10.ABD

11.CD　　12.ABC

三、填空题

13.1

14.$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

15.$\frac{169\sqrt{3}}{20}dm^2$

16.$\frac{1}{8}$

四、解答题

17.**证明**:由 $a>b>0$,

要证 $\frac{a-b}{a+b}+\frac{2b^2}{a^2+b^2}<1$,

只要证 $\frac{a-b}{a+b}<1-\frac{2b^2}{a^2+b^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$,

即证 $(a-b)(a^2+b^2)<(a+b)(a^2-b^2)$,

即证 $a^3+ab^2-ba^2-b^3<a^3-ab^2+ba^2-b^3$,

即证 $2ab^2<2ba^2$,

即 $b<a$.上式显然成立,

所以原不等式成立.

18.**解**:(1)因为 $(a+b)\sqrt{ab}=1$,

所以 $a+b=\frac{1}{\sqrt{ab}}$,

因为 $a>0,b>0$,

所以 $a+b\geqslant2\sqrt{ab}$,

当且仅当 $a=b$ 时取等号,

所以 $\frac{1}{\sqrt{ab}}\geqslant2\sqrt{ab}$,

所以 $ab\leqslant\frac{1}{2}$.

所以 $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}\geqslant2\sqrt{\frac{1}{a^3}\cdot\frac{1}{b^3}}=\frac{2}{ab\sqrt{ab}}\geqslant4\sqrt{2}$,

当且仅当 $a=b$ 时取等号,

所以 $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}$ 的最小值为 $4\sqrt{2}$.

(2)因为 $a>0,b>0$,

所以 $\frac{1}{2a}+\frac{1}{3b}\geqslant2\sqrt{\frac{1}{2a}\cdot\frac{1}{3b}}=\frac{2}{\sqrt{6ab}}\geqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}$,

当且仅当 $a=b$ 时取等号.

因为 $\frac{\sqrt{6}}{3}<\frac{2\sqrt{3}}{3}$,

所以不存在 a,b,

使得 $\frac{1}{2a}+\frac{1}{3b}$ 的值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

19.**解**:(1)因为不等式 $2ax-b>0$ 的解集为 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$,所以 $a>0$,且 $a=b$,

所以 $f(x)<0\Leftrightarrow\frac{a(2x-1)}{x-1}<0\Leftrightarrow a(2x-1)\cdot(x-1)<0$,所以 $f(x)<0$ 的解集为 $\left(\frac{1}{2},1\right)$.

(2)$a=\frac{1}{2}$ 时,不等式 $f(x)>0\Leftrightarrow f(x)=\frac{x-b}{x-1}>0\Leftrightarrow(x-b)(x-1)>0$.

①当 $b>1$ 时,

不等式的解集为 $(-\infty,1)\cup(b,+\infty)$;

②当 $b=1$ 时,

不等式的解集为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$;

③当 $b<1$ 时,

不等式的解集为 $(-\infty,b)\cup(1,+\infty)$.

20.**解**:(1)因为 $a,b\in(0,+\infty)$,$a(1-b)=b(a-1)$,

所以 $a+b=2ab$.

所以 $\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}=1$.

$a^2+b^2=(a^2+b^2)\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}\right)^2$

$=\frac{1}{4}\left[2+\frac{b^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}+2\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)\right]$

$\geqslant\frac{1}{4}\left(2+2\sqrt{\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{a^2}{b^2}}+2\times2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}\right)$

$=2$,

当且仅当 $a=b=1$ 时取等号,

所以 a^2+b^2 的最小值为 2.

(2)由(1)知,$(a^2+b^2)_{min}=2$.

对任意 $a,b\in(0,+\infty)$,

都有 $f(x)\leqslant4(a^2+b^2)$.

所以 $f(x)\leqslant8$,即 $|2x+1|+|x-2|\leqslant8$.

讨论去绝对值:

即 $x<-\frac{1}{2}$,$-2x-1-x+2\leqslant8$;　①

或 $-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant2$,$2x+1-x+2\leqslant8$;　②

或 $x>2$,$2x+1+x-2\leqslant8$.　③

解①②③可得,$-\frac{7}{3}\leqslant x\leqslant3$.

所以实数 x 的取值范围是 $\left[-\frac{7}{3},3\right]$.

21.**解**:(1)由题意可知,$PE=4$,$PF=3$,

因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}xy\sin\theta=\frac{3xy}{8}$,

又 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle APB}+S_{\triangle APC}=\frac{1}{2}x\times4+\frac{1}{2}y\times3=\frac{1}{2}(4x+3y)$,

所以 $\frac{3xy}{8}=\frac{1}{2}(4x+3y)$,

所以 $4x+3y=\frac{3xy}{4}$.

(2)因为 $4x+3y\geqslant2\sqrt{4x\cdot3y}$,

所以 $xy\geqslant\frac{256}{3}$,当且仅当 $4x=3y$,

即 $x=8,y=\frac{32}{3}$ 时取等号,

所以 $(S_{\triangle ABC})_{min}=\frac{3xy}{8}=32$,

故当 $AB=8km$ 时,该公园的面积最小为 $32km^2$.

22.**解**:(1)要使不等式 $mx^2-2x-m+1<0$ 恒成立,只需 $\begin{cases}m<0,\\ \Delta=(-2)^2-4m(-m+1)<0,\end{cases}$ 该不等式组无解.所以不存在实数 m,使对所有的实数 x,不等式 $mx^2-2x-m+1<0$ 恒成立.

(2)由 $|m|\leqslant2$,得 $-2\leqslant m\leqslant2$.

由 $mx^2-2x-m+1<0$,

得 $(x^2-1)m-2x+1<0$.

令 $f(m)=(x^2-1)m-2x+1(-2\leqslant m\leqslant2)$,

则 $f(m)<0$.

当 $x=1$ 时,$f(m)=-1<0$,满足题意;

当 $x=-1$ 时,$f(m)=3>0$,不满足题意;

当 $x\neq\pm1$ 时,要使 $f(m)<0$,

只需 $\begin{cases}f(-2)<0,\\ f(2)<0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}(x^2-1)(-2)-2x+1<0,\\ (x^2-1)\times2-2x+1<0,\end{cases}$

解得 $\frac{-1+\sqrt{7}}{2}<x<\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

综上,x 的取值范围是 $\left(\frac{-1+\sqrt{7}}{2},\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$.

第 9 期

第 2~3 版同步周测

一、单项选择题

1~8.DDCCCCCA

二、多项选择题

9.AC　　10.AC

11.BCD　　12.BCD

三、填空题

13.$-\frac{1}{4}$　　14.$\frac{1}{4}$

15.$(-3,0)$　　16.6π

四、解答题

17.**解**:由题意知,这两条直线不能是 x 轴和 y 轴,因为它们都只和抛物线有 1 个交点.

设一条直线方程为 $y=kx$,

则另一条直线方程为 $y=-\frac{x}{k}$,

分别联立方程组 $\begin{cases}y=kx,\\ y^2=6x,\end{cases}\begin{cases}y=-\frac{x}{k},\\ y^2=6x,\end{cases}$

解得两个交点分别为 $\left(\frac{6}{k^2},\frac{6}{k}\right)$,$(6k^2,-6k)$,

它们的中点为 $\left(\frac{3}{k^2}+3k^2,\frac{3}{k}-3k\right)$,

由 $x=\frac{3}{k^2}+3k^2,y=\frac{3}{k}-3k$,消去 k,得 $y^2=3x-18$,所以线段 AB 中点的轨迹方程为 $y^2=3x-18$.

18.**解**:(1)抛物线 $y^2=4x$ 的焦点坐标为 $(1,0)$,直线的斜率为 -1,

则该直线方程为 $y=-(x-1)$,

即 $x+y-1=0$.

(2)设点 A、B 的坐标分别为 (x_1,y_1)、(x_2,y_2),由 $\begin{cases}y^2=4x,\\ y=-x+1,\end{cases}$ 消去 y 可得 $x^2-6x+1=0$,

根据韦达定理,得 $x_1+x_2=6$,$x_1x_2=1$,所以 $|AB|=\sqrt{1+(-1)^2}\times\sqrt{6^2-4}=8$,

点 O 到直线 AB 的距离 $d=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以 $S_{\triangle ABO}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{1}{2}\times8\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$.

19.**解**:(1)双曲线 C 的焦点在坐标轴上,其渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{2}x$,

则可设双曲线C的方程为 $x^2-\frac{y^2}{2}=\lambda$,将点 $P\left(\frac{\sqrt{6}}{2},1\right)$ 代入双曲线 C 的方程,可得 $\lambda=1$,所以双曲线 C 的标准方程为 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$.

(2)假设存在被点 $B(1,1)$ 平分的弦.

设 $B(1,1)$ 是弦 MN 的中点,且 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,则 $x_1+x_2=2$,$y_1+y_2=2$.

因为点 M,N 在双曲线 C 上,所以 $\begin{cases}2x_1^2-y_1^2=2,\\ 2x_2^2-y_2^2=2,\end{cases}$ 所以 $2(x_1+x_2)(x_1-x_2)-(y_1-y_2)\cdot(y_1+y_2)=0$,

所以 $4(x_1-x_2)=2(y_1-y_2)$,

所以 $k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=2$,

所以直线 MN 的方程为 $y-1=2(x-1)$,即 $2x-y-1=0$,由 $\begin{cases}2x^2-y^2=2,\\ 2x-y-1=0,\end{cases}$ 得 $2x^2-4x+3=0$,

因为 $\Delta=16-4\times3\times2=-8<0$,所以直线 MN 与双曲线 C 无交点,所以不存在被点 $B(1,1)$ 平分的弦.

20.**解**:(1)因为 $(-2,0)$ 是双曲线的一个焦点,所以双曲线的焦点在 x 轴上.

设双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$,焦距为 $2c$,

则 $\begin{cases}c=2,\\ \frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{3}}{3},\\ c^2=a^2+b^2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\sqrt{3},\\ b=1,\end{cases}$

所以双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$.

(2)设 $P(x,y)$,则 $Q(-x,-y)$,

所以 $\overrightarrow{NP}=(x-1,y-1)$,$\overrightarrow{MQ}=(-x,-y-1)$,

所以 $\overrightarrow{NP}\cdot\overrightarrow{MQ}=-x^2+x+1-y^2=-x^2+x+1-\left(\frac{x^2}{3}-1\right)=-\frac{4}{3}x^2+x+2=-\frac{4}{3}\left(x-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{35}{16}$,因为 $x\leqslant-\sqrt{3}$ 或 $x\geqslant\sqrt{3}$,所以当 $x=\sqrt{3}$ 时,$\overrightarrow{NP}\cdot\overrightarrow{MQ}$ 取得最大值 $\sqrt{3}-2$.所以 $\overrightarrow{NP}\cdot\overrightarrow{MQ}$ 的取值范围是 $(-\infty,\sqrt{3}-2]$.

21.(1)**解**:由抛物线的定义,得 $|MF|=\frac{p}{2}-(-2)=\frac{5}{2}$,所以 $p=1$,所以抛物线的方程为 $y^2=-2x$.

(2)**证明**:由(1)可知,点 M 的坐标为 $(-2,2)$.

设直线 l 的方程为 $x=ky+b$.

因为点 M 不在直线 l 上,

所以 $b+2+2k\neq0$.

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,将直线 l 与抛物线联立得 $\begin{cases}x=ky+b,\\ y^2=-2x,\end{cases}$ 化简得 $y^2+2ky+2b=0$,所以 $y_1+y_2=-2k$,$y_1y_2=2b$,①

又 $k_1+k_2=\frac{y_1-2}{x_1+2}+\frac{y_2-2}{x_2+2}=-2$,

即 $(y_1-2)(ky_2+b+2)+(y_2-2)(ky_1+b+2)=-2(ky_1+b+2)(ky_2+b+2)$,化简得 $(2k+2k^2)y_1y_2+(b+2+2k+2kb)\cdot(y_1+y_2)+2b^2+4b=0$,

将①代入得,$kb-2k-2k^2+b^2+2b=0$,即 $(b-k)(b+2+2k)=0$,得 $b=k$.

当 $b=k$ 时,直线 l 的方程为 $x=k(y+1)$,此时直线 l 恒过点 $(0,-1)$.

22.**解**:(1)抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$,准线与 x 轴的交点为 $E\left(-\frac{p}{2},0\right)$.

当 $AB\perp x$ 轴时,A 的横坐标为 $\frac{p}{2}$,所以 $y_A^2=2px_A=p^2$,所以 $|EA|=\sqrt{\left(\frac{p}{2}+\frac{p}{2}\right)^2+y_A^2}=\sqrt{2p^2}=2$,解得 $p=\sqrt{2}$,所以抛物线的方程为 $y^2=2\sqrt{2}x$.

(2)设直线 AB 的方程为 $x=my+\frac{\sqrt{2}}{2}$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,

由 $\begin{cases}x=my+\frac{\sqrt{2}}{2},\\ y^2=2\sqrt{2}x,\end{cases}$

消去 x,得 $y^2-2\sqrt{2}my-2=0$,

则 $y_1+y_2=2\sqrt{2}m$,$y_1y_2=-2$,

直线 AE 的斜率为 $k_{AE}=\frac{y_1}{x_1+\frac{\sqrt{2}}{2}}$,

则 AE 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1+\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

令 $x=0$,可得 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{y_1}{x_1+\frac{\sqrt{2}}{2}}$,

即 $M\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{y_1}{x_1+\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)$.

同理可得 $N\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{y_2}{x_2+\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)$,

$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{1}{2}|EA|\cdot|EB|}{\frac{1}{2}|EM|\cdot|EN|}$

$=\frac{|y_1|\cdot|y_2|}{|y_M|\cdot|y_N|}$

$=\frac{|y_1y_2|}{\frac{\frac{1}{2}|y_1y_2|}{\left(x_1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x_2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}}$

$=2\left(x_1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x_2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$=2\left[x_1x_2+\frac{\sqrt{2}}{2}(x_1+x_2)+\frac{1}{2}\right]$

$=2x_1x_2+\sqrt{2}(x_1+x_2)+1$

$=\frac{y_1^2y_2^2}{4}+\sqrt{2}\left(\frac{y_1^2}{2\sqrt{2}}+\frac{y_2^2}{2\sqrt{2}}\right)+1$

$=1+\frac{1}{2}[(y_1+y_2)^2-2y_1y_2]+1$

$=\frac{1}{2}(y_1+y_2)^2+4$

$=4m^2+4\geqslant4$.

当 $m=0$ 时,取等号.

即 $\frac{S_1}{S_2}$ 的取值范围为 $[4,+\infty)$.

第10期

第2~3版同步周测

一、单项选择题

1~8.ACBBCBCA

二、多项选择题

9.AD　10.BC

11.ABD　12.BC

三、填空题

13.$x^2=2y$　14.2

15.$\frac{8\sqrt{3}}{5}$　16.6

四、解答题

17.**解**：(1)$2a=\sqrt{(6+4)^2+(2\sqrt{2})^2}-\sqrt{(6-4)^2+(2\sqrt{2})^2}=4\sqrt{3}$，所以$a^2=12$，又$c=4$，所以$b^2=4^2-12=4$，所以该双曲线的标准方程为$\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$.

(2)因为$MF_1\perp F_1F_2$，所以点M的横坐标为-4，当$x=-4$时，$y^2=\frac{4}{3}$，所以$|MF_1|=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，所以$S_{\triangle MF_1F_2}=\frac{1}{2}|MF_1||F_1F_2|=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\times8=\frac{8\sqrt{3}}{3}$.

18.(1)**解**：因为$|PF|=y_P+\frac{p}{2}$，

所以$4=3+\frac{p}{2}$，解得$p=2$，

所以抛物线C的标准方程为$x^2=4y$.

(2)**证明**：设切线AN的方程为$y=k(x-a)$，$k\neq0$，

联立方程组$\begin{cases}x^2=4y,\\ y=k(x-a),\end{cases}$

消y可得$x^2-4kx+4ka=0$，

由题意可得$\Delta=16k^2-16ka=0$，即$a=k$，

所以切点$N(2a,a^2)$，又$A(a,0)$，$F(0,1)$，

所以$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AN}=(-a,1)\cdot(a,a^2)=0$.

所以$\angle FAN=90°$，

所以以FN为直径的圆过点A.

19.**解**：(1)椭圆C的离心率为$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，短轴的一个端点到焦点的距离为$\sqrt{b^2+c^2}=a=\sqrt{2}$，

所以$c=1$，所以$b=\sqrt{a^2-c^2}=1$，

所以椭圆C的方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

(2)设直线l的方程为$y=kx+m$，则直线l与y轴交点的纵坐标为m，

设点$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

由$\begin{cases}y=kx+m,\\ x^2+2y^2=2,\end{cases}$化简得

$(2k^2+1)x^2+4kmx+2m^2-2=0$，

由韦达定理，得$x_1+x_2=-\frac{4km}{2k^2+1}$，

$\Delta=16k^2m^2-4(2k^2+1)(2m^2-2)>0$，

化简得$m^2<2k^2+1$.

由线段AB的中点在直线$x=-\frac{1}{2}$上，

得$x_1+x_2=-1$，

故$-\frac{4km}{2k^2+1}=-1$，即$4km=2k^2+1$.

所以$m=\frac{2k^2+1}{4k}=\frac{k}{2}+\frac{1}{4k}\geqslant2\sqrt{\frac{k}{2}\cdot\frac{1}{4k}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

当且仅当$\frac{k}{2}=\frac{1}{4k}$，即$k=\frac{\sqrt{2}}{2}$时取等号，此时$m^2<2k^2+1$，满足$\Delta>0$，

因此，直线l与y轴交点纵坐标的最小值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

20.(1)**解**：由$(x+1)^2+y^2=8$，知$C_2(-1,0)$，半径$R=2\sqrt{2}$.因为$\triangle C_2AB$的周长为$4+4\sqrt{2}$，所以$|AB|=4$.又曲线C_1、C_2关于x轴对称，则$AB\perp x$轴，而$C_2(-1,0)$到AB的距离$d=\sqrt{R^2-2^2}=2$，故弦AB的一个端点坐标为(1,2)，

将(1,2)代入$y^2=2px(p>0)$，得$p=2$，故曲线C_1的方程为$y^2=4x$.

(2)**证明**：由(1)知$F(1,0)$，由于直线l不与x轴重合，可设$l:x=my+1$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，由$\begin{cases}x=my+1,\\ y^2=4x,\end{cases}$消去x整理得$y^2-4my-4=0$，因此$y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4$，

由于$k_1+k_2=\frac{y_1}{x_1+1}+\frac{y_2}{x_2+1}$

$=\frac{y_1}{my_1+2}+\frac{y_2}{my_2+2}$

$=\frac{2my_1y_2+2(y_1+y_2)}{(my_1+2)(my_2+2)}$

$=\frac{-8m+8m}{(my_1+2)(my_2+2)}=0$，

故k_1+k_2为定值0.

21.**解**：(1)由题意知，$c=1$，$F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$.

$2a=|TF_1|+|TF_2|=\sqrt{(-1+1)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2}+\sqrt{(-1-1)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3}{2}+\frac{5}{2}=4$，

所以$a=2$，所以$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}$，

所以椭圆C的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)若存在点$P(m,0)$，使得以PG，PH为邻边的平行四边形是菱形，

则P为线段GH的中垂线与x轴的交点.

设直线l_1的方程为$y=kx+2$，$G(x_1,y_1)$，$H(x_2,y_2)$，

由$\begin{cases}y=kx+2,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$得$(3+4k^2)x^2+16kx+4=0$，

$\Delta=256k^2-16(3+4k^2)>0$，又$k>0$，

所以$k>\frac{1}{2}$.

由韦达定理，得$x_1+x_2=-\frac{16k}{3+4k^2}$，

设GH的中点为(x_0,y_0)，

则$x_0=-\frac{8k}{3+4k^2}$，$y_0=kx_0+2=\frac{6}{3+4k^2}$，

所以线段GH的中垂线方程为

$y=-\frac{1}{k}\left(x+\frac{8k}{3+4k^2}\right)+\frac{6}{3+4k^2}$，

令$y=0$，可得$x=\frac{-2k}{3+4k^2}=-\frac{2}{\frac{3}{k}+4k}$，

即$m=-\frac{2}{\frac{3}{k}+4k}$.

因为$k>\frac{1}{2}$，所以$\frac{3}{k}+4k\geqslant2\sqrt{\frac{3}{k}\cdot4k}=4\sqrt{3}$，当且仅当$\frac{3}{k}=4k$，即$k=\frac{\sqrt{3}}{2}$时取等号，

所以$m\geqslant-\frac{2}{4\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{6}$，且$m<0$.

所以m的取值范围是$\left[-\frac{\sqrt{3}}{6},0\right)$.

22.(1)**解**：抛物线$\Gamma:y^2=8x$的焦点$F(2,0)$，准线方程为$x=-2$，

圆$\Omega:x^2+y^2-4x=0$的圆心为(2,0)，半径为2，所以Ω的圆心到Γ的准线的距离为$2-(-2)=4$.

(2)**解**：四边形TAFB的面积为

$S_{TAFB}=S_{\triangle TAF}+S_{\triangle TBF}=2S_{\triangle TAF}$

$=2\cdot\frac{1}{2}|TA|\cdot|AF|$

$=2|TA|=2\sqrt{|TF|^2-|AF|^2}$

$=2\sqrt{(x-2)^2+y^2-4}$

$=2\sqrt{x^2+y^2-4x}$

$=2\sqrt{x^2+4x}$，

由$f(x)=x^2+4x$在[1,4]上单调递增，可得$f(x)\in[5,32]$，

则$2\sqrt{x^2+4x}\in[2\sqrt{5},8\sqrt{2}]$，

即四边形TAFB的面积的取值范围是$[2\sqrt{5},8\sqrt{2}]$.

(3)**证明**：当直线l的方程为$x=2$时，联立抛物线$\Gamma:y^2=8x$，可得$y=\pm4$，

可得$|MN|=8$.易知$|PQ|=4$，由抛物线和圆均关于x轴对称，可得$|MP|=|NQ|=2=\frac{1}{2}|PQ|$成立；

设直线l的方程为$x=my+t$，由$|MP|=|NQ|=\frac{1}{2}|PQ|$，结合抛物线和圆均关于x轴对称，

可得直线l垂直于x轴，即$x=t$，将其分别代入抛物线$\Gamma:y^2=8x$和圆$\Omega:x^2+y^2-4x=0$，

可得$M(t,2\sqrt{2t})$，$N(t,-2\sqrt{2t})$，$P(t,\sqrt{4t-t^2})$，$Q(t,-\sqrt{4t-t^2})$，

由$|MP|=2\sqrt{2t}-\sqrt{4t-t^2}=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{4t-t^2}$，解得$t=2$或$t=0$(舍去)，可得直线l的方程为$x=2$.

综上，"$|MP|=|QN|=\frac{1}{2}|PQ|$"的充要条件是"直线l的方程为$x=2$".

第11期

第2~3版同步周测

一、单项选择题

1~8.ABADADCA

二、多项选择题

9.ABD　10.ABC

11.BC　12.ABC

三、填空题

13.$-a<-a^2<a^2<a$

14.$\left\{x\middle|\frac{3}{2}\leqslant x<5\right\}$

15.$\left(0,\frac{1}{10}\right)$

16.-2

四、解答题

17.**证明**：要证原不等式成立，只要证$(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2})^2\geqslant(a+c)^2+(b+d)^2$成立，即证$\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}\geqslant ac+bd$成立.

(1)若$ac+bd\leqslant0$，上式已经成立，原不等式成立；

(2)若$ac+bd>0$，

只要证$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geqslant(ac+bd)^2$，

即证$a^2d^2+b^2c^2\geqslant2abcd$，

而此式成立，所以原不等式成立.

综合(1)(2)，原不等式成立.

18.**解**：(1)因为$f(x)=a^x-1(a>0$，且$a\neq1)$，

所以$f(1)-f(2)=(a-1)-(a^2-1)=a-a^2$.

由$a-a^2=\frac{1}{4}$，解得$a=\frac{1}{2}$.

(2)不等式$f(x)>0$，即$\left(\frac{1}{2}\right)^x-1>0$，

所以$\left(\frac{1}{2}\right)^x>1$，解得$x<0$，

所以不等式$f(x)>0$的解集为$(-\infty,0)$.

19.**解**：(1)当$a=2$时，$f(x)\leqslant0$可化为$2x^2-5x+2\leqslant0$，可得$(2x-1)(x-2)\leqslant0$，解得$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant2$，所以$f(x)\leqslant0$的解集为$\left[\frac{1}{2},2\right]$.

(2)当$a>0$时，不等式$f(x)\leqslant0$可化为$ax^2-(2a+1)x+2\leqslant0$，

进一步化为$a\left(x-\frac{1}{a}\right)(x-2)\leqslant0$.

①当$0<a<\frac{1}{2}$时，有$\frac{1}{a}>2$，解不等式得$2\leqslant x\leqslant\frac{1}{a}$；

②当$a=\frac{1}{2}$时，有$\frac{1}{a}=2$，

解不等式得$x=2$；

③当$a>\frac{1}{2}$时，有$\frac{1}{a}<2$，

解不等式得$\frac{1}{a}\leqslant x\leqslant2$.

综上，当$0<a<\frac{1}{2}$时，不等式的解集为$\left\{x\middle|2\leqslant x\leqslant\frac{1}{a}\right\}$；当$a=\frac{1}{2}$时，不等式的解集为$\{x|x=2\}$；当$a>\frac{1}{2}$时，不等式的解集为$\left\{x\middle|\frac{1}{a}\leqslant x\leqslant2\right\}$.

20.**证明**：(1)由$f(x)=g(x)$，

得$ax^2+2bx+c=0$，

所以$\Delta=4b^2-4ac=4(b^2-ac)$.

因为$a>b>c$，$a+b+c=0$，

所以$a>0$，$c<0$，所以$\Delta>0$，

所以$ax^2+2bx+c=0$有两个不等的实根，

所以$f(x)$的图象与$g(x)$的图象一定有两个交点.

(2)假设$\frac{c}{a}\leqslant-2$或$\frac{c}{a}\geqslant-\frac{1}{2}$成立.

由$\frac{c}{a}\leqslant-2$，结合(1)$a>0$，

得$c\leqslant-2a$，

即$a+c\leqslant-a$，所以$-b\leqslant-a$，

所以$a\leqslant b$，

这与条件中的$a>b$矛盾.

由$\frac{c}{a}\geqslant-\frac{1}{2}$，得$2c\geqslant-a$，

即$c\geqslant-(a+c)=b$，

所以$b\leqslant c$，这与$b>c$矛盾，

故假设不成立.故原不等式成立.

21.**解**：(1)由$f(x)>0$，

得$(ax-1)(x-1)>0$.

当$a<0$时，

不等式的解集为$\left(\frac{1}{a},1\right)$；

当$a=0$时，

不等式的解集为$(-\infty,1)$；

当$0<a<1$时，不等式的解集为

$(-\infty,1)\cup\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$；

当$a=1$时，不等式的解集为

$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$；

当$a>1$时，不等式的解集为

$\left(-\infty,\frac{1}{a}\right)\cup(1,+\infty)$.

(2)由$f(x)+x+a-b\geqslant0$，

得$a(x^2-x+1)+1-b\geqslant0$，

由$x\in(0,1)$，得$\frac{3}{4}\leqslant x^2-x+1<1$，

故$a\geqslant\frac{b-1}{x^2-x+1}$对$x\in(0,1)$恒成立，

故存在实数$b\in[2,3]$，

使得不等式$a\geqslant\frac{4(b-1)}{3}$成立，

所以$a\geqslant\frac{4\times(2-1)}{3}=\frac{4}{3}$，

所以a的最小值为$\frac{4}{3}$.

22.**解**：(1)因为$k>0$，$f(x)>m$，

即$\frac{kx}{x^2+3k}>m$，

所以$mx^2-kx+3km<0$.

因为不等式$mx^2-kx+3km<0$的解集为$\{x|x<-3$，或$x>-2\}$，

所以-3，-2是方程$mx^2-kx+3km=0$的根，且$m<0$，

所以$\begin{cases}\frac{k}{m}=-5,\\ 3k=6,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=2,\\ m=-\frac{2}{5}.\end{cases}$

所以$5mx^2+\frac{k}{2}x+3>0\Leftrightarrow2x^2-x-3<0$，

解得$-1<x<\frac{3}{2}$，

所以不等式$5mx^2+\frac{k}{2}x+3>0$的解集为$\left\{x\middle|-1<x<\frac{3}{2}\right\}$.

(2)因为$f(x)>1$，所以$\frac{kx}{x^2+3k}>1$，所以$x^2-kx+3k<0$，令$g(x)=x^2-kx+3k$，$x\in(3,+\infty)$，存在$x_0>3$，使得$f(x_0)>1$成立，即存在$g(x_0)<0$成立，即$[g(x)]_{\min}<0$成立.当$0<k\leqslant6$时，$g(x)$在$(3,+\infty)$上单调递增，所以$g(x)>g(3)=9$，显然不存在$g(x)<0$；当$k>6$时，$g(x)$在$\left(3,\frac{k}{2}\right)$上单调递减，在$\left(\frac{k}{2},+\infty\right)$上单调递增，所以$[g(x)]_{\min}=g\left(\frac{k}{2}\right)=-\frac{k^2}{4}+3k$，由$-\frac{k^2}{4}+3k<0$，又$k>0$，可得$k>12$.

综上，k的取值范围是$(12,+\infty)$.