第 8 期

第 3~4 版章节测试参考答案

一、选择题

1~6.DBACAA　　7~12.BABABA

二、填空题

13.$-\frac{4}{7}$　　14.16

15.$\frac{6}{5}$　　16.$\frac{\pi}{6}$

三、解答题

17.**解**:(1)在 $Rt\triangle BCD$ 中,由 $BC=2$,$\angle DCB=30°$,可得 $BD=1$,$CD=\sqrt{3}$.

作 $DE\perp BC$ 于 E,

则 $DE=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$BE=\frac{1}{2}$.

因为 BC=2,O 是 BC 的中点,

所以 OB=OC=1.

所以 $OE=\frac{1}{2}$,

所以 $D\left(0,-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

又 $C(0,1,0)$,

所以$\overrightarrow{CD}=\left(0,-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

(2)依题得 $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right)$,$B(0,-1,0)$,

所以$\overrightarrow{AD}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$\overrightarrow{BC}=(0,2,0)$.

所以 $\cos\langle\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC}\rangle=\frac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{BC}|}=-\frac{\sqrt{10}}{5}$.

18.**解**:(1)$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{B_1N}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{B_1C_1}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{A_1C_1}-\overrightarrow{A_1B_1})=\frac{1}{3}(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}+\frac{1}{3}\boldsymbol{c}$.

(2)由题设可得$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=1+1+1+0+2\times1\times1\times\cos60°+2\times1\times1\times\cos60°=5$,

所以 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|=\sqrt{5}$.

所以 $|\overrightarrow{MN}|=\frac{1}{3}|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

19.**证明**:以 D 为原点,DA,DC,DD_1 所在直线分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系,设正方体的棱长为 1,则 $D(0,0,0)$,$A(1,0,0)$,$A_1(1,0,1)$,$B(1,1,0)$,$B_1(1,1,1)$,$C(0,1,0)$,$D_1(0,0,1)$.

(1)设平面 A_1BD 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$.

因为$\overrightarrow{DA_1}=(1,0,1)$,$\overrightarrow{DB}=(1,1,0)$,

所以$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DA_1}=x+z=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DB}=x+y=0,\end{cases}$

可取 $\boldsymbol{m}=(-1,1,1)$.

同理可取平面 B_1CD_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(-1,1,1)$.因为 $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{n}$,所以 $\boldsymbol{m}/\!/\boldsymbol{n}$.所以平面 $A_1BD/\!/$平面 B_1CD_1.

(2)因为 M,N 分别为 AB,B_1C 的中点,所以 $M\left(1,\frac{1}{2},0\right)$,$N\left(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}\right)$,

所以$\overrightarrow{MN}=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\boldsymbol{m}$.

所以$\overrightarrow{MN}/\!/\boldsymbol{m}$.

所以 $MN\perp$平面 A_1BD.

20.**解**:(1)设 $\boldsymbol{b}=(x,y,z)$,

由题可知$\begin{cases}2x+y-2z=-1,\\ x^2+y^2+z^2=9,\\ -x+z=0,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=2,\\ y=-1,\\ z=2,\end{cases}$或$\begin{cases}x=-2,\\ y=-1,\\ z=-2.\end{cases}$

所以 $\boldsymbol{b}=(2,-1,2)$或 $\boldsymbol{b}=(-2,-1,-2)$.

(2)由 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{d}=(1,-\frac{1}{2},1)$共线,

可得 $\boldsymbol{b}=(2,-1,2)$.

又 $\boldsymbol{a}=(2,1,-2)$,$\boldsymbol{c}=(-1,0,1)$,

所以 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(0,2,-4)$,$2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}=(1,-2,7)$.

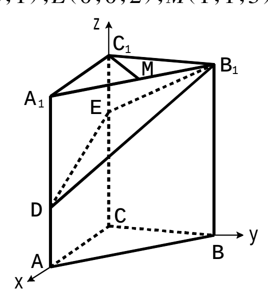
所以 $\cos\langle\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}\rangle$

$=\frac{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c})}{|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}||2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}|}$

$=\frac{-32}{2\sqrt{5}\times3\sqrt{6}}$

$=-\frac{8\sqrt{30}}{45}$.

21.**解**:以 C 为原点,$\overrightarrow{CA}$,$\overrightarrow{CB}$,$\overrightarrow{CC_1}$的方向为 x 轴,y 轴,z 轴的正方向建立空间直角坐标系,如图所示,则 $C(0,0,0)$,$A(2,0,0)$,$B(0,2,0)$,$C_1(0,0,3)$,$A_1(2,0,3)$,$B_1(0,2,3)$,$D(2,0,1)$,$E(0,0,2)$,$M(1,1,3)$.



(第 21 题图)

(1)**证明**:依题意,$\overrightarrow{C_1M}=(1,1,0)$,$\overrightarrow{B_1D}=(2,-2,-2)$,所以$\overrightarrow{C_1M}\cdot\overrightarrow{B_1D}=2-2+0=0$,所以 $C_1M\perp B_1D$.

(2)**解**:依题意,$\overrightarrow{CA}=(2,0,0)$是平面 BB_1E 的一个法向量,$\overrightarrow{EB_1}=(0,2,1)$,$\overrightarrow{ED}=(2,0,-1)$,设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$为平面 DB_1E 的法向量,

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EB_1}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{ED}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}2y+z=0,\\ 2x-z=0,\end{cases}$令 $x=1$,

则 $\boldsymbol{n}=(1,-1,2)$,

所以 $\cos\langle\overrightarrow{CA},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\overrightarrow{CA}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{CA}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{6}}{6}$,

所以 $\sin\langle\overrightarrow{CA},\boldsymbol{n}\rangle=\sqrt{1-\frac{1}{6}}=\frac{\sqrt{30}}{6}$,

所以二面角 $B-B_1E-D$ 的正弦值为$\frac{\sqrt{30}}{6}$.

(3)**解**:依题意,$\overrightarrow{AB}=(-2,2,0)$,由(2)知,$\boldsymbol{n}=(1,-1,2)$为平面 DB_1E 的一个法向量,所以 $\cos\langle\overrightarrow{AB},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$,所以直线 AB 与平面 DB_1E 所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$.

22.(1)**证明**:在$\triangle ADC$ 中,由余弦定理,得 $AC^2=1+1-2\times1\times1\times\cos120°=3$,所以 $AC=\sqrt{3}$.

在$\triangle ABC$ 中,由余弦定理,得 $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos60°$,即 $3=AB^2+1-2AB\cdot\frac{1}{2}$,解得 $AB=2$.

所以 $AC^2+BC^2=AB^2$,

所以$\angle ACB=90°$,即 $BC\perp AC$.

又平面 $ACFE\perp$平面 $ABCD$,

平面 $ACFE\cap$平面 $ABCD=AC$,

$BC\subset$平面 $ABCD$,

所以 $BC\perp$平面 $ACFE$.

(2)**解**:假设存在满足要求的点 M.

以 C 为原点,CA,CB,CF 所在直线分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系,则 $C(0,0,0)$,$A(\sqrt{3},0,0)$,$B(0,1,0)$,$F(0,0,1)$,故$\overrightarrow{AB}=(-\sqrt{3},1,0)$.

设 $M(a,0,1)$,$a\in[0,\sqrt{3}]$,则$\overrightarrow{MB}=(-a,1,-1)$,$\overrightarrow{FM}=(a,0,0)$.

设平面 MAB 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB}=-\sqrt{3}x+y=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{MB}=-ax+y-z=0,\end{cases}$故可取 $\boldsymbol{m}=(1,\sqrt{3},\sqrt{3}-a)$.

取平面 FCB 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(1,0,0)$,由 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{1}{\sqrt{1+3+(\sqrt{3}-a)^2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$,解得 $a=\sqrt{3}-1\in[0,\sqrt{3}]$,或 $a=\sqrt{3}+1\notin[0,\sqrt{3}]$.

因此,在线段 EF 上存在点 $M(\sqrt{3}-1,0,1)$满足要求,且 $FM=\sqrt{3}-1$.

第 5 期

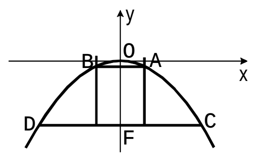
第 3~4 版同步周测参考答案

一、选择题

1~6.DDACCC　　7~10.BACB

11.D

提示:建立如图所示平面直角坐标系,设抛物线的方程为 $x^2=-2py(p>0)$,直线 CD 过焦点 $F\left(0,-\frac{p}{2}\right)$,则 $C\left(18,-\frac{p}{2}\right)$,代入抛物线的方程,解得 $p=18$,所以抛物线的方程为 $x^2=-36y$.设 AB 为船宽,则可设 $A(6,m)$,代入抛物线方程得 $m=-1$,所以船体两侧的货物距离水面的最大高度应不超过$-1-(-9)=8$.



(第 11 题图)

12.A

提示:由抛物线定义可知,$AC=AF$,$BD=BF$,则$\angle AFC=\angle ACF=\angle CFO$,$\angle BFD=\angle BDF=\angle DFO$,则$\angle AFC+\angle BFD=\angle CFO+\angle DFO=\angle CFD=\frac{\pi}{2}$,所以 $CF\perp DF$,故①正确;设直线 AB 的方程为 $y=k\left(x-\frac{p}{2}\right)$,与 $y^2=2px$ 联立,得$k^2x^2-(k^2p+2p)x+\frac{k^2p^2}{4}=0$.设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $x_1x_2=\frac{p^2}{4}$.又$\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FB}$,所以 $x_1+\frac{p}{2}=3\left(x_2+\frac{p}{2}\right)$,即 $x_1=3x_2+p$,与上式联立,解得 $x_1=-\frac{p}{2}$(舍去)或 $x_1=\frac{3}{2}p$,则 $y_1=\sqrt{3}p$,即 $A\left(\frac{3}{2}p,\sqrt{3}p\right)$,则 $k_{FA}=\sqrt{3}$,可得直线 AB 的倾斜角为$\frac{\pi}{3}$,由对称性,若 A 在 x 轴下方,则直线 AB 的倾斜角为$\frac{2\pi}{3}$,故②错误.结合选项可知选 A.

二、填空题

13.2

14.$2\sqrt{3}$

15.$\frac{16}{3}$

提示:由题设得焦点 $F(1,0)$,直线 AB 的方程为 $y=\sqrt{3}(x-1)$,代入抛物线方程并化简,得 $3x^2-10x+3=0$.设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $x_1+x_2=\frac{10}{3}$,所以$|AB|=x_1+x_2+p=\frac{10}{3}+2=\frac{16}{3}$.

16.2

提示:直线 l_2 恰为抛物线 $y=x^2$ 的准线,根据抛物线的定义,动点 P 到 l_1 和 l_2 的距离之和的最小值为焦点$\left(0,\frac{1}{4}\right)$到 l_1 的距离,即 $d=\frac{|0-1-9|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=2$.

三、解答题

17.**解**:(1)由抛物线 $y=mx^2$ 的焦点是$(0,1)$,得$\frac{1}{4m}=1$,解得 $m=\frac{1}{4}$.所以抛物线的方程为 $x^2=4y$.

(2)设 $P(x,y)$,则 $x^2=4y$,所以$|PA|^2=x^2+(y-a)^2=4y+y^2-2ay+a^2=[y-(a-2)]^2+4a-4\geqslant4a-4$.

由题设,得 $4a-4=(2\sqrt{3})^2$,解得 $a=4$.

18.**解**:(1)由抛物线的定义,知点 P 的轨迹 E 是焦点为 $F(1,0)$的抛物线,其方程为 $y^2=4x$.

(2)直线 l 的方程为 $y=x-1$,代入 $y^2=4x$ 中并消去 x,得 $y^2-4y-4=0$.

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $y_1+y_2=4$,$y_1y_2=-4$.所以$|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{4^2-4\times(-4)}=4\sqrt{2}$.

所以$\triangle AOB$ 的面积 $S=\frac{1}{2}|OF|\cdot|y_1-y_2|=\frac{1}{2}\times1\times4\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.

19.**解**:(1)由题意可设抛物线 C 的方程为 $y^2=2px(p>0)$,则其准线方程为 $x=-\frac{p}{2}$.

因为点 $P(4,m)$到焦点的距离为 6,所以结合抛物线的定义,得 $4+\frac{p}{2}=6$,解得 $p=4$.

所以抛物线 C 的方程为 $y^2=8x$.

(2)由$\begin{cases}y^2=8x,\\ y=kx-2,\end{cases}$消去 y,

得 $k^2x^2-(4k+8)x+4=0$.

因为 C 与直线 $y=kx-2$ 相交于不同的两点,

所以 $k\neq0$,且$\Delta=(4k+8)^2-4k^2\cdot4>0$,

解得 $k>-1$ 且 $k\neq0$.

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $x_1+x_2=\frac{4k+8}{k^2}$.

所以$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{2k+4}{k^2}=2$,解得 $k=2$,或 $k=-1$(舍去).所以 k 的值为 2.

20.**解**:(1)由$\triangle ABC$ 为直角三角形可得 BC 为圆的直径,故 B,C,F 三点共线.

由对称性可得 B,C 关于 x 轴对称,

又 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$,将 $x=\frac{p}{2}$代入抛物线的方程,可得$|BF|=p$,所以圆的半径 $R=p$.

(2)直线 AB 与抛物线 E 相切.

证明如下:

由对称性不妨设 B 在 x 轴上方,由(1)知 $A\left(-\frac{p}{2},0\right)$,$B\left(\frac{p}{2},p\right)$,则直线$AB$ 的方程为 $y=x+\frac{p}{2}$.

与 $y^2=2px$ 联立,整理得 $x^2-px+\frac{p^2}{4}=0$,所以$\Delta=p^2-p^2=0$.所以直线 AB 与抛物线相切.

21.(1)**解**:联立$x^2=-y$与$y=kx-3$,

得$x^2+kx-3=0$.

因为$\Delta_1=k^2+12>0$,

所以l与抛物线$x^2=-y$恒有2个交点.

若$m\geqslant3$,则l与抛物线$x^2=4y$至少有1个交点.

联立$x^2=4y$与$y=kx-3$,得$x^2-4kx+12=0$.

所以$\Delta_2=16k^2-48\geqslant0$.结合$k>0$,得$k\geqslant\sqrt{3}$.所以$k$的最小值为$\sqrt{3}$.

(2)**证明**:若$m=3$,则l与抛物线$x^2=4y$只有1个交点.

结合(1),可知$k=\sqrt{3}$,$A(2\sqrt{3},3)$.

由于$F(0,1)$为抛物线$x^2=4y$的焦点,

则$|\overrightarrow{FA}|=3+1=4$.

设$B(x_1,y_1)$,$C(x_2,y_2)$,

则$x_1+x_2=-k=-\sqrt{3}$,$x_1x_2=-3$.

所以 $y_1+y_2=k(x_1+x_2)-6=-9$,$y_1y_2=(kx_1-3)(kx_2-3)=k^2x_1x_2-3k(x_1+x_2)+9=9$.

所以$\overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{FC}=x_1x_2+(y_1-1)(y_2-1)=x_1x_2+y_1y_2-(y_1+y_2)+1=16$.

所以$\overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{FC}=|\overrightarrow{FA}|^2$.

22.**解**:(1)由抛物线的性质,可得$\frac{p}{2}=1$,所以 $p=2$,所以抛物线的准线方程为 $x=-1$.

(2)设 $A(x_A,y_A)$,$B(x_B,y_B)$,$C(x_C,y_C)$,重心 $G(x_G,y_G)$.由(1)知抛物线方程为 $y^2=4x$.令 $y_A=2t$,$t\neq0$,则 $x_A=t^2$,由于直线 AB 过 F,故直线 AB 的方程为 $x=\frac{t^2-1}{2t}\cdot y+1$,代入 $y^2=4x$,得 $y^2-\frac{2(t^2-1)}{t}y-4=0$,

所以 $y_A\cdot y_B=2ty_B=-4$,即 $y_B=-\frac{2}{t}$,所以 $B\left(\frac{1}{t^2},-\frac{2}{t}\right)$.

又 $x_G=\frac{1}{3}(x_A+x_B+x_C)$,$y_G=\frac{1}{3}(y_A+y_B+y_C)$,

因为重心 G 在 x 轴上,所以 $2t-\frac{2}{t}+y_C=0$,

所以 $C\left(\left(\frac{1}{t}-t\right)^2,2\left(\frac{1}{t}-t\right)\right)$,$G\left(\frac{2t^4-2t^2+2}{3t^2},0\right)$,所以直线 AC 的方程为 $y-2t=2t(x-t^2)$,得 $Q(t^2-1,0)$,因为 Q 在焦点 F 的右侧,所以 $t^2>2$,

所以$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{1}{2}|FG|\cdot|y_A|}{\frac{1}{2}|QG|\cdot|y_C|}$

$=\frac{\left|\frac{2t^4-5t^2+2}{3t^2}\right|\cdot|2t|}{\left|t^2-1-\frac{2t^4-2t^2+2}{3t^2}\right|\cdot\left|\frac{2}{t}-2t\right|}$

$=\frac{2t^4-t^2}{t^4-1}=2-\frac{t^2-2}{t^4-1}$.

令 $m=t^2-2$,则 $m>0$,$\frac{S_1}{S_2}=2-\frac{m}{m^2+4m+3}=2-\frac{1}{m+\frac{3}{m}+4}\geqslant2-\frac{1}{2\sqrt{m\cdot\frac{3}{m}}+4}=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以当且仅当 $m=\sqrt{3}$ 时,$\frac{S_1}{S_2}$取得最小值,最小值为 $1+\frac{\sqrt{3}}{2}$,此时 $G(2,0)$.

第 6 期

第 2~3 版章节测试参考答案

一、选择题

1~6.AAACDD　　7~12.ADBBAB

二、填空题

13.8　　14.8

15.$\pm\frac{\sqrt{3}}{4}$　　16.$\left(\frac{\sqrt{15}}{2},4\right]$

三、解答题

17.**解**:设点$N(x,y)$.因为N是EF的中点,$F(2,0)$,所以$E(2x-2,2y)$.又E是OM的中点,$O(0,0)$,所以$M(4x-4,4y)$.将其代入抛物线方程中,得$(4y)^2=8(4x-4)$,即$y^2=2x-2$,此即为点N的轨迹方程.

18.**解**:(1)由题设,得$F_1(-1,0)$,$F_2(1,0)$,$|PF_1|+|PF_2|=4>|F_1F_2|$,则点P的轨迹是椭圆,其中$a=2,c=1$,则$b=\sqrt{3}$,所以动点P的轨迹方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)设$|PF_1|=m,|PF_2|=n$,

则$m+n=2a=4$.

在$\triangle PF_1F_2$中,由余弦定理,得$4=m^2+n^2-2mn\cos 60°=(m+n)^2-3mn=16-3mn$,

解得$mn=4$,

即$|PF_1|\cdot|PF_2|=4$.

19.(1)**证明**:由已知可得$F(2,0)$,且直线AB的斜率不为0,设直线AB的方程为$x=my+2$,与抛物线的方程$y^2=8x$联立,消去x并整理,可得$y^2-8my-16=0$,则$y_1y_2=-16$.所以y_1y_2为定值-16.

(2)**解**:不妨设点A在x轴上方.

由$|AF|=10$,准线方程为$x=-2$,

可得$x_1+2=10$,

所以$x_1=8$,

代入抛物线方程可得$y_1=8$.

结合(1)得$y_2=-2$.

所以$\frac{S_{\triangle AOF}}{S_{\triangle BOF}}=\frac{\frac{1}{2}|OF|\cdot|y_1|}{\frac{1}{2}|OF|\cdot|y_2|}=4$,

即$\triangle AOF$的面积与$\triangle BOF$的面积的比值为4.

20.**解**:(1)由题意,

得$\begin{cases}a-c=2,\\a+c=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=4,\\c=2,\end{cases}$所以$b^2=a^2-c^2=12$.

所以椭圆C的标准方程为$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$.

(2)若弹珠和小球不会发生碰撞,则需小球的中心(2,0)到变轨直线的距离大于小球的半径.

设$P(x,y)(x,y>0)$,

由$\begin{cases}\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1,\\x^2+y^2=13,\end{cases}$解得$P(2,3)$.

设变轨直线的方程为$y-3=k(x-2)$,

即$kx-y+(3-2k)=0$,

则有$\frac{|2k+(3-2k)|}{\sqrt{k^2+1}}>1$,

解得$k\in(-2\sqrt{2},2\sqrt{2})$.

21.(1)**解**:由题设可得$\begin{cases}2c=8\sqrt{2},\\a=3b,\\a^2-b^2=c^2,\end{cases}$

解得$c=4\sqrt{2},a=6,b=2$.

所以椭圆C的方程为$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{4}=1$.

(2)**解**:设直线l的方程为$y=\frac{1}{3}x+m$,

代入椭圆方程可得$2x^2+6mx+9m^2-36=0$.

设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,

则$x_1+x_2=-3m,x_1x_2=\frac{9m^2-36}{2}$.

所以$|AB|$

$=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=\sqrt{1+\left(\frac{1}{3}\right)^2}\cdot\sqrt{9m^2-2(9m^2-36)}$

$=2\sqrt{10}$,

解得$m=2$,或$m=-2$.

由题意可知$m<0$,故直线l的方程为$y=\frac{1}{3}x-2$,即$x-3y-6=0$.

所以$P(3\sqrt{2},\sqrt{2})$到直线AB的距离$d=\frac{|3\sqrt{2}-3\sqrt{2}-6|}{\sqrt{1+3^2}}=\frac{6}{\sqrt{10}}$.

所以$\triangle PAB$的面积$S=\frac{1}{2}\times2\sqrt{10}\times\frac{6}{\sqrt{10}}=6$.

(3)**证明**:结合(2)可知

$k_{PA}+k_{PB}=\frac{y_1-\sqrt{2}}{x_1-3\sqrt{2}}+\frac{y_2-\sqrt{2}}{x_2-3\sqrt{2}}$

$=\frac{(y_1-\sqrt{2})(x_2-3\sqrt{2})+(y_2-\sqrt{2})(x_1-3\sqrt{2})}{(x_1-3\sqrt{2})(x_2-3\sqrt{2})}$.

因为$(y_1-\sqrt{2})(x_2-3\sqrt{2})+(y_2-\sqrt{2})(x_1-3\sqrt{2})=\left(\frac{1}{3}x_1+m-\sqrt{2}\right)(x_2-3\sqrt{2})+\left(\frac{1}{3}x_2+m-\sqrt{2}\right)(x_1-3\sqrt{2})=\frac{2}{3}x_1x_2+(m-2\sqrt{2})(x_1+x_2)-6\sqrt{2}m+12=\frac{2}{3}\cdot\frac{9m^2-36}{2}-(m-2\sqrt{2})\cdot3m-6\sqrt{2}m+12=0$,所以$k_{PA}+k_{PB}=0$.

所以$\angle APB$的角平分线平行于y轴.所以$\triangle PAB$的内切圆圆心在定直线$x=3\sqrt{2}$上.

22.(1)**解**:将$A(-1,\sqrt{2})$,$B(0,2)$代入圆锥曲线的方程得$\begin{cases}\frac{1}{m}+\frac{2}{n}=1,\\\frac{4}{n}=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}m=2,\\n=4.\end{cases}$所以圆锥曲线的标准方程为$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1$.

(2)**证明**:由(1)可知,$D(\sqrt{2},0)$,$E(0,2)$.

设$P(x_0,y_0)$,则$\frac{x_0^2}{2}+\frac{y_0^2}{4}=1$,

即$y_0^2+2x_0^2=4$.

又直线PD:$y=\frac{y_0}{x_0-\sqrt{2}}(x-\sqrt{2})$,

令$x=0$,得$y_M=-\frac{\sqrt{2}y_0}{x_0-\sqrt{2}}$,

所以$|EM|=\left|2+\frac{\sqrt{2}y_0}{x_0-\sqrt{2}}\right|$;

直线PE:$y=\frac{y_0-2}{x_0}\cdot x+2$,

令$y=0$,得$x_N=\frac{-2x_0}{y_0-2}$,

所以$|DN|=\left|\sqrt{2}+\frac{2x_0}{y_0-2}\right|$.

所以$|DN|\cdot|EM|$

$=\left|\sqrt{2}+\frac{2x_0}{y_0-2}\right|\cdot\left|2+\frac{\sqrt{2}y_0}{x_0-\sqrt{2}}\right|$

$=\left|\frac{2(y_0^2+2x_0^2-4y_0-4\sqrt{2}x_0+2\sqrt{2}x_0y_0+4)}{x_0y_0-2x_0-\sqrt{2}y_0+2\sqrt{2}}\right|$

$=\left|\frac{2(4-4y_0-4\sqrt{2}x_0+2\sqrt{2}x_0y_0+4)}{x_0y_0-2x_0-\sqrt{2}y_0+2\sqrt{2}}\right|$

$=\left|\frac{2(-4y_0-4\sqrt{2}x_0+2\sqrt{2}x_0y_0+8)}{x_0y_0-2x_0-\sqrt{2}y_0+2\sqrt{2}}\right|$

$=4\sqrt{2}$.

故$|DN|\cdot|EM|$为定值$4\sqrt{2}$.

第 7 期

第 3~4 版同步周测参考答案

一、选择题

1~6.ABDCAD　　7~12.BDBCBB

二、填空题

13.6　　14.$\frac{1}{12}$

15.5或$\sqrt{43}$　　16.$\frac{1}{6}$

三、解答题

17.**解**:(1)由G为$\triangle BCD$的重心,

知$\overrightarrow{GE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BE}$,

又E,F为CD,AD的中点,

所以$\overrightarrow{EF}\parallel\overrightarrow{AC}$,且$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$,

所以$\overrightarrow{AG}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$

$=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}$.

(2)由向量加法的平行四边形法则及几何意义,知

$\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{AH}$,$\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AF}$,

所以$\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{FH}$.

18.**解**:(1)因为$\overrightarrow{BC}=(-2,-1,2)$,

且$\boldsymbol{c}\parallel\overrightarrow{BC}$,

所以设$\boldsymbol{c}=\lambda\overrightarrow{BC}=(-2\lambda,-\lambda,2\lambda)$,

得$|\boldsymbol{c}|=\sqrt{(-2\lambda)^2+(-\lambda)^2+(2\lambda)^2}=3|\lambda|=3$,

解得$\lambda=\pm1$.

即$\boldsymbol{c}=(-2,-1,2)$或$\boldsymbol{c}=(2,1,-2)$.

(2)因为$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}=(1,1,0)$,$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}=(-1,0,2)$,

所以$k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(k-1,k,2)$,$k\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(k+2,k,-4)$.

又因为$(k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp(k\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$,

所以$(k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(k\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=0$.

即$(k-1,k,2)\cdot(k+2,k,-4)=2k^2+k-10=0$.

解得$k=2$或$k=-\frac{5}{2}$.

19.(1)**证明**:因为$\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}$

$=\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}\right)+\left(\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}\right)$

$=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE})+(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF})$

$=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}$,

所以A,E,C_1,F四点共面.

(2)**解**:因为$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}$

$=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE})$

$=\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{DD_1}-\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BB_1}$

$=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}$,

所以$x=-1,y=1,z=\frac{1}{3}$,

所以$x+y+z=\frac{1}{3}$.

20.(1)**证明**:因为$BB_1\perp$平面ABC,

所以$\overrightarrow{BB_1}\cdot\overrightarrow{AB}=0$,$\overrightarrow{BB_1}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.

所以$\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{BC_1}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB_1})\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB_1})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{BB_1}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB_1}^2=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\rangle+\overrightarrow{BB_1}^2=\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\cos\frac{2\pi}{3}+1=-1+1=0$.

所以$AB_1\perp BC_1$.

(2)**解**:设侧棱长为x.

由(1)知$\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{BC_1}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\rangle+\overrightarrow{BB_1}^2=x^2-1$.

又$|\overrightarrow{BC_1}|=|\overrightarrow{AB_1}|=\sqrt{\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BB_1}^2}=\sqrt{2+x^2}$,

所以$\cos\langle\overrightarrow{AB_1},\overrightarrow{BC_1}\rangle=\frac{x^2-1}{|2+x^2|}=\frac{1}{2}$,

解得$x=2$,或$x=-2$(舍去),或$x=0$(舍去).

所以侧棱的长为2.

21.**解**:(1)以D为坐标原点,分别以DA,DC,DF所在直线为x,y,z轴建立空间直角坐标系,则$D(0,0,0)$,$B(1,1,0)$,$E(0,1,1)$,$F(0,0,2)$,

故$\overrightarrow{BD}=(-1,-1,0)$,$\overrightarrow{EF}=(0,-1,1)$.

所以$\cos\langle\overrightarrow{BD},\overrightarrow{EF}\rangle=\frac{\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{EF}}{|\overrightarrow{BD}|\cdot|\overrightarrow{EF}|}=\frac{1}{2}$,

所以异面直线BD与EF所成角的大小为$\frac{\pi}{3}$.

(2)由(1)知$D(0,0,0)$,$A(1,0,0)$,$B(1,1,0)$,$C(0,1,0)$,$E(0,1,1)$,连接AE,取AE的中点G,则$G\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$,连接$GA,GB,GC,GD,GE$,可得$|GA|=|GB|=|GC|=|GD|=|GE|=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

所以过A,B,C,D,E这五个点的球的半径$R=\frac{\sqrt{3}}{2}$,故表面积$S=4\pi R^2=4\pi\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=3\pi$.

22.**解**:(1)以A为原点,AB,AD,AP所在直线分别为x,y,z轴建立空间直角坐标系,则$A(0,0,0)$,$B(\sqrt{3},0,0)$,$C(\sqrt{3},1,0)$,$P(0,0,2)$,故$\overrightarrow{AC}=(\sqrt{3},1,0)$,$\overrightarrow{PB}=(\sqrt{3},0,-2)$.

所以$\cos\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{PB}\rangle=\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{PB}|}=\frac{3}{2\times\sqrt{7}}=\frac{3\sqrt{7}}{14}$.

(2)由(1)知$\overrightarrow{AP}=(0,0,2)$,$\overrightarrow{AC}=(\sqrt{3},1,0)$,$E\left(0,\frac{1}{2},1\right)$.

设$N(a,0,c)$,

则$\overrightarrow{NE}=\left(-a,\frac{1}{2},1-c\right)$.

因为$NE\perp$平面PAC,

所以$\begin{cases}\overrightarrow{NE}\cdot\overrightarrow{AP}=2(1-c)=0,\\\overrightarrow{NE}\cdot\overrightarrow{AC}=-\sqrt{3}a+\frac{1}{2}=0,\end{cases}$

解得$a=\frac{\sqrt{3}}{6}$,$c=1$,

所以$N\left(\frac{\sqrt{3}}{6},0,1\right)$.

所以N到AB的距离为1,到AP的距离为$\frac{\sqrt{3}}{6}$.