11.B

12.C

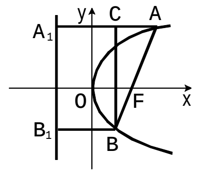
二、填空题

13.若 $x\notin\mathbf{R}$,则 $x^2+1\leq 1$

14.2

15.$\frac{8}{3}$

提示:如图,过点A,B分别作准线的垂线,垂足为$A_1$,$B_1$,过点B作$AA_1$的垂线,垂足为C.




(第15题图)

设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$|BF|=m$,则$|AF|=3m$,由抛物线的定义,知$|BB_1|=m$,$|AA_1|=3m$.

在△ABC中,因为$|AC|=2m$,$|AB|=4m$,所以$k_{AB}=\tan 60°=\sqrt{3}$.所以直线$AB$的方程为$y=\sqrt{3}(x-1)$.与抛物线方程联立,消去$y$,得$3x^2-10x+3=0$.所以弦$AB$的中点到抛物线准线的距离为$\frac{x_1+x_2}{2}+1=\frac{5}{3}+1=\frac{8}{3}$.

16.-2

三、解答题

17.**解**:(1)由已知,得$p=4$,故抛物线$C$的标准方程为$y^2=8x$.

(2)设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$M(x,y)$,则$y_1^2=8x_1$,$y_2^2=8x_2$.两式作差,得$(y_1-y_2)(y_1+y_2)=8(x_1-x_2)$.当$x_1\neq x_2$时,有$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{8}{y_1+y_2}$,即$k_{AB}=\frac{8}{2y}=k_{MP}=\frac{y-0}{x-3}$,所以$y^2=4x-12$;当$x_1=x_2$时,$AB\perp x$轴,则$AB$的中点即为点$P(3,0)$,也满足$y^2=4x-12$.

综上所述,弦$AB$的中点$M$的轨迹方程为$y^2=4x-12$.

18.**解**:若$p$为真命题,则$\begin{cases}a-1>0,\\2(a-1)-1>0,\end{cases}$或$\begin{cases}a-1<0,\\1\cdot(a-1)-1>0,\end{cases}$解得$a>\frac{3}{2}$;若$q$为真命题,则$a^2-4<0$,解得$-2<a<2$.

(1)若$p\wedge q$是真命题,则$p$真$q$真,所以实数$a$的取值范围为$\left(\frac{3}{2},2\right)$.

(2)由题意,得$p$,$q$同真假.若$p$真$q$真,由(1)知$\frac{3}{2}<a<2$;若$p$假$q$假,则$\begin{cases}a\leq\frac{3}{2},\\a\leq -2\text{或}a\geq 2\end{cases}\Rightarrow a\leq -2$.所以实数$a$的取值范围为$(-\infty,-2]\cup\left(\frac{3}{2},2\right)$.

19.**解**:(1)因为$e\geq\sqrt{2}k$,所以$\frac{\sqrt{3+m}}{\sqrt{3}}\geq\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{3}}$,解得$m\leq 3$.又$m>0$,所以实数$m$的取值范围为$(0,3]$.

(2)由$m^2-(2a+2)m+a(a+2)\leq 0$,得$(m-a)(m-a-2)\leq 0$,所以$a\leq m\leq a+2$.

因为$p$是$q$的必要不充分条件,所以$\begin{cases}a>0,\\a+2\leq 3,\end{cases}$解得$0<a\leq 1$.

所以实数$a$的取值范围为$(0,1]$.

20.(1)**证明**:连接$AC$,交$BD$于点$O$,连接$OE$,因为正四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中,四边形$ABCD$是正方形,

所以$O$是$AC$中点,因为$E$为$CC_1$的中点,所以$OE\parallel AC_1$,因为$AC_1\not\subset$平面$BDE$,$OE\subset$平面$BDE$,所以$AC_1\parallel$平面$BDE$.

(2)**解**:以$D$为原点,$DA$所在直线为$x$轴,$DC$所在直线为$y$轴,$DD_1$所在直线为$z$轴,建立如图所示的空间直角坐标系,因为$AB=BC=1$,$AA_1=4$,所以$A_1(1,0,4)$,$C_1(0,1,4)$,$D(0,0,0)$,$E(0,1,2)$,

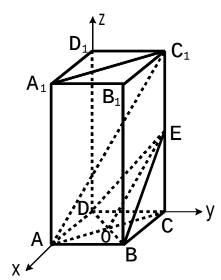
则$\overrightarrow{A_1C_1}=(-1,1,0)$,$\overrightarrow{DE}=(0,1,2)$,

设异面直线$A_1C_1$与$DE$所成角为$\theta$,

则$\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{A_1C_1}\cdot\overrightarrow{DE}|}{|\overrightarrow{A_1C_1}|\cdot|\overrightarrow{DE}|}$

$=\frac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

所以异面直线$A_1C_1$与$DE$所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{10}}{10}$.




(第20题图)

21.**解**:(1)设$F(c,0)$,则抛物线$C_2$:$y^2=4cx$.

$x=c$与$C_1$联立得$A\left(c,\frac{b^2}{a}\right)$,$B\left(c,-\frac{b^2}{a}\right)$;$x=c$与$C_2$联立得$C(c,2c)$,$D(c,-2c)$,

所以$|AB|=\frac{2b^2}{a}$,$|CD|=4c$.

因为$|CD|=\frac{4}{3}|AB|$,

所以$4c=\frac{4}{3}\times\frac{2b^2}{a}$,

整理得$2a^2-2c^2=3ac$,

即$2\left(\frac{c}{a}\right)^2+3\times\frac{c}{a}-2=0$,

得$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$,

所以$C_1$的离心率为$\frac{1}{2}$.

(2)由(1)知$a=2c$,$b=\sqrt{3}c$,设$M(x,y)$,因为$|MF|=5$,所以$x+c=5$,

由$\begin{cases}x+c=5,\\y^2=4cx,\\\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\end{cases}$又$c>0$,解得$\begin{cases}c=3,\\a=6,\\b^2=27,\end{cases}$

所以$C_1$:$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$,$C_2$:$y^2=12x$.

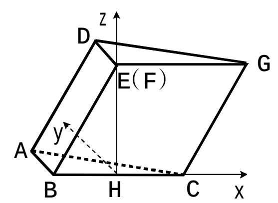
22.(1)**证明**:由已知得$AD\parallel BE$,$CG\parallel BE$,所以$AD\parallel CG$,故$AD$,$CG$确定一个平面,从而$A$,$C$,$G$,$D$四点共面.由已知得$AB\perp BE$,$AB\perp BC$,故$AB\perp$平面$BCGE$.

又因为$AB\subset$平面$ABC$,所以平面$ABC\perp$平面$BCGE$.

(2)**解**:如图,作$EH\perp BC$,垂足为$H$.因为$EH\subset$平面$BCGE$,平面$BCGE\perp$平面$ABC$,所以$EH\perp$平面$ABC$.

由已知,菱形$BCGE$的边长为2,$\angle EBC=60°$,可求得$BH=1$,$EH=\sqrt{3}$.

以$H$为坐标原点,$\overrightarrow{HC}$的方向为$x$轴的正方向,建立如图所示的空间直角坐标系$H-xyz$,




(第22题图)

则$A(-1,1,0)$,$C(1,0,0)$,$G(2,0,\sqrt{3})$,$\overrightarrow{CG}=(1,0,\sqrt{3})$,$\overrightarrow{AC}=(2,-1,0)$.

设平面$ACGD$的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则$\begin{cases}\overrightarrow{CG}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\\overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}x+\sqrt{3}z=0,\\2x-y=0,\end{cases}$所以可取$\boldsymbol{n}=(3,6,-\sqrt{3})$.

又平面$BCGE$的法向量可取为$\boldsymbol{m}=(0,1,0)$,所以$\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=$

$\frac{6}{\sqrt{3^2+6^2+3}\times 1}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因此,二面角$B-CG-A$的大小为30°.



2020-2021学年

数学·人教A(选修2-1)答案页第3期

学习周报 ③

## 第9~12期

### 第9~10版综合测试(一)参考答案

一、选择题

1.A 2.D 3.B 4.C

5.C

提示:由已知,得$a^2-9=4+3$,解得$a=4$.

6.B

提示:由渐近线方程为$y=\sqrt{2}x$,得$\frac{b}{a}=\sqrt{2}$,所以$e^2=1+\frac{b^2}{a^2}=3\Rightarrow e=\sqrt{3}$.

7.C

8.D

9.C

提示:由题知$F\left(\frac{3}{4},0\right)$,所以直线$AB$的方程为$y=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{3}{4}\right)$.与抛物线$C$的方程联立消去$y$并整理,得$\frac{1}{3}x^2-\frac{7}{2}x+\frac{3}{16}=0$.设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则$x_1+x_2=\frac{21}{2}$.所以$|AB|=x_1+x_2+p=\frac{21}{2}+\frac{3}{2}=12$.

10.B

提示:由$F(-2\sqrt{5},0)$,

得$c=2\sqrt{5}$.

设椭圆的右焦点为$F_1$,

连接$PF_1$.

由$|OP|=|OF|=|OF_1|$,

知$PF_1\perp PF$.

所以$|PF_1|=\sqrt{|F_1F|^2-|PF|^2}$

$=\sqrt{(4\sqrt{5})^2-4^2}$

$=8$.

由椭圆定义,

得$|PF_1|+|PF|=2a=4+8=12$,

从而$a=6$,$a^2=36$.

于是$b^2=a^2-c^2=16$.

所以椭圆$C$的方程为$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$.

11.A

12.A

提示:$4-b^2=1$,故$b^2=3$,

椭圆方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

联立$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$与$y=kx+2$,得$(4k^2+3)x^2+16kx+4=0$,

有$\Delta=(16k)^2-16(4k^2+3)\leq 0$,

解得$-\frac{1}{2}\leq k\leq\frac{1}{2}$.

二、填空题

13.$a=1$,$b=-1$(答案不唯一)

14.$\frac{9}{2}$

15.①③④

提示:设三条直线$l_1\cap l_2=A$,$l_1\cap l_3=B$,$l_2\cap l_3=C$,则$l_1$与$l_2$可确定平面$\alpha$,此时$B\in\alpha$,$C\in\alpha$,所以$l_3\subset\alpha$,所以三条直线在同一个平面内,$p_1$为真命题;

因为共线的三点可以确定无数个平面,所以$p_2$为假命题;

因为空间中直线的位置关系有平行、相交、异面共三种,所以$p_3$为假命题;

由线面垂直的定义知,$p_4$为真命题.

所以$p_1\wedge p_4$,$\neg p_2\vee p_3$,$\neg p_3\vee\neg p_4$均为真命题.故①③④.

16.$\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

提示:设椭圆的长半轴长、短半轴长、半焦距分别为a,b,c,由$\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=0$,所以点M的轨迹是以原点O为圆心,半焦距为半径的圆.又点M总在椭圆的内部,所以$c<b$,$c^2<b^2=a^2-c^2$,即$2c^2<a^2$.所以$e^2=\frac{c^2}{a^2}<\frac{1}{2}$,而$e\in(0,1)$,故$e\in\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

三、解答题

17.**解**:若$p$为真命题,则$a<x<3a$;

若$q$为真命题,则$2<x\leq 3$.

(1)当$a=1$时,$p$:$1<x<3$.

由"$p\wedge q$"为真命题,

知$p$,$q$均为真命题,

所以$2<x<3$,

即实数$x$的取值范围为$(2,3)$.

(2)设$A=\{x|a<x<3a\}$,$B=\{x|2<x\leq 3\}$.

若$\neg p$是$\neg q$的充分不必要条件,

则$p$是$q$的必要不充分条件,

所以$B\subsetneqq A$,

即$\begin{cases}0<a\leq 2,\\3a>3,\end{cases}$解得$1<a\leq 2$.

所以实数$a$的取值范围为$(1,2]$.

18.**解**:(1)准线方程为$x=-\frac{p}{2}$,

于是$4+\frac{p}{2}=5$,解得$p=2$.

所以抛物线的方程为$y^2=4x$.

(2)由(1)得$A(4,4)$,

故$B(0,4)$,$M(0,2)$.

又$F(1,0)$,所以$k_{FA}=\frac{4}{3}$,

$FA$所在直线的方程为

$y=\frac{4}{3}(x-1)$. ①

因为$MN\perp FA$,所以$k_{MN}=-\frac{3}{4}$,

$MN$所在直线的方程为

$y-2=-\frac{3}{4}x$. ②

联立①②,解得$x=\frac{8}{5}$,$y=\frac{4}{5}$,

所以点$N$的坐标为$\left(\frac{8}{5},\frac{4}{5}\right)$.

19.**解**:(1)抛物线$y^2=4x$的焦点坐标为$(1,0)$,直线的斜率为$-1$,

则该直线方程为$y=-(x-1)$,

即$x+y-1=0$.

(2)设点A,B的坐标分别为$(x_1,y_1)$、$(x_2,y_2)$,由$\begin{cases}y^2=4x,\\y=-x+1,\end{cases}$

消去y可得$x^2-6x+1=0$,

根据韦达定理,得$x_1+x_2=6$,$x_1x_2=1$,

所以$|AB|=\sqrt{1+(-1)^2}\times\sqrt{6^2-4}=8$,

点O到直线AB的距离

$d=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

所以$S_{\triangle ABO}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d$

$=\frac{1}{2}\times 8\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=2\sqrt{2}$.

20.(1)**解**:以O为坐标原点,OA,OC,$OO_1$所在直线分别为x,y,z轴,建立空间直角坐标系,则$B(1,1,0)$,$A_1(1,0,1)$,$C_1(0,1,1)$.

设$n=(x,y,z)$是平面$A_1BC_1$的法向量,则$n\cdot\overrightarrow{BA_1}=0$,$n\cdot\overrightarrow{BC_1}=0$,而$\overrightarrow{BA_1}=(0,-1,1)$,$\overrightarrow{BC_1}=(-1,0,1)$.

所以$\begin{cases}-y+z=0,\\-x+z=0,\end{cases}$即$x=y=z$.

取$z=1$,则$x=y=1$,故$n=(1,1,1)$.

所以$n=(1,1,1)$为平面$A_1BC_1$的一个法向量.

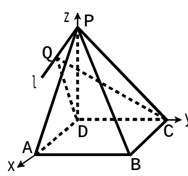
(2)**证明**:因为$E\left(0,\frac{2}{3},1\right)$,$F\left(0,1,\frac{2}{3}\right)$,则$\overrightarrow{EF}=\left(0,\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$,

又$n\cdot\overrightarrow{EF}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=0$,

所以$\overrightarrow{EF}\perp n$,所以$EF\parallel$平面$A_1BC_1$.

③ 21.(1)**证明**:过 $P$ 在平面 $PAD$ 内作直线 $l∥AD$,由 $AD∥BC$,可得 $l∥BC$,即 $l$ 为平面 $PAD$ 和平面 $PBC$ 的交线,因为 $PD⊥$平面 $ABCD$,$BC⊂$平面$ABCD$,所以 $PD⊥BC$,又 $BC⊥CD$,$CD∩PD=D$,所以 $BC⊥$平面 $PDC$,因为 $l∥BC$,所以 $l⊥$平面 $PDC$.

(2)**解**:如图,以 $D$ 为坐标原点,$DA,DC,DP$ 所在的直线分别为 $x,y,z$ 轴,建立空间直角坐标系 $D-xyz$,则 $D(0,0,0)$,$C(0,1,0)$,$P(0,0,1)$,$B(1,1,0)$,设 $Q(a,0,1)$,则 $\overrightarrow{DQ}=(a,0,1)$,$\overrightarrow{PB}=(1,1,-1)$,$\overrightarrow{DC}=(0,1,0)$,设平面 $QCD$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DQ}=0,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}y=0,\\ ax+z=0,\end{cases}$ 令 $x=-1$,可得 $\boldsymbol{n}=(-1,0,a)$,所以 $\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{PB}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PB}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{PB}|}=\dfrac{-1-a}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{1+a^2}}$.设 PB 与平面 QCD 所成角为 $\theta$,则 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot\dfrac{|a+1|}{\sqrt{1+a^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{1+\dfrac{2a}{a^2+1}}\leqslant\dfrac{\sqrt{6}}{3}$,当且仅当 $a=1$ 时,等号成立.所以 $PB$ 与平面 $QCD$ 所成角的正弦值的最大值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.



(第 21 题图)

22.(1)**解**:由题可得 $A(-a,0)$,$B(a,0)$,$G(0,1)$,

所以$\overrightarrow{AG}=(a,1)$,$\overrightarrow{GB}=(a,-1)$,

所以$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{GB}=a^2-1=8$,所以 $a=3$,

所以椭圆 $E$ 的方程为$\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$.

(2)**证明**:设 $P(6,t)$,则直线 $AP$ 的方程为 $y=\dfrac{t-0}{6-(-3)}(x+3)$,即 $y=\dfrac{t}{9}(x+3)$.

联立直线 $AP$ 的方程与椭圆 $E$ 的方程,可得 $(t^2+9)x^2+6t^2x+9t^2-81=0$,

解得 $x=-3$ 或 $x=\dfrac{-3t^2+27}{t^2+9}$,

将 $x=\dfrac{-3t^2+27}{t^2+9}$ 代入直线方程 $y=\dfrac{t}{9}(x+3)$,可得 $y=\dfrac{6t}{t^2+9}$,

所以点 $C$ 的坐标为 $\left(\dfrac{-3t^2+27}{t^2+9},\dfrac{6t}{t^2+9}\right)$.

同理可得点 $D$ 的坐标为 $\left(\dfrac{3t^2-3}{t^2+1},\dfrac{-2t}{t^2+1}\right)$,

所以直线 $CD$ 的方程为 $y-\left(\dfrac{-2t}{t^2+1}\right)=\dfrac{\dfrac{6t}{t^2+9}-\left(\dfrac{-2t}{t^2+1}\right)}{\dfrac{-3t^2+27}{t^2+9}-\dfrac{3t^2-3}{t^2+1}}\left(x-\dfrac{3t^2-3}{t^2+1}\right)$,整理,得 $y=\dfrac{4t}{3(3-t^2)}x+\dfrac{2t}{t^2-3}=\dfrac{4t}{3(3-t^2)}\left(x-\dfrac{3}{2}\right)$,故直线 $CD$ 过定点 $\left(\dfrac{3}{2},0\right)$.

**第 11~12 版综合测试(二)参考答案**

**一、选择题**

1.B 2.B 3.D

4.D

**提示**:由已知得$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OC}=2(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})+(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})$,整理可得$\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OC}$,故选D.

5.D

6.D

**提示**:由 $b=4$,$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{3}{5}$,$a^2=b^2+c^2$,解得 $a=5$.由椭圆的定义知$\triangle ABF_2$ 的周长为 $4a=20$.

7.A

8.D

**提示**:以$D$为原点,$DA,DC,DD_1$所在直线分别为$x,y,z$轴建立空间直角坐标系,则$A(1,0,0)$,$C_1(0,1,1)$,

设$P(x,y,1)(0\leqslant x\leqslant1,0\leqslant y\leqslant1)$.

则$\overrightarrow{PA}=(1-x,-y,-1)$,$\overrightarrow{PC_1}=(-x,1-y,0)$,

于是$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC_1}=x^2-x+y^2-y$

$=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}$.

因为$0\leqslant x\leqslant1,0\leqslant y\leqslant1$,

所以$0\leqslant\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2\leqslant\dfrac{1}{4}$,$0\leqslant\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2\leqslant\dfrac{1}{4}$,

故$-\dfrac{1}{2}\leqslant\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}\leqslant0$.

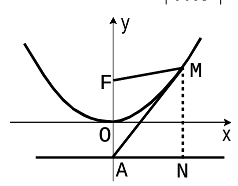
故选D.

9.B

**提示**:由已知得 AB 的斜率 $k=k_{FM}=1$.设 $E$ 的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则有 $\begin{cases}\dfrac{x_1^2}{a^2}-\dfrac{y_1^2}{b^2}=1,\\ \dfrac{x_2^2}{a^2}-\dfrac{y_2^2}{b^2}=1,\end{cases}$ 两式相减并结合 $\begin{cases}x_1+x_2=-24,\\ y_1+y_2=-30,\end{cases}$ 得 $\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{4b^2}{5a^2}=1$,即 $4b^2=5a^2$.又 $a^2+b^2=9$,解得 $a^2=4$,$b^2=5$.故选 B.

10.D

**提示**:如图所示,过点 $M$ 作抛物线准线的垂线,垂足为 $N$,则$|MN|=y_0+\dfrac{p}{2}=\dfrac{5y_0}{4}$,故 $y_0=2p$.将点 $M(1,2p)$代入抛物线 $C$ 的方程中,得 $1^2=2p\cdot2p$,解得 $p=\dfrac{1}{2}$.从而可得$|MN|=\dfrac{5}{4}$.又$|AN|=1$,所以 $\tan\angle FAM=\tan\angle AMN=\dfrac{|AN|}{|MN|}=\dfrac{4}{5}$.



(第 10 题图)

11.C

**提示**:由 $C_1$ 与 $C_2$ 的方程可知两曲线都过原点,所以直线 $AB$ 必过原点,可设 $AB$ 的方程为 $y=kx(k>0)$,则圆心 $C_1(0,2)$到直线 $AB$ 的距离 $d=\dfrac{2}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{2^2-\left(\dfrac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$,解得 $k=2$.由 $\begin{cases}y=2x,\\ x^2+(y-2)^2=4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=0,\\ y=0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=\dfrac{8}{5},\\ y=\dfrac{16}{5},\end{cases}$ 把点$\left(\dfrac{8}{5},\dfrac{16}{5}\right)$代入 $C_2$ 的方程,得$\left(\dfrac{16}{5}\right)^2=2p\cdot\dfrac{8}{5}$,解得 $p=\dfrac{16}{5}$.所以 $C_2$ 的方程为 $y^2=\dfrac{32}{5}x$.

12.B

**二、填空题**

13.$(3,+\infty)$

**提示**:由题设,得$(m,+\infty)$是$(3,+\infty)$的真子集,所以 $m>3$.

14.$-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

15.$(-\infty,-2]\cup(-1,+\infty)$

**提示**:由题知 $p:m\leqslant-1$,$q:-2<m<2$.若"$p\wedge q$"为真命题,则$-2<m\leqslant-1$,从而可知,若"$p\wedge q$"为假命题,则 $m\leqslant-2$ 或 $m>-1$.

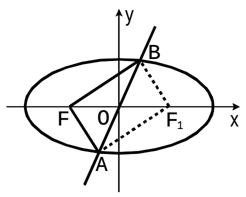
16.$\dfrac{5}{7}$

**提示**:如图所示,在$\triangle ABF$ 中,根据余弦定理,有$|AF|^2=|AB|^2+|BF|^2-2|AB|\cdot|BF|\cos\angle ABF$,即 $6^2=10^2+|BF|^2-2\times10\times|BF|\times\dfrac{4}{5}$,解得$|BF|=8$.所以$|AF|^2+|BF|^2=|AB|^2$.





所以$\angle AFB=90°$,可得$|OF|=\dfrac{1}{2}|AB|=5$,即 $c=5$.设椭圆的右焦点为 $F_1$,连接 $AF_1,BF_1$.由椭圆的对称性,知 $AB$ 与 $FF_1$ 互相平分,所以四边形 $AFBF_1$ 为平行四边形.所以$|BF_1|=|AF|=6$.所以 $2a=|BF|+|BF_1|=14$,得 $a=7$.因此,离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{5}{7}$.



(第 16 题图)

**三、解答题**

17.**解**:命题 $p$ 等价于 $\Delta=a^2-16\geqslant0$,即 $a\leqslant-4$ 或 $a\geqslant4$;命题 $q$ 等价于$-\dfrac{a}{4}\leqslant3$,即 $a\geqslant-12$.

由"$p\vee q$"是真命题,"$p\wedge q$"是假命题,知 $p$ 和 $q$ 一真一假.

若 $p$ 真 $q$ 假,则 $a<-12$;若 $p$ 假 $q$ 真,则$-4<a<4$.

故实数 $a$ 的取值范围是$(-\infty,-12)\cup(-4,4)$.

18.**解**:(1)由离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}=\sqrt{2}$,得 $a=b$,则可设双曲线的方程为 $x^2-y^2=\lambda$.将点$(4,-\sqrt{10})$代入,得 $\lambda=6$.所以该双曲线的标准方程为$\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{y^2}{6}=1$.

(2)结合(1)可得$|F_1F_2|=2\sqrt{6+6}=4\sqrt{3}$.又 $M(4,-\sqrt{10})$,所以$\triangle F_1MF_2$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}\times4\sqrt{3}\times\sqrt{10}=2\sqrt{30}$.

19.**证明**:取基底$\overrightarrow{AA'}$,$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AD}$.

(1)因为$\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{ED'}+\overrightarrow{D'G}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{EG}$,所以 $EG∥AC$.

(2)因为$\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{FD'}+\overrightarrow{D'G}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AA'}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}=2\overrightarrow{FG}$,所以 $FG∥AB'$.

又由(1)知 $EG∥AC$,

所以平面 $EFG∥$平面 $AB'C$.

20.(1)**证明**:在 $AA_1$ 上取点 $M$,使得 $A_1M=2AM$,连接 $EM,B_1M,EC_1,FC_1$,

在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,有 $DD_1∥AA_1∥BB_1$,且 $DD_1=AA_1=BB_1$,

又 $2DE=ED_1$,$A_1M=2AM$,$BF=2FB_1$,所以 $DE=AM=FB_1$.

所以四边形 $B_1FAM$ 和四边形 $EDAM$ 都是平行四边形.

所以 $AF∥MB_1$,且 $AF=MB_1$,$AD∥ME$,且 $AD=ME$.

又在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,有 $AD∥B_1C_1$,且 $AD=B_1C_1$,

所以 $B_1C_1∥ME$ 且 $B_1C_1=ME$,则四边形 $B_1C_1EM$ 为平行四边形,

所以 $EC_1∥MB_1$,且 $EC_1=MB_1$,

又 $AF∥MB_1$,且 $AF=MB_1$,所以 $AF∥EC_1$,且 $AF=EC_1$,

则四边形 $AFC_1E$ 为平行四边形,所以点 $C_1$ 在平面 $AEF$ 内.

(2)**解**:在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,以 $C_1$ 为坐标原点,分别以 $C_1D_1,C_1B_1,C_1C$ 所在直线为 $x,y,z$ 轴建立空间直角坐标系,如图所示.

因为 $AB=2$,$AD=1$,$AA_1=3$,$2DE=ED_1$,$BF=2FB_1$,

所以 $A(2,1,3)$,$E(2,0,2)$,$F(0,1,1)$,$A_1(2,1,0)$,

则$\overrightarrow{EF}=(-2,1,-1)$,$\overrightarrow{AE}=(0,-1,-1)$,$\overrightarrow{A_1E}=(0,-1,2)$.

设平面 $AEF$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{EF}=-2x_1+y_1-z_1=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AE}=-y_1-z_1=0,\end{cases}$

取 $x_1=1$,得 $\boldsymbol{n}_1=(1,1,-1)$.

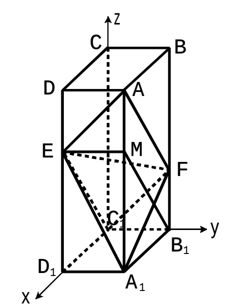
设平面 $A_1EF$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{EF}=-2x_2+y_2-z_2=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{A_1E}=-y_2+2z_2=0,\end{cases}$

取 $x_2=1$,得 $\boldsymbol{n}_2=(1,4,2)$.

所以 $\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{1+4-2}{\sqrt{3}\times\sqrt{21}}=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$.

所以二面角 $A-EF-A_1$ 的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{42}}{7}$.



(第 20 题图)

21.**解**:(1)由题意得 $F(1,0)$,$l$的方程为 $y=k(x-1)(k>0)$.

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$.

由 $\begin{cases}y=k(x-1),\\ y^2=4x,\end{cases}$ 得 $k^2x^2-2(k^2+2)x+k^2=0$.

故 $x_1+x_2=\dfrac{2(k^2+2)}{k^2}$.

所以$|AB|=|AF|+|BF|=x_1+x_2+p=\dfrac{2(k^2+2)}{k^2}+2=8$,解得 $k=-1$(舍去),或 $k=1$.

所以直线 $l$ 的方程 $y=x-1$.

(2)由(1)得 $AB$ 的中点坐标为$(3,2)$,所以直线 $AB$ 的垂直平分线方程为 $y-2=-(x-3)$,即 $y=-x+5$.

设所求圆的圆心坐标为$(x_0,y_0)$,

则 $\begin{cases}y_0=-x_0+5,\\ (x_0+1)^2=\dfrac{(y_0-x_0+1)^2}{2}+16,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x_0=3,\\ y_0=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_0=11,\\ y_0=-6.\end{cases}$

因此,所求圆的方程为$(x-3)^2+(y-2)^2=16$ 或$(x-11)^2+(y+6)^2=144$.

22.**解**:(1)由 $e=\dfrac{c}{a}$,得 $e^2=1-\dfrac{b^2}{a^2}$,即 $\dfrac{15}{16}=1-\dfrac{m^2}{25}$,所以 $m^2=\dfrac{25}{16}$,故 $C$ 的方程是 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{16y^2}{25}=1$.

(2)由(1)知 $A(-5,0)$,$B(5,0)$,设点 $P(s,t)$,点 $Q(6,n)$,

根据对称性,只需考虑 $n>0$ 的情况,此时$-5<s<5$,$0<t\leqslant\dfrac{5}{4}$,

因为$|BP|=|BQ|$,

所以$(s-5)^2+t^2=n^2+1$. ①

又因为 $BP⊥BQ$,

所以 $s-5+nt=0$, ②

又 $\dfrac{s^2}{25}+\dfrac{16t^2}{25}=1$, ③

联立①②③,解得 $\begin{cases}s=3,\\ t=1,\\ n=2,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}s=-3,\\ t=1,\\ n=8.\end{cases}$

当 $s=3$,$t=1$,$n=2$ 时,

$P(3,1)$,$Q(6,2)$,而 $A(-5,0)$,

则$\overrightarrow{AP}=(8,1)$,$\overrightarrow{AQ}=(11,2)$,所以 $S_{\triangle APQ}=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AP}|^2\cdot|\overrightarrow{AQ}|^2-(\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ})^2}$

$=\dfrac{5}{2}$.

同理,当 $s=-3$,$t=1$,$n=8$ 时,$S_{\triangle APQ}=\dfrac{5}{2}$.

综上,$\triangle APQ$ 的面积是$\dfrac{5}{2}$.

**第 13~14 版综合测试(三)参考答案**

**一、选择题**

1.A

2.D

**提示**:把全称量词改为存在量词,并把结果否定.

3.D 4.A 5.C 6.C 7.B 8.B

9.A 10.B