第8期

第2~3版章节测试参考答案

一、选择题

1~6.BACBBC

7.D

提示:设$\frac{y}{x}=k$,则直线 $y=kx$ 与圆$(x-2)^2+y^2=3$有交点,因此圆心到直线的距离 $d=\frac{|2k|}{\sqrt{1+k^2}}\leqslant r=\sqrt{3}$,

解得$-\sqrt{3}\leqslant k\leqslant\sqrt{3}$,所以$\frac{y}{x}$的最大值是$\sqrt{3}$,故选D.

8.D

提示:点B是A(2,3,4)在yOz坐标平面内的射影,则点B的坐标是(0,3,4),所以$|OB|=\sqrt{0+3^2+4^2}=5$,故选D.

9.D

10.B

11.D

提示:圆C的标准方程为$(x+1)^2+y^2=b^2$.由两直线平行,可得$a(a+1)-6=0$,解得$a=2$或$a=-3$.当$a=2$时,直线l_1与l_2重合,舍去;当$a=-3$时,$l_1:x-y-2=0$,$l_2:x-y+3=0$.由l_1与圆C相切,得$b=\frac{|-1-2|}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$;由$l_2$与圆$C$相切,得$b=\frac{|-1+3|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

当l_1,l_2与圆C都相离时,得$b<\sqrt{2}$.所以当l_1,l_2与圆C"平行相交"时,b满足$\begin{cases}b>\sqrt{2},\\ b\neq\sqrt{2},b\neq\frac{3\sqrt{2}}{2},\end{cases}$故实数$b$的取值范围是$\left(\sqrt{2},\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(\frac{3\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$,故选D.

12.D

二、填空题

13.$\left(-\infty,-\frac{1}{13}\right)\cup\left(\frac{1}{13},+\infty\right)$

14.$y=x-2$ 15.3π 16.$[0,3]$

三、解答题

17.**解**:(1)$C:x^2+y^2+2x-4y+a=0$化为$(x+1)^2+(y-2)^2=5-a$.

若曲线C是圆,则$5-a>0$,得$a<5$,所以实数a的取值范围是$(-\infty,5)$.

且圆心坐标为$(-1,2)$,半径长$r=\sqrt{5-a}$.

(2)$a=1$时,圆C为$(x+1)^2+(y-2)^2=4$,故圆心为$(-1,2)$,半径长$r=2$.

因为圆心到直线的距离

$d=\frac{|-1-2+1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$,

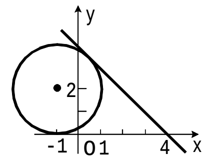
所以弦长$|MN|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{2}$.

18.**解**:将方程$x^2+y^2+2x-4y+1=0$化为$(x+1)^2+(y-2)^2=4$,

此方程表示以$(-1,2)$为圆心,2为半径长的圆.

(1)$\frac{y}{x-4}$表示圆上的点(x,y)与定点$(4,0)$连线的斜率,令$\frac{y}{x-4}=k$,即$y=k(x-4)$.

当直线$y=k(x-4)$与已知圆相切时(如图),$\frac{y}{x-4}$取得最值,



(第18题图)

由$\frac{|-k-2-4k|}{\sqrt{k^2+1}}=2$,解得$k=0$或$k=-\frac{20}{21}$.

所以$\frac{y}{x-4}$的最小值是$-\frac{20}{21}$,最大值是0.

(2)$\sqrt{x^2+y^2-2x+1}=\sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2}$,它表示圆上的点$(x,y)$与定点$(1,0)$的距离.

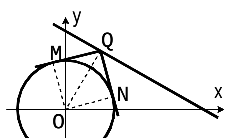
因为定点$(1,0)$到已知圆的圆心距离为$d=\sqrt{(-1-1)^2+2^2}=2\sqrt{2}$,

所以$\sqrt{x^2+y^2-2x+1}$的最大值为$d+r=2\sqrt{2}+2$,最小值为$d-r=2\sqrt{2}-2$.

19.**解**:(1)设点$P(x,y)$,由$|PA|=2|PB|$,得$\sqrt{(x-4)^2+(y-4)^2}=2\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$,

化简得$x^2+y^2=8$,所以点P的轨迹C的方程为$x^2+y^2=8$.

(2)设点Q的坐标为$(8-\sqrt{3}y_0,y_0)$,如下图所示:



(第19题图)

设切线与圆$x^2+y^2=8$相切于M、N两点,连接OM,ON,

则四边形$OMQN$为正方形,且$|OM|=|ON|=2\sqrt{2}$,所以$|OQ|=\sqrt{2}|OM|=4$.

则$\sqrt{(8-\sqrt{3}y_0)^2+y_0^2}=4$,解得$y_0=2\sqrt{3}$,所以点$Q$的坐标为$(2,2\sqrt{3})$.

20.**解**:(1)设圆心C到直线l的距离为d,则$d=\sqrt{|CA|^2-\left(\frac{|AB|}{2}\right)^2}=\sqrt{4-\frac{15}{4}}=\frac{1}{2}$.

当l的斜率不存在时,$d=1$,不合题意.

当l的斜率存在时,设l的方程为$y=kx$,由点到直线距离公式得$\frac{|k|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{1}{2}$,

解得$k=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$,故直线l的方程为$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$.

(2)存在定点M,且$x_0=3$,理由如下:

设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,直线MA,MB的斜率分别为k_1,k_2.

当l的斜率不存在时,由对称性可得$\angle AMC=\angle BMC$,$k_1+k_2=0$,此时$x_0\in R$且$x_0\neq0$.

当l的斜率存在时,设l的方程为$y=kx$,代入圆C的方程,整理得$(k^2+1)x^2+2x-3=0$,

所以$x_1+x_2=-\frac{2}{k^2+1}$,$x_1x_2=-\frac{3}{k^2+1}$,

所以$k_1+k_2=\frac{y_1}{x_1-x_0}+\frac{y_2}{x_2-x_0}=\frac{2kx_1x_2-kx_0(x_1+x_2)}{(x_1-x_0)(x_2-x_0)}=\frac{(2x_0-6)k}{(x_1-x_0)(x_2-x_0)(k^2+1)}$,

当$2x_0-6=0$,即$x_0=3$时,有$k_1+k_2=0$.综上所述,存在定点$M(3,0)$符合题意,$x_0=3$.

21.**解**:(1)依题意,$|OC|=|OD|=2$,且$\angle COD=120°$,则点O到CD边的距离为1,

即点$O(0,0)$到直线$l:kx-y-4=0$的距离$\frac{4}{\sqrt{k^2+1}}=1$,解得$k=\pm\sqrt{15}$,所以直线l的斜率为$\pm\sqrt{15}$.

(2)依题意,$ON\perp QN$,$OM\perp QM$,则M,N都在以OQ为直径的圆F上.由Q是直线$l:y=x-4$上的动点,设$Q(t,t-4)$,则圆F的圆心为$\left(\frac{t}{2},\frac{t-4}{2}\right)$,且经过坐标原点,即圆F的方程为$x^2+y^2-tx-(t-4)y=0$.又因为$M$,$N$在曲线$E:x^2+y^2=4$上,

由$\begin{cases}x^2+y^2=4,\\ x^2+y^2-tx-(t-4)y=0,\end{cases}$

可得$tx+(t-4)y-4=0$.

即直线MN的方程为$tx+(t-4)y-4=0$.

由$t\in\mathbf{R}$且$t(x+y)-4y-4=0$,可得$\begin{cases}x+y=0,\\ 4y+4=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=1,\\ y=-1,\end{cases}$所以直线$MN$过定点$(1,-1)$.

22.**解**:(1)由已知圆C的方程为$(x-m)^2+(y+m)^2=4$,所以圆心为$\begin{cases}x=m,\\ y=-m,\end{cases}$所以圆心所在直线的方程为$x+y=0$.

(2)由已知$r=2$,又弦长为$2\sqrt{2}$,

所以圆心到直线l的距离为

$d=\sqrt{r^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}$,

所以$d=\frac{|m+m+4|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$,

解得$m=-1$或$m=-3$.

(3)由$\angle APB$可取得最大值为90°可知点$P(\sqrt{2},\sqrt{2})$为圆外一点,所以$m\neq0$.

当PA,PB为圆的两条切线时,$\angle APB$取最大值,此时$\angle APB=90°$,又$CA\perp PA$,$CB\perp PB$,$CA=CB$,

所以四边形$PACB$为正方形,则$|CP|=2\sqrt{2}=\sqrt{(m-\sqrt{2})^2+(-m-\sqrt{2})^2}$,

解得$m=\pm\sqrt{2}$.

2020-2021学年

数学·人教A(必修2)答案页第2期

学习周报 ②

第5期

第3~4版章节测试参考答案

一、选择题

1~6.CCDBBC

7.B

提示:设AC∩BD=O,因为ABCD是正方形,所以O是AC的中点,因为过BD且与PC平行的平面交PA于M点,所以OM∥PC,所以M是PA的中点,故A正确;设N为PB的中点,连接AN,CN,因为PA与AB一定不相等,所以AN与PB一定不垂直,所以平面NAC与PB不垂直,故B错误;因为四边形ABCD为正方形,PD⊥平面ABCD且PD=AD,所以PA=AC,PD=DC,又AH⊥PC,DH⊥PC,则H为PC的中点,故C正确;因为AD∥BC,平面PAD与平面PCB有公共点P,所以l∥AD∥BC,故D正确.故选B.

8.A 9.B 10.C

11.C

提示:取BD的中点O,连接OA,OC,因为AB=AD=BC=CD=1,所以OA⊥BD,OC⊥BD.

又平面ABD⊥平面BCD,所以OA⊥平面BCD.因为AB⊥AD,所以$DB=\sqrt{2}$,$OA=OC=\frac{\sqrt{2}}{2}$.取OB的中点N,则$ON=\frac{\sqrt{2}}{4}$,连接MN,CN,则$MN=\frac{1}{2}OA=\frac{\sqrt{2}}{4}$,且MN∥OA,所以MN⊥平面BCD,所以MN⊥CN.又$CN^2=ON^2+OC^2=\frac{5}{8}$,所以$CM=\sqrt{MN^2+CN^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,故选C.

12.C

提示:在四面体ABCD中,因为AB=AC=2,$BC=2\sqrt{2}$,所以$AC^2+AB^2=BC^2$,所以AB⊥AC,又CD⊥平面ABC,且CD=2,所以构造棱长为2的正方体,得四面体外接球半径$r=\frac{1}{2}\sqrt{4+4+4}=\sqrt{3}$,

所以该四面体外接球的体积$V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi\times(\sqrt{3})^3=4\sqrt{3}\pi$.故选C.

二、填空题

13.0或1 14.直角

15.$\sqrt{6}$ 16.$\frac{\sqrt{3}ab}{8}$

三、解答题

17.**证明**:(1)因为在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中,CC_1⊥底面ABC,且AB=AC,D是BC的中点,

所以$AD\perp CC_1$,AD⊥BC,因为$BC\cap CC_1=C$,所以AD⊥平面BCC_1B_1.

(2)连接A_1B,交AB_1于O,连接OD,因为D是BC的中点,所以$OD\parallel A_1C$,因为OD⊂平面AB_1D,A_1C⊄平面AB_1D,

所以A_1C∥平面AB_1D.

18.**证明**:(1)因为PA⊥平面ABCD,AB⊂平面ABCD,所以AB⊥PA,又AB⊥AD,PA∩AD=A,所以AB⊥平面PAD.

因为PD⊂平面PAD,所以AB⊥PD.

(2)因为CD=2AB,E为CD的中点,所以AB=DE,又因为AB∥DE,所以四边形ABED为平行四边形,所以AD∥BE.

因为E,F分别是CD和PC的中点,所以EF∥PD,因为EF∩BE=E,PD∩AD=D,所以平面BEF∥平面PAD.

19.(1)**证明**:如图所示,取BC的中点D,连接AD,C_1D.因为四边形ABB_1A_1是正方形,所以$B_1B\perp AB$,

又平面ABB_1A_1⊥平面ABC,平面ABB_1A_1∩平面ABC=AB,所以B_1B⊥平面ABC,又AD⊂平面ABC,

所以$B_1B\perp AD$.在△ABC中,AC=AB,CD=DB,所以AD⊥BC,又$BC\cap B_1B=B$,所以AD⊥平面BCC_1B_1.

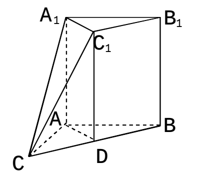
因为四边形BCC_1B_1是梯形,$B_1C_1\parallel BC$,且$B_1C_1=\frac{1}{2}BC$,所以$B_1C_1\underline{\parallel}BD$,所以四边形$BB_1C_1D$是平行四边形,

所以$C_1D\underline{\parallel}B_1B$,又$B_1B\underline{\parallel}A_1A$,所以$C_1D\underline{\parallel}A_1A$,所以四边形$ADC_1A_1$是平行四边形.

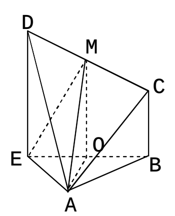
所以$A_1C_1\parallel AD$,所以A_1C_1⊥平面BCC_1B_1.又A_1C_1⊂平面A_1CC_1,所以平面A_1CC_1⊥平面BCC_1B_1.

(2)**解**:由(1)可得,三棱柱$A_1B_1C_1-ABD$是直三棱柱,四边形ADC_1A_1是矩形,CD⊥底面ADC_1A_1.

所以三棱柱$A_1B_1C_1-ABD$的体积$V_1=\frac{1}{2}\times(\sqrt{2})^2\times2=2$,四棱锥$C-ADC_1A_1$的体积$V_2=\frac{1}{3}\times\sqrt{2}\times2\times\sqrt{2}=\frac{4}{3}$.所以几何体$ABC-A_1B_1C_1$的体积$V=V_1+V_2=2+\frac{4}{3}=\frac{10}{3}$.



(第19题图)



(第20题图)

20.(1)**证明**:如图所示,取BE的中点O,并连接OA,OM,则据题意可得中位线$OM=\frac{BC+DE}{2}=3$,且OM⊥BE,又因为△ABE是正三角形,所以AO⊥BE,故∠AOM为二面角A-BE-M的平面角.而$AO=\frac{\sqrt{3}}{2}AB=\sqrt{3}$,$AM=2\sqrt{3}$,有$AO^2+OM^2=AM^2$,即∠AOM=90°,由定义可知平面ABE⊥平面BCDE.

(2)**解**:$V_{MADE}=V_{A-DEM}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot DE\cdot EO\right)\cdot AO=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,故点M到平面ADE的距离为$d=\frac{3V_{M-ADE}}{S_{\triangle ADE}}=\frac{2\sqrt{3}}{\frac{1}{2}\times2\times4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

21.(1)**证明**:由$PA\perp$平面ABC,得$BC\perp PA$.又有$BC\perp AC$,$PA\cap AC=A$,故可得$BC\perp$平面PAC,所以$BC\perp PC$.

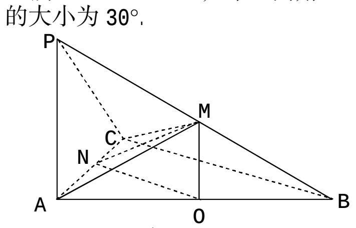
(2)**解**:过点M作PA的平行线,交AB于点O,过点O作BC的平行线,交AC于点N,连接MN,如图所示.因为$PA\perp$平面ABC,所以$MO\perp$平面ABC,所以$MO\perp AC$.又因为$\angle ACB=90°$,所以$ON\perp AC$,因为$MO\cap ON=O$,

所以$AC\perp$平面MON,所以$MN\perp AC$.所以$\angle MNO$为二面角$M-AC-B$的平面角.

设$PA=AC=a$,则$BC=\sqrt{3}a$,$MO=\frac{1}{2}PA=\frac{1}{2}a$,$NO=\frac{1}{2}BC=\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

所以$\tan\angle MNO=\frac{MO}{NO}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

所以$\angle MNO=30°$,即二面角M-AC-B的大小为30°.



(第21题图)

22.(1)**证明**:如图所示,连接AC,交BD于点O,连接OE.因为E为PC的中点,所以OE∥AP.

因为AP⊄平面EBD,OE⊂平面EBD,所以AP∥平面EBD.

(2)**解**:①当点M为线段PA的中点时,有DM⊥平面PAB.

下面给出证明:

因为四边形ABCD是平行四边形,所以AB∥CD.又因为∠BAP=∠CDP=90°,即AB⊥AP,CD⊥DP,

所以AB⊥DP,因为DP∩AP=P,从而AB⊥平面PAD.所以AB⊥DM.因为△PAD是正三角形,PM=MA,所以DM⊥AP,又AP∩AB=A,所以DM⊥平面PAB.

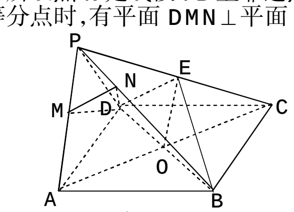
②在①的条件下,当DN⊥PB于N时,有平面DMN⊥平面PBC.

下面给出证明:在①的条件下,DM⊥平面PAB,所以DM⊥PB.又DN⊥PB,所以PB⊥平面DMN.

所以平面DMN⊥平面PBC,且PB⊥MN.不妨设AB=2,则PM=1,$PB=2\sqrt{2}$,PA=2.由△PMN∽△PBA,得$\frac{PN}{PA}=\frac{PM}{PB}\Rightarrow$

$PN=\frac{\sqrt{2}}{2}$.所以$\frac{PN}{PB}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{4}$.

所以点N是线段PB上靠近点P的四等分点时,有平面DMN⊥平面PBC.



(第22题图)

第 6 期

第 3~4 版章节测试参考答案

一、选择题

1~6.BCADAD

7.A

8.D

提示：当 $-2+a=0$，即 $a=2$ 时，直线 $ax+y-2+a=0$ 化为 $2x+y=0$，此时直线在两坐标轴上的截距都为 0，满足题意；当 $-2+a\neq0$，即 $a\neq2$ 时，显然 $a=0$ 不符合题意，则直线 $ax+y-2+a=0$ 可化为 $\frac{x}{\frac{2-a}{a}}+\frac{y}{2-a}=1$，由直线在两坐标轴上的截距相等，可得 $\frac{2-a}{a}=2-a$，解得 $a=1$.

综上所述，$a=2$ 或 $a=1$.故选 D.

9.D

提示：对于 D，由 l_1 可知 $a<0,b>0$，对应 l_2 也符合，故选 D.

10.A

提示：联立 $\begin{cases}x+y-3=0,\\x-y+1=0,\end{cases}$ 解得 $x=1,y=2$.因为三条直线 $x+y-3=0,x-y+1=0,mx+ny-5=0$ 相交于同一点，所以 $m+2n=5$.则点(m,n)到原点的距离的最小值为原点到直线 $x+2y=5$ 的距离 $d=\frac{5}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{5}$.故选 A.

11.A

提示：根据题意设直线 l 的方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1(a>0,b>0)$，已知直线 l 过点 $P(1,1)$，可得 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$. ①

根据直线与坐标轴围成的三角形面积为 2，可知 $\frac{ab}{2}=2$. ②

联立①②，解得 $a=2,b=2$，即满足条件的直线方程为 $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=1$.故选 A.

12.D

提示：点 P 关于 y 轴的对称点 P′的坐标是$(-2,0)$.设点 P 关于直线 $AB:x+y-4=0$ 的对称点为 $P''(a,b)$，

由 $\begin{cases}\frac{b-0}{a-2}\times(-1)=-1,\\\frac{a+2}{2}+\frac{b+0}{2}-4=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=4,\\b=2,\end{cases}$

故光线所经过的路程为 $|P'P''|=\sqrt{(-2-4)^2+2^2}=2\sqrt{10}$，故选 D.

二、填空题

13. $2x+y-1=0$

提示：直线 $x-2y+3=0$ 的斜率为 $\frac{1}{2}$，由直线垂直的斜率关系，可得所求直线的斜率为 -2，又知其过点$(-1,3)$，由点斜式得所求直线方程为 $y-3=-2(x+1)\Rightarrow2x+y-1=0$.

14.$(9,-4)$

15.$3x-2y+5=0$

提示：若过点 A 的直线 l 与点 B 距离最远，则直线 l 与 AB 垂直，

所以 $k=-\frac{1}{k_{AB}}=-\frac{1}{\frac{-2}{3}}=\frac{3}{2}$，所以直线 $l:y-1=\frac{3}{2}(x+1)$，即 $3x-2y+5=0$.

16.4

提示：因为 a,b,c 为直角三角形中的三边长，c 为斜边长，所以 $c=\sqrt{a^2+b^2}$.

又因为点 $M(m,n)$ 在直线 $l:ax+by+2c=0$ 上，所以 m^2+n^2 表示直线 l 上的点到原点距离的平方，

所以 m^2+n^2 的最小值为原点到直线 l 距离 d 的平方，由点到直线的距离公式可得 $d=\frac{2c}{\sqrt{a^2+b^2}}=2$，

所以 m^2+n^2 的最小值为 $d^2=4$.

三、解答题

17.**解**：(1)垂直.直线 l_1 的斜率 $k_1=-\frac{1}{2}$，直线 l_2 的斜率 $k_2=2$，因为 $k_1k_2=-\frac{1}{2}\times2=-1$，所以 $l_1\perp l_2$.

(2)由方程组 $\begin{cases}x+2y+1=0,\\-2x+y+2=0,\end{cases}$ 解得点 A 的坐标为 $\left(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$，

又直线 l_3 的斜率为 -3，所以所求直线方程为 $y-\left(-\frac{4}{5}\right)=-3\left(x-\frac{3}{5}\right)$，化为一般式得 $3x+y-1=0$.

18.**解**：(1)因为 $A(-4,-2),B(4,2)$，所以 $k_{AB}=\frac{1}{2}$，

所以边 AB 上的高所在直线的方程为 $y-3=-2(x-1)$，即 $2x+y-5=0$.

(2)设 AB 的中点为 D，又 $A(-4,-2)$，$B(4,2)$，所以 $D(0,0)$.

所以边 AB 的中线 CD 的斜率为 $k=3$，所以边 AB 上的中线所在直线的方程为 $3x-y=0$.

19.**解**：(1)因为直线 l 过点$(0,5)$，所以直线 l 在 y 轴上的截距为 5.

因为直线 l 在两坐标轴上的截距之和为 2，

所以直线 l 在 x 轴上的截距为-3.

所以直线 l 的方程为 $\frac{x}{-3}+\frac{y}{5}=1$，即 $5x-3y+15=0$.

(2) 因为直线 l_1 过点 $\left(\frac{8}{3},-1\right)$ 且与直线 l 垂直，所以直线 l_1 的斜率为 $-\frac{3}{5}$，所以直线 l_1 的方程为 $y+1=-\frac{3}{5}\left(x-\frac{8}{3}\right)$，即 $3x+5y-3=0$.

因为直线 l_2 与直线 l_1 关于 x 轴对称，所以直线 l_2 的斜率为 $\frac{3}{5}$，且过点$(1,0)$.所以直线 l_2 的方程为 $y=\frac{3}{5}(x-1)$，即 $3x-5y-3=0$.

20.**解**：(1)由题设知，点 A 在第三象限，点 B 在第一象限，连接 PA,PB，则 $|PA|+|PB|\geq|AB|$.

所以当 P 为直线 AB 与 x 轴的交点时，$|PA|+|PB|$ 取得最小值为 $|AB|$，而 $|AB|=\sqrt{(-1-1)^2+(-2-3)^2}=\sqrt{29}$，故 $|PA|+|PB|$ 的最小值为 $\sqrt{29}$.

(2) 由题设知，A,B 两点同处 x 轴上方，对于 x 轴上任意一点 P，$||PB|-|PA||\leq|AB|$，而 $|AB|=\sqrt{(2-3)^2+(2-4)^2}=\sqrt{5}$，当 P 为直线 AB 与 x 轴的交点，即 P,A,B 共线时，$||PB|-|PA||$ 取得最大值为 $|AB|=\sqrt{5}$，故 $||PB|-|PA||$ 的最大值为 $\sqrt{5}$.

21.**解**：(1)设 $C(m,n)$，由 $AC\perp BH$，得 $\begin{cases}\frac{n-2}{m-5}\times\left(-\frac{1}{5}\right)=-1,\\2m-n-5=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=6,\\n=7,\end{cases}$ 故顶点 C 的坐标为 $C(6,7)$.

(2)设 $B(x,y)$，则 $x+5y-23=0$， ①

又点 M 的坐标为 $\left(\frac{x+5}{2},\frac{y+2}{2}\right)$，

则 $2\times\frac{x+5}{2}-\frac{y+2}{2}-5=0$. ②

联立①②，解得点 $B(3,4)$，则直线 BC 的方程为 $x-y+1=0$.

22.(1)**证明**：设直线 l_1 与直线 l_3 的交点为 A.由 $\begin{cases}mx-y+m=0,\\(m+1)x-y+(m+1)=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=-1,\\y=0.\end{cases}$

所以点 A 的坐标为$(-1,0)$，所以不论 m 取何值，$\triangle ABC$ 中总有一个顶点为定点 $A(-1,0)$.

(2)**解**：由 $\begin{cases}x+my-m(m+1)=0,\\(m+1)x-y+(m+1)=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=0,\\y=m+1,\end{cases}$ 即 l_2 与 l_3 的交点为 $B(0,m+1)$.

由 $\begin{cases}mx-y+m=0,\\x+my-m(m+1)=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\frac{m}{m^2+1},\\y=\frac{m^3+m^2+m}{m^2+1},\end{cases}$

即 l_1 与 l_2 的交点为 $C\left(\frac{m}{m^2+1},\frac{m^3+m^2+m}{m^2+1}\right)$.

设边 AB 上的高为 h，则△ABC 的面积

$S=\frac{1}{2}|AB|\cdot h=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1+(m+1)^2}\cdot\frac{\left|\frac{m(m+1)}{m^2+1}-\frac{m^3+m^2+m}{m^2+1}+m+1\right|}{\sqrt{1+(m+1)^2}}$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{|m^2+m+1|}{m^2+1}$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{m^2+m+1}{m^2+1}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{m}{m^2+1}\right)$.

当 $m=0$ 时，$S=\frac{1}{2}$；当 $m\neq0$ 时，$S=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{m+\frac{1}{m}}\right)$，因为函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}$ 的值域为 $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$，所以 $-\frac{1}{2}\leq\frac{1}{m+\frac{1}{m}}<0$ 或 $0<\frac{1}{m+\frac{1}{m}}\leq\frac{1}{2}$，所以 $\frac{1}{4}\leq S<\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{2}<S\leq\frac{3}{4}$. 综上可知，当 $m=1$ 时，$\triangle ABC$ 的面积取得最大值为 $\frac{3}{4}$；当 $m=-1$ 时，$\triangle ABC$ 的面积取得最小值为 $\frac{1}{4}$.

第 7 期

第 3~4 版同步周测参考答案

一、选择题

1~6.CDDBCA

7.B

提示：圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$ 关于直线 $y=kx+3$ 对称，所以圆心$(1,1)$在直线 $y=kx+3$ 上，得 $k=1-3=-2$，故选 B.

8.C

提示：由题得 $(x-1)^2+(y+2)^2=5-m$ $(m<5)$，所以圆心的坐标为$(1,-2)$，半径长为 $\sqrt{5-m}$，得圆心到直线的距离 $d=\frac{|1+2-3|}{\sqrt{1+1}}=0$，所以圆心在直线 $x-y-3=0$ 上，所以 $\sqrt{5-m}=3$，所以 $m=-4$，故选 C.

9.A

提示：点 $A(1,-1,2)$关于 y 轴的对称点为 $B(-1,-1,-2)$，则 $|AB|=\sqrt{(1+1)^2+0+(2+2)^2}=2\sqrt{5}$，故选 A.

10.B

提示：点 $A(-1,5)$与圆$(x-2)^2+(y-1)^2=1$ 的圆心$(2,1)$的距离为 $\sqrt{(-1-2)^2+(5-1)^2}=5$，则点 A 在圆外，所以 $|AP|$ 的最小值是 5 减去圆的半径长 1，等于 4，故选 B.

11.C

提示：配方得$[x-(2m+1)]^2+(y-m)^2=m^2(m\neq0)$，所以圆心坐标为$(2m+1,m)$，则令 $\begin{cases}x=2m+1,\\y=m,\end{cases}$ 消去 m，得 $x-2y-1=0(x\neq1)$，故选 C.

12.C

二、填空题

13.$(-\infty,0)\cup(10,+\infty)$

14.$\sqrt{3}$

15.$-6+4\sqrt{3}$

提示：由中点坐标公式可得，以点 $A(-1,5)$，$B(1,\sqrt{3})$为直径的圆的圆心坐标为 $\left(0,\frac{5+\sqrt{3}}{2}\right)$，半径长为 $\frac{|AB|}{2}=\frac{\sqrt{2^2+(\sqrt{3}-5)^2}}{2}=\frac{\sqrt{32-10\sqrt{3}}}{2}$，即该圆的标准方程为 $x^2+\left(y-\frac{5+\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{32-10\sqrt{3}}{4}$，化为圆的一般方程得 $x^2+y^2-(5+\sqrt{3})y-1+5\sqrt{3}=0$，即 $D=0,E=-5-\sqrt{3},F=-1+5\sqrt{3}$，

所以 $D+E+F=-6+4\sqrt{3}$.

16.-3

提示：因为圆 $C:x^2+y^2-4x+2y+m=0$，所以$(x-2)^2+(y+1)^2=5-m$，圆心 $C(2,-1)$，因为∠ACB=90°，过点 C 作 y 轴的垂线交 y 轴于点 D，在等腰直角三角形 BCD 中，CD=BD=2，所以 $5-m=CB^2=4+4$，解得 $m=-3$.

三、解答题

17.**解**：(1)设圆的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，

由题意知 $\begin{cases}2^2+5^2+2D+5E+F=0,\\(-2)^2+1^2-2D+E+F=0,\\-\frac{E}{2}=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{D}{2}\right),\end{cases}$ 解

得 $\begin{cases}D=-4,\\E=-2,\\F=-11.\end{cases}$

所以圆的方程为 $x^2+y^2-4x-2y-11=0$.

(2)由(1)知，圆的圆心为$(2,1)$，半径长 $r=4$，

所以圆心到直线 $3x-4y+23=0$ 的距离 $d=\frac{|3\times2-4\times1+23|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=5$，

则圆上的点到直线 $3x-4y+23=0$ 的最小距离为 $d-r=1$.

18.**解**：(1)因为直线 AB 的斜率 $k=1$，AB 的中点坐标为 $(1,2)$，所以直线 CD 的方程为 $x+y-3=0$.

(2)设圆心 $M(a,b)$，则由点 M 在 CD 上，得 $a+b-3=0$. ①

又因为直径 $|CD|=2\sqrt{10}$，所以 $|MA|=\sqrt{10}$，所以 $(a+1)^2+b^2=10$. ②

由①②解得 $\begin{cases}a=0,\\b=3,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=2,\\b=1,\end{cases}$ 所以圆心 $M(0,3)$或$(2,1)$，所以圆 M 的方程为 $x^2+(y-3)^2=10$ 或 $(x-2)^2+(y-1)^2=10$.

19.**解**：(1)曲线 $y=x^2-6x+1$ 与 y 轴的交点为$(0,1)$，与 x 轴的交点为$(3+2\sqrt{2},0)$，$(3-2\sqrt{2},0)$.故可设 C 的圆心为$(3,t)$，则有 $3^2+(t-1)^2=(2\sqrt{2})^2+t^2$，解得 $t=1$.则圆 C 的半径长为 $\sqrt{3^2+(t-1)^2}=3$，所以圆 C 的方程为$(x-3)^2+(y-1)^2=9$.

(2)设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，其坐标满足方程组 $\begin{cases}x-y+a=0,\\(x-3)^2+(y-1)^2=9,\end{cases}$

消去 y，得 $2x^2+(2a-8)x+a^2-2a+1=0$.

由已知可得，判别式 $\Delta=56-16a-4a^2>0$，且 $x_1+x_2=4-a,x_1x_2=\frac{a^2-2a+1}{2}$. ①

由 $OA\perp OB$，得 $x_1x_2+y_1y_2=0$.

又 $y_1=x_1+a,y_2=x_2+a$，

所以 $2x_1x_2+a(x_1+x_2)+a^2=0$. ②

由①②得 $a=-1$，满足 $\Delta>0$，故 $a=-1$.

20.**解**：(1)由题意知，圆心 M 的坐标为$(2,0)$，半径长为 2.

当切线斜率存在时，设切线方程为 $y=kx-4$，由 $d=\frac{|2k-4|}{\sqrt{1+k^2}}=2$，解得 $k=\frac{3}{4}$，所以切线方程为 $y=\frac{3}{4}x-4$；当切线斜率不存在时，其方程为 $x=0$，满足已知.综上可知，切线方程为 $3x-4y-16=0$ 或 $x=0$.

(2) 设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，联立 $\begin{cases}y=kx-4,\\x^2+y^2-4x=0,\end{cases}$ 得 $(1+k^2)x^2-(8k+4)x+16=0$.

因为 $\Delta=(8k+4)^2-64(1+k^2)>0$，所以 $k>\frac{3}{4}$，又 $x_1+x_2=\frac{8k+4}{1+k^2},x_1x_2=\frac{16}{1+k^2}$，

于是 $k_1+k_2=\frac{y_1}{x_1}+\frac{y_2}{x_2}=\frac{y_1x_2+y_2x_1}{x_1x_2}=\frac{(kx_1-4)x_2+(kx_2-4)x_1}{x_1x_2}=2k-\frac{4(x_1+x_2)}{x_1x_2}$

$=2k-4\cdot\frac{8k+4}{16}=-1$.

所以 k_1+k_2 为定值-1.

21.(1)**证明**：因为$(2m+1)x+(m+1)y-7m-4=0(m\in\mathbf{R})$，所以 $m(2x+y-7)+x+y-4=0$，

所以直线 L 必过直线 $2x+y-7=0$ 与 $x+y-4=0$ 的交点.由 $\begin{cases}2x+y-7=0,\\x+y-4=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=3,\\y=1,\end{cases}$

所以直线 $2x+y-7=0$ 与 $x+y-4=0$ 的交点坐标为$(3,1)$.又因为 $3^2+(1-2)^2<25$，所以点$(3,1)$在圆 C 内部，

所以无论 m 取何值，直线 L 与圆 C 恒交于两点.

(2)**解**：当圆心 $D(-1,5)$到直线 L 的距离最大时，R 最大又直线 L 恒过定点$(3,1)$，所以当定点$(3,1)$为切点时，R 最大.

此时直线 L 与过点$(3,1)$，$(-1,5)$的直线垂直，所以 $-\frac{2m+1}{m+1}\cdot\frac{5-1}{-1-3}=-1$，所以 $m=-\frac{2}{3}$.

22.**解**：(1)由已知，有 $\frac{\sqrt{(x+1)^2+y^2}}{\sqrt{(x-2)^2+y^2}}=\frac{1}{2}$，化简可得$(x+2)^2+y^2=4$，

所以动点 M 的轨迹方程为 $(x+2)^2+y^2=4$，轨迹 C 是以$(-2,0)$为圆心，2 为半径长的圆.

(2)设过点 B 的圆 C 的切线为 $y=k\cdot(x-2)$，则圆心到切线的距离 $d=\frac{|-4k|}{\sqrt{k^2+1}}=2$，

所以 $k=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$，数形结合可知斜率的最小值为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(3)假设存在满足条件的圆，联立方程 $\begin{cases}y=x+m,\\(x+2)^2+y^2=4,\end{cases}$ 得 $2x^2+2(m+2)x+m^2=0$.

设 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，

则 $x_1+x_2=-m-2,x_1x_2=\frac{m^2}{2}$.

由题意知 $PA\perp QA$，

所以 $(x_1+1)(x_2+1)+y_1y_2=(x_1+1)(x_2+1)+(x_1+m)(x_2+m)=0$，

即 $2x_1x_2+(m+1)(x_1+x_2)+m^2+1=0$，代入得 $m^2-3m-1=0$，$m=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$ 且满足 $\Delta>0$，

所以存在以线段 PQ 为直径的圆经过 A，此时 $m=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$.