二、填空题

13.1

14.x+y-5=0 或 2x-3y=0

15.64π

提示：过点S作SE⊥平面ABC于点E，记球心为O. 因为在正三棱锥S-ABC中，底面边长为6，侧棱长为$4\sqrt{3}$，所以$BE=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times6=2\sqrt{3}$，所以$SE=\sqrt{SB^2-BE^2}=6$.

因为球心O到四个顶点的距离相等，均等于该正三棱锥外接球的半径长R，所以OB=R，OE=6-R. 在Rt△BOE中，$OB^2=BE^2+OE^2$，即$R^2=12+(6-R)^2$，解得R=4，所以外接球的表面积$S=4\pi R^2=64\pi$.

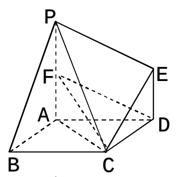
16.$(x+1)^2+(y+2)^2=5$.

三、解答题

17.(1)**证明**：如图，因为底面ABCD是菱形，所以AB∥CD，因为AB⊂平面PAB，CD⊄平面PAB，所以CD∥平面PAB. 因为ED∥PA，PA⊂平面PAB，ED⊄平面PAB，所以ED∥平面PAB，又CD∩ED=D，所以平面CDE∥平面PAB，所以CE∥平面PAB.

(2)**解**：取PA的中点F，连接DF，则DE=PF，DE∥PF，则四边形PFDE为平行四边形，则DF∥PE，又AB∥CD，所以∠CDF或其补角为异面直线PE与AB所成角.

连接CF，因为∠ABC=60°，所以△ABC为等边三角形，则AC=AB=2，又$AF=\frac{1}{2}PA=1$，所以$CF=DF=\sqrt{5}$，又CD=2，所以$\cos\angle CDF=\frac{\frac{1}{2}CD}{DF}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$. 即异面直线PE与AB所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{5}}{5}$.



(第17题图)

18.**解**：(1)联立方程组$\begin{cases}2x-y-4=0,\\x-y-1=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=3,\\y=2,\end{cases}$即点C(3,2).

设圆C的半径为r，由于圆C上的点到x轴的最小距离为1，则2-r=1，所以r=1，故圆C的标准方程为$(x-3)^2+(y-2)^2=1$.

(2)若切线的斜率不存在，则所求切线的方程为x=0，圆心到直线x=0的距离为3，不符合题意.

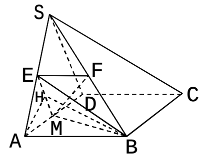
若切线的斜率存在，可设切线的方程为y=kx+3，即kx-y+3=0，

圆C的圆心坐标为(3,2)，半径为1，由题意可得$\frac{|3k+1|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，整理得$4k^2+3k=0$，解得k=0或$k=-\frac{3}{4}$. 故所求的切线方程为y=3或3x+4y-12=0.

19.(1)**证明**：因为$\frac{SE}{EA}=\frac{SF}{FB}$，所以EF∥AB. 因为四边形ABCD是矩形，所以AB∥CD，所以EF∥CD. 因为EF⊄平面SCD，CD⊂平面SCD，所以EF∥平面SCD.

因为$\frac{SE}{EA}=\frac{DM}{DA}$，所以EM∥SD.

因为EM⊄平面SCD，SD⊂平面SCD，所以EM∥平面SCD. 因为EF∩EM=E，EF⊂平面MEF，EM⊂平面MEF，所以平面MEF∥平面SCD.



(第19题图)

(2)**解**：过A作AH⊥EM，垂足为H，连接HB. 因为四边形ABCD是矩形，所以AB⊥AD，又平面SAD⊥平面ABCD，平面SAD∩平面ABCD=AD，AB⊂平面ABCD，所以AB⊥平面SAD. 因为EM⊂平面SAD，所以AB⊥EM，因为AH⊥EM，AB∩AH=A，AB⊂平面ABH，AH⊂平面ABH，所以EM⊥平面ABH，因为HB⊂平面ABH，所以EM⊥HB.

所以∠AHB为二面角A-EM-B的平面角. 因为t=1，所以E，M分别为棱SA，AD的中点，因为△SAD是等边三角形，AD=2，所以△EAM是等边三角形，AM=1，所以$AH=\frac{\sqrt{3}}{2}$，在Rt△BAH中，$AH=\frac{\sqrt{3}}{2}$，AB=1，故$\tan\angle AHB=\frac{AB}{AH}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

所以二面角A-EM-B的正切值为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

20.**解**：(1)当$a=\frac{1}{2}$时，原直线方程即为x-2y=0，符合题意.

当$a\neq\frac{1}{2}$时，原直线方程可化为截距式方程$\frac{x}{\frac{2a-1}{a-1}}+\frac{y}{2a-1}=1$，此时，只需满足$\frac{2a-1}{a-1}=2a-1$，即a=2.此时直线方程为x+y-3=0.

综上所述，直线l的方程为x-2y=0或x+y-3=0.

(2)因为直线l与x轴正半轴、射线y=2x(x≥0)交于两点P，Q，所以-(a-1)<0，或-(-a-1)>2，所以$a\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

由$\begin{cases}(a-1)x+y-2a+1=0,\\y=2x,\end{cases}$

解得$y_Q=\frac{2(a-1)}{a+1}$.

在(a-1)x+y-2a+1=0中，令y=0，可得$x_P=\frac{2a-1}{a-1}$，

从而$S_{\triangle OPQ}=\frac{1}{2}|y_Q||x_P|=\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{2a-1}{a-1}\cdot\frac{4a-2}{a+1}\right|=\frac{(2a-1)^2}{a^2-1}$.

令t=2a-1，$t\in(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$，则$S_{\triangle OPQ}=\frac{4t^2}{(t+1)^2-4}=\frac{4}{-3\left(\frac{1}{t}\right)^2+2\cdot\frac{1}{t}+1}=\frac{4}{-3\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{4}{3}}$.

因为$0<-3\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{4}{3}\leqslant\frac{4}{3}$，所以$S_{\triangle OPQ}=\frac{4}{-3\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{4}{3}}\geqslant3$，

当t=3，即a=2时，△OPQ面积最小.

21.(1)**证明**：在等腰梯形ABCD中，$AE=\sqrt{AD^2-DE^2}=\sqrt{3}$，$BE=\sqrt{AE^2+AB^2}=2\sqrt{3}$，在△BEC中，$BE^2+BC^2=12+4=16=CE^2$，所以BE⊥BC，因为DE⊥平面ABCE，BC⊂平面ABCE，所以DE⊥BC，又DE∩BE=E，所以BC⊥平面BDE，因为BC⊂平面MBC，所以平面MBC⊥平面BDE.

(2)**解**：$S_{\triangle AEC}=\frac{1}{2}\times AE\times CE=2\sqrt{3}$，设点N到平面AEC的距离为h，

则$V_{E-ANC}=V_{N-AEC}=\frac{1}{3}\times S_{\triangle AEC}\times h=\frac{4\sqrt{3}}{9}$，

解得$h=\frac{2}{3}$，在△BED中，DE⊥平面AEC，所以存在点N，使得$\frac{BN}{BD}=\frac{2}{3}$，所以点N是线段BD靠近D的三等分点.

22.**解**：(1)若直线l的斜率不存在，则l的方程为$x=\frac{1}{2}$，易知此时直线l被圆O截得弦长为$\sqrt{3}$，符合题意.

若直线l的斜率存在，设l的方程为$y-\frac{\sqrt{3}}{2}=k\left(x-\frac{1}{2}\right)$，即$2kx-2y-k+\sqrt{3}=0$，

所以O到直线l的距离$d=\frac{|-k+\sqrt{3}|}{\sqrt{(2k)^2+(-2)^2}}$，

因为直线l被圆O截得的弦长为$\sqrt{3}$，所以$d^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=1$，所以$d=\frac{1}{2}$，所以$k=\frac{\sqrt{3}}{3}$，此时l的方程为$x-\sqrt{3}y+1=0$，所以所求直线l的方程为$x=\frac{1}{2}$或$x-\sqrt{3}y+1=0$.

(2)设点P的坐标为(x，y)，由题得点A的坐标为(-1，0)，点B的坐标为(0，1)，由$PA=\sqrt{2}PO$，可得$\sqrt{(x+1)^2+y^2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}$，化简可得$(x-1)^2+y^2=2$，

因为点P在圆B上，所以$|r-\sqrt{2}|\leqslant\sqrt{(1-0)^2+(0-1)^2}\leqslant r+\sqrt{2}$，所以$0\leqslant r\leqslant2\sqrt{2}$，所以r的取值范围是$(0,2\sqrt{2}]$.

(3)因为$M(x_1,y_1)$，则$M_1(-x_1,-y_1)$，$M_2(x_1,-y_1)$，所以直线QM_1的方程为$y+y_1=\frac{y_2+y_1}{x_2+x_1}(x+x_1)$.

令x=0，则$m=\frac{x_1y_2-x_2y_1}{x_1+x_2}$，同理可得$n=\frac{x_1y_2+x_2y_1}{x_1-x_2}$.

所以$m\cdot n=\frac{x_1y_2-x_2y_1}{x_1+x_2}\cdot\frac{x_1y_2+x_2y_1}{x_1-x_2}=\frac{(x_1y_2)^2-(x_2y_1)^2}{x_1^2-x_2^2}=\frac{x_1^2(1-x_2^2)-x_2^2(1-x_1^2)}{x_1^2-x_2^2}=1$.

所以m·n为定值1.

第9~12期

第9~10版综合测试(一)参考答案

一、选择题

1~6.CCADDC

7.D

提示：直线l_1经过点(0，k)，$\left(-\frac{k}{2},0\right)$，可得直线$l_1$的斜率为$\frac{k-0}{0+\frac{k}{2}}=2$.直线$l_2$经过点$\left(0,\frac{1}{2}\right)$，$\left(-\frac{1}{4},0\right)$，可得直线$l_2$的斜率为$\frac{\frac{1}{2}-0}{0+\frac{1}{4}}=2$.故两条直线的位置关系是平行或重合.故选D.

8.A

提示：对于①，可以根据直线与平面垂直的性质定理得出，故其正确；

对于②，由三垂线定理的逆定理可证，故其正确；

对于③，n可能在平面α内，故其不正确；

对于④，α与β平行或相交，故其不正确，如正方体共顶点的三个平面.故选A.

9.A

提示：因为点(1，1)在圆$(x-a)^2+(y+a)^2=4$的内部，所以点(1，1)到圆心(a，-a)的距离d<2，即$\sqrt{(1-a)^2+(1+a)^2}<2$，解得-1<a<1.故选A.

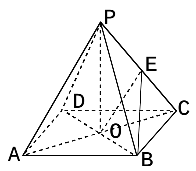
10.B

提示：设球的半径为R，因为圆锥的高h=5，底面圆的半径$r=\sqrt{5}$，所以$R^2=(h-R)^2+r^2$，即$R^2=(R-5)^2+5$，解得R=3，故该球的表面积$S=4\pi R^2=36\pi$，故选B.

11.C

提示：如图，连接AC，BD交于点O，连接OE，OP，因为E为PC中点，所以OE∥PA，所以∠OEB或其补角为异面直线PA与BE所成的角.因为四棱锥P-ABCD为正四棱锥，所以PO⊥平面ABCD，所以AO为PA在平面ABCD内的射影，所以∠PAO即为PA与平面ABCD所成的角，即∠PAO=60°，因为PA=2，所以OA=OB=1，OE=1.

易证OB⊥平面PAC，所以OB⊥OE，所以在Rt△EOB中，∠OEB=45°，即异面直线PA与BE所成角的大小为45°.故选C.



(第11题图)

12.D

提示：曲线$C_1:x^2+y^2-4x-4y+7=0$为以$C_1(2,2)$为圆心，半径为1的圆，$C_2:x^2+y^2-2x=0$为以$C_2(1,0)$为圆心，半径为1的圆，由圆的对称性可得|PM|的最小值为$|PC_1|-1$，|PN|的最小值为$|PC_2|-1$，作C_2关于直线x+y+1=0的对称点B，设点B坐标为(m，n)，可得$\frac{n}{m-1}=1$，$\frac{m+1}{2}+\frac{n}{2}+1=0$，解得m=-1，n=-2，即B(-1，-2)，连接BC_1，交直线于点P，连接PC_2，得$|PC_1|+|PC_2|=|PC_1|+|PB|\geqslant|BC_1|=\sqrt{(2+1)^2+(2+2)^2}=5$.

当且仅当B，P，C_1三点共线时，等号成立.可得$|PC_1|+|PC_2|$的最小值为5，则|PM|+|PN|的最小值为5-2=3.故选D.

二、填空题

13.5

14.x-3y+2=0

15.36

提示：设P(x，y)，则$|PA|^2+|PB|^2=(x+3)^2+y^2+(x-3)^2+y^2=2x^2+2y^2+18=2(x^2+y^2)+18$.

设$t=\sqrt{x^2+y^2}$，其几何意义为圆$(x-3)^2+(y-4)^2=4$上一点到原点的距离.

圆$(x-3)^2+(y-4)^2=4$的圆心为(3，4)，半径r=2，则$t_{min}=\sqrt{(0-3)^2+(0-4)^2}-2=3$.

所以$|PA|^2+|PB|^2=2(x^2+y^2)+18\geqslant2\times9+18=36$，即$|PA|^2+|PB|^2$的最小值是36.

16.③

提示：①由题图，得SA⊥SE，若直线SA⊥平面SBC，则SA⊥SB，SA⊥SC，则SC，SB，SE三线共面，则点E与点C重合，与题设矛盾，故①错误；②由于平面SBC∩SA=S，故平面SBC内的直线与SA相交或异面，故②错误；③取AB上的点F，存在CF∥AE，由线面平行的判定定理，可得CF∥平面SAE，故③正确；④若SE⊥BA，由EC∥AB，可得SE⊥EC，这与∠SEC不为直角矛盾，故④错误.

三、解答题

17.**解**：因为直角梯形ABCD中，∠DAB=∠CBA=90°，∠DCB=60°，AD=1，$AB=\sqrt{3}$，所以CD=2，BC=2，由题意知，所求旋转体的表面积由三部分组成：圆台下底面、侧面和一半球面.

$S_{半球}=\frac{1}{2}\times4\pi\times1^2=2\pi$，$S_{圆台侧}=\pi\times2\times2+\pi\times1\times2=6\pi$，$S_{圆台底}=\pi\times2^2=4\pi$.

故所求几何体的表面积为S=2π+6π+4π=12π.

由$V_{圆台}=\frac{1}{3}\times\sqrt{3}\times\pi(2^2+1^2+2\times1)=\frac{7\sqrt{3}}{3}\pi$，$V_{半球}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi\times1^3=\frac{2\pi}{3}$，

所以旋转体的体积为$V=V_{圆台}-V_{半球}=\frac{7\sqrt{3}-2}{3}\pi$.

18.**解**：(1)直线BC的斜率为$\frac{6-1}{3-4}=-5$，代入点斜式方程，可得y-1=-5(x-4)，即BC边所在直线的一般式方程为5x+y-21=0.

(2)因为线段BC的中点坐标为$D\left(\frac{7}{2},\frac{7}{2}\right)$，代入方程3x-5y+c=0，得c=7，所以AD方程为3x-5y+7=0，点A满足上述方程，所以3a-5b+7=0. ①

又$|BC|=\sqrt{26}$，设点A到直线BC距离为d，由$S_{\triangle ABC}=7=\frac{\sqrt{26}}{2}d$，得$d=\frac{14}{\sqrt{26}}$.

又$d=\frac{|5a+b-21|}{\sqrt{26}}$，故$\frac{|5a+b-21|}{\sqrt{26}}=\frac{14}{\sqrt{26}}$，所以|5a+b-21|=14，故5a+b-21=14，或者5a+b-21=-14.②

由①②解得$\begin{cases}a=6,\\b=5,\end{cases}$或$\begin{cases}a=1,\\b=2,\end{cases}$所以点A的坐标为(6，5)或(1，2).

19.(1)**证明**：在四边形ABCD中，连接BD，由DC=BC=1，AB=2，∠BCD=∠ABC=90°，得在△ABD中，$BD=AD=\sqrt{2}$，又AB=2，因此AD⊥BD，又PD⊥平面ABCD，所以PD⊥AD，又BD∩PD=D，所以AD⊥平面PBD，所以AD⊥PB.

(2)**解**：在四棱锥P-ABCD中，因为PD⊥平面ABCD，所以PD⊥BC，而BC⊥DC，所以BC⊥平面PDC，所以BC⊥PC，又$PC=\sqrt{PD^2+CD^2}=\sqrt{5}$，所以$S_{\triangle BPC}=\frac{1}{2}\times BC\times PC=\frac{\sqrt{5}}{2}$，而$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times AB\times BC=1$.

设点A到平面BPC的距离为h，由$V_{A-BPC}=V_{P-ABC}$，可得$\frac{1}{3}\times S_{\triangle BPC}\times h=\frac{1}{3}\times S_{\triangle ABC}\times PD$，

所以$h=\frac{1\times2}{\frac{\sqrt{5}}{2}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$，即点A到平面BPC的距离为$\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

20.**解**：(1)将圆C的方程配方，得$(x+a)^2+(y-2)^2=9a-2$，由9a-2>0，得$a>\frac{2}{9}$.故a的取值范围为$\left(\frac{2}{9},+\infty\right)$.

(2)由圆C与直线l:x+y-a-2=0交于M，N两点，CM⊥CN，知△CNM为等腰直角三角形，

所以圆心C(-a，2)到直线l的距离$d=\frac{\sqrt{2}}{2}r$，即$\frac{|-a+2-a-2|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{9a-2}$，化简，得$4a^2-9a+2=0$，所以a=2或$a=\frac{1}{4}$，2和$\frac{1}{4}$均大于$\frac{2}{9}$，故a=2或$a=\frac{1}{4}$.

21.(1)**证明**：因为AB是圆的直径，所以AD⊥BD. 因为CE⊥平面ABD，AD⊂平面ABD，所以CE⊥AD.

又因为CE∩BD=E，BD⊂平面BCD，CE⊂平面BCD，所以AD⊥平面BCD，又因为AD⊂平面ACD，所以平面ACD⊥平面BCD.

(2)**解**：如图，连接AE，因为CE⊥平面ABD，AE⊂平面ABD，BE⊂平面ABD，所以CE⊥AE，CE⊥BE.

在Rt△ACE和Rt△BCE中，由AC=BC，得AE=BE，在Rt△ABD中，由AB=2AD，得∠ABD=30°，

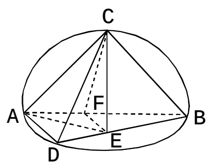
所以∠AED=∠ABE+∠BAE=60°，所以在Rt△ADE中，$DE=\frac{1}{2}AE$，所以E是

BD 的三等分点，且 $DE=\frac{1}{2}EB$.

在线段 AB 上存在点 F，使得 $AF=\frac{1}{2}FB$，则 $FE/\!/AD$.

因为 $FE\subset$ 平面 CEF，$AD\not\subset$ 平面 CEF，所以 $AD/\!/$平面 CEF.

故在线段 AB 上存在点 F，使得 $AD/\!/$平面 CEF，此时 $\frac{AF}{FB}=\frac{1}{2}$.



(第 21 题图)

22.**解**：(1)由题知，圆心为 $C(0,1)$，半径 $r=2$，直线 AB 的斜率 $k_{AB}=\frac{3-0}{(t+4)-t}=\frac{3}{4}$.

所以直线 AB 的方程为 $y=\frac{3}{4}(x-t)\Rightarrow 3x-4y-3t=0$.因为直线 AB 与圆 C 相切，所以 $2=\frac{|3\times0-4\times1-3t|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}\Rightarrow|3t+4|=10\Rightarrow t=2$ 或 $t=-\frac{14}{3}$，所以直线 AB 的方程为 $3x-4y-6=0$ 或 $3x-4y+14=0$.

(2)因为 $A(t,0)$，$B(t+4,3)$，所以 AB 的中点 $D\left(t+2,\frac{3}{2}\right)$，且 $|AB|=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

所以点 P 在以 AB 为直径的圆上，该圆的圆心为 $D\left(t+2,\frac{3}{2}\right)$，半径 $R=\frac{5}{2}$，因为存在两个点 P 使得 $PA\perp PB$，所以两圆相交，即 $\frac{1}{2}=R-r<|CD|=\sqrt{(t+2)^2+\left(\frac{3}{2}-1\right)^2}<R+r=2+\frac{5}{2}=\frac{9}{2}$，所以 $0<(t+2)^2<20\Rightarrow -2\sqrt{5}-2<t<2\sqrt{5}-2$ 且 $t\neq-2$，所以实数 t 的取值范围是 $\{t|-2\sqrt{5}-2<t<2\sqrt{5}-2$ 且 $t\neq-2\}$.

第 11~12 版综合测试(二)参考答案

一、选择题

1~6.BBADCC

7.B

提示：由题意，原平面图形与直观图的面积比为 $2\sqrt{2}:1$，设 OA=x，则直观图的面积为 $\frac{1}{2}x\cdot\left(x+\frac{x}{2}\right)=\frac{3}{4}x^2$，所以 $2\sqrt{2}\times\frac{3}{4}x^2=3\sqrt{2}$，所以 $x=\sqrt{2}$.故选 B.

8.C

提示：由圆方程得到圆心 C(0,1)，半径 $r=\sqrt{2}$，则圆心 C 到直线 y=x 的距离 $d=\frac{|0-1|}{\sqrt{1+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故此时过圆心且与 y=x 平行的直线与圆有 2 个交点，又因为 $r-d=\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，则与 y=x 平行且与圆相切的直线与圆有 1 个交点. 综上，共有 1+2=3 个交点，故选 C.

9.C

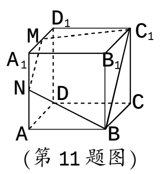
提示：由图知，因为平面 $\alpha/\!/$平面 ABC，所以 AB$/\!/$平面 α，又平面 $\alpha\cap$平面 PAB=A′B′，则 A′B′$/\!/$AB.

因为 PA′:AA′=2:3，即 PA′:PA=2:5，所以 A′B′:AB=2:5，所以 $S_{\triangle A'B'C'}:S_{\triangle ABC}=4:25$.故选 C.

10.D

11.C

提示：如图，取 AA_1 的中点 N，连接 MN，NB，MC_1，BC_1，则平面 C_1MNB 是所求截面，由于截面被平行平面所截，所以截面为梯形，且 $MN=\frac{1}{2}BC_1=\sqrt{2}$，$MC_1=BN=\sqrt{5}$，所以梯形的高为 $\frac{3}{\sqrt{2}}$，所以梯形的面积为 $\frac{1}{2}(\sqrt{2}+2\sqrt{2})\times\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{9}{2}$，故选 C.



(第 11 题图)

12.C

提示：由题意，直线 l 恒过点 M(2,2)，圆 C：$x^2+y^2=9$ 的圆心为 C(0,0)，半径 r=3，则 $|CM|=2\sqrt{2}$，当直线 l 与 CM 垂直时，M 为 AB 中点，此时 $|AB|=2\sqrt{9-8}=2$，符合题意，此时直线 l 有一条；当直线 l 过圆心 C 时，$|AB|=2r=6$，满足题意，此时直线 l 有一条，则当 $|AB|=3,4,5$ 时，各对应两条直线，综上，共有 8 条直线.故选 C.

二、填空题

13.①②⑤

14.①②③

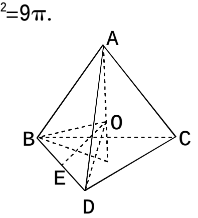
15.$\left[0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

16.9π

提示：如图，设 BC=3k，则 R=2k(k>0)，设三棱锥的高为 h，则 $\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot9k^2\cdot h=18\sqrt{3}$，所以 $h=\frac{24}{k^2}$.

因为球心 O 在三棱锥内部，所以 h>R，即 $\frac{24}{k^2}>2k$，即 $k^3<12$.因为正三棱锥 A-BCD 的每个顶点都在半径为 R 的球 O 的球面上，所以 $R^2=(h-R)^2+(\sqrt{3}k)^2$，解得 $k^3=8$，所以 k=2，R=4.

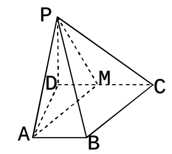
因为 E 为线段 BD 的中点，OB=OD=4，BD=6，所以 $OE=\sqrt{7}$.所以当截面垂直于 OE 时，截面面积最小，此时截面圆的半径 $r=\sqrt{R^2-OE^2}=3$，所以截面圆面积最小值为 $\pi r^2=9\pi$.



(第 16 题图)

三、解答题

17.**解**：由三视图知，该几何体是四棱锥 P-ABCD，且 PD⊥平面 ABCD，如图所示.



(第 17 题图)

取 CD 的中点 M，连接 AM，PM，则 AM$/\!/$BC，所以∠PAM 或其补角是异面直线 PA 与 BC 所成的角.

在△PAM 中，$PA=2\sqrt{2}$，$AM=PM=\sqrt{5}$，所以 $\cos\angle PAM=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$，

即 PA 与 BC 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

18.**解**：(1)设点 $C(x_0,y_0)$，由题意知，AC 边的中点 M 在 y 轴上，得 $\frac{x_0+1}{2}=0$，解得 $x_0=-1$.

BC 边的中点 N 在 x 轴上，得 $\frac{y_0+2}{2}=0$，解得 $y_0=-2$，所以点 C 的坐标是(-1,-2).

(2)由题设，A(1,-1)，C(-1,-2)，可得：$|AC|=\sqrt{5}$，直线 AC 的方程为 x-2y-3=0，又 B(3,2)，所以点 B 到直线 AC 的距离为 $d=\frac{|3-4-3|}{\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$，所以△ABC 的面积 $S=\frac{1}{2}|AC|\cdot d=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\frac{4\sqrt{5}}{5}=2$.

19. **证明**：(1) 设 A_1B 与 AB_1 交于点 O，连接 OD，在平行四边形 ABB_1A_1 中，O 为 AB_1 中点，又 D 为 AC 中点，所以 OD 为 $\triangle AB_1C$ 的中位线，所以 OD$/\!/B_1C$，又 OD$\subset$平面 A_1BD，$B_1C\not\subset$平面 A_1BD，所以 $B_1C/\!/$平面 A_1BD.

(2)因为 AB=BC，D 为 AC 的中点，所以 BD⊥AC.

在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$C_1C\perp$平面 ABC，BD$\subset$平面 ABC，所以 BD$\perp C_1C$，又 BD⊥AC，AC$\subset$平面 ACC_1A_1，$C_1C\subset$平面 ACC_1A_1，$AC\cap C_1C=C$，所以 BD⊥平面 ACC_1A_1.

又 $AC_1\subset$平面 ACC_1A_1，所以 BD$\perp AC_1$，又 $A_1D\perp AC_1$，BD$\subset$平面 A_1BD，$A_1D\subset$平面 A_1BD，$A_1D\cap BD=D$，所以 $AC_1\perp$平面 A_1BD，又 $AC_1\subset$平面 AB_1C_1，所以平面 $A_1BD\perp$平面 AB_1C_1.

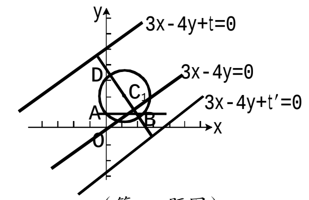
20.**解**：(1)由题意知，圆 C_1 经过点 A(0,1)，且截 y 轴的正半轴所得线段长为 2，故圆过点 D(0,3)，因为圆 C_1 的圆心为线段 AB、AD 的垂直平分线的交点，所以圆心坐标为 C_1 (1,2)，半径为 $r_1=\sqrt{(1-0)^2+(2-1)^2}=\sqrt{2}$，所以圆 C_1 的标准方程为 $(x-1)^2+(y-2)^2=2$.

(2)由题意知，3x-4y+t=0 表示与 3x-4y=0 平行的一组平行线，且圆 C_2 是以直线 l 上的点为圆心的单位圆，则圆心 C_1 到直线 l 的距离为 $d=\frac{|3-8+t|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|t-5|}{5}$.

若存在圆 C_2 与圆 C_1 有交点，则 $d\leqslant\sqrt{2}+1$，即 $\frac{|t-5|}{5}\leqslant\sqrt{2}+1$，

解得 $-5\sqrt{2}\leqslant t\leqslant10+5\sqrt{2}$.

所以 t 的取值范围是 $[-5\sqrt{2},10+5\sqrt{2}]$.



(第 20 题图)

21. **解**：(1) 因为△PAB 是等边三角形，AB=2，所以 PB=2.又因为 PC=4，$BC=2\sqrt{3}$，所以 $PC^2=PB^2+BC^2$，所以 BC⊥PB.又 BC⊥AB，AB∩PB=B，所以 BC⊥平面 PAB.

所以三棱锥 P-ABC 的体积 $V=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle PAB}\cdot BC=\frac{1}{3}\times\sqrt{3}\times2\sqrt{3}=2$.

(2)在线段 BC 上存在一点 F，使平面 AEF$/\!/$平面 PCD.此时 $BF=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

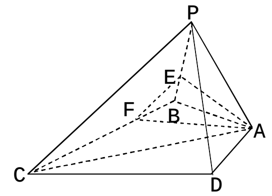
理由如下：

如图，作 EF$/\!/$PC，交 BC 于 F，连接 AF.因为 PB=3BE，所以 E 是 PB 的三等分点，可得 $BF=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

因为 AB=AD=2，$BC=CD=2\sqrt{3}$，AC=AC，所以△ABC≌△ADC，因为 BC⊥AB，所以∠ABC=90°.

因为 $\tan\angle ACB=\frac{AB}{BC}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以∠ACB=∠ACD=30°，所以∠BCD=60°.

因为 $\tan\angle AFB=\frac{AB}{BF}=\frac{2}{\frac{2\sqrt{3}}{3}}=\sqrt{3}$，所以∠AFB=60°，所以 AF$/\!/$CD，因为 AF$\not\subset$平面 PCD，CD$\subset$平面 PCD，所以 AF$/\!/$平面 PCD. 又 EF$/\!/$PC，EF$\not\subset$平面 PCD，PC$\subset$平面 PCD，所以 EF$/\!/$平面 PCD. 因为 AF∩EF=F，AF，EF$\subset$平面 AEF，所以平面 AEF$/\!/$平面 PCD.所以在线段 BC 上存在一点 F，使平面 AEF$/\!/$平面 PCD.此时 $BF=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.



(第 21 题图)

22.**解**：(1)由题意，圆 C 过点(0,0)，(1,1)，(3,0)，设圆 C 的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$.

则 $\begin{cases}F=0,\\1+1+D+E+F=0,\\9+3D+F=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}D=-3,\\E=1,\\F=0,\end{cases}$ 所以圆 C 的方程为 $x^2+y^2-3x+y=0$，即 $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2}$.

(2)由(1)可知，$C\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$，半径 $r=\frac{\sqrt{10}}{2}$，C 到 MN 的距离 $d=\frac{\left|\frac{3}{2}-1+m\right|}{\sqrt{5}}=\frac{\left|m+\frac{1}{2}\right|}{\sqrt{5}}$.

所以 $|MN|=2\sqrt{r^2-d^2}=\sqrt{10-\frac{1}{5}(2m+1)^2}\leqslant\sqrt{10}$，当且仅当 $m=-\frac{1}{2}$ 时取等号.

由 d<r，解得 $-\frac{1}{2}-\frac{5\sqrt{2}}{2}<m<-\frac{1}{2}+\frac{5\sqrt{2}}{2}$.由 O，P 在 MN 的两侧，得 m(1+2+m)<0，解得-3<m<0.

所以 O 到 MN 的距离 $d_1=\frac{|m|}{\sqrt{5}}=\frac{-m}{\sqrt{5}}$，P 到 MN 的距离 $d_2=\frac{|1+2+m|}{\sqrt{5}}=\frac{m+3}{\sqrt{5}}$.

所以四边形 MONP 的面积 $S=S_{\triangle MNO}+S_{\triangle MNP}=\frac{1}{2}\times|MN|\times(d_1+d_2)=\frac{3}{2\sqrt{5}}|MN|\leqslant\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

所以 $m=-\frac{1}{2}$ 时，四边形 MONP 的面积有最大值为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

(3)由题意可设 PA：$y=k_1(x-1)+1$.

联立 $\begin{cases}y=k_1(x-1)+1,\\x^2+y^2-3x+y=0,\end{cases}$ 得 $(k_1^2+1)x^2-(2k_1^2-3k_1+3)x+k_1^2-3k_1+2=0$.

设 $A(x_1,y_1)$，则 $1\times x_1=\frac{k_1^2-3k_1+2}{k_1^2+1}$，所以 $x_1=\frac{k_1^2-3k_1+2}{k_1^2+1}$，$y_1=k_1(x_1-1)+1=\frac{-2k_1^2+k_1+1}{k_1^2+1}$.

所以 $A\left(\frac{k_1^2-3k_1+2}{k_1^2+1},\frac{-2k_1^2+k_1+1}{k_1^2+1}\right)$，结合 $k_1+k_2=0$，同理

$B\left(\frac{k_1^2+3k_1+2}{k_1^2+1},\frac{-2k_1^2-k_1+1}{k_1^2+1}\right)$.

所以 $k_{AB}=\frac{\frac{-2k_1^2+k_1+1}{k_1^2+1}-\frac{-2k_1^2-k_1+1}{k_1^2+1}}{\frac{k_1^2-3k_1+2}{k_1^2+1}-\frac{k_1^2+3k_1+2}{k_1^2+1}}=\frac{2k_1}{-6k_1}=\frac{1}{3}$ 为定值.

第13~14版综合测试(三)参考答案

一、选择题

1~6.ACCCBA

7.B

提示：第一个正方体已知 A，B，C，第二个正方体已知 A，C，D，第三个正方体已知 B，C，F，且不同的面上写的字母各不相同，则可知 C 对面标的是 E，B 对面标的是 D，A 对面标的是 F.故选 B.

8.A

提示：易得直线斜率存在且不为 0，则圆心 C 到直线 l 的距离 $d=\frac{|2|}{\sqrt{a^2+3}}$，则弦长 $|MN|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{4-\frac{4}{a^2+3}}=2\sqrt{3}$，解得 $a=\pm1$，则斜率 $k=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$，故选 A.

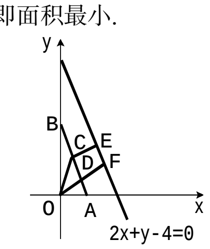
9.B

提示：对于 A，点 P (1,-1,0)、Q (1,2,3)的距离为 $\sqrt{(1-1)^2+(-1-2)^2+(0-3)^2}=3\sqrt{2}$，A 错误；对于 B，点 A(-3,-1,4)与 B(3,-1,-4)关于 y 轴对称，B 正确；对于 C，点 A(-3,-1,4)与 B(3,-1,-4)不关于平面 xOz 对称，C 错误；对于 D，空间直角坐标系中的三条坐标轴组成的平面把空间分为八个部分，D 错误.故选 B.

10.D

11.A

提示：根据题意，圆 C 以 AB 为直径，则 AB 的中点即圆心，设 AB 的中点为 C，圆半径为 r，切点为 E，由已知得 $|OC|=|CE|=r$，过点 O 作直线 2x+y-4=0 的垂直线段 OF，交 AB 于 D，交直线 2x+y-4=0 于 F，则当 D 恰为 OF 中点时，圆 C 的半径最小，即面积最小.



(第 11 题图)

此时圆的直径为 O(0,0)到直线 2x+y-4=0 的距离 $d=\frac{|-4|}{\sqrt{4+1}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$，

故圆 C 的半径 $r=\frac{1}{2}d=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，则圆 C 的面积的最小值 $S=\pi r^2=\frac{4\pi}{5}$.故选 A.

12.D

提示：因为 SD:DA=SE:EB=2:1，所以 SD:SA=SE:SB=2:3，则 $S_{\triangle SDE}:S_{\triangle SAB}=4:9$.

因为 CF:FS=2:1，所以 SF:SC=1:3.设点 F，C 到平面 SAB 的距离分别为 h_1，h_2，所以 $h_1:h_2=1:3$，则 $V_{F-SDE}:V_{C-SAB}=\frac{4}{9}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{27}$. 故这个容器最多可盛原来水的 $1-\frac{4}{27}=\frac{23}{27}$.故选 D.