第 4 期

第 3~4 版同步周测参考答案

一、选择题

1.D　2.C　3.C

4.A

提示：由减法的三角形法则易求得.

5.B

提示：由已知，得$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(2-\lambda)\boldsymbol{a}-(1+\mu)\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=-a-b$.

因为 A，B，C 三点共线，所以$\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{BC}$，得 $2-\lambda=-(1+\mu)$，化简得 $\lambda=\mu+3$.

6.A

提示：以向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的公共起点为坐标原点，以网格线分别为 x,y 轴，建立平面直角坐标系，则 $\boldsymbol{a}=\left(1,\frac{1}{2}\right)$，$\boldsymbol{b}=(1,3)$，

所以 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2,1)+(1,3)=(3,4)$.

7.C

8.A

提示：由定比分点坐标公式求得点 C 的坐标为$(3,3)$，代入直线方程 $y=\frac{1}{2}ax$，解得 $a=2$.故选 A.

9.B

提示：因为$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{DA}=-e_2$，$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}e_1+\frac{\sqrt{3}}{2}e_2$，所以$\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}e_1-\frac{2-\sqrt{3}}{2}e_2$.

10.A

提示：不妨设$\overrightarrow{OA}=a$，$\overrightarrow{OB}=b$.由于$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP}=-a+2t\overrightarrow{PA}+tb$，即$\overrightarrow{AP}=\frac{-a+tb}{1+2t}$，而$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=-a+b$，

故有$\begin{cases}\frac{1}{1+2t}=\lambda,\\ \frac{t}{1+2t}=\lambda.\end{cases}$解得 $t=1,\lambda=\frac{1}{3}$.

11.D

提示：由$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AB}$可知，$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{0}$，故$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}=\boldsymbol{0}$，所以$\overrightarrow{CP}=2\overrightarrow{PA}$，故选 D.

12.A

提示：采用特殊值法，当 $\lambda=\mu=0$ 时，$\overrightarrow{OC}=0$，排除 B；当 $\lambda=\mu=1$ 时，$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，排除 C；当 $\lambda=0,\mu=1$ 时，$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}$，排除 D.

二、填空题

13.$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{FO}$，$\overrightarrow{ED}$

14.$\frac{1}{2}$

提示：因为 AD=DB，BE=2EC，所以$\overrightarrow{DB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$.

又$\overrightarrow{AB}=a$，$\overrightarrow{AC}=b$，所以$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}a+\frac{2}{3}(b-a)=-\frac{1}{6}a+\frac{2}{3}b=xa+yb$.

根据平面向量基本定理，

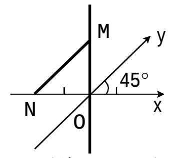
得 $x=-\frac{1}{6}$，$y=\frac{2}{3}$，所以 $x+y=\frac{1}{2}$.

15.b_6

提示：因为$\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_7}=0$，所以 $a_2+a_5+b_2+b_5+b_7=\overrightarrow{A_2A_3}+\overrightarrow{A_5A_6}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_5}+\overrightarrow{OA_7}=(\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{A_2A_3})+(\overrightarrow{OA_5}+\overrightarrow{A_5A_6})+\overrightarrow{OA_7}=\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_6}+\overrightarrow{OA_7}=\overrightarrow{OA_6}=b_6$.

16.$2\sqrt{2}$

提示：易知 MN∥y 轴，∠MNO=45°，∠MON=90°(如图).在△MON 中，$\cos45°=-\frac{x_0}{y_0}$，所以 $y_0=2\sqrt{2}$.

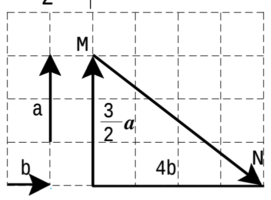


(第 16 题图)

三、解答题

17.**解：**(1)化简得 $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{n}=-13\boldsymbol{a}$，故$\boldsymbol{n}=-13\boldsymbol{m}$，所以向量 $\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}$ 平行.

(2) 向量 $4\boldsymbol{b}-\frac{3}{2}\boldsymbol{a}$ 即下图中的向量$\overrightarrow{MN}$，且$\left|4\boldsymbol{b}-\frac{3}{2}\boldsymbol{a}\right|=5$.



(第 17 题图)

18.**解：**(1)$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{e}_2-\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1$，$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AN}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\left(\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\frac{3}{4}\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$.

(2)若 $k\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$ 与 $2\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2$ 同向共线，则存在 $\lambda>0$，使得 $k\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2=\lambda(2\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2)$，

所以$\begin{cases}k=2\lambda,\\ 1=k\lambda,\\ \lambda>0,\end{cases}$解得 $k=\sqrt{2}$.

19.**解：**(1)$3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}=3(3,2)+(-1,2)-2(4,1)=(0,6)$.

(2)设 $\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{b}+n\boldsymbol{c}$，其中 $m,n\in\mathbf{R}$，即$(3,2)=(-m+4n,2m+n)$，

所以$\begin{cases}-m+4n=3,\\ 2m+n=2,\end{cases}$解得$\begin{cases}m=\frac{5}{9},\\ n=\frac{8}{9}.\end{cases}$

所以 $\boldsymbol{a}=\frac{5}{9}\boldsymbol{b}+\frac{8}{9}\boldsymbol{c}$.

(3)因为 $\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{c}=(3+4k,2+k)$，$2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=(-5,2)$，所以 $2(3+4k)-(-5)(2+k)=0$，解得 $k=-\frac{16}{13}$.

20.**解：**(1)$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=(2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)+(-\boldsymbol{e}_1+\lambda\boldsymbol{e}_2)=\boldsymbol{e}_1+(1+\lambda)\boldsymbol{e}_2$.

因为 A，E，C 三点共线，所以存在实数 k，使得$\overrightarrow{AE}=k\overrightarrow{EC}$，

即 $\boldsymbol{e}_1+(1+\lambda)\boldsymbol{e}_2=-2k\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2$，

得$(1+2k)\boldsymbol{e}_1+(1+\lambda-k)\boldsymbol{e}_2=0$.

因为 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 是平面内不共线的非零向量，所以$\begin{cases}1+2k=0,\\ 1+\lambda-k=0,\end{cases}$解得 $\lambda=-\frac{3}{2}$.

(2)由 $\boldsymbol{e}_1=(2,1)$，$\boldsymbol{e}_2=(2,-2)$，得$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EC}=-3\boldsymbol{e}_1-\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_2=(-6,-3)+(-1,1)=(-7,-2)$.

(3)在平行四边形 $ABCD$，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$，

设 $A(x,y)$，则$\overrightarrow{AD}=(3-x,6-y)$，

又$\overrightarrow{BC}=(-7,-2)$，

所以$\begin{cases}3-x=-7,\\ 6-y=-2,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=10,\\ y=8.\end{cases}$所以点 A 的坐标为$(10,8)$.

21.**证明：**如图，令$\overrightarrow{BC}=a$，$\overrightarrow{CA}=b$ 为一组基底.根据已知有$\overrightarrow{BL}=la$，$\overrightarrow{CM}=mb$.

因为$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=-a-b$，

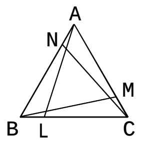
所以$\overrightarrow{AN}=n\overrightarrow{AB}=-na-nb$.

所以$\overrightarrow{AL}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BL}=(l-1)a-b$，　①

$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CM}=a+mb$，　②

$\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AN}=-na+(1-n)b$.　③

把①②③代入已知式$\overrightarrow{AL}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}=0$，则有$(l-n)a+(m-n)b=0$.根据平面向量基本定理，有 $l-n=m-n=0$，所以 $l=m=n$.



(第 21 题图)

22.**解：**(1)因为$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=-a-\frac{1}{2}b$，$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}b-a$，

所以$\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{BE}=-2a$.

(2)假设存在满足要求的点 E，且$\overrightarrow{AE}=\lambda b(0\leqslant\lambda\leqslant1)$.

①若$\overrightarrow{BF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BE}$，

则$\overrightarrow{BF}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{3}(\lambda b-a)$，

所以$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\frac{2}{3}a+\frac{1}{3}\lambda b$.

因为$\overrightarrow{AC}$与$\overrightarrow{AF}$是共线向量，

所以可设$\overrightarrow{AF}=\mu\overrightarrow{AC}(\mu\in R)$，又$\overrightarrow{AC}=a+b$，所以$\frac{2}{3}a+\frac{1}{3}\lambda b=\mu(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

由 a，b 是不共线的向量，可得 $\mu=\frac{2}{3}$，$\lambda=2$，与 $0\leqslant\lambda\leqslant1$ 矛盾，舍去.

②若$\overrightarrow{BF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BF}$，同理可得 $\mu=\frac{1}{3}$，$\lambda=\frac{1}{2}$，满足 $0\leqslant\lambda\leqslant1$.

综上可知，存在满足条件的点 E，它是线段 AD 的中点.

2020-2021 学年

数学·人教 A(必修 4)答案页第 1 期

学习周报® ①

第 1 期

第 3~4 版同步周测参考答案

一、选择题

1~6.CCCCAB

7~12.CCACDA

二、填空题

13.$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

提示：$\sin3840°=\sin(10\times360°+240°)=\sin240°=\sin(180°+60°)=-\sin60°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

14.$\left\{\alpha\left|k\pi-\frac{\pi}{3}<\alpha<k\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$

提示：$\alpha\in\{\alpha\mid k\cdot180°-60°<\alpha<k\cdot180°+45°,k\in\mathbf{Z}\}=\left\{\alpha\left|k\pi-\frac{\pi}{3}<\alpha<k\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$.

15.$\left(-\frac{12}{13},-\frac{5}{13}\right)$

提示：由点 B 的纵坐标为$\frac{12}{13}$，得 $\sin\alpha=\frac{12}{13}$.又 α 为钝角，故 $\cos\alpha=-\frac{5}{13}$.将点 B 沿单位圆逆时针旋转$\frac{\pi}{2}$到达点 A，则点 A 的坐标为$\left(\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right),\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\right)$，即$(-\sin\alpha,\cos\alpha)$，

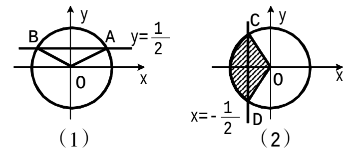
即 $A\left(-\frac{12}{13},-\frac{5}{13}\right)$.

16.$\frac{9\pi}{4}$，54π

提示：因为相互啮合的两个齿轮转动的齿数相同，所以小轮转动两周时，大轮转动的角度为 $\frac{36}{32}\times2\pi=\frac{9\pi}{4}$(rad)；如果小轮的转速为 180 转/分，则大轮 1 分钟转过的角度为 $180\div2\times\frac{9\pi}{4}=\frac{405\pi}{2}$(rad)，又大轮半径为16cm，则大轮周上一点每 1 秒转过的弧长为 $\frac{405\pi}{2}\times16\div60=54\pi$(cm).

三、解答题

17.**解：**(1)如图(1)，作直线 $y=\frac{1}{2}$ 交单位圆于 A,B 两点，连接 OA,OB，则 OA 与 OB 即为角 α 的终边位置.故角 α 的集合为$\left\{\alpha\left|\alpha=2k\pi+\frac{\pi}{6},或\alpha=2k\pi+\frac{5\pi}{6},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$.



(第 17 题图)

(2)如图(2)，作直线 $x=-\frac{1}{2}$ 交单位圆于 C,D 两点，连接 OC,OD，则 OC 与 OD 围成的阴影部分区域即为角 α 终边的位置.故角 α 的集合为$\left\{\alpha\left|2k\pi+\frac{2\pi}{3}\leqslant\alpha\leqslant2k\pi+\frac{4\pi}{3},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$.

18.**解：**(1)因为 $m=2$，

所以 $P(-3,4)$，所以 $x=-3,y=4,r=5$，

所以 $\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{4}{5}$，$\tan\alpha=\frac{y}{x}=-\frac{4}{3}$.

所以 $5\sin\alpha+3\tan\alpha$

$=5\times\frac{4}{5}+3\times\left(-\frac{4}{3}\right)=0$.

(2)由 $\cos\alpha\leqslant0$ 且 $\sin\alpha>0$，

得$\frac{3m-9}{r}\leqslant0$ 且$\frac{m+2}{r}>0$，

其中 $r=\sqrt{(3m-9)^2+(m+2)^2}>0$，

解得$-2<m\leqslant3$.

所以实数 m 的取值范围为$(-2,3]$.

19.**解：**(1) 原式$=\tan\frac{\pi}{7}+\tan\frac{2\pi}{7}+\tan\frac{3\pi}{7}+\tan\left(\pi-\frac{3\pi}{7}\right)+\tan\left(\pi-\frac{2\pi}{7}\right)+\tan\left(\pi-\frac{\pi}{7}\right)$

$=\tan\frac{\pi}{7}+\tan\frac{2\pi}{7}+\tan\frac{3\pi}{7}-\tan\frac{3\pi}{7}-\tan\frac{2\pi}{7}-\tan\frac{\pi}{7}=0$.

(2)原式$=\sin(360°+60°)\cos(360°-30°)+\sin(-2\times360°+30°)\cos(-2\times360°+60°)$

$=\sin60°\cos30°+\sin30°\cos60°$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=1$.

20.**解：**如果两只蚂蚁都在第 14 秒时回到点 A，那么可设 $14\alpha=m\cdot360°$，$14\beta=n\cdot360°$，其中$m,n\in\mathbf{Z}$，

故 $\alpha=\frac{m}{7}\cdot180°$，$\beta=\frac{n}{7}\cdot180°$，$m,n\in\mathbf{Z}$.

因为 $0°<\alpha<\beta<180°$，

所以 $0°<2\alpha<2\beta<360°$.

又两只蚂蚁在第 2 秒时均位于第二象限，故 $90°<2\alpha<2\beta<180°$.

所以 $45°<\alpha<\beta<90°$，

即 $45°<\frac{m}{7}\cdot180°<\frac{n}{7}\cdot180°<90°$，

得$\frac{7}{4}<m<n<\frac{7}{2}$.

结合 $m,n\in\mathbf{Z}$，可得 $m=2,n=3$.

所以 $\alpha=\left(\frac{360}{7}\right)°$，$\beta=\left(\frac{540}{7}\right)°$.

21.**解：**(1)若 $\alpha=90°=\frac{\pi}{2}$，$R=10$cm，

则弧长 $l=\frac{\pi}{2}\times10=5\pi$(cm)，

弓形面积 $S=S_{扇形}-S_{\triangle}=\frac{1}{2}\times5\pi\times10-\frac{1}{2}\times10^2=25\pi-50$(cm²).

(2) 设弧长为 l，则扇形周长 $C=2R+l=2R+\alpha R$，所以 $R=\frac{C}{2+\alpha}$.

所以 $S_{扇形}=\frac{1}{2}\alpha R^2=\frac{1}{2}\alpha\left(\frac{C}{2+\alpha}\right)^2=\frac{C^2}{2}\cdot\frac{1}{4+\alpha+\frac{4}{\alpha}}$.令 $f(\alpha)=\alpha+\frac{4}{\alpha}(\alpha>0)$，因为 $f(\alpha)$在$(0,2)$上单调递减，在$(2,+\infty)$上单调递增，所以$[f(\alpha)]_{min}=f(2)=4$.

所以当 $\alpha=2$ 时，该扇形有最大面积，为$\frac{C^2}{16}$.

22. **解：**(1)$f(\alpha)=\left(\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}+\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}\right)\cos^3\alpha+2\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$

$=\left(\frac{1-\sin\alpha}{-\cos\alpha}+\frac{1+\sin\alpha}{-\cos\alpha}\right)\cos^3\alpha+2\cos\alpha\cdot(-\sin\alpha)$

$=-2\cos^2\alpha-2\cos\alpha\sin\alpha$

$=\frac{-2\cos^2\alpha-2\cos\alpha\sin\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}$

$=\frac{-2-2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$.

由 $\tan\alpha=3$，得 $f(\alpha)=\frac{-2-2\times3}{1+3^2}=-\frac{4}{5}$.

(2)结合(1)可知，$f(\alpha)=-2\cos^2\alpha-2\cos\alpha\sin\alpha=\frac{14}{5}\cos\alpha$，

化简可得 $\sin\alpha+\cos\alpha=-\frac{7}{5}$.　①

由①² 变形，得 $2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{24}{25}$.

所以$|\sin\alpha-\cos\alpha|=\sqrt{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}=\frac{1}{5}$.　②

联立①②，解得 $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$，$\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，或 $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$，$\cos\alpha=-\frac{3}{5}$.

所以 $\tan\alpha=\frac{3}{4}$或$\frac{4}{3}$.

①

第 2 期

第 3~4 版同步周测参考答案

一、选择题

1~6.BCDDCC

7~12.BBDDBB

二、填空题

13.$\frac{\pi}{2}$

14.$\left[-2\pi,-\frac{\pi}{3}\right]$和$\left[\frac{5\pi}{3},2\pi\right]$

15.2 或−1　　16.②③④

三、解答题

17.**解**:(1)由题意,得

$\begin{cases}2x-\frac{\pi}{4}\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z},\\ 1+\tan\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\neq 0,\end{cases}$

故函数的定义域为

$\left\{x\,\middle|\,x\neq\frac{k\pi}{2}\text{且}x\neq\frac{k\pi}{2}+\frac{3\pi}{8},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

(2)由题意,得$-1<\tan 2x\leqslant\sqrt{3}$,

所以$k\pi-\frac{\pi}{4}<2x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{3},k\in\mathbf{Z}$,

故函数的定义域为

$\left\{x\,\middle|\,\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8}<x\leqslant\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

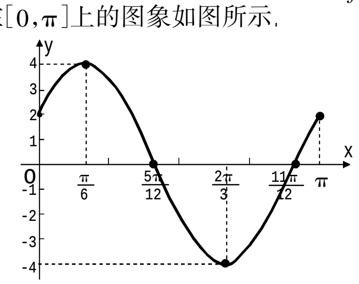
18. **解**:(1) 令$2k\pi-\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,解得$k\pi-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{6}$ $(k\in\mathbf{Z})$.

故$f(x)$的单调递增区间为$\left[k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{6}\right](k\in\mathbf{Z})$.

(2)列表如下:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{12}$	π
$2x-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$
$f(x)$	2	4	0	-4	0	2

描点并用光滑的曲线连接,得$f(x)$在$[0,\pi]$上的图象如图所示.



(第 18 题图)

19.**解**:(1)最小正周期$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

由$x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{12}\right]$, 得$2x+\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6},\pi\right]$.

所以$\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$.

所以当$\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$时,

$f(x)$取得最小值为a;

当$\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=1$时,

$f(x)$取得最大值为$a+3$.

由已知条件,得$a+3+a=3$,

解得$a=0$.

(2)由(1)可得$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+1$.

由$f(x)\geqslant 2$,得$\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\geqslant\frac{1}{2}$.

所以$2k\pi+\frac{\pi}{6}\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{5\pi}{6},k\in\mathbf{Z}$,

解得$k\pi\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{3},k\in\mathbf{Z}$.

所以不等式$f(x)\geqslant 2$的解集为

$\left\{x\,\middle|\,k\pi\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{3},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

20.**解**:(1)因为$f(x)$的图象上两个对称中心间的最短距离为$\frac{\pi}{2}$,

所以其周期$T=\pi$.

又$T=\frac{2\pi}{\omega}$,所以$\omega=2$.

因为$f(0)=2\cos 2\varphi=-2$,所以$\cos 2\varphi=-1$.

又$0<\varphi<\pi$,所以$0<2\varphi<2\pi$,

所以$2\varphi=\pi,\varphi=\frac{\pi}{2}$.

所以$f(x)=2\cos(2x+\pi)=-2\cos 2x$.

(2)由条件,得$T=2\times\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{\omega}$,

所以$\omega=2,f(x)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

令$2k\pi-\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,

得$f(x)$的单调递增区间为

$\left[k\pi-\frac{2\pi}{3},k\pi-\frac{\pi}{6}\right],k\in\mathbf{Z}$.

(3)若$x\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$,

则$x+\frac{\pi}{2}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$.

由$\omega>0,f(x)$在$\left[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$上是减函数,

得$\frac{\pi\omega}{6}\geqslant 2k\pi$且$\frac{7\pi\omega}{6}\leqslant 2k\pi+\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,解得$12k\leqslant\omega\leqslant\frac{12k+6}{7},k\in\mathbf{Z}$.

从而有$12k\leqslant\frac{12k+6}{7},k\in\mathbf{Z}$,

结合$\omega>0$,解得$k=0$.

故ω的取值范围是$\left(0,\frac{6}{7}\right]$.

21.**解**:(1)因为$y=f(x)$的图象关于直线$x=-\frac{\pi}{6}$对称,所以$f\left(-\frac{\pi}{6}+x\right)=f\left(-\frac{\pi}{6}-x\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{6}-x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=-\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$,故当$x\in\left[-\pi,-\frac{\pi}{6}\right)$时,

$f(x)=-\sin x$.

故$f(x)=\begin{cases}-\sin x,x\in\left[-\pi,-\frac{\pi}{6}\right),\\ \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right),x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right].\end{cases}$

(2)因为$f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以在区间$\left[-\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$上,有$x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$或$x+\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$,所以$x_1=0,x_2=\frac{\pi}{3}$.

又$y=f(x)$的图象关于$x=-\frac{\pi}{6}$对称,

所以$x_3=-\frac{\pi}{3},x_4=-\frac{2\pi}{3}$也是方程的解.

所以$f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$的解为$x=-\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{3},0,\frac{\pi}{3}$.

22.**解**:(1)由$f(x)$图象的一条对称轴为$x=\frac{\pi}{3}$,得$\frac{2\pi}{3}+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,

解得$\varphi=k\pi-\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$.又$0<\varphi<\pi$,

所以$\varphi=\frac{5\pi}{6}$.

(2)$|f(x_0)-m|\leqslant\frac{1}{2}$

$\Rightarrow\begin{cases}m\geqslant f(x_0)-\frac{1}{2},\\ m\leqslant f(x_0)+\frac{1}{2}\end{cases}$

在$x_0\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right]$上有解.

由(1)知$f(x)=\sin\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)$.当$x\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right]$时,$2x+\frac{5\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$,

所以$f(x)\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$.

所以$\left[f(x)-\frac{1}{2}\right]_{\min}=-1$,

$\left[f(x)+\frac{1}{2}\right]_{\max}=\frac{3}{2}$.

所以m的取值范围为$\left[-1,\frac{3}{2}\right]$.

(3)$g(x)=\left|f\left(\frac{\omega x}{2}-\frac{5\pi}{12}\right)\right|=|\sin\omega x|$.

若$g(x)$在$[0,2]$上恰有 100 次取到最大值,由$g(x)=|\sin\omega x|$的最小正周期$T=\frac{\pi}{\omega}$,

可得$\left(99+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\pi}{\omega}\leqslant 2\leqslant\left(100+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\pi}{\omega}$,

解得$\frac{199\pi}{4}\leqslant\omega\leqslant\frac{201\pi}{4}$.

所以ω的取值范围是$\left[\frac{199\pi}{4},\frac{201\pi}{4}\right]$.

第 3 期

第 3~4 版章节测试参考答案

一、选择题

1~6.ACDBAA　　7~11.DADBB

12.D

提示:由图象可知,当$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时,$f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)>0,\sin x>0,f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin x>0$;当$x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$时,$f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)<0$,$\sin x>0,f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin x<0$,故选 D.

二、填空题

13.80　14.$-\frac{2}{\sin\alpha}$

15.$\frac{2}{3}$

提示:由题中条件,得$\omega\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}=2k\pi,k\in Z$,解得$\omega=8k+\frac{2}{3},k\in Z$.又$\omega>0$,故$\omega$的最小值为$\frac{2}{3}$.

16.$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

提示:设$P(x,y)$.由$\cos x=\tan x$,得$\cos^2x=\sin x$, 即$\sin^2x+\sin x-1=0$. 结合$\sin x>0$,解得$\sin x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.故线段$P_1P_2$的长等于$\sin x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

三、解答题

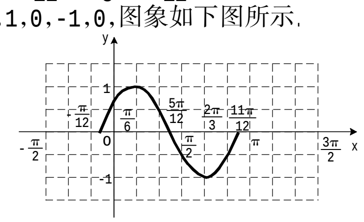
17.**解**:(1)$\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha$

$=\frac{\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}$

$=\frac{\tan\alpha-1}{1+\tan^2\alpha}=-\frac{20}{17}$.

(2) 原式$=\frac{-\cos\alpha(-\sin\alpha)(-\sin\alpha)}{-\cos\alpha\sin\alpha\cos\alpha}=\tan\alpha=-\frac{3}{5}$.

18.**解**:(1)表中第 2 行依次填:$-\frac{\pi}{12}$,$\frac{\pi}{6}$,$\frac{5\pi}{12}$,$\frac{2\pi}{3}$,$\frac{11\pi}{12}$,第 3 行依次填:0,1,0,-1,0,图象如下图所示.



(2)令$2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$,得对称轴为$x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$;

令$2x+\frac{\pi}{6}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$,得对称中心为$\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},0\right)(k\in\mathbf{Z})$.

(3)当$x\in\left[-\frac{11\pi}{12},-\frac{\pi}{2}\right]$时,$2x+\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{5\pi}{3},-\frac{5\pi}{6}\right]$,则当$2x+\frac{\pi}{6}=-\frac{3\pi}{2}$,即$x=-\frac{5\pi}{6}$时,$f(x)$取得最大值为 1;当$2x+\frac{\pi}{6}=-\frac{5\pi}{6}$,即$x=-\frac{\pi}{2}$时,$f(x)$取得最小值为$-\frac{1}{2}$.

19.**解**:(1)最小正周期$T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$,

所以$\omega=2$.

因为$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)=-\sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$,又$-\frac{\pi}{2}<\varphi<0$,所以$\varphi=-\frac{\pi}{3}$.

(2)由(1)得$f(x)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

令$2k\pi-\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi,k\in Z$,

得$f(x)$的单调递增区间为

$\left[k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{6}\right],k\in Z$.

(3)当$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时,$2x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$,

所以$f(x)$的值域为$\left[-\frac{1}{2},1\right]$.

20.**解**:(1)因为相邻对称中心的距离为$\frac{\pi}{4}$,所以最小正周期$T=2\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$.

故$\omega=\frac{\pi}{T}=2$.

因为$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=0$,

所以$\varphi=k\pi-\frac{\pi}{3},k\in Z$.

又$-\frac{\pi}{2}<\varphi<0$,所以$\varphi=-\frac{\pi}{3}$.

所以$f(x)=\tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

由$k\pi-\frac{\pi}{2}<2x-\frac{\pi}{3}<k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z$,

得$f(x)$的单调递增区间为

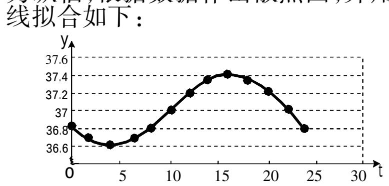
$\left(\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12},\frac{k\pi}{2}+\frac{5\pi}{12}\right),k\in Z$.

(2)由$-1\leqslant f(x)\leqslant\sqrt{3}$,

可得$k\pi-\frac{\pi}{4}\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant k\pi+\frac{\pi}{3},k\in Z$,

求得原不等式的解集为$\left[\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{24},\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right],k\in Z$.

21.**解**:(1)以时间 t 为横轴,体温 y 为纵轴,根据数据作出散点图,并用曲线拟合如下:



(第 21 题图)

(2)设y与t的函数关系为

$y=A\sin(\omega t+\varphi)+c$,

则$c=\frac{1}{2}\times(37.4+36.6)=37,A=\frac{1}{2}\times(37.4-36.6)=0.4,\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{12}$.

由$0.4\sin\left(\frac{\pi}{12}\times 16+\varphi\right)+37=37.4$,

得$\sin\left(\frac{4\pi}{3}+\varphi\right)=1$.取$\varphi=-\frac{5\pi}{6}$,

故$y=0.4\sin\left(\frac{\pi}{12}t-\frac{5\pi}{6}\right)+37$.

(3)将$t=1$代入(2)中函数关系式,得$y\approx 36.72$.所以该病人的体温比此时的正常体温高$38.2-36.72\approx 1.48$℃.

22.**解**:(1)由图可知,A=1,$\frac{1}{2}T=\frac{\pi}{\omega}=\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\omega=2$,所以$f(x)=\sin(2x+\varphi)$.

将点$\left(\frac{\pi}{3},0\right)$代入, 得$2\times\frac{\pi}{3}+\varphi=k\pi,k\in Z$.

结合$|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}$,得$\varphi=\frac{\pi}{3}$.

所以$f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

(2)因为$f(x)$的周期为π,

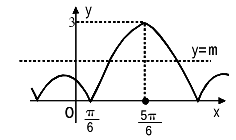
所以$f(x)$在$[0,2\pi]$内恰有 2 个周期.

当$0<a<\frac{\sqrt{3}}{2}$时,方程$\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=a$在$[0,2\pi]$内有 4 个实根, 设为$x_1,x_2,x_3,x_4$,结合图象知$x_1+x_2=\frac{7\pi}{6},x_3+x_4=\frac{19\pi}{6}$,故所有实数根之和为$\frac{13\pi}{3}$.

当$a=\frac{\sqrt{3}}{2}$时, 方程$\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=a$在$[0,2\pi]$内有 5 个实根,为$0,\frac{\pi}{6},\pi,\frac{7\pi}{6},2\pi$,故所有实数根之和为$\frac{13\pi}{3}$.

综上,所有实数根之和为$\frac{13\pi}{3}$.

(3)由条件,得$g(x)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+1$,故$y=|g(x)|$的图象如图所示.要使方程$|g(kx)|=m$在$\left[0,\frac{5\pi}{6}\right]$上至多有一个解, 则需$y=|g(x)|$的图象伸长为原来 5 倍以上, 所以$0<k\leqslant\frac{1}{5}$. 故正数 k 的取值范围为$\left(0,\frac{1}{5}\right]$.



(第 22 题图)