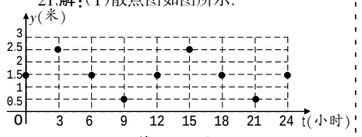
又 $f(0)=A\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}$，解得 $A=2$.所以 $A=2,\omega=\frac{1}{2},\varphi=-\frac{\pi}{4}$.

(2)若方程 $f(x)-m=0$ 在 $[0,2\pi]$ 上有一解，则直线 $y=m$ 与 $f(x)$ 的图象在 $[0,2\pi]$ 上只有一个交点.

由(1)可知 $f(x)=2\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)$.当 $x\in[0,2\pi]$ 时，$\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$，$f(x)\in[-\sqrt{2},2]$.

结合图象可知，m 的取值范围为 $[-\sqrt{2},\sqrt{2})\cup\{2\}$.

21.**解**：(1)散点图如图所示.



(第 21 题图)

选择②$y=A\cos(\omega t+\varphi)+b$，则 $A+b=2.4$ 且 $-A+b=0.6$，解得 $A=0.9,b=1.5$.

因为 $T=\frac{2\pi}{\omega}=12$，所以 $\omega=\frac{\pi}{6}$.

所以 $y=0.9\cos\left(\frac{\pi t}{6}+\varphi\right)+1.5$.

又 y 的图象过点 $(3,2.4)$，所以 $2.4=0.9\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}\times3+\varphi\right)+1.5$，所以 $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)=1$，

即 $\sin\varphi=-1$.

又 $-\pi<\varphi<0$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{2}$.所以 $y=0.9\cos\left(\frac{\pi t}{6}-\frac{\pi}{2}\right)+1.5=0.9\sin\frac{\pi t}{6}+1.5$.

(2)由(1)知 $y=0.9\sin\frac{\pi t}{6}+1.5$，令 $y\geqslant1.05$，可得 $2k\pi-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi t}{6}\leqslant2k\pi+\frac{7\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$，所以 $12k-1\leqslant t\leqslant12k+7(k\in\mathbf{Z})$.

又 $5\leqslant t\leqslant18$，所以 $5\leqslant t\leqslant7$ 或 $11\leqslant t\leqslant18$.所以这一天可以安排早上 5 点至 7 点以及 11 点至 18 点的时间段组织训练，才能确保集训队员的安全.

22.**解**：(1)$f_1(x)+f_2(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin x\cos\frac{\pi}{6}+\cos x\sin\frac{\pi}{6}+\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}+1}{2}\cos x=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.所以 $A=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.

(2)由 $g_1(x)+g_2(x)+g_3(x)=0$，得 $\sin(x+\varphi_1)+\sin(x+\varphi_2)+\sin(x+\varphi_3)=0$.

利用两角和的正弦公式展开，整理可得 $(\cos\varphi_1+\cos\varphi_2+\cos\varphi_3)\sin x+(\sin\varphi_1+\sin\varphi_2+\sin\varphi_3)\cdot\cos x=0$.

易得 $\cos\varphi_1+\cos\varphi_2+\cos\varphi_3=0,\sin\varphi_1+\sin\varphi_2+\sin\varphi_3=0$，即 $\cos\varphi_1+\cos\varphi_2=-\cos\varphi_3,\sin\varphi_1+\sin\varphi_2=-\sin\varphi_3$.

两式平方相加，可得 $2+2\cos(\varphi_1-\varphi_2)=1$，

所以 $\cos(\varphi_1-\varphi_2)=-\frac{1}{2}$.

同理，可得 $\cos(\varphi_2-\varphi_3)=-\frac{1}{2},\cos(\varphi_3-\varphi_1)=-\frac{1}{2}$，

所以 $\cos(\varphi_1-\varphi_2)\cos(\varphi_2-\varphi_3)\cos(\varphi_3-\varphi_1)=-\frac{1}{8}$.

第 18 期

第 2~3 版章节测试参考答案

一、选择题

1~6.AADBAB

7~12.AADBBA

二、填空题

13.80　　14.$-\sqrt{3}$

15.$\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$　　16.$(0,\sqrt{2}-1]$

三、解答题

17.**解**：(1)$\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha=\frac{\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\frac{\tan\alpha-1}{1+\tan^2\alpha}=-\frac{20}{17}$.

(2)原式$=\frac{-\cos\alpha(-\sin\alpha)(-\sin\alpha)}{-\cos\alpha\sin\alpha\cos\alpha}=\tan\alpha=-\frac{3}{5}$.

18.**解**：(1)由三角函数的定义，得 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$，$\sin\alpha=\frac{4}{5}$，所以 $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{24}{25}$.

(2)因为 $\beta-\alpha=\frac{\pi}{2}$，所以 $\sin\beta=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha=\frac{3}{5}$，$\cos\beta=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha=-\frac{4}{5}$.

所以 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{3}{5}\times\left(-\frac{4}{5}\right)-\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}=-\frac{24}{25}$.

19.**解**：(1)由 $T=4\pi=\frac{2\pi}{\omega}$，得 $\omega=\frac{1}{2}$.所以 $f(x)=\sin\frac{x}{2}$.令 $\sin\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$，得 $\frac{x}{2}=2k\pi+\frac{\pi}{6}$ 或 $2k\pi+\frac{5\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$，

解得 $x=4k\pi+\frac{\pi}{3}$ 或 $4k\pi+\frac{5\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$.

故 $\omega=\frac{1}{2}$，$f(x)=\frac{1}{2}$ 的解集为 $\left\{x\,\middle|\,x=4k\pi+\frac{\pi}{3}\right.$ 或 $\left.x=4k\pi+\frac{5\pi}{3},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

(2)若 $\omega=1$，则 $f(x)=\sin x$，

故 $g(x)=\sin^2x+\sqrt{3}\sin(-x)\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{1-\cos2x}{2}-\sqrt{3}\sin x\cos x=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\cos2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2x\right)=\frac{1}{2}-\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

由 $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$，得 $2x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$，$\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\in\left[\frac{1}{2},1\right]$.

可得 $g(x)$ 的值域为 $\left[-\frac{1}{2},0\right]$.

20. **解**：(1)$f(x)=\sqrt{3}\sin2\omega x+(\cos^2\omega x-\sin^2\omega x)(\cos^2\omega x+\sin^2\omega x)+1=\sqrt{3}\sin2\omega x+\cos2\omega x+1=2\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{6}\right)+1$.

由点 $\left(-\frac{\pi}{6},1\right)$ 是 $f(x)$ 图象的一个对称中心，得 $2\omega\times\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{6}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，所以 $\omega=-3k+\frac{1}{2}(k\in\mathbf{Z})$.

又 $0<\omega<1$，所以 $\omega=\frac{1}{2}$.

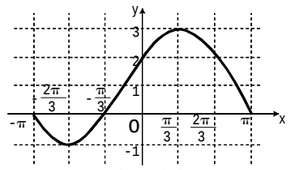
所以 $f(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+1$.

由 $x+\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，得 $x=k\pi+\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$，令 $k=0$，得距 y 轴最近的一条对称轴的方程为 $x=\frac{\pi}{3}$.

(2)由(1)知 $f(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+1$，当 $x\in[-\pi,\pi]$ 时，列表如下：

$x+\frac{\pi}{6}$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{7\pi}{6}$
x	$-\pi$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$f(x)$	0	-1	1	3	1	0

则 $f(x)$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上的图象如图所示.



(第 20 题图)

21. **解**：(1)$f(x)=2\cos x\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-2\sqrt{3}\cdot\cos^2x+\frac{\sqrt{3}}{2}=2\cos x\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)-2\sqrt{3}\cos^2x+\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\sin x\cos x-\sqrt{3}\cos^2x+\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{1}{2}\sin2x-\sqrt{3}\cdot\frac{1+\cos2x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant2x-\frac{\pi}{3}\leqslant2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，得 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[k\pi-\frac{\pi}{12},k\pi+\frac{5\pi}{12}\right](k\in\mathbf{Z})$.

由此可知，当 $x\in[0,\pi]$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[0,\frac{5\pi}{12}\right]$，$\left[\frac{11\pi}{12},\pi\right]$.

(2)$h(x)=\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{3}\right]=\sin2x$.若关于 x 的方程 $2[h(x)]^2+mh(x)+1=0$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上有两个不相等的实根，则 $2\sin^22x+m\sin2x+1=0$ 在 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上有两个不相等的实根.令 $t=\sin2x$，则 $2t^2+mt+1=0$ 在 $t\in[0,1)$ 上有 1 个实根.令 $g(t)=2t^2+mt+1$，则 $g(0)g(1)=m+3<0$，或 $\begin{cases}\Delta=m^2-8=0,\\0\leqslant-\frac{m}{4}<1,\end{cases}$ 解得 $m<-3$，或 $m=-2\sqrt{2}$.

故实数 m 的取值范围为 $(-\infty,-3)\cup\{-2\sqrt{2}\}$.

22.**解**：(1)由条件得 $A=2,\frac{T}{4}=3$，

因为 $T=\frac{2\pi}{\omega}$，所以 $\omega=\frac{\pi}{6}$.

所以曲线段 FBC 的解析式为

$y=2\sin\left(\frac{\pi}{6}x+\frac{2\pi}{3}\right),x\in[-4,0]$.

当 $x=0$ 时，$y=|OC|=\sqrt{3}$，

又 $|CD|=\sqrt{3}$，

所以 $\angle COD=\frac{\pi}{4}$，所以 $\angle DOE=\frac{\pi}{4}$.

(2)由(1)易知 $|OD|=\sqrt{6}$，故 $|OP|=\sqrt{6}$.

由题意可知 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$，

矩形草坪的面积为

$S=\sqrt{6}\sin\theta(\sqrt{6}\cos\theta-\sqrt{6}\sin\theta)$

$=6(\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta)$

$=6\left(\frac{1}{2}\sin2\theta+\frac{1}{2}\cos2\theta-\frac{1}{2}\right)$

$=3\sqrt{2}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)-3$.

因为 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$，

所以 $\frac{\pi}{4}<2\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}$，

故当 $2\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，即 $\theta=\frac{\pi}{8}$ 时，矩形草坪的面积最大.

第 13 期

第 2~3 版章节测试参考答案

一、选择题

1~6.BDBBDD

7~12.BCCACA

二、填空题

13.1

14.$\frac{1}{2}$

提示：因为函数 f(x)是奇函数，所以 $f(0)=0$，即 $a-\frac{1}{2^0+1}=0$，解得 $a=\frac{1}{2}$.

15.$\{k\mid k=0$ 或 $k\geqslant1\}$

16.2

三、解答题

17.**解**：因为 $a>1$，所以 $f(x)=\log_ax$ 在 $[a,2a]$ 上是增函数，所以最大值为 $f(2a)$，最小值为 $f(a)$.

所以 $f(2a)-f(a)=\log_a2a-\log_aa=\frac{1}{2}$，

即 $\log_a2=\frac{1}{2}$，所以 $a=4$.

18.**解**：(1)$(9\sqrt{3})^{-\frac{4}{5}}=\left(3^2\times3^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{4}{5}}=\left(3^{\frac{5}{2}}\right)^{-\frac{4}{5}}=3^{-2}=\frac{1}{9}$.

(2)$\log_3(\log_381)+\ln e^2-\lg1000+\log_a1=\log_34+2\ln e-3+0=1$.

19.**解**：(1)符合条件的是 $f(x)=ax+b$.

若模型为 $f(x)=2^x+a$，则由 $f(1)=2^1+a=4$，得 $a=2$，即 $f(x)=2^x+2$，

此时 $f(2)=6$，$f(3)=10$，$f(4)=18$，与已知相差太大，不符合.

若模型为 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}x+a$，则 $f(x)$ 是减函数，与已知不符合.

若模型为 $f(x)=ax+b$，

由已知得 $\begin{cases}a+b=4,\\3a+b=7,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\frac{3}{2},\\b=\frac{5}{2},\end{cases}$

所以 $f(x)=\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}(x\in\mathbf{N})$.

(2)2020 年预计年产量为 $f(7)=\frac{3}{2}\times7+\frac{5}{2}=13$，2020 年实际年产量为 $13\times(1-30\%)=9.1$.

答：最适合的模型解析式为 $f(x)=\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}(x\in\mathbf{N})$，2020 年的实际产量为 9.1 万件.

20.**解**：(1)设 $f(x)=ax^2+bx+c$，$a\neq0$，

因为二次函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=f(2-x)$，所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，即 $-\frac{b}{2a}=1$.①

因为 $f(1)=4,f(3)=0$，

所以 $f(1)=a+b+c=4$，②

$f(3)=9a+3b+c=0$，③

联立①②③，解得 $a=-1,b=2,c=3$，

故 $f(x)=-x^2+2x+3$.

(2)设 $g(x)=-x^2+2x+3-2^x-m$，

在 $[1,4)$ 上 $f(x)$ 的图象恒在曲线 $y=2^x+m$ 的上方等价于 $g(x)>0$ 在 $[1,4)$ 上恒成立，即 $m<-x^2+2x+3-2^x$ 在 $[1,4)$ 上恒成立，

因为 $y=-x^2+2x+3$ 在 $[1,4)$ 上单调递减，$y=2^x$ 在 $[1,4)$ 上单调递增，

所以 $h(x)=-x^2+2x+3-2^x$ 在 $[1,4)$ 上单调递减，则 $[h(x)]_{\max}=h(4)=-16+8+3-16=-21$.

故 m 的取值范围为 $(-\infty,-21)$.

21.**解**：(1)要使函数 $f(x)$ 有意义，x 必须满足 $\frac{1+x}{1-x}>0$，所以 $-1<x<1$，

因此，$f(x)$ 的定义域为 $(-1,1)$.

(2)函数 $f(x)$ 为奇函数.因为 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,1)$，对 $(-1,1)$ 内的任意 x 有，

$f(-x)=\frac{2^{-x}-1}{2^{-x}+1}+\log_2\frac{1-x}{1+x}=\frac{1-2^x}{1+2^x}-\log_2\frac{1+x}{1-x}=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数.

(3)函数 $g(x)$ 的零点即方程 $g(x)=0$ 的根，即 $f(1-x^2)+f\left(\frac{3x}{2}\right)=0$ 的根，

又 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f\left(\frac{3x}{2}\right)=-f(1-x^2)=f(x^2-1)$.

任取 $x_1,x_2\in(-1,1)$，且 $x_1<x_2$，

$f(x_1)-f(x_2)=\left(\frac{2^{x_1}-1}{2^{x_1}+1}+\log_2\frac{1+x_1}{1-x_1}\right)-\left(\frac{2^{x_2}-1}{2^{x_2}+1}+\log_2\frac{1+x_2}{1-x_2}\right)=\frac{2(2^{x_1}-2^{x_2})}{(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)}+\log_2\left(\frac{1+x_1}{1-x_1}\cdot\frac{1-x_2}{1+x_2}\right)$.

因为 $x_1<x_2$，所以 $0<2^{x_1}<2^{x_2}$，

所以 $\frac{2(2^{x_1}-2^{x_2})}{(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)}<0$.

因为 $x_1,x_2\in(-1,1)$ 且 $x_1<x_2$，

所以 $(1-x_1)(1+x_2)-(1+x_1)(1-x_2)=2(x_2-x_1)>0$，

所以 $0<\frac{1+x_1}{1-x_1}\cdot\frac{1-x_2}{1+x_2}<1$，

所以 $\log_2\left(\frac{1+x_1}{1-x_1}\cdot\frac{1-x_2}{1+x_2}\right)<0$，

所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，

所以 $f(x)$ 在定义域 $(-1,1)$ 上为增函数，

所以由 $f\left(\frac{3x}{2}\right)=-f(1-x^2)=f(x^2-1)$，得 $\frac{3x}{2}=x^2-1$，解得 $x=2$ 或 $-\frac{1}{2}$，

验证当 $x=2$ 时，$1-x^2<-1$ 不符合题意；当 $x=-\frac{1}{2}$ 时，符合题意，所以函数 $g(x)$ 的零点为 $x=-\frac{1}{2}$.

22.**解**：(1)因为 $x\in[-1,1]$，

所以 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x\in\left[\frac{1}{3},3\right]$，

$y=[f(x)]^2-2af(x)+3=\left[\left(\frac{1}{3}\right)^x\right]^2-2a\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x+3=\left[\left(\frac{1}{3}\right)^x-a\right]^2+3-a^2$.

由一元二次函数的性质分三种情况：

若 $a<\frac{1}{3}$，则当 $\left(\frac{1}{3}\right)^x=\frac{1}{3}$，即 $x=1$ 时，$y_{\min}=g(a)=\frac{28}{9}-\frac{2a}{3}$；

若 $\frac{1}{3}\leqslant a\leqslant3$，则当 $\left(\frac{1}{3}\right)^x=a$，即 $x=-\log_3a$ 时，$y_{\min}=g(a)=3-a^2$；

若 $a>3$，则当 $\left(\frac{1}{3}\right)^x=3$，即 $x=-1$ 时，$y_{\min}=g(a)=12-6a$.

所以 $g(a)=\begin{cases}\frac{28}{9}-\frac{2a}{3},a<\frac{1}{3},\\3-a^2,\frac{1}{3}\leqslant a\leqslant3,\\12-6a,a>3.\end{cases}$

(2)假设存在满足题意的 m,n，

因为 $m>n>3$，且 $g(a)=12-6a$ 在区间 $(3,+\infty)$ 内是减函数，

$g(a)$ 的定义域为 $[n,m]$，值域为 $[n^2,m^2]$，

所以 $\begin{cases}12-6m=n^2,\\12-6n=m^2.\end{cases}$

两式相减，得 $6(m-n)=(m+n)(m-n)$，因为 $m>n>3$，所以 $m+n=6$，但这与 $m>n>3$ 矛盾，所以满足题意的 m,n 不存在.

第 14 期

第 3~4 版同步周测参考答案

一、选择题

1~6.CCCCAB

7~12.CCACBA

二、填空题

13.$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

提示：$\sin3840^\circ=\sin(10\times360^\circ+240^\circ)=\sin240^\circ=\sin(180^\circ+60^\circ)=-\sin60^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

14.$\left\{\alpha\,\middle|\,k\pi-\frac{\pi}{3}<\alpha<k\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$

提示：$\alpha\in\{\alpha\mid k\cdot180^\circ-60^\circ<\alpha<k\cdot180^\circ+45^\circ,k\in\mathbf{Z}\}=\left\{\alpha\,\middle|\,k\pi-\frac{\pi}{3}<\alpha<k\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

15.$\left(-\frac{12}{13},-\frac{5}{13}\right)$

提示：由点 B 的纵坐标为 $\frac{12}{13}$，得 $\sin\alpha=\frac{12}{13}$.又 α 为钝角，故 $\cos\alpha=-\frac{5}{13}$.将点 B 沿单位圆逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 到达点 A，则点 A 的坐标为 $\left(\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right),\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\right)$，即 $(-\sin\alpha,\cos\alpha)$，

即 $A\left(-\frac{12}{13},-\frac{5}{13}\right)$.

16.$\frac{9\pi}{4}$，54π

提示：因为相互啮合的两个齿轮转动的齿数相同，所以小轮转动两周时，大轮转动的角度为 $\frac{36}{32}\times2\pi=\frac{9\pi}{4}$(rad)；如果小轮的转速为 180 转/分，则大轮 1 分钟转过的角度为 $180\div2\times\frac{9\pi}{4}=\frac{405\pi}{2}$(rad)，又大轮半径为16cm，则大轮周上一点每 1 秒转过的弧长为 $\frac{405\pi}{2}\times16\div60=54\pi$(cm).

三、解答题

17.**解**：因为 $\tan x>0$，所以角 x 在第一或第三象限.

若角 x 在第一象限，则 $\sin x>0,\cos x>0$，所以 $\sin x+\cos x>0$；

若角 x 在第三象限，则 $\sin x<0,\cos x<0$，$\sin x+\cos x<0$，不合题意.

所以角 x 在第一象限故角 x 的集合是 $\left\{x\,\middle|\,2k\pi<x<2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

18.**解**：(1)因为 $m=2$，

所以 $P(-3,4)$，所以 $x=-3,y=4,r=5$，

所以 $\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{4}{5}$，$\tan\alpha=\frac{y}{x}=-\frac{4}{3}$.

所以 $5\sin\alpha+3\tan\alpha=5\times\frac{4}{5}+3\times\left(-\frac{4}{3}\right)=0$.

(2)由 $\cos\alpha\leqslant0$ 且 $\sin\alpha>0$，

得 $\frac{3m-9}{r}\leqslant0$ 且 $\frac{m+2}{r}>0$，

其中 $r=\sqrt{(3m-9)^2+(m+2)^2}>0$，

解得 $-2<m\leqslant3$.

所以实数 m 的取值范围为 $(-2,3]$.

19.**解**：(1)原式$=\tan\frac{\pi}{7}+\tan\frac{2\pi}{7}+\tan\frac{3\pi}{7}+\tan\left(\pi-\frac{3\pi}{7}\right)+\tan\left(\pi-\frac{2\pi}{7}\right)+\tan\left(\pi-\frac{\pi}{7}\right)$

$=\tan\frac{\pi}{7}+\tan\frac{2\pi}{7}+\tan\frac{3\pi}{7}-\tan\frac{3\pi}{7}-\tan\frac{2\pi}{7}-\tan\frac{\pi}{7}=0$.

④ (2)原式$=\sin(360°+60°)\cos(360°-30°)+\sin(-2\times360°+30°)\cos(-2\times360°+60°)$

$=\sin60°\cos30°+\sin30°\cos60°$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=1.$

20.**解**:如果两只蚂蚁都在第 14 秒时回到点A,那么可设$14\alpha=m\cdot360°$,$14\beta=n\cdot360°$,其中$m,n\in\mathbf{Z}$,

故$\alpha=\frac{m}{7}\cdot180°$,$\beta=\frac{n}{7}\cdot180°$,$m,n\in\mathbf{Z}$.

因为$0°<\alpha<\beta<180°$,

所以$0°<2\alpha<2\beta<360°$.

又两只蚂蚁在第 2 秒时均位于第二象限,故$90°<2\alpha<2\beta<180°$.

所以$45°<\alpha<\beta<90°$,即$45°<\frac{m}{7}\cdot180°<\frac{n}{7}\cdot180°<90°$,得$\frac{7}{4}<m<n<\frac{7}{2}$.

结合$m,n\in\mathbf{Z}$,可得$m=2,n=3$.

所以$\alpha=\left(\frac{360}{7}\right)°$,$\beta=\left(\frac{540}{7}\right)°$.

21.**解**:(1)若$\alpha=90°=\frac{\pi}{2}$,$R=10\text{cm}$,则弧长$l=\frac{\pi}{2}\times10=5\pi(\text{cm})$,

弓形面积$S=S_{扇形}-S_{\triangle}=\frac{1}{2}\times5\pi\times10-\frac{1}{2}\times10^2=25\pi-50(\text{cm}^2)$.

(2)设弧长为l,则扇形周长$C=2R+l=2R+\alpha R$,所以$R=\frac{C}{2+\alpha}$.

所以$S_{扇形}=\frac{1}{2}\alpha R^2=\frac{1}{2}\alpha\left(\frac{C}{2+\alpha}\right)^2=\frac{C^2}{2}\cdot\frac{1}{4+\alpha+\frac{4}{\alpha}}\leqslant\frac{C^2}{2}\cdot\frac{1}{4+2\sqrt{\alpha\cdot\frac{4}{\alpha}}}=\frac{C^2}{16}$,当且仅当$\alpha=\frac{4}{\alpha}$,即$\alpha=2$时,等号成立.

所以当$\alpha=2$时,该扇形有最大面积,为$\frac{C^2}{16}$.

22.**解**:(1)$f(\alpha)=\left(\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}+\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}\right)\cdot\cos^3\alpha+2\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$

$=\left(\frac{1-\sin\alpha}{-\cos\alpha}+\frac{1+\sin\alpha}{-\cos\alpha}\right)\cos^3\alpha+2\cos\alpha(-\sin\alpha)$

$=-2\cos^2\alpha-2\cos\alpha\sin\alpha$

$=\frac{-2\cos^2\alpha-2\cos\alpha\sin\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}$

$=\frac{-2-2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$.

由$\tan\alpha=3$,得$f(\alpha)=\frac{-2-2\times3}{1+3^2}=-\frac{4}{5}$.

(2)结合(1)可知,$f(\alpha)=-2\cos^2\alpha-2\cos\alpha\sin\alpha=\frac{14}{5}\cos\alpha$,

化简可得$\sin\alpha+\cos\alpha=-\frac{7}{5}$. ①

由①^{2}变形,得$2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{24}{25}$.

所以$|\sin\alpha-\cos\alpha|=\sqrt{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}=\frac{1}{5}$. ②

联立①②,解得$\sin\alpha=-\frac{3}{5}$,$\cos\alpha=-\frac{4}{5}$,或$\sin\alpha=-\frac{4}{5}$,$\cos\alpha=-\frac{3}{5}$.

所以$\tan\alpha=\frac{3}{4}$或$\frac{4}{3}$.

第 15 期

第 3~4 版同步周测参考答案

一、选择题

1~6.CCDDCC

7~12.BBDDBB

二、填空题

13.$\frac{\pi}{2}$

14.$\left[-2\pi,-\frac{\pi}{3}\right]$和$\left[\frac{5\pi}{3},2\pi\right]$

15.2 或-1　　16.②③④

三、解答题

17.**解**:(1)由题意,得

$\begin{cases}2x-\frac{\pi}{4}\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z},\\1+\tan\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\neq0,\end{cases}$

故函数的定义域为

$\left\{x\middle|x\neq\frac{k\pi}{2}\text{且}x\neq\frac{k\pi}{2}+\frac{3\pi}{8},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

(2)由题意,得$-1<\tan2x\leqslant\sqrt{3}$,

所以$k\pi-\frac{\pi}{4}<2x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{3}$,$k\in\mathbf{Z}$,

故函数的定义域为

$\left\{x\middle|\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8}<x\leqslant\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

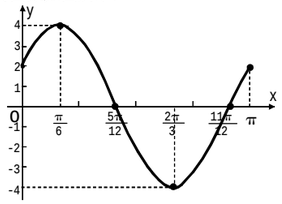
18.**解**:(1)令$2k\pi-\pi\leqslant2x-\frac{\pi}{3}\leqslant2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,解得$k\pi-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$.

故$f(x)$的单调递增区间为$\left[k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{6}\right](k\in\mathbf{Z})$.

(2)列表如下:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{12}$	π
$2x-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$
$f(x)$	2	4	0	-4	0	2

描点并用光滑的曲线连接,得$f(x)$在$[0,\pi]$上的图象如图所示.



(第 18 题图)

19.**解**:(1)最小正周期$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

由$x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{12}\right]$,得$2x+\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6},\pi\right]$.

所以$\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$.

所以当$\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$时,

$f(x)$取得最小值为a;

当$\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=1$时,

$f(x)$取得最大值为$a+3$.

由已知条件,得$a+3+a=3$,解得$a=0$.

(2)由(1)可得$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+1$.

由$f(x)\geqslant2$,得$\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\geqslant\frac{1}{2}$.

所以$2k\pi+\frac{\pi}{6}\leqslant2x+\frac{\pi}{6}\leqslant2k\pi+\frac{5\pi}{6}$,$k\in\mathbf{Z}$,

解得$k\pi\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{3}$,$k\in\mathbf{Z}$.

所以不等式$f(x)\geqslant2$的解集为

$\left\{x\middle|k\pi\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{3},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

20.**解**:(1)因为$f(x)$的图象上两个对称中心间的最短距离为$\frac{\pi}{2}$,所以其周期$T=\pi$.

又$T=\frac{2\pi}{\omega}$,所以$\omega=2$.

因为$f(0)=2\cos2\varphi=-2$,所以$\cos2\varphi=-1$.

又$0<\varphi<\pi$,所以$0<2\varphi<2\pi$,

所以$2\varphi=\pi$,$\varphi=\frac{\pi}{2}$.

所以$f(x)=2\cos(2x+\pi)=-2\cos2x$.

(2)由条件,得$T=2\times\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{\omega}$,

所以$\omega=2$,$f(x)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

令$2k\pi-\pi\leqslant2x+\frac{\pi}{3}\leqslant2k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,

得$f(x)$的单调递增区间为

$\left[k\pi-\frac{2\pi}{3},k\pi-\frac{\pi}{6}\right]$,$k\in\mathbf{Z}$.

(3)若$x\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$,

则$x+\frac{\pi}{2}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$.

由$\omega>0$,$f(x)$在$\left[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$上是减函数,

得$\frac{\pi\omega}{6}\geqslant2k\pi$且$\frac{7\pi\omega}{6}\leqslant2k\pi+\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,解得$12k\leqslant\omega\leqslant\frac{12k+6}{7}$,$k\in\mathbf{Z}$.

从而有$12k\leqslant\frac{12k+6}{7}$,$k\in\mathbf{Z}$,

结合$\omega>0$,解得$k=0$.

故ω的取值范围是$\left(0,\frac{6}{7}\right]$.

21.**解**:(1)因为$y=f(x)$的图象关于直线$x=-\frac{\pi}{6}$对称,所以$f\left(-\frac{\pi}{6}+x\right)=f\left(-\frac{\pi}{6}-x\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{6}-x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=-\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$,故当$x\in\left[-\pi,-\frac{\pi}{6}\right]$时,$f(x)=-\sin x$.

故$f(x)=\begin{cases}-\sin x,x\in\left[-\pi,-\frac{\pi}{6}\right),\\\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right),x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right].\end{cases}$

(2)因为$f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以在区间$\left[-\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$上,有$x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$或$x+\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$,所以$x_1=0$,$x_2=\frac{\pi}{3}$.

又$y=f(x)$的图象关于$x=-\frac{\pi}{6}$对称,

所以$x_3=-\frac{\pi}{3}$,$x_4=-\frac{2\pi}{3}$也是方程的解.

所以$f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$的解为$x=-\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{3},0,\frac{\pi}{3}$.

22.**解**:(1)由$f(x)$图象的一条对称轴为$x=\frac{\pi}{3}$,得$\frac{2\pi}{3}+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,

解得$\varphi=k\pi-\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$.又$0<\varphi<\pi$,

所以$\varphi=\frac{5\pi}{6}$.

(2)$|f(x_0)-m|\leqslant\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}m\geqslant f(x_0)-\frac{1}{2},\\m\leqslant f(x_0)+\frac{1}{2}\end{cases}$在$x_0\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right]$上有解.

由(1)知$f(x)=\sin\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)$.当$x\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right]$时,$2x+\frac{5\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$,

所以$f(x)\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$.

所以$\left[f(x)-\frac{1}{2}\right]_{\min}=-1$,$\left[f(x)+\frac{1}{2}\right]_{\max}=\frac{3}{2}$.

所以m的取值范围为$\left[-1,\frac{3}{2}\right]$.

(3)$g(x)=\left|f\left(\frac{\omega x}{2}-\frac{5\pi}{12}\right)\right|=|\sin\omega x|$.

若$g(x)$在$[0,2]$上恰有 100 次取到最大值,由$g(x)=|\sin\omega x|$的最小正周期$T=\frac{\pi}{\omega}$,

可得$\left(99+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\pi}{\omega}\leqslant2\leqslant\left(100+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\pi}{\omega}$,

解得$\frac{199\pi}{4}\leqslant\omega\leqslant\frac{201\pi}{4}$.

所以ω的取值范围是$\left[\frac{199\pi}{4},\frac{201\pi}{4}\right]$.

第 16 期

第 3~4 版同步周测参考答案

一、选择题

1~6.CCCDBB

7~12.BDBABA

二、填空题

13.$-\frac{3}{5}$,$\frac{1}{3}$　　14.$\frac{1}{3}$　　15.$\frac{\pi}{2}$

16.$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$,或$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

三、解答题

17.(1)**解**:由$\tan45°=\tan(26°+19°)=\frac{\tan26°+\tan19°}{1-\tan26°\tan19°}=1$,

得$\tan26°+\tan19°=1-\tan26°\tan19°$.

故$\tan26°+\tan19°+\tan26°\tan19°=1-\tan26°\tan19°+\tan26°\tan19°=1$.

(2)**证明**:右边$=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha+2\sin^2\alpha}{2\sin^2\alpha}=\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1+\tan\alpha}{\tan\alpha}=$左边,得证.

18.**解**:(1)因为α为锐角,$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{3}{4}$,

且$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$,解得$\sin\alpha=\frac{3}{5}$,$\cos\alpha=\frac{4}{5}$.

所以$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{24}{25}$.

(2)因为α,β为锐角,所以$\alpha+\beta\in(0,\pi)$,

结合$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{\sqrt{10}}{10}$,可得$\sin(\alpha+\beta)=\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

所以$\tan(\alpha+\beta)=-3$.所以$\tan\beta=\tan[(\alpha+\beta)-\alpha]=\frac{\tan(\alpha+\beta)-\tan\alpha}{1+\tan(\alpha+\beta)\tan\alpha}=3$.

19.**解**:(1)$f(x)=\sin\left[\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{2}\right]+\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{12}\right)$,所以$f(x)$的最小正周期为$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

(2)由$f\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1}{2}$,得$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}$,

所以$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)=\pm\frac{\sqrt{14}}{4}$.因为$\alpha\in\left(\frac{\pi}{6},\pi\right)$,

所以$\alpha+\frac{\pi}{12}\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{13\pi}{12}\right)$.

又$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}<\sin\frac{\pi}{4}$,所以$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)=-\frac{\sqrt{14}}{4}$.所以$\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)\cdot\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)=-\frac{\sqrt{7}}{4}$.

20.**解**:(1)$f(x)=2\sin x\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=2\sin x\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x\right)=\sqrt{3}\sin x\cos x+\sin^2x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2x-\frac{1}{2}\cos2x+\frac{1}{2}=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}$.所以最小正周期$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

令$2x-\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,解得$x=\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,所以$f(x)$的对称轴方程为$x=\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$.

(2)令$2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant2x-\frac{\pi}{6}\leqslant2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,得$f(x)$的单调递增区间为$\left[k\pi-\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{\pi}{3}\right](k\in\mathbf{Z})$.

若$f(x)$在$\left[\frac{\pi}{4}-a,\frac{\pi}{4}+a\right]$上是增函数,则

$\begin{cases}\left(\frac{\pi}{4}+a\right)-\left(\frac{\pi}{4}-a\right)\leqslant\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2},\\k\pi-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{4}-a,\\\frac{\pi}{4}+a\leqslant k\pi+\frac{\pi}{3},\end{cases}$

解得$0<a\leqslant\frac{\pi}{12}$.

所以实数a的取值范围为$\left(0,\frac{\pi}{12}\right]$.

21.**解**:(1)$f(x)=\sin^4x-\cos^4x+\sin2x=\sin^2x-\cos^2x+\sin2x=\sin2x-\cos2x=\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$.

当$2x-\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$时,$f(x)$取得最大值$\sqrt{2}$,此时$x$的取值集合是$\left\{x\middle|x=k\pi+\frac{3\pi}{8},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

(2)$g(x)=f(\omega x)=\sqrt{2}\sin\left(2\omega x-\frac{\pi}{4}\right)$.

①令$g(x)=0$,可得$2\omega x-\frac{\pi}{4}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$,

则$x=\frac{k\pi}{2\omega}+\frac{\pi}{8\omega}(k\in\mathbf{Z})$.

当$x\geqslant0$时,$x=\frac{\pi}{8\omega}$,$\frac{5\pi}{8\omega}$,$\frac{9\pi}{8\omega}$,$\frac{13\pi}{8\omega}$,$\frac{17\pi}{8\omega}$,…,$g(x)$在$[0,\pi]$内恰有四个不同的零点等价于$\frac{13\pi}{8\omega}\leqslant\pi$且$\frac{17\pi}{8\omega}>\pi$,解得$\frac{13}{8}\leqslant\omega<\frac{17}{8}$.

所以ω的取值范围为$\left[\frac{13}{8},\frac{17}{8}\right)$.

②$|x_1-x_2|=|x_3-x_4|=\frac{T}{2}$或$T$.若$\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2\omega}=\frac{\pi}{2}$,得$\omega=1\notin\left[\frac{13}{8},\frac{17}{8}\right)$,故舍去;若$T=\frac{\pi}{\omega}=\frac{\pi}{2}$,得$\omega=2\in\left[\frac{13}{8},\frac{17}{8}\right)$,结合①可知$g(x)$在$[0,\pi]$内的四个零点分别是$\frac{\pi}{16}$,$\frac{5\pi}{16}$,$\frac{9\pi}{16}$,$\frac{13\pi}{16}$.

综上可知,$\omega=2$,四个零点分别是$\frac{\pi}{16}$,$\frac{5\pi}{16}$,$\frac{9\pi}{16}$,$\frac{13\pi}{16}$.

22.**解**:(1)因为MN与扇形弧$\overset{\frown}{PQ}$相切于点T,所以$OT\perp MN$,$OT=3$.所以$MT=3\tan\alpha$.

在$\text{Rt}\triangle OTN$中,$\angle NOT=\frac{2\pi}{3}-\alpha$,

所以$NT=3\tan\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)$.

所以$MN=MT+NT=3\tan\alpha+3\tan\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)$,

$\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

(2)$MN=3\tan\alpha+3\tan\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)$

$=3\left[\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)}\right]$

$=3\cdot\frac{\sin\alpha\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)+\cos\alpha\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)}{\cos\alpha\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)}$

$=\frac{3\sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)}{\cos\alpha\left(-\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)}$

$=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha}$

$=\frac{3\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2\alpha-\frac{1}{2}\cos2\alpha-\frac{1}{2}}$

$=\frac{3\sqrt{3}}{\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}}$.

由$\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{2}$,得$\frac{\pi}{6}<2\alpha-\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$.

故当$2\alpha-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$时,$MN$取得最小值$6\sqrt{3}$.

所以建造这样的一条公路MN,至少要投入$2000\times6\sqrt{3}=12000\sqrt{3}$(万元).

第 17 期

第 3~4 版同步周测参考答案

一、选择题

1~6.CBDAAA

7~12.AABBDA

二、填空题

13.8　　14.①③　　15.$\frac{49\pi}{12}$　　16.8

三、解答题

17.**解**:(1)由题意知,$f(x)=\cos2\times2\left(x-\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)$.

(2)$f(\pi)=\cos\left(4\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$,$f(1)=\cos\left(4-\frac{\pi}{3}\right)<0$,所以$f(1)<f(\pi)$.

18.**解**:(1)该函数的振幅为 3,初相为$\frac{\pi}{6}$,最小正周期为$\frac{2\pi}{2}=\pi$.

(2)先把正弦曲线向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度,得到$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$的图象;再把后者所得点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$倍(纵坐标不变),得到$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$的图象;再把所得图象上所有点的纵坐标伸长到原来的 3 倍(横坐标不变),得到函数$y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$的图象.

19.**解**:(1)由$T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$,得$\omega=2$.

由最小值是-3,得$A=3$.

由$f(0)=\frac{3}{2}$,得$\sin\varphi=\frac{1}{2}$.

又$0<\varphi<\frac{\pi}{2}$,所以$\varphi=\frac{\pi}{6}$.

故解析式为$f(x)=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

(2)把$f(x)$的图象上所有点向右平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度,得到$y=3\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{12}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=3\sin2x$的图象;再把所得图象上所有点的横坐标缩短为原来的$\frac{1}{2}$倍,纵坐标缩短为原来的$\frac{1}{3}$倍,即可得到$y=\sin4x$的图象.

20.**解**:(1)由图象可知,周期$T=4\times\left[\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=\frac{2\pi}{\omega}$,解得$\omega=\frac{1}{2}$.

因为$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=4\sin\left(\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}+\varphi\right)=0$,所以$\frac{\pi}{4}+\varphi=k\pi(k\in\mathbf{Z})\Rightarrow\varphi=k\pi-\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$,结合$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,得$\varphi=-\frac{\pi}{4}$.