第 8 期

第 3~4 版章节测试参考答案

一、选择题

1~6.CBADAD

7~12.DABDBD

二、填空题

13.1

14.$\left(\frac{3}{2},\frac{9}{4}\right)$

15.2

提示:设底面边长为 a,

则高 $h=\sqrt{12-\frac{a^2}{2}}$,

所以体积 $V=\frac{1}{3}a^2h=\frac{1}{3}\sqrt{12a^4-\frac{a^6}{2}}$.

设 $y=12a^4-\frac{1}{2}a^6$,则 $y'=48a^3-3a^5$.

令 $y'=0(a>0)$,解得 $a=4$.

此时,体积最大,则高 $h=2$.

16.$[2,+\infty)$

提示:$g'(x)=kx-1$.由题设,可得 $kx-1=x^2\ln x+x$ 有解,即 $k=x\ln x+1+\frac{1}{x}$ 有解.令 $h(x)=x\ln x+1+\frac{1}{x}$,则定义域为$(0,+\infty)$,$h'(x)=1+\ln x-\frac{1}{x^2}$,$[h'(x)]'=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}>0$,所以 $h'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,又 $h'(1)=0$,所以当 $x>1$ 时,$h'(x)>0$;当 $0<x<1$ 时,$h'(x)<0$,所以 $h(x)$在$(0,1)$上单调递减,在$(1,+\infty)$上单调递增,所以$[h(x)]_{\min}=h(1)=2$.所以实数 k 的取值范围是$[2,+\infty)$.

三、解答题

17.**解:**$\Delta y=\frac{1}{(1+\Delta x)^2}-1=\frac{-(\Delta x)^2-2\Delta x}{(1+\Delta x)^2}$.

故$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{-\Delta x-2}{(1+\Delta x)^2}=-2$.

所以该曲线在点 P 处的切线的斜率为-2.

18.**解:**$f'(x)=x^2-(a+1)x+b$.由 $f'(0)=0$,得 $b=0$,所以 $f'(x)=x(x-a-1)$.

(1)若存在 $x<0$,使得 $f'(x)=-9$,

则有 $-a-1=-x-\frac{9}{x}=(-x)+\left(-\frac{9}{x}\right)\geqslant 2\sqrt{(-x)\cdot\left(-\frac{9}{x}\right)}=6$,当且仅当 $x=-3$ 时,等号成立,所以 $a\leqslant-7$.

所以 a 的最大值为-7.

(2)令 $f'(x)=0$,解得 $x=0$,或 $x=a+1$.当 $a>0$ 时,$f'(x)$,$f(x)$的变化情况如下表:

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,a+1)$	$a+1$	$(a+1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

故 $f(x)$的极大值为 $f(0)=a$,极小值为 $f(a+1)=a-\frac{1}{6}(a+1)^3$.

19.**解:**(1)由点 $P(1,0)$在曲线 $y=g(x)$上,得 $g(1)=0$,所以 $b=1$.

$f'(x)=a(\ln x+1)$,$g'(x)=2x$.由两曲线在点 P 处有相同的切线,可得 $f'(1)=g'(1)$,即 $a=2$.

(2)由(1)可得 $f(x)=2x\ln x$,$g(x)=x^2-1$,则 $f(x)-g(x)=2x\ln x-x^2+1=x\left(2\ln x-x+\frac{1}{x}\right)$,其中 $x>0$.

令 $h(x)=2\ln x-x+\frac{1}{x}(x>0)$,则 $h'(x)=\frac{2}{x}-1-\frac{1}{x^2}=-\left(\frac{1}{x}-1\right)^2\leqslant 0$,所以 $h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减.

又 $h(1)=0$,所以当 $0<x<1$ 时,$h(x)>0$;当 $x=1$ 时,$h(x)=0$;当 $x>1$ 时,$h(x)<0$.

所以,当 $0<x<1$ 时,$f(x)>g(x)$;当 $x=1$ 时,$f(x)=g(x)$;当 $x>1$ 时,$f(x)<g(x)$.

20.**解:**$f'(x)=x^2-a$.

(1)若 $x=1$ 时 $f(x)$取得极值,则 $f'(1)=1-a=0$,解得 $a=1$.经验证可知,$a=1$.

(2)当 $a\leqslant 0$ 时,$f'(x)\geqslant 0$ 在$[0,1]$上恒成立,故 $f(x)$单调递增,所以$[f(x)]_{\min}=f(0)=1$.

当 $0<a<1$ 时,令 $f'(x)=0$,解得 $x=\pm\sqrt{a}$.当 $0<x<\sqrt{a}$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减;当$\sqrt{a}<x<1$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增.所以 $f(x)$在 $x=\sqrt{a}$ 取得极小值,也是最小值,即$[f(x)]_{\min}=f(\sqrt{a})=1-\frac{2a\sqrt{a}}{3}$.

综上所述,当 $a\leqslant 0$ 时,$f(x)$的最小值为 1;当 $0<a<1$ 时,$f(x)$的最小值为 $1-\frac{2a\sqrt{a}}{3}$.

(3)若对任意 $m\in\mathbf{R}$,直线 $y=-x+m$ 都不是曲线 $y=f(x)$的切线,则 $f'(x)=x^2-a\neq-1$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立,即 $x^2+1\neq a$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立.

因为 $x^2+1\geqslant 1$,所以 $a<1$.所以实数 a 的取值范围为$(-\infty,1)$.

21.**解:**(1)设 AA_1,BB_1,CD_1,EF_1 都与 MN 垂直,A_1,B_1,D_1,F_1 是相应垂足.

由条件知,当 $O'B=40$ 时,$BB_1=-\frac{1}{800}\times 40^3+6\times 40=160$,则 $AA_1=160$.

由 $\frac{1}{40}O'A^2=160$,得 $O'A=80$.

所以 $AB=O'A+O'B=80+40=120$(米).

(2)以 O 为原点,ON,OO'所在直线分别为 x 轴、y 轴建立平面直角坐标系,

设 $F(x,y_2)$,$x\in(0,40)$,则 $y_2=-\frac{1}{800}x^3+6x$,$EF=160-y_2=160+\frac{1}{800}x^3-6x$.

因为 $CE=80$,所以 $O'C=80-x$.

设 $D(x-80,y_1)$,则 $y_1=\frac{1}{40}(80-x)^2$,

所以 $CD=160-y_1=160-\frac{1}{40}(80-x)^2=-\frac{1}{40}x^2+4x$.

记桥墩 CD 和 EF 的总造价为 $f(x)$,则 $f(x)=k\left(160+\frac{1}{800}x^3-6x\right)+\frac{3}{2}k\left(-\frac{1}{40}x^2+4x\right)=k\left(\frac{1}{800}x^3-\frac{3}{80}x^2+160\right)(0<x<40)$,$f'(x)=k\left(\frac{3}{800}x^2-\frac{3}{40}x\right)=\frac{3k}{800}x(x-20)$.

令 $f'(x)=0$,得 $x=20$.当 $0<x<20$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减;当 $20<x<40$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增,所以当 $x=20$ 时,$f(x)$取得最小值.

答:(1)桥 AB 的长度为 120 米;(2)当 $O'E$ 为 20 米时,桥墩 CD 与 EF 的总造价最低.

22.**解:**(1)当 $a=1$ 时,$f(x)=e^x-x-2$,则 $f'(x)=e^x-1$.

当 $x<0$ 时,$f'(x)<0$;当 $x>0$ 时,$f'(x)>0$.所以 $f(x)$在$(-\infty,0)$单调递减,在$(0,+\infty)$单调递增.

(2)$f'(x)=e^x-a$.

当 $a\leqslant 0$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$单调递增,故 $f(x)$至多存在 1 个零点,不合题意.

当 $a>0$ 时,由 $f'(x)=0$,可得 $x=\ln a$.当 $x\in(-\infty,\ln a)$时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减;当 $x\in(\ln a,+\infty)$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增.故当 $x=\ln a$ 时,$f(x)$取得最小值,为 $f(\ln a)=-a(1+\ln a)$.

若 $0<a\leqslant\frac{1}{e}$,则 $f(\ln a)\geqslant 0$,$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$至多存在 1 个零点,不合题意.

若 $a>\frac{1}{e}$,则 $f(\ln a)<0$.由于 $f(-2)=e^{-2}>0$,所以 $f(x)$在$(-\infty,\ln a)$存在唯一零点.

由(1)知,当 $x>2$ 时,$e^x-x-2>0$,所以当 $x>4$ 且 $x>2\ln(2a)$时,

$f(x)=e^{\frac{x}{2}}\cdot e^{\frac{x}{2}}-a(x+2)>e^{\ln(2a)}\cdot\left(\frac{x}{2}+2\right)-a(x+2)=2a>0$.

故 $f(x)$在$(\ln a,+\infty)$存在唯一零点.从而 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$有两个零点.

综上,a 的取值范围是$\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$.

第 5 期

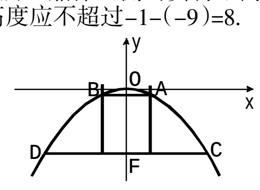
第 3~4 版同步周测参考答案

一、选择题

1~6.DDACCC　　7~10.BACB

11.D

提示:建立如图所示平面直角坐标系,设抛物线的方程为 $x^2=-2py(p>0)$,直线 CD 过焦点 $F\left(0,-\frac{p}{2}\right)$,则 $C\left(18,-\frac{p}{2}\right)$,代入抛物线的方程,解得 $p=18$,所以抛物线的方程为 $x^2=-36y$.设 AB 为船宽,则可设 $A(6,m)$,代入抛物线方程得 $m=-1$,所以船体两侧的货物距离水面的最大高度应不超过$-1-(-9)=8$.



(第 11 题图)

12.A

提示:由抛物线定义可知,$AC=AF$,$BD=BF$,则$\angle AFC=\angle ACF=\angle CFO$,$\angle BFD=\angle BDF=\angle DFO$,则$\angle AFC+\angle BFD=\angle CFO+\angle DFO=\angle CFD=\frac{\pi}{2}$,所以 $CF\perp DF$,故①正确;设直线 AB 的方程为 $y=k\left(x-\frac{p}{2}\right)$,与 $y^2=2px$ 联立,得$k^2x^2-(k^2p+2p)x+\frac{k^2p^2}{4}=0$.设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $x_1x_2=\frac{p^2}{4}$.又$\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FB}$,所以 $x_1+\frac{p}{2}=3\left(x_2+\frac{p}{2}\right)$,即 $x_1=3x_2+p$,与上式联立,解得 $x_1=-\frac{p}{2}$(舍去)或 $x_1=\frac{3}{2}p$,则 $y_1=\sqrt{3}p$,即 $A\left(\frac{3}{2}p,\sqrt{3}p\right)$,则 $k_{FA}=\sqrt{3}$,可得直线 AB 的倾斜角为$\frac{\pi}{3}$,由对称性,若 A 在 x 轴下方,则直线 AB 的倾斜角为$\frac{2\pi}{3}$,故②错误.结合选项可知选 A.

二、填空题

13.2

14.$2\sqrt{3}$

15.$\frac{16}{3}$

提示:由题设得焦点 $F(1,0)$,直线 AB 的方程为 $y=\sqrt{3}(x-1)$,代入抛物线方程并化简,得 $3x^2-10x+3=0$.设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $x_1+x_2=\frac{10}{3}$,所以$|AB|=x_1+x_2+p=\frac{10}{3}+2=\frac{16}{3}$.

16.2

提示:直线 l_2 恰为抛物线 $y=x^2$ 的准线,根据抛物线的定义,动点 P 到 l_1 和 l_2 的距离之和的最小值为焦点$\left(0,\frac{1}{4}\right)$到 l_1 的距离,即 $d=\frac{|0-1-9|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=2$.

三、解答题

17.**解:**(1)由抛物线 $y=mx^2$ 的焦点是$(0,1)$,得$\frac{1}{4m}=1$,解得 $m=\frac{1}{4}$.所以抛物线的方程为 $x^2=4y$.

(2)设 $P(x,y)$,则 $x^2=4y$,所以$|PA|^2=x^2+(y-a)^2=4y+y^2-2ay+a^2=[y-(a-2)]^2+4a-4\geqslant 4a-4$.

由题设,得 $4a-4=(2\sqrt{3})^2$,解得 $a=4$.

18.**解:**(1)由抛物线的定义,知点 P 的轨迹 E 是焦点为 $F(1,0)$的抛物线,其方程为 $y^2=4x$.

(2) 直线 l 的方程为 $y=x-1$,代入 $y^2=4x$ 中并消去 x,得 $y^2-4y-4=0$.

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $y_1+y_2=4$,$y_1y_2=-4$.所以$|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{4^2-4\times(-4)}=4\sqrt{2}$.

所以$\triangle AOB$ 的面积 $S=\frac{1}{2}|OF|\cdot|y_1-y_2|=\frac{1}{2}\times 1\times 4\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.

19.**解:**(1)由题意可设抛物线 C 的方程为 $y^2=2px(p>0)$,则其准线方程为 $x=-\frac{p}{2}$.

因为点 $P(4,m)$到焦点的距离为 6,所以结合抛物线的定义,得 $4+\frac{p}{2}=6$,解得 $p=4$.

所以抛物线 C 的方程为 $y^2=8x$.

(2)由$\begin{cases}y^2=8x,\\y=kx-2,\end{cases}$消去 y,

得 $k^2x^2-(4k+8)x+4=0$.

因为 C 与直线 $y=kx-2$ 相交于不同的两点,

所以 $k\neq 0$,且 $\Delta=(4k+8)^2-4k^2\cdot 4>0$,

解得 $k>-1$ 且 $k\neq 0$.

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $x_1+x_2=\frac{4k+8}{k^2}$.

所以$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{2k+4}{k^2}=2$,解得 $k=2$,或 $k=-1$(舍去).所以 k 的值为 2.

20.**解:**(1)由$\triangle ABC$ 为直角三角形可得 BC 为圆的直径,故 B,C,F 三点共线.

由对称性可得 B,C 关于 x 轴对称,

又 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$,将 $x=\frac{p}{2}$ 代入抛物线的方程,可得$|BF|=p$,所以圆的半径 $R=p$.

(2)直线 AB 与抛物线 E 相切.

证明如下:

由对称性不妨设 B 在 x 轴上方,由(1)知 $A\left(-\frac{p}{2},0\right)$,$B\left(\frac{p}{2},p\right)$,则直线$AB$ 的方程为 $y=x+\frac{p}{2}$.

与 $y^2=2px$ 联立,整理得 $x^2-px+\frac{p^2}{4}=0$,所以 $\Delta=p^2-p^2=0$.所以直线 AB 与抛物线相切.

21.(1)**解:**联立$x^2=-y$与$y=kx-3$,

得$x^2+kx-3=0$.

因为$\Delta_1=k^2+12>0$,

所以l与抛物线$x^2=-y$恒有2个交点.

若$m\geqslant 3$,则l与抛物线$x^2=4y$至少有1个交点.

联立$x^2=4y$与$y=kx-3$,得$x^2-4kx+12=0$.

所以$\Delta_2=16k^2-48\geqslant 0$.结合$k>0$,得$k\geqslant\sqrt{3}$.所以$k$的最小值为$\sqrt{3}$.

(2)**证明:**若$m=3$,则l与抛物线$x^2=4y$只有1个交点.

结合(1),可知$k=\sqrt{3}$,$A(2\sqrt{3},3)$.

由于$F(0,1)$为抛物线$x^2=4y$的焦点,

则$|\overrightarrow{FA}|=3+1=4$.

设$B(x_1,y_1)$,$C(x_2,y_2)$,

则$x_1+x_2=-k=-\sqrt{3}$,$x_1x_2=-3$.

所以 $y_1+y_2=k(x_1+x_2)-6=-9$,$y_1y_2=(kx_1-3)(kx_2-3)=k^2x_1x_2-3k(x_1+x_2)+9=9$.

所以$\overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{FC}=x_1x_2+(y_1-1)(y_2-1)=x_1x_2+y_1y_2-(y_1+y_2)+1=16$.

所以$\overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{FC}=|\overrightarrow{FA}|^2$.

22.**解:**(1)由抛物线的性质,可得$\frac{p}{2}=1$,所以 $p=2$,所以抛物线的准线方程为 $x=-1$.

(2)设 $A(x_A,y_A)$,$B(x_B,y_B)$,$C(x_C,y_C)$,重心 $G(x_G,y_G)$.由(1)知抛物线方程为 $y^2=4x$.令 $y_A=2t$,$t\neq 0$,则 $x_A=t^2$,由于直线 AB 过 F,故直线 AB 的方程为 $x=\frac{t^2-1}{2t}\cdot y+1$,代入 $y^2=4x$,得 $y^2-\frac{2(t^2-1)}{t}y-4=0$,所以 $y_A\cdot y_B=2ty_B=-4$,即 $y_B=-\frac{2}{t}$,所以 $B\left(\frac{1}{t^2},-\frac{2}{t}\right)$.

又 $x_G=\frac{1}{3}(x_A+x_B+x_C)$,$y_G=\frac{1}{3}(y_A+y_B+y_C)$,因为重心 G 在 x 轴上,所以 $2t-\frac{2}{t}+y_C=0$,

所以 $C\left(\left(\frac{1}{t}-t\right)^2,2\left(\frac{1}{t}-t\right)\right)$,$G\left(\frac{2t^4-2t^2+2}{3t^2},0\right)$,所以直线 AC 的方程为 $y-2t=2t(x-t^2)$,得 $Q(t^2-1,0)$,因为 Q 在焦点 F 的右侧,所以 $t^2>2$,

所以$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{1}{2}|FG|\cdot|y_A|}{\frac{1}{2}|QG|\cdot|y_C|}=\frac{\left|\frac{2t^4-5t^2+2}{3t^2}\right|\cdot|2t|}{\left|t^2-1-\frac{2t^4-2t^2+2}{3t^2}\right|\cdot\left|\frac{2}{t}-2t\right|}=\frac{2t^4-t^2}{t^4-1}=2-\frac{t^2-2}{t^4-1}$.

令 $m=t^2-2$,则 $m>0$,$\frac{S_1}{S_2}=2-\frac{m}{m^2+4m+3}=2-\frac{1}{m+\frac{3}{m}+4}\geqslant 2-\frac{1}{2\sqrt{m\cdot\frac{3}{m}}+4}=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以当且仅当 $m=\sqrt{3}$ 时,$\frac{S_1}{S_2}$取得最小值,最小值为 $1+\frac{\sqrt{3}}{2}$,此时 $G(2,0)$.

②

第 6 期

第 2~3 版章节测试参考答案

一、选择题

1~6.DAACDD　　7~12.ADBBBB

二、填空题

13.8　　14.8

15.$\pm\frac{\sqrt{3}}{4}$　　16.$\left(\frac{\sqrt{15}}{2},4\right]$

三、解答题

17.**解**:设点$N(x,y)$.因为N是EF的中点,$F(2,0)$,所以$E(2x-2,2y)$.又E是OM的中点,$O(0,0)$,所以$M(4x-4,4y)$.将其代入抛物线方程中,得$(4y)^2=8(4x-4)$,即$y^2=2x-2$,此即为点N的轨迹方程.

18.**解**:(1)由题设,得$F_1(-1,0)$,$F_2(1,0)$,$|PF_1|+|PF_2|=4>|F_1F_2|$,则点P的轨迹是椭圆,其中$a=2$,$c=1$,则$b=\sqrt{3}$,所以动点P的轨迹方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)设$|PF_1|=m$,$|PF_2|=n$,

则$m+n=2a=4$.

在$\triangle PF_1F_2$中,由余弦定理,得$4=m^2+n^2-2mn\cos60°=(m+n)^2-3mn=16-3mn$,

解得$mn=4$,

即$|PF_1|\cdot|PF_2|=4$.

19.(1)**证明**:由已知可得$F(2,0)$,且直线AB的斜率不为0,设直线AB的方程为$x=my+2$,与抛物线的方程$y^2=8x$联立,消去x并整理,可得$y^2-8my-16=0$,则$y_1y_2=-16$.所以y_1y_2为定值-16.

(2)**解**:不妨设点A在x轴上方.

由$|AF|=10$,准线方程为$x=-2$,

可得$x_1+2=10$,

所以$x_1=8$,

代入抛物线方程可得$y_1=8$.

结合(1)得$y_2=-2$.

所以$\frac{S_{\triangle AOF}}{S_{\triangle BOF}}=\frac{\frac{1}{2}|OF|\cdot|y_1|}{\frac{1}{2}|OF|\cdot|y_2|}=4$,

即$\triangle AOF$的面积与$\triangle BOF$的面积的比值为4.

20.**解**:(1)由题意,

得$\begin{cases}a-c=2,\\a+c=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=4,\\c=2,\end{cases}$所以$b^2=a^2-c^2=12$.

所以椭圆C的标准方程为$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$.

(2)若弹珠和小球不会发生碰撞,则需小球的中心(2,0)到变轨直线的距离大于小球的半径.

设$P(x,y)(x,y>0)$,

由$\begin{cases}\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1,\\x^2+y^2=13,\end{cases}$解得$P(2,3)$.

设变轨直线的方程为$y-3=k(x-2)$,

即$kx-y+(3-2k)=0$,

则有$\frac{|2k+(3-2k)|}{\sqrt{k^2+1}}>1$,

解得$k\in(-2\sqrt{2},2\sqrt{2})$.

21.(1)**解**:由题设可得$\begin{cases}2c=8\sqrt{2},\\a=3b,\\a^2-b^2=c^2,\end{cases}$

解得$c=4\sqrt{2}$,$a=6$,$b=2$.

所以椭圆C的方程为$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{4}=1$.

(2)**解**:设直线l的方程为$y=\frac{1}{3}x+m$,

代入椭圆方程可得$2x^2+6mx+9m^2-36=0$.

设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,

则$x_1+x_2=-3m$,$x_1x_2=\frac{9m^2-36}{2}$.

所以$|AB|$

$=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=\sqrt{1+\left(\frac{1}{3}\right)^2}\cdot\sqrt{9m^2-2(9m^2-36)}$

$=2\sqrt{10}$,

解得$m=2$,或$m=-2$.

由题意可知$m<0$,故直线l的方程为$y=\frac{1}{3}x-2$,即$x-3y-6=0$.

所以$P(3\sqrt{2},\sqrt{2})$到直线AB的距离$d=\frac{|3\sqrt{2}-3\sqrt{2}-6|}{\sqrt{1+3^2}}=\frac{6}{\sqrt{10}}$.

所以$\triangle PAB$的面积$S=\frac{1}{2}\times2\sqrt{10}\times\frac{6}{\sqrt{10}}=6$.

(3)**证明**:结合(2)可知

$k_{PA}+k_{PB}=\frac{y_1-\sqrt{2}}{x_1-3\sqrt{2}}+\frac{y_2-\sqrt{2}}{x_2-3\sqrt{2}}$

$=\frac{(y_1-\sqrt{2})(x_2-3\sqrt{2})+(y_2-\sqrt{2})(x_1-3\sqrt{2})}{(x_1-3\sqrt{2})(x_2-3\sqrt{2})}$.

因为$(y_1-\sqrt{2})(x_2-3\sqrt{2})+(y_2-\sqrt{2})(x_1-3\sqrt{2})=\left(\frac{1}{3}x_1+m-\sqrt{2}\right)(x_2-3\sqrt{2})+\left(\frac{1}{3}x_2+m-\sqrt{2}\right)(x_1-3\sqrt{2})=\frac{2}{3}x_1x_2+(m-2\sqrt{2})(x_1+x_2)-6\sqrt{2}m+12=\frac{2}{3}\cdot\frac{9m^2-36}{2}-(m-2\sqrt{2})\cdot3m-6\sqrt{2}m+12=0$,所以$k_{PA}+k_{PB}=0$.

所以$\angle APB$的角平分线平行于y轴.

22.(1)**解**:将$A(-1,\sqrt{2})$,$B(0,2)$代入圆锥曲线的方程得$\begin{cases}\frac{1}{m}+\frac{2}{n}=1,\\\frac{4}{n}=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}m=2,\\n=4.\end{cases}$所以圆锥曲线的标准方程为$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1$.

(2)**证明**:由(1)可知,$D(\sqrt{2},0)$,$E(0,2)$.

设$P(x_0,y_0)$,则$\frac{x_0^2}{2}+\frac{y_0^2}{4}=1$,

即$y_0^2+2x_0^2=4$.

又直线PD:$y=\frac{y_0}{x_0-\sqrt{2}}(x-\sqrt{2})$,

令$x=0$,得$y_M=-\frac{\sqrt{2}y_0}{x_0-\sqrt{2}}$,

所以$|EM|=\left|2+\frac{\sqrt{2}y_0}{x_0-\sqrt{2}}\right|$;

直线PE:$y=\frac{y_0-2}{x_0}\cdot x+2$,

令$y=0$,得$x_N=\frac{-2x_0}{y_0-2}$,

所以$|DN|=\left|\sqrt{2}+\frac{2x_0}{y_0-2}\right|$.

所以$|DN|\cdot|EM|$

$=\left|\sqrt{2}+\frac{2x_0}{y_0-2}\right|\cdot\left|2+\frac{\sqrt{2}y_0}{x_0-\sqrt{2}}\right|$

$=\left|\frac{2(y_0^2+2x_0^2-4y_0-4\sqrt{2}x_0+2\sqrt{2}x_0y_0+4)}{x_0y_0-2x_0-\sqrt{2}y_0+2\sqrt{2}}\right|$

$=\left|\frac{2(4-4y_0-4\sqrt{2}x_0+2\sqrt{2}x_0y_0+4)}{x_0y_0-2x_0-\sqrt{2}y_0+2\sqrt{2}}\right|$

$=\left|\frac{2(-4y_0-4\sqrt{2}x_0+2\sqrt{2}x_0y_0+8)}{x_0y_0-2x_0-\sqrt{2}y_0+2\sqrt{2}}\right|$

$=4\sqrt{2}$.

故$|DN|\cdot|EM|$为定值$4\sqrt{2}$.

第 7 期

第 3~4 版同步周测参考答案

一、选择题

1~5.DACDB

6~10.CDDDB

11.A

提示:由$f'(x)+f(x)=2xe^{-x}$,得$e^xf'(x)+e^xf(x)=2x$.令$g(x)=e^xf(x)$,则$g'(x)=e^xf(x)+e^xf'(x)=2x$,所以$g(x)=x^2+C$(其中$C$为常数),所以$f(x)=\frac{x^2+C}{e^x}$.由$f(0)=1$,得$C=1$,所以$f(x)=\frac{x^2+1}{e^x}$,$f'(x)=\frac{2x-x^2-1}{e^x}$.所以$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{2x-x^2-1}{x^2+1}=\frac{2x}{x^2+1}-1$.当$x=0$时,$\frac{f'(x)}{f(x)}=-1$;当$x\neq0$时,$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{2}{x+\frac{1}{x}}-1$,由$x+\frac{1}{x}\in(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$,得$\frac{f'(x)}{f(x)}\in[-2,0]$.

12.B

提示:当MN垂直于曲线在点N处的切线时,$|MN|$取得最小值,此时设$N(m,e^m)$,由$y'=e^x$,可得$e^m\cdot\frac{e^m}{m-1}=-1$,则$e^{2m}+m=1$.易知$f(x)=e^{2x}+x$单调递增,且$f(0)=1$,所以$m=0$,$N(0,1)$.所以$|MN|$的最小值为$\sqrt{2}$.

二、填空题

13.$a<c<b$

14.2

提示:由已知,得$f(-x)=\frac{2e^x}{e^x+1}-\sin x$,$f'(x)=-\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}+\cos x$,可得$f'(x)-f'(-x)=0$,$f(x)+f(-x)=2$.所以$f(2020)+f(-2020)+f'(2020)-f'(-2020)=2$.

15.$y=2x$

16.$\left(\frac{1}{2},1\right)$

提示:由题设知,在$[0,a]$上存在$x_1,x_2(0<x_1<x_2<a)$,满足$f'(x_1)=f'(x_2)=\frac{f(a)-f(0)}{a}=a^2-a$,又$f'(x)=3x^2-2x$,故等价于关于$x$的方程$3x^2-2x=a^2-a$在$(0,a)$上有两个不相等的实数根.

令$g(x)=3x^2-2x-a^2+a(0<x<a)$,则

$\begin{cases}\Delta=4-12(-a^2+a)>0,\\g(0)=-a^2+a>0,\\g(a)=2a^2-a>0,\end{cases}$

解得$\frac{1}{2}<a<1$.

三、解答题

17.**解**:(1)$y'=(3^xe^x)'-(2^x)'+(e)'$

$=(3^x)'e^x+3^x(e^x)'-(2^x)'$

$=3^x\ln3\cdot e^x+3^xe^x-2^x\ln2$

$=(\ln3+1)\cdot(3e)^x-2^x\ln2$.

(2)y'

$=\frac{(x+\cos x)'(x+\sin x)-(x+\cos x)(x+\sin x)'}{(x+\sin x)^2}$

$=\frac{(1-\sin x)(x+\sin x)-(x+\cos x)(1+\cos x)}{(x+\sin x)^2}$

$=\frac{-x\cos x-x\sin x+\sin x-\cos x-1}{(x+\sin x)^2}$.

18.**解**:(1)该物体在第1s内的平均速度$\bar{v}=\frac{s(1)-s(0)}{1-0}=\frac{9}{2}$(m/s).

(2)$s'(t)=\frac{3}{2}t^2+2t+3$,则$s'(2)=\frac{3}{2}\times2^2+2\times2+3=13$,表示该物体在第2s末的瞬时速度为13m/s.

(3)令$s'(t)=\frac{3}{2}t^2+2t+3=19$,解得$t=-4$(舍去),或$t=\frac{8}{3}$,故经过$\frac{8}{3}$s该物体的运动速度达到19m/s.

19.**解**:$y'=2x-1$.

(1)直线$x+y-3=0$的斜率为-1,故令$2x-1=1$,可得$x=1$,

从而可知垂直于直线$x+y-3=0$的切线过点$(1,0)$,则切线方程为$y=x-1$.

(2)设切点为$P(m,m^2-m)$,可得切线方程为$y-(m^2-m)=(2m-1)(x-m)$.

又点$(1,-4)$在切线上,可得$-4-(m^2-m)=(2m-1)(1-m)$,解得$m=-1$,或$m=3$.

所以切线方程为$y=-3x-1$,或$y=5x-9$.

20.**解**:(1)函数是一条直线,其斜率是一个大于零的常数,故导函数的大致图象如图1.

(2)$f'(x)>0$,并且随着x的增大,$f'(x)$的值逐渐减小,故导函数的大致图象如图2.

(3)当$x<0$时,$f'(x)>0$;当$x>0$时,$f'(x)<0$,并且随着x的增大,$f'(x)$的值逐渐减小,故导函数的大致图象如图3.

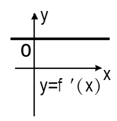


图1

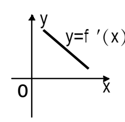


图2

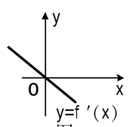


图3

21.(1)**解**:$f'(x)=x^2-4x+3=(x-2)^2-1\geqslant-1$,故切线斜率的取值范围为$[-1,+\infty)$.

(2)**解**:结合(1)可知,

$f'(x)\geqslant-1$且$-\frac{1}{f'(x)}\geqslant-1$,

即$-1\leqslant f'(x)<0$或$f'(x)\geqslant1$,

解得$x\leqslant2-\sqrt{2}$,或$1<x<3$,或$x\geqslant2+\sqrt{2}$.

故切点横坐标的取值范围为$(-\infty,2-\sqrt{2}]\cup(1,3)\cup[2+\sqrt{2},+\infty)$.

(3)**证明**:假设存在切线l与曲线C同时切于不同的两点$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$x_1\neq x_2$,

则在点A处的切线方程是

$y-\left(\frac{1}{3}x_1^3-2x_1^2+3x_1\right)=(x_1^2-4x_1+3)(x-x_1)$,

即$y=(x_1^2-4x_1+3)x+\left(-\frac{2}{3}x_1^3+2x_1^2\right)$;

同理,在点B处的切线方程是

$y=(x_2^2-4x_2+3)x+\left(-\frac{2}{3}x_2^3+2x_2^2\right)$.

由于两切线是同一直线,

则有$x_1^2-4x_1+3=x_2^2-4x_2+3$

且$-\frac{2}{3}x_1^3+2x_1^2=-\frac{2}{3}x_2^3+2x_2^2$,

化简得$x_1+x_2=4$

且$(x_1+x_2)^2-3(x_1+x_2)-x_1x_2=0$.

解得$x_1=2$,$x_2=2$.

这与$x_1\neq x_2$矛盾,所以不存在与曲线C同时切于两个不同点的直线.

22.**解**:(1)由题意知,C在点M处的切线的斜率$k=2$.

因为$y'=2x+4$,所以$2x_0+4=2$,

解得$x_0=-1$.

所以$y_0=\frac{1}{2}$.所以$M\left(-1,\frac{1}{2}\right)$.

(2)设$M(x_0,y_0)$为C上一点.

①若$x_0=-2$,则C上点$M\left(-2,-\frac{1}{2}\right)$处的切线斜率$k=0$,过点$M$的法线方程为$x=-2$,此法线过点$P(-2,a)$.

②若$x_0\neq-2$,则过点$M(x_0,y_0)$的法线方程为$y-y_0=-\frac{1}{2x_0+4}(x-x_0)$.　　①

若法线过点$P(-2,a)$,则$a-y_0=-\frac{1}{2x_0+4}(-2-x_0)$,即$(x_0+2)^2=a$.　　②

若$a>0$,则$x_0=-2\pm\sqrt{a}$,从而$y_0=\frac{2a-1}{2}$,代入①中,化简,得$x+2\sqrt{a}y+2-2a\sqrt{a}=0$或$x-2\sqrt{a}y+2+2a\sqrt{a}=0$;

若$a=0$,与$x_0\neq-2$矛盾,舍去;

若$a<0$,则②式无解,舍去.

综上,当$a>0$时,在C上存在三个点$\left(-2+\sqrt{a},\frac{2a-1}{2}\right)$,$\left(-2-\sqrt{a},\frac{2a-1}{2}\right)$及$\left(-2,-\frac{1}{2}\right)$满足要求,其方程分别为$x+2\sqrt{a}y+2-2a\sqrt{a}=0$,$x-2\sqrt{a}y+2+2a\sqrt{a}=0$,$x=-2$;当$a\leqslant0$时,在$C$上存在一个点$\left(-2,-\frac{1}{2}\right)$满足要求,其方程为$x=-2$.