第4期

第3~4版同步周测参考答案

一、选择题

1~6.DCBACA

7~12.DBDBAA

二、填空题

13.(3,0),$\sqrt{3}$

14.$\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{8}=1$

15.2

16.$[3-\sqrt{3},3+\sqrt{3}]$

三、解答题

17.**解**:(1)根据题意,若双曲线经过点(3,0),则双曲线的焦点在x轴上,且$a=3$,设其标准方程为$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{b^2}=1$.又由双曲线经过点(-6,-3),则有$4-\frac{9}{b^2}=1$,则$b^2=3$,则双曲线的标准方程为$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{3}=1$.

(2)因为$a=2\sqrt{5}$,双曲线焦点在y轴上,设双曲线的标准方程为$\frac{y^2}{20}-\frac{x^2}{b^2}=1$,又由双曲线经过点(2,-5),得$\frac{25}{20}-\frac{4}{b^2}=1$,解得$b^2=16$,所以双曲线的标准方程为$\frac{y^2}{20}-\frac{x^2}{16}=1$.

18.**解**:以直线AB为x轴,线段AB的垂直平分线为y轴,建立直角坐标系,如下图,则A(3,0),B(-3,0).

因为|PB|-|PA|=4<6,

所以P在双曲线的右支上,

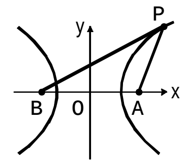
且$a=2,c=3,b=\sqrt{5}$.

所以P在双曲线$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$右支上.

因为P在A的北偏东30°方向,

所以$k_{AP}=\tan 60°=\sqrt{3}$.

所以AP所在直线的方程为$y=\sqrt{3}\cdot(x-3)$.与双曲线方程联立,解得点P的坐标为$(8,5\sqrt{3})$或$\left(\frac{16}{7},-\frac{5\sqrt{3}}{7}\right)$(舍去),所以$A,P$两地的距离$|AP|=10$千米.



(第18题图)

19.**解**:(1)由题意知,双曲线的焦点在x轴上,且$a=\sqrt{3}$,$\frac{c}{a}=\sqrt{3}$,$b^2=c^2-a^2$,解得$a^2=3,b^2=6$,

所以双曲线的标准方程$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{6}=1$.

(2)由(1)可得$F_2(3,0),F_1(-3,0)$,

由题意设$y=\sqrt{3}(x-3)$,

设交点$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,

联立直线与双曲线的方程

$\begin{cases}y=\sqrt{3}(x-3),\\2x^2-y^2=6,\end{cases}$

整理,得$x^2-18x+33=0$,$x_1+x_2=18$,$x_1x_2=33$,

所以$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|OF_2|\cdot|y_1-y_2|=\frac{1}{2}\times3\times\sqrt{3}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{18^2-4\times33}=36$,

即△AOB的面积为36.

20.**解**:(1)因为(-2,0)是双曲线的一个焦点,所以双曲线的焦点在x轴上.

设双曲线C的方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,b>0)$,焦距为$2c$,

则$\begin{cases}c=2,\\\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{3}}{3},\\c^2=a^2+b^2,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=\sqrt{3},\\b=1,\end{cases}$

所以双曲线C的方程为$\frac{x^2}{3}-y^2=1$.

(2)设$P(x,y)$,则$Q(-x,-y)$,

所以$\overrightarrow{NP}=(x-1,y-1)$,$\overrightarrow{MQ}=(-x,-y-1)$,

所以$\overrightarrow{NP}\cdot\overrightarrow{MQ}=-x^2+x+1-y^2=-x^2+x+1-\left(\frac{x^2}{3}-1\right)=-\frac{4}{3}x^2+x+2=-\frac{4}{3}\left(x-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{35}{16}$,因为$x\leq-\sqrt{3}$或$x\geq\sqrt{3}$,所以当$x=\sqrt{3}$时,$\overrightarrow{NP}\cdot\overrightarrow{MQ}$取得最大值$\sqrt{3}-2$.所以$\overrightarrow{NP}\cdot\overrightarrow{MQ}$的取值范围是$(-\infty,\sqrt{3}-2]$.

21.**解**:(1)双曲线C的焦点在坐标轴上,其渐近线方程为$y=\pm\sqrt{2}x$,

则可设双曲线C的方程为$x^2-\frac{y^2}{2}=\lambda$,将点$P\left(\frac{\sqrt{6}}{2},1\right)$代入双曲线C的方程,可得$\lambda=1$,所以双曲线C的标准方程为$x^2-\frac{y^2}{2}=1$.

(2)假设存在被点B(1,1)平分的弦.

设B(1,1)是弦MN的中点,且$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$,则$x_1+x_2=2,y_1+y_2=2$.

因为点M,N在双曲线C上,

所以$\begin{cases}2x_1^2-y_1^2=2,\\2x_2^2-y_2^2=2,\end{cases}$

所以$2(x_1+x_2)(x_1-x_2)-(y_1-y_2)\cdot(y_1+y_2)=0$,

所以$4(x_1-x_2)=2(y_1-y_2)$,

所以$k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=2$,

所以直线MN的方程为$y-1=2(x-1)$,

即$2x-y-1=0$,由$\begin{cases}2x^2-y^2=2,\\2x-y-1=0,\end{cases}$

得$2x^2-4x+3=0$,

因为$\Delta=16-4\times3\times2=-8<0$,所以直线MN与双曲线C无交点,所以不存在被点B(1,1)平分的弦.

22.(1)**解**:由题意知,$c=2$,$c-\frac{a^2}{c}=\frac{1}{2}$,$b^2=c^2-a^2$,解得$a^2=3,b^2=1$,所以双曲线C的标准方程为$\frac{x^2}{3}-y^2=1$.

(2)**证明**:设F(2,0),过F的弦AB所在的直线方程为$x=ky+2$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,

则中点$M\left(\frac{k(y_1+y_2)}{2}+2,\frac{y_1+y_2}{2}\right)$,联立直线AB与双曲线C的方程$\begin{cases}x=ky+2,\\\frac{x^2}{3}-y^2=1.\end{cases}$

整理得$(k^2-3)y^2+4ky+1=0$.

因为弦AB与双曲线有两个交点,

所以$k^2-3\neq0$,$y_1+y_2=\frac{4k}{3-k^2}$,

所以$M\left(\frac{6}{3-k^2},\frac{2k}{3-k^2}\right)$.

(i)当$k=0$时,M点即是F,此时直线MN为x轴;

(ii)当$k\neq0$时,将M的坐标中的k换成$-\frac{1}{k}$,同理,得$N\left(\frac{6k^2}{3k^2-1},-\frac{2k}{3k^2-1}\right)$.

①当直线MN不垂直于x轴时,直线MN的斜率$k_{MN}=\frac{\frac{2k}{3-k^2}+\frac{2k}{3k^2-1}}{\frac{6}{3-k^2}-\frac{6k^2}{3k^2-1}}=\frac{2k}{3(k^2-1)}$,

将M代入方程可得直线MN的方程为$y-\frac{2k}{3-k^2}=\frac{2k}{3(k^2-1)}\left(x-\frac{6}{3-k^2}\right)$,

化简可得$y=\frac{2k}{3(k^2-1)}(x-3)$,所以直线MN恒过定点P(3,0);

②当直线MN垂直于x轴时,$\frac{6}{3-k^2}=\frac{6k^2}{3k^2-1}$,得$k=\pm1$,直线也过定点P(3,0).

综上,直线MN恒过定点P(3,0).

第1期

第3~4版同步周测参考答案

一、选择题

1~6.CDCCBD　7~12.CACAAD

二、填空题

13.A=60°,B=30°(答案不唯一)

14.假

15.充分不必要

16.(0,2)

提示:由$\frac{x-2m}{x+m}<0$ $(m>0)$,得$p:x\in(-m,2m)$.由$x(x-4)<0$,得$q:x\in(0,4)$.

根据题意,可知上述两区间相交但不存在包含关系,结合$m>0$,得$0<2m<4$,所以m的取值范围是(0,2).

三、解答题

17.**解**:逆命题:若$m<1$,则关于x的方程$x^2+2x+m=0$ $(m\in\mathbf{R})$有实数根;是真命题.

否命题:若关于x方程$x^2+2x+m=0$ $(m\in\mathbf{R})$没有实数根,则$m\geq1$;是真命题.

逆否命题:若$m\geq1$,则关于x的方程$x^2+2x+m=0$ $(m\in\mathbf{R})$没有实根;是假命题.

18.**证明**:因为一个命题的原命题与逆否命题具有相同的真假性,所以可证明原命题为真命题.

因为$a+b\geq0$,

所以$a\geq-b,b\geq-a$.

因为$f(x)$是$\mathbf{R}$上的增函数,

所以$f(a)\geq f(-b),f(b)\geq f(-a)$,

所以$f(a)+f(b)\geq f(-a)+f(-b)$.

所以原命题为真命题,故其逆否命题为真命题.

19.**解**:若方程$x^2+mx+1=0$有实数根,则$\Delta_1=m^2-4\geq0$,

所以$p:m\geq2$或$m\leq-2$;

若方程$4x^2+4(m-2)x+1=0$无实数根,则$\Delta_2=16(m-2)^2-16<0$,

所以$q:1<m<3$.

由p真q假,得$\begin{cases}m\geq2\text{或}m\leq-2,\\m\geq3\text{或}m\leq1,\end{cases}$

所以$m\geq3$或$m\leq-2$;

由p假q真,得$\begin{cases}-2<m<2,\\1<m<3,\end{cases}$

所以$1<m<2$.

所以实数m的取值范围为$(-\infty,-2]\cup(1,2)\cup[3,+\infty)$.

20.**解**:由$(x-1+m)(x-1-m)\geq0$,其中$m>0\Rightarrow p:x\in\{x|x\geq1+m$或$x\leq1-m\}$.

由$x=n+\frac{1}{n}$,结合基本不等式,

得$q:x\in\{x|x\geq2$或$x\leq-2\}$.

又p是q的必要条件,即$q\Rightarrow p$,

故$\{x|x\geq2$或$x\leq-2\}\subseteq\{x|x\geq1+m$或$x\leq1-m\}$,

所以$1-m\geq-2$且$1+m\leq2$,

又$m>0$,故$0<m\leq1$.

所以实数m的取值范围是$(0,1]$.

21.(1)**证明**:因为$f(x+2)+f(x)$

$=\cos\frac{\pi(x+2)}{3}+\cos\frac{\pi x}{3}$

$=\cos\left[\frac{\pi(x+1)}{3}+\frac{\pi}{3}\right]+\cos\left[\frac{\pi(x+1)}{3}-\frac{\pi}{3}\right]$

$=2\cos\frac{\pi(x+1)}{3}\cos\frac{\pi}{3}$

$=\cos\frac{\pi(x+1)}{3}$

$=f(x+1)$,

所以$f(x+2)=f(x+1)-f(x)$,

所以$f(x)=\cos\frac{\pi x}{3}\in A$.

(2)命题①正确,集合A中的元素都是周期函数.

证明:若$f(x)\in A$,

则$f(x+2)=f(x+1)-f(x)$,

可得$f(x+3)=f(x+2)-f(x+1)$,

所以$f(x+3)=-f(x)$,

从而$f(x+6)=-f(x+3)=f(x)$,

所以$f(x)$为周期函数,

所以命题①正确.

命题②不正确,

如$h(x)=\cos\left(\frac{\pi x}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$不是偶函数,但满足$h(x)\in A$,

这是因为$h(x+2)+h(x)$

$=\cos\left[\left(\frac{(x+1)\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{3}\right]$

$+\cos\left[\left(\frac{(x+1)\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{3}\right]$

$=\cos\left(\frac{(x+1)\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$

$=h(x+1)$,

所以$h(x+2)=h(x+1)-h(x)$,

所以$h(x)\in A$.

22.**证明**:(1)$T_n=\frac{4}{3}-\frac{1}{3}(2-S_n)^2$, ①

则$T_{n+1}=\frac{4}{3}-\frac{1}{3}(2-S_{n+1})^2$, ②

②-①,得$3a_{n+1}=4-S_{n+1}-S_n$, ③

则$3a_{n+2}=4-S_{n+2}-S_{n+1}$, ④

④-③,得$a_{n+2}=\frac{1}{2}a_{n+1}$ $(n\in\mathbf{N}_*)$.

当n=2时,

$T_2=\frac{4-(S_2-2)^2}{3}$,

则$a_1^2+a_2^2=\frac{4-(a_1+a_2-2)^2}{3}$,

又$a_1=1$,

得$a_2=\frac{1}{2}$.

所以$a_2=\frac{1}{2}a_1$,

所以数列$\{a_n\}$是首项为1,公比为$\frac{1}{2}$的等比数列.

(2)由(1)知$a_n=\frac{1}{2^{n-1}}$ $(n\in\mathbf{N}_*)$.

充分性:若$x=1$,且$y=2$,

由$a_n=\frac{1}{2^{n-1}}$,知$a_n,2^xa_{n+1},2^ya_{n+2}$依次为$\frac{1}{2^{n-1}},\frac{2}{2^n},\frac{4}{2^{n+1}}$,

满足$2\times\frac{2}{2^n}=\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{4}{2^{n+1}}$,

即$a_n,2^xa_{n+1},2^ya_{n+2}$成等差数列.

必要性:假设$a_n,2^xa_{n+1},2^ya_{n+2}$成等差数列,其中$x$、$y$均为整数,又$a_n=\frac{1}{2^{n-1}}$,

所以$2\cdot2^x\cdot\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^{n-1}}+2^y\cdot\frac{1}{2^{n+1}}$,

化简得$2^x-2^{y-2}=1$.

因为x、y均为整数,

所以只有$2^x=2$,$2^{y-2}=1$,

即$x=1$,且$y=2$.

① 第2期

第3~4版章节测试参考答案

一、选择题

1.D

2.B

提示:命题“若 $x(x-1)=0$,则 $x=0$ 或 $x=1$”的否命题为“若 $x(x-1)\neq0$,则 $x\neq0$ 且 $x\neq1$”.故选 B.

3.A

4.A

提示:命题“$\forall x\in R,x^2+\cos x-e^x\leqslant1$”为全称命题,则命题的否定为“$\exists x\in R,x^2+\cos x-e^x>1$”,故选 A.

5.C

6.B

提示:由于命题 p:“$\exists x_0\in R,x_0^2-ax_0+1\leqslant0$”是真命题.即存在 $x_0\in R$,使得 $x_0^2-ax_0+1\leqslant0$ 成立.即 $(x^2-ax+1)_{min}=1-\frac{a^2}{4}\leqslant0$,解得 $a\leqslant-2$ 或 $a\geqslant2$.故选 B.

7.A

提示:对于 A,由 $q:\alpha/\!/\beta,m\subset\alpha,n\perp\beta$,可得 $m\perp n$,因此 $q\Rightarrow p$,故 A 正确;对于 B,$q:\alpha/\!/\beta,m\perp\alpha,n\perp\beta$,可得 $m/\!/n$,因此由 $q\nRightarrow p$,故 B 不正确;对于 C,$q:\alpha\perp\beta,m\perp\alpha,n/\!/\beta$,可得 m 与 n 平行或相交或为异面直线,因此由 $q\nRightarrow p$,故 C 不正确;对于 D,$q:\alpha\perp\beta,m\subset\alpha,n/\!/\beta$,可得 m 与 n 平行或相交或为异面直线,因此由 $q\nRightarrow p$,故 D 不正确.故选 A.

8.C

提示:①利用 $BD_1\perp$ 平面 AB_1C,$OE\subset$ 平面 AB_1C,可得 $OE\perp BD_1$,正确;②利用平面 $AB_1C/\!/$ 平面 A_1C_1D,$OE\subset$ 平面 AB_1C,可得 $OE/\!/$ 平面 A_1C_1D,正确;③连接 A_1B,BE,DE,A_1E,$V_{A_1-BDE}=V_{E-A_1BD}$,底面为定值,$B_1C/\!/A_1D$,B_1C 不在平面 A_1BD 内,$A_1D\subset$ 平面 A_1BD,所以 $B_1C/\!/$ 平面 A_1BD,所以 B_1C 上的 E 到平面 A_1BD 的距离为定值,所以三棱锥 A_1-BDE 的体积为定值,错误;④E在 B_1 处,OE 与 A_1C_1 所成角的最大角为 $90°$,正确.故选 C.

9.D

10.C

提示:对于命题 q_1:当 $f(x)$ 单调递减且 $f(x)>0$ 恒成立时,当 $a>0$ 时,此时 $x+a>x$,又因为 $f(x)$ 单调递减,所以 $f(x+a)<f(x)$,又因为 $f(x)>0$ 恒成立时,所以 $f(x)<f(x)+f(a)$,所以 $f(x+a)<f(x)+f(a)$,所以 $q_1\Rightarrow p$;对于命题 q_2:当 $f(x)$ 单调递增,存在 $x_0<0$ 使得 $f(x_0)=0$,当 $a=x_0<0$ 时,此时 $x+a<x$,$f(a)=f(x_0)=0$,又因为 $f(x)$ 单调递增,所以 $f(x+a)<f(x)$,所以 $f(x+a)<f(x)+f(a)$,所以 $q_2\Rightarrow p$,所以 q_1,q_2 都是 p 的充分条件.故选 C.

11.D

12.D

二、填空题

13.3

提示:因为 $3\in N_+$,而 $2^3<3^2$,说明“$\forall x\in N_+,2^x\geqslant x^2$”是假命题.

14.假

提示:原命题的逆命题是:“若 $xy=0$,则 $x^2+y^2=0$”与原命题的否命题互为逆否命题,它们的真假性相同,所以只需要判断原命题的逆命题的真假即可,若 $xy=0$,则可能 $x=0,y=1$,此时 $x^2+y^2\neq0$,所以原命题的逆命题是假命题,所以原命题的否命题是假命题.

15.$\left(-\frac{1}{2},0\right]$

16.②③

三、解答题

17.**证明**:充分性:

因为 A,B 为锐角,且 $A+B=\frac{\pi}{4}$,

所以 $\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=1$,

可得 $\tan A+\tan B=1-\tan A\tan B$,

所以 $(1+\tan A)(1+\tan B)$

$=1+\tan A+\tan B+\tan A\tan B$

$=1+(1-\tan A\tan B)+\tan A\tan B$

$=2$.

必要性:

因为 $(1+\tan A)(1+\tan B)=2$,

所以 $\tan A+\tan B=1-\tan A\tan B$,

故 $\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=1$.

因为 A,B 为锐角,所以 $0<A+B<\pi$,

从而 $A+B=\frac{\pi}{4}$.

综上可知,$A+B=\frac{\pi}{4}$ 为 $(1+\tan A)\cdot(1+\tan B)=2$ 的充要条件.

18.**解**:由题意知,$f(x_1)_{min}\geqslant g(x_2)_{min}$,

当 $x_1\in[-1,3]$ 时,$f(x_1)_{min}=0$.

当 $x_2\in[0,2]$ 时,$g(x_2)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}-m$ 的最小值为 $g(2)=\frac{1}{4}-m$.

因此 $0\geqslant\frac{1}{4}-m$,解得 $m\geqslant\frac{1}{4}$.

故实数 m 的取值范围是 $\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$.

19.**解**:(1)由 p 为真命题,

得 $0<a-\frac{3}{2}<1$,

解得 $\frac{3}{2}<a<\frac{5}{2}$.

故 a 的取值范围是 $\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$.

(2)$\forall x\in R$,有 $|x-1|\geqslant0$,

故 $0<\left(\frac{1}{2}\right)^{|x-1|}\leqslant1$.

由 q 为真命题,得 $a>1$.

故 a 的取值范围是 $(1,+\infty)$.

(3)因为“$p\wedge q$”为假命题,“$p\vee q$”为真命题,所以 p,q 一真一假.

若 p 真 q 假,则 a 不存在;

若 p 假 q 真,则 $1<a\leqslant\frac{3}{2}$ 或 $a\geqslant\frac{5}{2}$.

故 a 的取值范围是

$\left(1,\frac{3}{2}\right]\cup\left[\frac{5}{2},+\infty\right)$.

20.**解**:(1)由 $M\cap P=\{x|5<x\leqslant8\}$,得 $-3\leqslant a\leqslant5$,因此 $M\cap P=\{x|5<x\leqslant8\}$ 的充要条件是 $\{a|-3\leqslant a\leqslant5\}$.

(2)求实数 a 的一个值,使它成为 $M\cap P=\{x|5<x\leqslant8\}$ 的一个充分而不必要条件,就是在集合 $\{a|-3\leqslant a\leqslant5\}$ 中取一个值,如取 $a=0$,此时必有 $M\cap P=\{x|5<x\leqslant8\}$;反之,$M\cap P=\{x|5<x\leqslant8\}$ 不一定有 $a=0$,故 $a=0$ 是 $M\cap P=\{x|5<x\leqslant8\}$ 的一个充分不必要条件.

(3)求实数 a 的取值范围,使它成为 $M\cap P=\{x|5<x\leqslant8\}$ 的一个必要不充分条件就是另求一个集合,使 $\{a|-3\leqslant a\leqslant5\}$ 是它的一个真子集.

如果 $\{a|a\leqslant5\}$,则不一定有 $M\cap P=\{x|5<x\leqslant8\}$,但是 $M\cap P=\{x|5<x\leqslant8\}$ 时,必有 $a\leqslant5$,故 $\{a|a\leqslant5\}$ 是 $M\cap P=\{x|5<x\leqslant8\}$ 的一个必要不充分条件.

21.**解**:(1)因为 $f(x)+g(x)=a^2x^3+x^2+a^3$, ①

又 $f(x)$ 为奇函数,$g(x)$ 为偶函数,

所以 $-f(x)+g(x)=-a^2x^3+x^2+a^3$. ②

由①②,解得 $f(x)=a^2x^3,g(x)=x^2+a^3$ $(a\neq0)$.

(2)若 p 真,易知 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上是增函数,所以 $f(x)_{min}=f(1)=a^2\geqslant1$,解得 $a\leqslant-1$ 或 $a\geqslant1$.

若 q 真,对于 $x\in[-2,3]$,$g(x)_{max}=g(3)=9+a^3\geqslant17$,解得 $a\geqslant2$.

若 $p\vee q$ 为假命题,则 p 假 q 假,

所以 $a\in(-1,1)\cap(-\infty,2)=(-1,1)$.

故 $p\vee q$ 为真命题时,$a\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

22.**解**:(1)若 $\{a_n\}$ 为递增数列,则 $a_{n+1}>a_n$,即 $3^{n+1}-m\cdot2^{n+1}>3^n-m\cdot2^n$.

化简,可得 $m<2\times\left(\frac{3}{2}\right)^n$.易知函数 $f(n)=2\times\left(\frac{3}{2}\right)^n$ 是增函数,

所以 $f(n)\geqslant f(1)=3$.

所以 $m<3$.

又 $m>0$,所以 m 的取值范围是 $(0,3)$.

(2)若 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要不充分条件,则 p 是 q 的充分不必要条件.

当直线 l 与圆 O 相交时,有 $\frac{|m|}{2}<r$.

所以 $r\geqslant\frac{3}{2}$.

故 r 的取值范围是 $\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$.

第3期

第3~4版同步周测参考答案

一、选择题

1~6.CDBCBB

7~12.CABAAB

二、填空题

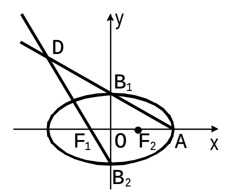
13.$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1$

14.$2\sqrt{3}$

15.$x+y-1=0$

16.$\frac{1}{4}$

提示:由题意,可得 $B_1(0,b),B_2(0,-b),F_1(-c,0),A(a,0)$,设 $D(x,y)$,因为 $\overrightarrow{B_2F_1}=\frac{3}{8}\overrightarrow{B_2D}$,即 $(-c,b)=\frac{3}{8}(x,y+b)$,可得 $x=-\frac{8}{3}c,y=\frac{5}{3}b$,即 $D\left(-\frac{8}{3}c,\frac{5}{3}b\right)$.由 $A、B_1、D$ 三点共线,所以 $\overrightarrow{AB_1}=\lambda\overrightarrow{AD}$,即 $(-a,b)=\lambda\left(-\frac{8}{3}c-a,\frac{5}{3}b\right)$,所以 $\frac{-a}{-\frac{8}{3}c-a}=\frac{b}{\frac{5}{3}b}$,所以 $a=4c$,所以椭圆 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{4}$.



(第16题图)

三、解答题

17.**解**:(1)设椭圆方程为

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 或 $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$.

由已知得 $2a=10$,则 $a=5$.

又因为 $e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$,所以 $c=4$.

所以 $b^2=a^2-c^2=25-16=9$.

所以椭圆方程为

$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 或 $\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{9}=1$.

(2)设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$.

由题意得 $c=b=3$,

$a^2=b^2+c^2=18$,

故所求椭圆方程为 $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$.

18.**解**:因为点 B 与点 $A(-1,1)$ 关于原点 O 对称,所以点 $B(1,-1)$.

设 $P(x,y)$,

由条件可得 $\frac{y-1}{x+1}\cdot\frac{y+1}{x-1}=-\frac{1}{3}$,

化简,得 $x^2+3y^2=4$,故动点 P 的轨迹方程为 $x^2+3y^2=4(x\neq\pm1)$.

19.**解**:(1)设椭圆的长轴长,短轴长,焦距分别为 $2a,2b,2c$,则 $|OB|=a$,$|OA|=b$,$|OF_2|=c$,

由题设可得 $b^2=ac$,

又 $b^2=a^2-c^2$,

所以 $c^2+ac-a^2=0$,即 $e^2+e-1=0$,

解得 $e=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$,而 $e\in(0,1)$,所以椭圆 C 的离心率为 $e=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

(2)设椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$,则 $A(0,b),B(a,0),F_1(-c,0)$.

因为 $b^2=ac$,$\overrightarrow{AF_1}=(-c,-b)$,$\overrightarrow{AB}=(a,-b)$,所以 $\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{AB}=-ac+b^2=0$,所以 $AF_1\perp AB$,

所以 $\triangle ABF_1$ 为直角三角形.

20.**解**:(1)根据题意,$a=2$,则椭圆的焦点在 x 轴上,且 $c=\sqrt{3}$,故焦点坐标为 $(\sqrt{3},0),(-\sqrt{3},0)$.

(2)若 $m=3$,则椭圆的方程为 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$,变形可得 $y^2=1-\frac{x^2}{9}$.

设 $P(x,y)$,则

$|PA|^2=(x-2)^2+y^2=\frac{8x^2}{9}-4x+5$.

又由 $-3\leqslant x\leqslant3$,根据二次函数的性质,分析可得,

当 $x=-3$ 时,$|PA|^2$ 取得最大值,为25;

当 $x=\frac{9}{4}$ 时,$|PA|^2$ 取得最小值,为 $\frac{1}{2}$.

所以 $|PA|$ 的最大值为5,最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

21.**解**:(1)设椭圆的右焦点为 F_1,则 $|CF_1|=3$,

又 $|CF|=1$,所以 $2a=4,a=2$,

又 $c=\sqrt{2}$,所以 $b=\sqrt{2}$,所以椭圆 G 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

(2)设 $M(x_m,y_m),Q(x_0,y_0)$,则 $P(-x_0,-y_0)$,易知 $0<x_0<2,0<y_0<\sqrt{2}$,

由 $A(2,0),B(0,\sqrt{2})$,所以直线 AB 的方程为 $x+\sqrt{2}y-2=0$,

若使 $\triangle BOP$ 的面积是 $\triangle BMQ$ 的面积的4倍,因为 $|OP|=|OQ|$,所以只需使得 $|OQ|=4|MQ|$,即 $\frac{x_M}{x_Q}=\frac{3}{4}$. ①

设直线 l 的方程为 $y=kx$,

由 $\begin{cases}y=kx,\\x+\sqrt{2}y-2=0,\end{cases}$ 得

$M\left(\frac{2}{1+\sqrt{2}k},\frac{2k}{1+\sqrt{2}k}\right)$.

由 $\begin{cases}y=kx,\\x^2+2y^2=4,\end{cases}$ 得

$Q\left(\frac{2}{\sqrt{1+2k^2}},\frac{2k}{\sqrt{1+2k^2}}\right)$,

代入①,得 $14k^2-18\sqrt{2}k+7=0$,

解得 $k=\frac{9\sqrt{2}\pm8}{14}$,

所以直线 l 的方程为 $y=\frac{9\sqrt{2}\pm8}{14}x$.

22.(1)**解**:由题设得,$A(-a,0),B(a,0),G(0,1)$,则 $\overrightarrow{AG}=(a,1)$,$\overrightarrow{GB}=(a,-1)$,

由 $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{GB}=8$,得 $a^2-1=8$,即 $a=3$,

所以 E 的方程为 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$.

(2)**证明**:设 $C(x_1,y_1),D(x_2,y_2),P(6,t)$,

若 $t\neq0$,设直线 CD 的方程为 $x=my+n$,由题可知,$-3<n<3$,

由于直线 PA 的方程为 $y=\frac{t}{9}(x+3)$,

所以 $y_1=\frac{t}{9}(x_1+3)$.

同理可得 $y_2=\frac{t}{3}(x_2-3)$,

于是有 $3y_1(x_2-3)=y_2(x_1+3)$.

因为 $\frac{x_2^2}{9}+y_2^2=1$,

所以 $y_2^2=-\frac{(x_2+3)(x_2-3)}{9}$,

可得 $27y_1y_2=-(x_1+3)(x_2+3)$,

又 $x_1=my_1+n,x_2=my_2+n$,

所以 $(27+m^2)y_1y_2+m(n+3)(y_1+y_2)+(n+3)^2=0$, ①

将 $x=my+n$ 代入 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$,

得 $(m^2+9)y^2+2mny+n^2-9=0$,

所以 $y_1+y_2=-\frac{2mn}{m^2+9}$,$y_1y_2=\frac{n^2-9}{m^2+9}$,

代入①式,得 $(27+m^2)(n^2-9)-2m(n+3)mn+(n+3)^2(m^2+9)=0$,

解得 $n=\frac{3}{2}$ 或 $n=-3$(舍去),故直线 CD 的方程为 $x=my+\frac{3}{2}$,即直线 CD 过定点 $\left(\frac{3}{2},0\right)$.

若 $t=0$,则直线 CD 的方程为 $y=0$,也过点 $\left(\frac{3}{2},0\right)$.

综上,直线 CD 过定点 $\left(\frac{3}{2},0\right)$.