第 12 期

第 2~3 版综合测试(二)

参考答案

一、选择题

1~6.BDBBBD　　7~12.ADABAA

二、填空题

13.若 $x\notin\mathbf{R}$,则 $x^2+1\leqslant 1$

14.x+2y-2=0

15.$\frac{8}{3}$

16.$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},\sqrt{2}\right)$

三、解答题

17.**证明**:若 $a-b=1$,则 $a=b+1$.故 $a^2-b^2+2a-4b-3=(b+1)^2-b^2+2(b+1)-4b-3=0$.

因此,原命题的逆否命题为真命题,从而原命题也为真命题,得证.

18.**解**:若 p 为真命题,

则 $\begin{cases}a-1>0,\\2(a-1)-1>0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a-1<0,\\1\cdot(a-1)-1>0,\end{cases}$

解得 $a>\frac{3}{2}$;

若 q 为真命题,则 $a^2-4<0$,

解得 $-2<a<2$.

(1)若 p 且 q 是真命题,则 p 真 q 真,

所以实数 a 的取值范围为 $\left(\frac{3}{2},2\right)$.

(2)由题意,得 $\neg p$,q 一真一假,

即 p,q 同真假.

若 p 真 q 真,由(1)知 $\frac{3}{2}<a<2$;

若 p 假 q 假,

则 $\begin{cases}a\leqslant-\frac{3}{2},\\a\leqslant-2\text{ 或 }a\geqslant 2\end{cases}\Rightarrow a\leqslant-2$.

所以实数 a 的取值范围为

$(-\infty,-2]\cup\left(\frac{3}{2},2\right)$.

19.**解**:(1)因为 $e\geqslant\sqrt{2}k$,

所以 $\frac{\sqrt{3+m}}{\sqrt{3}}\geqslant\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{3}}$,

解得 $m\leqslant 3$.

又 $m>0$,

所以实数 m 的取值范围为 $(0,3]$.

(2)由 $m^2-(2a+2)m+a(a+2)\leqslant 0$,

得 $(m-a)(m-a-2)\leqslant 0$,

所以 $a\leqslant m\leqslant a+2$.

因为 p 是 q 的必要不充分条件,

所以 $\begin{cases}a>0,\\a+2\leqslant 3,\end{cases}$ 解得 $0<a\leqslant 1$.

所以实数 a 的取值范围为 $(0,1]$.

20.**证明**:取基底 $\overrightarrow{AA'}$,$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AD}$.

(1)因为 $\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{ED'}+\overrightarrow{D'G}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{EG}$,

所以 $EG/\!/AC$.

(2)因为 $\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{FD'}+\overrightarrow{D'G}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}=2\overrightarrow{FG}$,

所以 $FG/\!/AB'$.

又由(1)$EG/\!/AC$,

所以平面 $EFG/\!/$平面 $AB'C$.

21.(1)**证明**:连接 A_1E,因为 $A_1A=A_1C$,E 是 AC 的中点,

所以 $A_1E\perp AC$,

又平面 $A_1ACC_1\perp$平面 ABC,

$A_1E\subsetneqq$平面 A_1ACC_1,

平面 $A_1ACC_1\cap$平面 $ABC=AC$,

所以 $A_1E\perp$平面 ABC.

如图,以 E 为原点,EC,EA_1 所在直线分别为 y,z 轴,建立空间直角坐标系,

设 $AC=4$,

则 $E(0,0,0)$,$A_1(0,0,2\sqrt{3})$,

$B(\sqrt{3},1,0)$,$B_1(\sqrt{3},3,2\sqrt{3})$,

$F\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},2\sqrt{3}\right)$,$C(0,2,0)$,

$\overrightarrow{EF}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},2\sqrt{3}\right)$,

$\overrightarrow{BC}=(-\sqrt{3},1,0)$,

由 $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BC}=0$,得 $EF\perp BC$.

(2)**解**:设直线 EF 与平面 A_1BC 所成角为 θ,

由(1)得 $\overrightarrow{BC}=(-\sqrt{3},1,0)$,

$\overrightarrow{A_1C}=(0,2,-2\sqrt{3})$,

设平面 A_1BC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases}\overrightarrow{BC}\cdot\boldsymbol{n}=-\sqrt{3}x+y=0,\\\overrightarrow{A_1C}\cdot\boldsymbol{n}=y-\sqrt{3}z=0,\end{cases}$

取 $x=1$,得 $\boldsymbol{n}=(1,\sqrt{3},1)$,

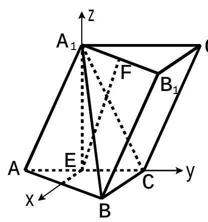
所以 $\sin\theta=|\cos\langle n,\overrightarrow{EF}\rangle|$

$=\frac{|\overrightarrow{EF}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{EF}|\cdot|\boldsymbol{n}|}$

$=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}+2\sqrt{3}}{\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{9}{4}+12}\times\sqrt{1+3+1}}$

$=\frac{4}{5}$,

所以直线 EF 与平面 A_1BC 所成角的余弦值为 $\frac{3}{5}$.



(第 21 题图)

22.**解**:(1)由题可知 $\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2},\\a=2\sqrt{2},\end{cases}$

解得 $\begin{cases}c=2,\\a=2\sqrt{2}.\end{cases}$ 所以 $b^2=a^2-c^2=4\Rightarrow b=2$.

所以椭圆C的方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$.

(2)假设存在椭圆上的一点 $P(x_0,y_0)$,使得直线 PF_1,PF_2 与以Q为圆心的圆相切,则Q到直线 PF_1,PF_2 的距离相等,$F_1(-2,0)$,$F_2(2,0)$,

PF_1:$(x_0+2)y-y_0x-2y_0=0$,

PF_2:$(x_0-2)y-y_0x+2y_0=0$,

$d_1=\frac{|3y_0|}{\sqrt{(x_0+2)^2+y_0^2}}=\frac{|y_0|}{\sqrt{(x_0-2)^2+y_0^2}}=d_2$,

整理,得 $8x_0^2-40x_0+32+8y_0^2=0$.

因为点在椭圆上,所以 $x_0^2+2y_0^2=8$.

解得 $x_0=2$,或 $x_0=8$(舍去),

$x_0=2$ 时,$y_0=\pm\sqrt{2}$,$r=1$.

所以椭圆上存在点P,

其坐标为 $(2,\sqrt{2})$ 或 $(2,-\sqrt{2})$,

使得直线 PF_1,PF_2 与以Q为圆心的圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 相切.

第 9 期

第 3~4 版同步周测参考答案

一、选择题

1~6.ACABCA　　7~12.DCCADB

二、填空题

13.$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1(y<0)$

提示:由已知关系式可知点 M 与 $A(0,5)$,$B(0,-5)$ 的距离之差等于 8,则点 M 的轨迹是焦点在 y 轴上的双曲线的下支,其中 $a=4$,$c=5$,则 $b^2=9$.所以点 M 的轨迹方程为 $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1(y<0)$.

14.2 或 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

提示:当双曲线的焦点在 x 轴上时,

有 $\frac{b}{a}=\sqrt{3}$,

则离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=2$;

当双曲线的焦点在 y 轴上时,

有 $\frac{a}{b}=\sqrt{3}$,同理,

得 $e=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

15.$\frac{4}{5}$

提示:由方程 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 知 $a^2=16$,$b^2=9$,即 $a=4$,$c=\sqrt{16+9}=5$.在 $\triangle ABP$ 中,利用正弦定理和双曲线的定义知,$\frac{|\sin A-\sin B|}{\sin P}=\frac{||PB|-|PA||}{|AB|}=\frac{2a}{2c}=\frac{2\times4}{2\times5}=\frac{4}{5}$.

16.$12\sqrt{6}$

提示:设左焦点为 F_1,$|PF|-|PF_1|=2a=2$,所以 $|PF|=2+|PF_1|$,$\triangle APF$ 的周长为 $|AF|+|AP|+|PF|=|AF|+|AP|+2+|PF_1|$,$\triangle APF$ 周长最小即为 $|AP|+|PF_1|$ 最小,当 A,P,F_1 在一条直线上时最小,过 AF_1 的直线方程为 $\frac{x}{-3}+\frac{y}{6\sqrt{6}}=1$,与 $x^2-\frac{y^2}{8}=1$ 联立,解得 P 点坐标为 $(-2,2\sqrt{6})$,此时 $S=S_{\triangle AF_1F}-S_{\triangle F_1PF}=12\sqrt{6}$.

三、解答题

17.**解**:因为点 B 与点 $A(-1,1)$ 关于原点 O 对称,所以点 B 的坐标为 $(1,-1)$.

设 P 点的坐标为 (x,y),

由条件可得 $\frac{y-1}{x+1}\cdot\frac{y+1}{x-1}=-\frac{1}{3}$,

化简,得 $x^2+3y^2=4(x\neq\pm1)$,故动点 P 的轨迹方程为 $x^2+3y^2=4(x\neq\pm1)$.

18.**解**:双曲线中,$a=3$,$c=5$.

不妨设 $|PF_1|>|PF_2|$,

则 $|PF_1|-|PF_2|=2a=6$.

又 $|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot\cos60°$,

而 $|F_1F_2|=2c=10$,

得 $|PF_1|^2+|PF_2|^2-|PF_1|\cdot|PF_2|=(|PF_1|-|PF_2|)^2+|PF_1|\cdot|PF_2|=100$,

所以 $|PF_1|\cdot|PF_2|=64$.

故 $\triangle F_1PF_2$ 的面积

$S=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|\sin60°=16\sqrt{3}$.

19.**解**:直线 l 的方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$,即 $bx+ay-ab=0$,则点 $(1,0)$ 到直线 l 的距离 $d_1=\frac{b(a-1)}{\sqrt{a^2+b^2}}$,点 $(-1,0)$ 到直线 l 的距离 $d_2=\frac{b(a+1)}{\sqrt{a^2+b^2}}$,$s=d_1+d_2=\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{2ab}{c}\geqslant\frac{4}{5}c$,即 $5a\sqrt{c^2-a^2}\geqslant 2c^2$,

于是有 $5\sqrt{e^2-1}\geqslant 2e^2$,

即 $4e^4-25e^2+25\leqslant 0$,得 $\frac{5}{4}\leqslant e^2\leqslant 5$.

又 $e>1$,所以 e 的取值范围是

$\left[\frac{\sqrt{5}}{2},\sqrt{5}\right]$.

20.**解**:以直线 AB 为 x 轴,线段 AB 的垂直平分线为 y 轴,建立直角坐标系,如下图,则 $A(3,0)$,$B(-3,0)$.

因为 $|PB|-|PA|=4<6$,

所以 P 在双曲线的右支上,

且 $a=2$,$c=3$,$b=\sqrt{5}$.

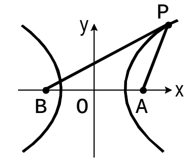
所以 P 在双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$ 右支上.

因为 P 在 A 的北偏东 30°方向,

所以 $k_{AP}=\tan60°=\sqrt{3}$.

所以 AP 所在直线的方程为 $y=\sqrt{3}\cdot(x-3)$.与双曲线方程联立,解得点 P 的坐标为 $(8,5\sqrt{3})$ 或 $\left(\frac{16}{7},-\frac{5\sqrt{3}}{7}\right)$(舍去),

所以 A,P 两地的距离 $|AP|=10$ 千米.



(第 20 题图)

21.**解**:(1)双曲线的右焦点为 $F(\sqrt{2},0)$,渐近线方程为 $x\pm y=0$,

则圆心 F 到渐近线的距离

$d=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$.

所以圆的方程为 $(x-\sqrt{2})^2+y^2=1$.

(2)设 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,经过点 P 的直线方程为 $y=kx-1$(k 显然存在).

联立方程组 $\begin{cases}x^2-y^2=1,\\y=kx-1,\end{cases}$ 消去 y,

整理得 $(1-k^2)x^2+2kx-2=0$.

所以 $\Delta=(2k)^2-4(1-k^2)(-2)=8-4k^2>0$,

且 $x_1+x_2=\frac{-2k}{1-k^2}>0$,$x_1x_2=\frac{-2}{1-k^2}>0$,

解得 $1<k<\sqrt{2}$.

又 $y_1+y_2=k(x_1+x_2)-2=\frac{-2}{1-k^2}$,

所以线段 MN 的中点为

$\left(\frac{-k}{1-k^2},\frac{-1}{1-k^2}\right)$,

垂直平分线的方程为

$y+\frac{1}{1-k^2}=-\frac{1}{k}\left(x+\frac{k}{1-k^2}\right)$.

令 $x=0$,得截距 $t=\frac{2}{k^2-1}>2$.

故 t 的取值范围是 $(2,+\infty)$.

22.**解**:(1)双曲线 C 的焦点在坐标轴上,其渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{2}x$,

则可设双曲线 C 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{2}=\lambda$,

将点 $P\left(\frac{\sqrt{6}}{2},1\right)$ 代入双曲线 C 的方程,可得 $\lambda=1$,所以双曲线 C 的标准方程为 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$.

(2)假设存在被点 $B(1,1)$ 平分的弦.

设 $B(1,1)$ 是弦 MN 的中点,且 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,则 $x_1+x_2=2$,$y_1+y_2=2$.

因为点 M,N 在双曲线 C 上,所以 $\begin{cases}2x_1^2-y_1^2=2,\\2x_2^2-y_2^2=2,\end{cases}$ 所以 $2(x_1+x_2)(x_1-x_2)-(y_1-y_2)\cdot(y_1+y_2)=0$,所以 $4(x_1-x_2)=2(y_1-y_2)$,

所以 $k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=2$,

所以直线 MN 的方程为 $y-1=2(x-1)$,

即 $2x-y-1=0$,由 $\begin{cases}2x^2-y^2=2,\\2x-y-1=0,\end{cases}$

得 $2x^2-4x+3=0$,

因为 $\Delta=16-4\times3\times2=-8<0$,所以直线 MN 与双曲线 C 无交点,所以不存在被点 $B(1,1)$ 平分的弦.

③

第 10 期
第 2~3 版章节测试
参考答案

一、选择题

1~6.DAADDC　　7~12.DDCAAA

二、填空题

13.2　　14.8

15.$x+2y-4=0$　　16.$\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$

三、解答题

17.**解**:设点$N(x,y)$.因为N是EF的中点,$F(2,0)$,所以$E(2x-2,2y)$.又E是OM的中点,$O(0,0)$,所以$M(4x-4,4y)$.将其代入抛物线方程中,得$(4y)^2=8(4x-4)$,即$y^2=2x-2$,此即为点N的轨迹方程.

18.**解**:(1)把$M\left(\frac{2}{3},-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$代入方程$y^2=2px$,

得$p=2$,因此抛物线的方程为$y^2=4x$.

(2)抛物线的准线方程为$x=-1$,所以$F_1(-1,0)$,设双曲线的右焦点为F,则$F(1,0)$,

于是$2a=|MF_1|-|MF|=\frac{7}{3}-\frac{5}{3}=\frac{2}{3}$,

因此$a=\frac{1}{3}$.

因为$c=1$,所以$b^2=c^2-a^2=\frac{8}{9}$,

于是,双曲线的方程为$\frac{x^2}{\frac{1}{9}}-\frac{y^2}{\frac{8}{9}}=1$.

19.**解**:(1)由椭圆C的一个焦点为$F(0,-\sqrt{2})$,得椭圆C焦点在y轴上,且另一个焦点为$F'(0,\sqrt{2})$,半焦距$c=\sqrt{2}$.

又点$M(1,\sqrt{2})$在椭圆C上,

所以$2a=|MF|+|MF'|=4$.

所以$a=2,b^2=a^2-c^2=2$.

所以椭圆C的方程为$\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{2}=1$.

(2)联立直线$l:2x-y-2=0$与椭圆C的方程,

解得$x=0,y=-2$,或$x=\frac{4}{3},y=\frac{2}{3}$.

所以$A(0,-2)$,$B\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)$,

$|AB|=\sqrt{\left(\frac{4}{3}-0\right)^2+\left(\frac{2}{3}+2\right)^2}=\frac{4}{3}\sqrt{5}$.

20.**解**:(1)当k不存在时,直线l的方程为$x=1$,代入双曲线的方程,得$y=0$,即l与C有一个交点.

当k存在时,设直线l的方程为

$y=k(x-1)+2$,

代入C的方程,并整理,得

$(2-k^2)x^2+2(k^2-2k)x-k^2+4k-6=0$.

当$2-k^2=0$,即$k=\pm\sqrt{2}$时,

上述方程有唯一解.

当$2-k^2\neq0$,即$k\neq\pm\sqrt{2}$时,$\Delta=16(3-2k)$.由$\Delta=0$,解得$k=\frac{3}{2}$;由$\Delta>0$,解得$k<\frac{3}{2}$;由$\Delta<0$,解得$k>\frac{3}{2}$.

所以,当$k\in\{k\mid k$不存在,或$k=\pm\sqrt{2}$,或$k=\frac{3}{2}\}$时,l与C只有一个交点;当$k\in\left\{k\middle|k<\frac{3}{2},且k\neq\pm\sqrt{2}\right\}$时,$l$与$C$有两个交点;当$k\in\left\{k\middle|k>\frac{3}{2}\right\}$时,$l$与$C$无交点.

(2)设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,由(1)知,

$x_1+x_2=\frac{2(k^2-2k)}{k^2-2}=2\times1$,解得$k=1$.

所以直线AB的方程为$x-y+1=0$.

21.(1)**解**:抛物线$C:x^2=-2py$经过点$(2,-1)$,可得$4=2p$,即$p=2$,

可得抛物线C的方程为$x^2=-4y$,其准线方程为$y=1$.

(2)**证明**:抛物线C的焦点为$F(0,-1)$,

设直线l的方程为$y=kx-1(k\neq0)$,

由$\begin{cases}y=kx-1,\\x^2=-4y,\end{cases}$可得$x^2+4kx-4=0$.

设$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,

可得$x_1+x_2=-4k$,$x_1x_2=-4$,

直线OM的方程为$y=\frac{y_1}{x_1}x$,

即$y=-\frac{x_1}{4}x$,

直线ON的方程为$y=\frac{y_2}{x_2}x$,

即$y=-\frac{x_2}{4}x$,

可得$A\left(\frac{4}{x_1},-1\right)$,$B\left(\frac{4}{x_2},-1\right)$,

可得AB的中点的横坐标为

$2\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)=2\cdot\frac{-4k}{-4}=2k$,

即有AB为直径的圆的圆心为$(2k,-1)$,

半径为$\frac{|AB|}{2}=\frac{1}{2}\left|\frac{4}{x_1}-\frac{4}{x_2}\right|=2\cdot\frac{\sqrt{16k^2+16}}{4}=2\sqrt{1+k^2}$,

可得圆的方程为

$(x-2k)^2+(y+1)^2=4(1+k^2)$,

化简得$x^2-4kx+(y+1)^2=4$,

由$x=0$,可得$y=1$,或$y=-3$.

则以AB为直径的圆经过y轴上的两个定点$(0,1)$,$(0,-3)$.

22.(1)**解**:由题意得$\frac{y}{x+2}\cdot\frac{y}{x-2}=-\frac{1}{2}$,

整理得曲线C的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ $(y\neq0)$,

所以曲线C是焦点在x轴上不含长轴端点的椭圆.

(2)(i)**证明**:设$G(x_G,y_G)$,$P(x_0,y_0)$,

则$Q(-x_0,-y_0)$,$E(x_0,0)$,

所以直线QE的方程为$y=\frac{y_0}{2x_0}(x-x_0)$,

与$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$联立消去$y$,

得$(2x_0^2+y_0^2)x^2-2x_0y_0^2x+x_0^2y_0^2-8x_0^2=0$,

所以$-x_0x_G=\frac{x_0^2y_0^2-8x_0^2}{2x_0^2+y_0^2}$,

所以$x_G=\frac{(8-y_0^2)x_0}{2x_0^2+y_0^2}$,

所以$y_G=\frac{y_0}{2x_0}(x_G-x_0)=\frac{y_0(4-x_0^2-y_0^2)}{2x_0^2+y_0^2}$,

所以$k_{PG}=\frac{y_G-y_0}{x_G-x_0}=\frac{\frac{y_0(4-x_0^2-y_0^2)}{2x_0^2+y_0^2}-y_0}{\frac{x_0(8-y_0^2)}{2x_0^2+y_0^2}-x_0}$

$=\frac{4y_0-y_0x_0^2-y_0^3-2y_0x_0^2-y_0^3}{8x_0-x_0y_0^2-2x_0^3-x_0y_0^2}$

$=\frac{4y_0-y_0x_0^2-y_0^3-2y_0x_0^2-y_0^3}{2x_0(4-y_0^2-x_0^2)}$,

把$x_0^2+2y_0^2=4$代入上式,

得$k_{PG}=\frac{y_0(x_0^2-3x_0^2)}{2x_0(4-y_0^2-4+2y_0^2)}$

$=\frac{-y_0\cdot2x_0^2}{2x_0y_0^2}=-\frac{x_0}{y_0}$,

所以$k_{PQ}\cdot k_{PG}=\frac{y_0}{x_0}\cdot\left(-\frac{x_0}{y_0}\right)=-1$,

所以$PQ\perp PG$,

故$\triangle PQG$为直角三角形.

(ii)**解**:$S_{\triangle PQG}=\frac{1}{2}|PE|\cdot(x_G-x_Q)$

$=\frac{1}{2}y_0(x_G+x_0)=\frac{1}{2}y_0\left[\frac{(8-y_0^2)x_0}{2x_0^2+y_0^2}+x_0\right]$

$=\frac{1}{2}y_0x_0\cdot\frac{8-y_0^2+2x_0^2+y_0^2}{2x_0^2+y_0^2}$

$=\frac{y_0x_0(4+x_0^2)}{2x_0^2+y_0^2}=\frac{y_0x_0(x_0^2+2y_0^2+x_0^2)}{2x_0^2+y_0^2}$

$=\frac{2y_0x_0(x_0^2+y_0^2)}{2x_0^2+y_0^2}=\frac{8y_0x_0(x_0^2+y_0^2)}{(2x_0^2+y_0^2)(x_0^2+2y_0^2)}$

$=\frac{8(y_0x_0^3+x_0y_0^3)}{2x_0^4+2y_0^4+5x_0^2y_0^2}=\frac{8\left(\frac{x_0}{y_0}+\frac{y_0}{x_0}\right)}{2\left(\frac{x_0}{y_0}+\frac{y_0}{x_0}\right)^2+1}$.

令$t=\frac{x_0}{y_0}+\frac{y_0}{x_0}$,$x_0>0,y_0>0$,则$t\geqslant2$,

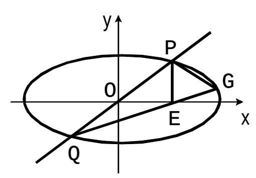
$S_{\triangle PQG}=\frac{8t}{2t^2+1}=\frac{8}{2t+\frac{1}{t}}$,

易知"对号"函数$f(t)=2t+\frac{1}{t}$在$[2,+\infty)$上为增函数,

$f(t)\geqslant4+\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$($t=2$时取等号),

所以$S_{\triangle PQG}\leqslant\frac{8}{\frac{9}{2}}=\frac{16}{9}$$\left(此时x_0=y_0=\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$,

故$\triangle PQG$面积的最大值为$\frac{16}{9}$.



(第 22 题图)

第 11 期
第 2~3 版综合测试(一)
参考答案

一、选择题

1~6.AABBDA　　7~12.ABCBDC

二、填空题

13.$a=1,b=-1$(答案不唯一)

14.$\left(\frac{10}{3},-1,\frac{7}{3}\right)$

15.$\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

16.-2

三、解答题

17.**解**:逆命题为:若$a+b$是偶数,则a,b都是奇数.它是假命题.

否命题:若a,b不都是奇数,则$a+b$不是偶数.它是假命题.

逆否命题为:若$a+b$不是偶数,则a,b不都是奇数.它是真命题.

18.**解**:(1)$A=\{x\mid-2\leqslant x\leqslant5\}$,

$B=\{x\mid m+1\leqslant x\leqslant2m-1\}$,$B\neq\varnothing$.

因为"命题p:任意$x\in B$,

则$x\in A$"是真命题,

所以$B\subseteq A$,$B\neq\varnothing$.

所以$\begin{cases}m+1\leqslant2m-1,\\m+1\geqslant-2,\\2m-1\leqslant5.\end{cases}$解得$2\leqslant m\leqslant3$.

所以实数m的取值范围为$[2,3]$.

(2)若q为真,则$A\cap B\neq\varnothing$.

因为$B\neq\varnothing$,

所以$m+1\leqslant2m-1$,即$m\geqslant2$.

所以$\begin{cases}m+1\leqslant5,\\m\geqslant2,\end{cases}$所以$2\leqslant m\leqslant4$.

所以实数m的取值范围为$[2,4]$.

19.**解**:(1)由离心率$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{2}$,得$a=b$,则可设双曲线的方程为$x^2-y^2=\lambda$.

将点$(4,-\sqrt{10})$代入,得$\lambda=6$.所以该双曲线的标准方程为$\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{6}=1$.

(2)结合(1)可得$|F_1F_2|=2\sqrt{6+6}=4\sqrt{3}$.又$M(4,-\sqrt{10})$,所以$\triangle F_1MF_2$的面积$S=\frac{1}{2}\times4\sqrt{3}\times\sqrt{10}=2\sqrt{30}$.

20.(1)**解**:以O为坐标原点,OA,OC,OO_1所在直线分别为x,y,z轴,建立空间直角坐标系,则$B(1,1,0)$,$A_1(1,0,1)$,$C_1(0,1,1)$.

设$n=(x,y,z)$是平面A_1BC_1的法向量,

则$n\cdot\overrightarrow{BA_1}=0$,$n\cdot\overrightarrow{BC_1}=0$,

而$\overrightarrow{BA_1}=(0,-1,1)$,$\overrightarrow{BC_1}=(-1,0,1)$,

所以$\begin{cases}-y+z=0,\\-x+z=0,\end{cases}$即$x=y=z$.

取$z=1$,则$x=y=1$,故$\boldsymbol{n}=(1,1,1)$.

所以$n=(1,1,1)$为平面A_1BC_1的一个法向量.

(2)**证明**:因为$E\left(0,\frac{2}{3},1\right)$,

$F\left(0,1,\frac{2}{3}\right)$,

则$\overrightarrow{EF}=\left(0,\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$,

又$n\cdot\overrightarrow{EF}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=0$,

所以$\overrightarrow{EF}\perp n$,所以$EF\parallel$平面$A_1BC_1$.

21.(1)**证明**:由已知得,$B_1C_1\perp$平面ABB_1A_1,$BE\subsetneqq$平面ABB_1A_1,

故$B_1C_1\perp BE$,

又$BE\perp EC_1$,$B_1C_1\cap EC_1=C_1$,

所以$BE\perp$平面EB_1C_1.

(2)**解**:由(1)知$BE\perp$平面EB_1C_1,

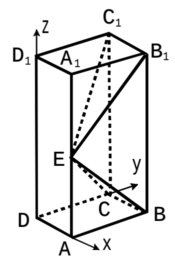
所以$\angle BEB_1=90°$.

由题设知$Rt\triangle ABE\cong Rt\triangle A_1B_1E$,

所以$\angle AEB=45°$,

故$AE=AB$,$AA_1=2AB$.

以D为坐标原点,$\overrightarrow{DA}$的方向为x轴正方向,$|\overrightarrow{DA}|$为单位长,建立如图所示的空间直角坐标系$D-xyz$,



(第21题图)

则$C(0,1,0)$,$B(1,1,0)$,$C_1(0,1,2)$,$E(1,0,1)$,$\overrightarrow{CB}=(1,0,0)$,$\overrightarrow{CE}=(1,-1,1)$,$\overrightarrow{CC_1}=(0,0,2)$.

设平面EBC的法向量为$\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$,

则$\begin{cases}\overrightarrow{CB}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\\overrightarrow{CE}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}x_1=0,\\x_1-y_1+z_1=0,\end{cases}$

所以可取$\boldsymbol{n}=(0,-1,-1)$.

设平面ECC_1的法向量为$\boldsymbol{m}=(x_2,y_2,z_2)$,

则$\begin{cases}\overrightarrow{CC_1}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\\overrightarrow{CE}\cdot\boldsymbol{m}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}2z_2=0,\\x_2-y_2+z_2=0.\end{cases}$

所以可取$\boldsymbol{m}=(1,1,0)$.

于是$\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=-\frac{1}{2}$.

所以二面角$B-EC-C_1$的正弦值为$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

22.(1)**解**:由题意可得$p=2$,所以圆S的圆心为$S(0,1)$,半径为1,所以$|BC|=2$.

若线段AB,BC,CD的长按此顺序构成一个等差数列,

则$|AB|+|CD|=2|BC|=4$.

设$A(x_1,y_1)$,$D(x_2,y_2)$.

由$\begin{cases}x^2=4y,\\y=kx+1,\end{cases}$得$x^2-4kx-4=0$.

所以$x_1+x_2=4k$,$y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2=4k^2+2$,$|AB|+|CD|=|AD|-|BC|=y_1+y_2+2-2=4k^2+2=4$,结合$k>0$,解得$k=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2)**证明**:由(1)可知$Q(2k,2k^2+1)$.

当$k=0$时,直线l'与抛物线没有两个交点,所以$k\neq0$.

用$-\frac{1}{k}$替换k可得$P\left(-\frac{2}{k},\frac{2}{k^2}+1\right)$,

计算得直线PQ的斜率$k_{PQ}=\frac{k^2-1}{k}$.

所以直线PQ的方程为

$y-(2k^2+1)=\frac{k^2-1}{k}(x-2k)$,

即$y=\frac{k^2-1}{k}x+3$.

所以直线PQ过定点$(0,3)$.