## 第 4 期

### 第 3~4 版同步周测参考答案

**一、选择题**

1~4.CCCD

5.D

**提示**：由基底的定义，知$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$三个向量不共面，但选项 A，B，C 中三种情形都有可能使$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$共面.

6.B

**提示**：A 错，因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$；B 对；C 错，因为 $\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{b}^2\Leftrightarrow|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$；D 错，因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=0\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$.

7.D

8.D

9.D

**提示**：空间两向量永远是共面向量，与其所在直线位置没有关系，A 错误；向量的模与方向没有任何关系，因此 B，C 错误；D 显然正确.

10.B

**提示**：根据题意，$AB\perp AC$，$AB\perp AD$，所以 $AB\perp$平面 $ACD$.又 $AC\perp CD$，由三垂线定理，所以 $BC\perp CD$.所以$\triangle BCD$ 是直角三角形.

11.B

**提示**：因为$(a\cdot b)\cdot c=(b\cdot c)\cdot a$，

又 a，c 不共线，所以 $a\cdot b=0$，$b\cdot c=0$，

所以 $d\cdot b=(a+c)\cdot b=a\cdot b+c\cdot b=0$，

所以$\langle d,b\rangle=90°$.

12.C

**提示**：因为 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=(2,t,t)-(1-t,1-t,t)=(1+t,2t-1,0)$，

所以 $|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|=\sqrt{(1+t)^2+(2t-1)^2}=\sqrt{5t^2-2t+2}=\sqrt{5\left(t-\frac{1}{5}\right)^2+\frac{9}{5}}\geqslant\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

**二、填空题**

13.$\overrightarrow{AO}$

**提示**：由 $A-BCD$ 是正四面体，易知 $AO\perp$平面 $BCD$，所以$\overrightarrow{AO}$是平面 $BCD$ 的一个法向量.

14.-4

15.-15

16.(1,1,1)

**提示**：设 $DP=y>0$，则 $A(2,0,0)$，$B(2,2,0)$，$P(0,0,y)$，$E\left(1,1,\frac{y}{2}\right)$，$\overrightarrow{DP}=(0,0,y)$，$\overrightarrow{AE}=\left(-1,1,\frac{y}{2}\right)$.所以 $\cos\langle\overrightarrow{DP},\overrightarrow{AE}\rangle=\frac{\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{AE}}{|\overrightarrow{DP}||\overrightarrow{AE}|}=\frac{\frac{1}{2}y^2}{y\sqrt{2+\frac{y^2}{4}}}=\frac{y}{\sqrt{8+y^2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，解得 $y=2$，所以 $E(1,1,1)$.

**三、解答题**

17.**解**：由$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，根据向量加法法则，得$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OA}+\lambda\cdot\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OA}+\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+\mu(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})=(1-\lambda-\mu)\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}+\mu\overrightarrow{OC}$.根据空间向量基本定理知，一个向量在一个基底下的分解式是唯一的，故$1=1-\lambda-\mu$，$1=\lambda$，$m=\mu$，解得$\lambda=1$，$\mu=-1$，$m=-1$.所以$m+\lambda+\mu=-1$.

18.**解**：(1)$\overrightarrow{A_1O}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

$=\overrightarrow{A_1O}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$

$=\overrightarrow{A_1O}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A_1O}-\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{A_1A}$.

(2)$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{DD_1}$

$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})+\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}$

$=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}$，

所以$\overrightarrow{EO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}$.

19.**解**：(1)因为$\overrightarrow{HF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{EG}$，$\overrightarrow{EH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{GF}$，

所以四边形$EGFH$是平行四边形.

又$AC=BD$，所以四边形$EGFH$是菱形，所以$\overrightarrow{EF}\perp\overrightarrow{HG}$，故$\overrightarrow{EF}$与$\overrightarrow{GH}$的夹角为90°.

(2)由(1)，同理可证$\overrightarrow{EF}\perp\overrightarrow{MN}$，所以$EF\perp$平面$MHNG$，所以$EF\perp HN$，$EF\perp MG$，故$\overrightarrow{EF}\cdot(\overrightarrow{NH}+\overrightarrow{MG})=0$.

20.**解**：(1)由已知，得

$\overrightarrow{AB}=(-2,-1,3)$，$\overrightarrow{AC}=(1,-3,2)$，

而 $\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}$

$=\frac{(-2)\times1+(-1)\times(-3)+3\times2}{\sqrt{4+1+9}\times\sqrt{1+9+4}}=\frac{1}{2}$，

所以 $\sin\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

则 $S=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle=7\sqrt{3}$.

所以以$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$为边的平行四边形的面积为 $7\sqrt{3}$.

(2)设 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$.

由题意 $a\perp\overrightarrow{AB}$，$a\perp\overrightarrow{AC}$，

则 $a\cdot\overrightarrow{AB}=0$，$a\cdot\overrightarrow{AC}=0$，

且$|a|=\sqrt{3}$，

所以$\begin{cases}-2x-y+3z=0,\\x-3y+2z=0,\\x^2+y^2+z^2=3,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=1,\\y=1,\\z=1,\end{cases}$或$\begin{cases}x=-1,\\y=-1,\\z=-1.\end{cases}$

所以 $\boldsymbol{a}=(1,1,1)$，或 $\boldsymbol{a}=(-1,-1,-1)$.

21.**解**：以点 $D$ 为原点 $O$，$DA$，$DC$，$DD_1$分别为 $x$，$y$，$z$ 轴建立空间直角坐标系，

则 $D(0,0,0)$，$B(1,1,0)$，$A_1(1,0,\lambda)$.

设 $P(0,1,x)$，其中 $x\in[0,\lambda]$，

则$\overrightarrow{BP}=(-1,0,x)$，$\overrightarrow{A_1P}=(-1,1,x-\lambda)$.

因为 $A_1P\perp PB$，所以$\overrightarrow{A_1P}\cdot\overrightarrow{BP}=0$，

代入化简得 $x^2-\lambda x+1=0$.

由点 $P$ 唯一，得 $\Delta=\lambda^2-4=0$，且 $\lambda>0$，

解得 $\lambda=2$.

22.(1)**证明**：因为$\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}$

$=\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}\right)+\left(\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}\right)$

$=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE})+(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF})=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}$，

所以 $A$，$E$，$C_1$，$F$ 四点共面.

(2)**解**：因为$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE})=\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{DD_1}-\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BB_1}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}$，

所以 $x=-1$，$y=1$，$z=\frac{1}{3}$，

所以 $x+y+z=\frac{1}{3}$.





## 第 1 期

### 第 3~4 版同步周测参考答案

**一、选择题**

1.B

**提示**：只有④正确.

2.A

3.C

4.D

5.D

**提示**：只有选项 D 中的命题是真命题，即 $p\Rightarrow q$，故 $p$ 是 $q$ 的充分条件.

6.C

**提示**：$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$的夹角为锐角$\Rightarrow|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|>|\overrightarrow{BC}|$，且$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|>|\overrightarrow{BC}|\Rightarrow\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$的夹角为锐角，故选 C.

7.D

8.D

9.C

**提示**：对于命题 $p$，当公差 $d=0$ 时，$S_n=na_1$，此时点$(n,S_n)$在一条直线上，所以 $p$ 为假命题，逆否命题 $s$ 也为假命题.对于命题 $r$，若 $mx^2+(2m-2)x-1>0$ 的解集为 $\mathbf{R}$，则 $m\neq0$ 且$(2m-2)^2+4m<0$，无解，所以 $r$ 为假命题.故选 C.

10.C

**提示**：一次函数 $y=-\frac{m}{n}x+\frac{1}{n}$的图像同时经过第一、三、四象限$\Rightarrow-\frac{m}{n}>0$，且$\frac{1}{n}<0\Rightarrow m>0$，且 $n<0\Rightarrow mn<0$，反之不可以.故选 C.

11.C

12.D

**提示**：因为 $f(x)$是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，且 $f(-1)=-4$，

所以 $Q=\{x|f(x)<-4\}=\{x|x<-1\}$.

同理，得 $P=\{x|f(x+t)<2\}=\{x|x+t<2\}=\{x|x<2-t\}$.

因为“$x\in P$”是“$x\in Q$”的充分不必要条件，

所以 $P\subsetneqq Q$.故 $2-t<-1$，解得 $t>3$.

**二、填空题**

13.$A=60°$，$B=30°$(答案不唯一)

14.假

15.1；4

**提示**：由$|x|\leqslant m(m>0)$，可得$-m\leqslant x\leqslant m$.若 $p$ 是 $q$ 的充分条件，则$-m\geqslant-1$且 $m\leqslant4$，解得 $0<m\leqslant1$，则 $m$ 的最大值为 1；若 $p$ 是 $q$ 的必要条件，则$-m\leqslant-1$且 $m\geqslant4$，解得 $m\geqslant4$，则 $m$ 的最小值为4.

16.(0,2)

**提示**：由$\frac{x-2m}{x+m}<0(m>0)$，得 $p:x\in(-m,2m)$.由 $x(x-4)<0$，得 $q:x\in(0,4)$.

根据题意，可知上述两区间相交但不存在包含关系，结合 $m>0$，得 $0<2m<4$，所以 $m$ 的取值范围是$(0,2)$.

**三、解答题**

17.**解**：原命题可改写为：若一个函数是单调函数，则该函数不是周期函数，

故逆命题为：若一个函数不是周期函数，则该函数是单调函数；

否命题为：若一个函数不是单调函数，则该函数是周期函数；

逆否命题为：若一个函数是周期函数，则该函数不是单调函数.

18.**证明**：因为一个命题的原命题与逆否命题具有相同的真假性，所以可证明原命题为真命题.

因为 $a+b\geqslant0$，所以 $a\geqslant-b$，$b\geqslant-a$.

因为 $f(x)$是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，

所以 $f(a)\geqslant f(-b)$，$f(b)\geqslant f(-a)$，

所以 $f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$.

所以原命题为真命题，故其逆否命题为真命题.

19.**解**：若方程 $x^2+mx+1=0$ 有实数根，则 $\Delta_1=m^2-4\geqslant0$，所以 $p:m\geqslant2$ 或$m\leqslant-2$；

若方程 $4x^2+4(m-2)x+1=0$ 无实数根，则 $\Delta_2=16(m-2)^2-16<0$，所以 $q:1<m<3$.

由 $p$ 真 $q$ 假，得$\begin{cases}m\geqslant2\text{ 或 }m\leqslant-2,\\m\geqslant3\text{ 或 }m\leqslant1,\end{cases}$

所以 $m\geqslant3$ 或 $m\leqslant-2$；

由 $p$ 假 $q$ 真，得$\begin{cases}-2<m<2,\\1<m<3,\end{cases}$

所以 $1<m<2$.

所以实数 $m$ 的取值范围为$(-\infty,-2]\cup(1,2)\cup[3,+\infty)$.

20.**解**：由$(x-1+m)(x-1-m)\geqslant0$，其中 $m>0\Rightarrow p:x\in\{x|x\geqslant1+m$ 或 $x\leqslant1-m\}$.

由 $x=n+\frac{1}{n}$，结合基本不等式，

得 $q:x\in\{x|x\geqslant2$ 或 $x\leqslant-2\}$.

又 $p$ 是 $q$ 的必要条件，即 $q\Rightarrow p$，

故$\{x|x\geqslant2$ 或 $x\leqslant-2\}\subseteq\{x|x\geqslant1+m$ 或 $x\leqslant1-m\}$，

所以 $1-m\geqslant-2$ 且 $1+m\leqslant2$，

又 $m>0$，故 $0<m\leqslant1$.

所以实数 $m$ 的取值范围是$(0,1]$.

21.**证明**：充分性：因为 $a+b=0$，

所以 $S_n=aq^n+b=aq^n-a$，

所以 $a_n=S_n-S_{n-1}=(aq^n-a)-(aq^{n-1}-a)=a(q-1)q^{n-1}(n>1)$.

又 $a_1=aq-a=a(q-1)$满足上式，

所以 $a_n=a(q-1)q^{n-1}(n\in\mathbf{N}_+)$.

所以$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a(q-1)q^n}{a(q-1)q^{n-1}}=q$.

故数列$\{a_n\}$是公比为 $q$ 的等比数列.

必要性：因为数列$\{a_n\}$是公比为 $q$ 的等比数列，

所以 $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1}{1-q}-\frac{a_1}{1-q}q^n$.

因为 $S_n=aq^n+b$，

所以 $a=-\frac{a_1}{1-q}$，$b=\frac{a_1}{1-q}$.

所以 $a+b=0$.

综上，结论得证.

22.**解**：(1)由题设，得 $A=\left(0,\frac{1}{\square}\right)$，$B=(-1,4)$，$C=\left(0,\frac{1}{3}\right)$.

由 $A$ 是 $B$ 成立的充分不必要条件，知 $A\subsetneqq B$，故$\frac{1}{\square}\leqslant4$.

又$\square>0$，所以$\square\geqslant\frac{1}{4}$.　　①

由 $A$ 是 $C$ 成立的必要不充分条件，知 $C\subsetneqq A$，故$\frac{1}{\square}>\frac{1}{3}$，得$\square<3$.　　②

由①②及$\square$是正整数，得$\square=1$ 或2.

(2)$D=\{x|x^2+(a-8)x-8a\leqslant0\}=\{x|(x+a)(x-8)\leqslant0\}$.

当$\square=1$ 时，$A=(0,1)$，此时 $A\cap D=\left(0,\frac{1}{2}\right)$不可能成立.

当$\square=2$ 时，$A=\left(0,\frac{1}{2}\right)$，此时要使 $A\cap D=\left(0,\frac{1}{2}\right)$，则$-a\leqslant0$，即 $a\geqslant0$.

故使得 $A\cap D=\left(0,\frac{1}{2}\right)$的一个必要不充分条件是 $a\in[-1,+\infty)$.(答案不唯一)

## 第 2 期

### 第 3~4 版同步周测参考答案

**一、选择题**

1.B　2.A　3.C

4.B

**提示**:由已知,得 $p$ 真 $q$ 假.

5.A

**提示**:若 $p$ 且 $q$ 为真命题,则 $p,q$ 都是真命题.所以 $p$ 或 $q$ 为真命题.反之,则不一定成立,故选 A.

6.B

**提示**:③为假.

7.A

8.C

**提示**:分以下几类讨论:(1)若 $p$ 真 $q$ 真,则“非 $p$”,“非 $q$”为假命题,“$p$ 或 $q$”,“$p$ 且 $q$”为真命题,$a=b=2$;(2)若 $p$ 假 $q$ 假,则“非 $p$”,“非 $q$”为真,“$p$ 或 $q$”,“$p$ 且 $q$”为假,$a=b=2$;(3)若 $p,q$ 中一真一假,不妨以 $p$ 真 $q$ 假为例,则“非 $p$”,“$p$ 且 $q$”为假,“非 $q$”,“$p$ 或 $q$”为真,$a=b=2$.

9.D

**提示**:$\sqrt{3}\in A\cup B$ 的否定是:$\sqrt{3}\notin A\cup B$,所以 $\sqrt{3}\notin A$ 且 $\sqrt{3}\notin B$,即 $\sqrt{3}\in(\complement_S A)\cap(\complement_S B)$.

10.C

**提示**:由题知 $x_0=-\dfrac{b}{2a}$ 为二次函数 $f(x)$ 图像的对称轴方程,又 $a>0$,所以 $f(x_0)$ 为函数的最小值,即对所有的实数 $x$,都有 $f(x)\geqslant f(x_0)$.因此 C 是错误的.

11.D

**提示**:$ax^2-2ax-3\leqslant 0$ 恒成立,当 $a=0$ 时,$-3\leqslant 0$ 成立;

当 $a\neq 0$ 时,

$\begin{cases}a<0,\\ \Delta=4a^2+12a\leqslant 0,\end{cases}$ 得 $-3\leqslant a<0$,

所以 $-3\leqslant a\leqslant 0$.

12.B

**提示**:$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$,显然 C、D 为真;$\sin\alpha\cdot\sin\beta=0$ 时,A 为真;B 为假.故选 B.

**二、填空题**

13.存在 $x<0$,使得 $(1+x)(1-9x^2)>0$

14.“$p$ 且 $q$”“$\neg q$”,“$p$ 或 $q$”“$\neg p$”

**提示**:因为命题 $p$ 假,命题 $q$ 真,所以命题“$p$ 且 $q$”假,命题“$p$ 或 $q$”真,“$\neg p$”真,“$\neg q$”假.

15.平行四边形不一定是菱形

**提示**:$p$:“平行四边形一定是菱形”是假命题,这里“一定是”的否定是用“一定不是”还是“不一定是”?若为“平行四边形一定不是菱形”,仍为假命题,与真值表相违,故原命题的“$\neg p$”为“平行四边形不一定是菱形”,是一个真命题.

16.$\{a\mid a\leqslant -2$,或 $a=1\}$

**三、解答题**

17.**解**:(1)本题隐含了全称量词“所有的”,其实命题应为“所有的指数函数都是单调函数”,是全称命题,且为真命题.

(2)命题中含有存在量词“至少有一个”,因此是特称命题,真命题.

(3)命题中含有全称量词“任意”,是全称命题,真命题.

(4)命题中含有存在量词“存在”,是特称命题,真命题.

18.**解**:若 $p$ 为真命题,则 $1\in\{x\mid x^2<a\}$,故 $1^2<a$,即 $a>1$;若 $q$ 为真命题,则 $2\in\{x\mid x^2<a\}$,即 $a>4$.

(1)若“$p$ 且 $q$”为真命题,则 $p$ 真 $q$ 真,

故 $a>1$ 且 $a>4$,即 $a>4$.

所以实数 $a$ 的取值范围是 $(4,+\infty)$.

(2)若“$p$ 或 $q$”为真命题,

则 $a>1$ 或 $a>4$,即 $a>1$.

所以实数 $a$ 的取值范围是 $(1,+\infty)$.

19.**解**:$\neg p$:任意 $x\in\mathbf{R}$,$\lg(ax^2+2x+1)$ 有意义,

即对一切 $x\in\mathbf{R}$,$ax^2+2x+1>0$ 恒成立.

又 $a=0$ 时,不合题意,

所以 $\begin{cases}a>0,\\ \Delta<0,\end{cases}$ 解得 $a>1$.

所以实数 $a$ 的取值范围是 $(1,+\infty)$.

20.**解**:先简化命题 $p,q$,构建关于 $a$ 的关系式.

由 $x^2+2ax+4>0$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立,

得 $\Delta=(2a)^2-4\times 4<0$,解得 $-2<a<2$.

所以 $p$:$-2<a<2$.

由 $y=-(4-2a)^x$ 是 R 上的减函数,

得 $4-2a>1$,解得 $a<\dfrac{3}{2}$.

所以 $q$:$a<\dfrac{3}{2}$.

由“$p$ 或 $q$”为真,“$p$ 且 $q$”为假,知 $p$ 与 $q$ 中必有一真一假,即 $p$ 真 $q$ 假,或 $p$ 假 $q$ 真.

所以 $\begin{cases}-2<a<2,\\ a\geqslant\dfrac{3}{2},\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a\leqslant -2,\text{或 } a\geqslant 2,\\ a<\dfrac{3}{2},\end{cases}$

解得 $\dfrac{3}{2}\leqslant a<2$,或 $a\leqslant -2$.

所以,实数 $a$ 的取值范围是 $(-\infty,-2]\cup\left[\dfrac{3}{2},2\right)$.

21.**解**:对于①,$2^{-x^2+ax-\frac{25}{4}}>1$,即 $-x^2+ax-\dfrac{25}{4}>0$,故 $x^2-ax+\dfrac{25}{4}<0$,要使不等式的解集为空集,$\Delta=a^2-25\leqslant 0$,解得 $-5\leqslant a\leqslant 5$.

对于②,当 $a=3$ 时,不等式的解集为 $\{x\mid x>1\}$,不是空集;当 $a\neq 3$ 时,要使不等式 $(a-3)x^2+(a-2)x-1>0$ 的解集为空集.

则 $\begin{cases}a-3<0,\\ (a-2)^2+4(a-3)\leqslant 0,\end{cases}$

解得 $-2\sqrt{2}\leqslant a\leqslant 2\sqrt{2}$.

对于③,因为 $x^2+\dfrac{1}{x^2}\geqslant 2\sqrt{x^2\cdot\dfrac{1}{x^2}}=2$,

当且仅当 $x^2=1$,即 $x=\pm1$ 时取等号.

所以不等式 $a>x^2+\dfrac{1}{x^2}$ 的解集为空集时,$a\leqslant 2$.

因此,当三个不等式的解集都为空集时,$-2\sqrt{2}\leqslant a\leqslant 2$.

所以要使三个不等式至多有两个不等式的解集为空集,则实数 $a$ 的取值范围是 $\{a\mid a<-2\sqrt{2}$,或 $a>2\}$.

22.**解**:(1)当 $a>0$ 时,$\{x\mid x^2-4ax+3a^2<0\}=\{x\mid (x-3a)(x-a)<0\}=\{x\mid a<x<3a\}$,如果 $a=1$,则命题 $p$ 所对应的集合是 $A=\{x\mid 1<x<3\}$;而 $\{x\mid x^2-x-6\leqslant 0$,且 $x^2+2x-8>0\}=\{x\mid 2<x\leqslant 3\}$,所以命题 $q$ 所对应的集合是 $B=\{x\mid 2<x\leqslant 3\}$.

因为 $p$ 且 $q$ 为真,所以 $A\cap B=\{x\mid 1<x<3\}\cap\{x\mid 2<x\leqslant 3\}=\{x\mid 2<x<3\}$.

故实数 $x$ 的取值范围是 $\{x\mid 2<x<3\}$.

(2)因为 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的充分不必要条件,所以 $q$ 是 $p$ 的充分不必要条件.由(1)知,$\{x\mid 2<x\leqslant 3\}\subsetneqq\{x\mid a<x<3a\}(a>0)$,所以 $a\leqslant 2$ 且 $3<3a$,解得 $1<a\leqslant 2$.

故实数 $a$ 的取值范围是 $\{a\mid 1<a\leqslant 2\}$.





## 第 3 期

### 第 2~3 版章节测试参考答案

**一、选择题**

1.B

2.D

**提示**:①等底等高的三角形都是面积相等的三角形,但不一定全等;②当 $x,y$ 中一个为零,另一个不为零时,$|x|+|y|\neq 0$;③当 $c=0$ 时不成立;④菱形的对角线互相垂直,矩形的对角线不一定垂直.

3.A

4.D

5.C

6.A

**提示**:因为 $a>0,b>0$,所以 $4\geqslant a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$,得 $ab\leqslant 4$;若 $a=4,b=\dfrac{1}{4}$,则 $ab=1\leqslant 4$,但 $a+b=4+\dfrac{1}{4}>4$,所以“$a+b\leqslant 4$”是“$ab\leqslant 4$”的充分不必要条件.

7.D

**提示**:由 $\neg p$ 是真命题,得 $p$ 是假命题.又 $p$ 或 $q$ 是真命题,所以 $q$ 是真命题.

8.B

9.B

**提示**:$a^2>b^2$,$\dfrac{a}{b}<1$ 不能推出 $a>b$,$\left(\dfrac{1}{2}\right)^a<\left(\dfrac{1}{2}\right)^b\Leftrightarrow a>b$.

10.A

**提示**:作出平面区域 $D$,可知 $p$ 是真命题,则 $\neg p$ 是假命题;$q$ 是假命题,则 $\neg q$ 是真命题.所以 $p$ 或 $q$ 真,$\neg p$ 或 $q$ 假,$p$ 且 $\neg q$ 真,$\neg p$ 且 $\neg q$ 假.故选 A.

11.C

**提示**:$A=\{x\mid -1<x<1\}$;当 $a=1$ 时,$B=\{x\mid b-1<x<3\}$.若“$a=1$”是“$A\cap B\neq\varnothing$”的充分而不必要条件,则 $b$ 必须满足条件 $b-1<1\Rightarrow b<2$.所以 $b$ 的取值范围可以是 $\{b\mid b<2\}$ 或其子集.故选 C.

12.A

**提示**:由题设,知任意 $x\in\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right]$,使得 $2\sqrt{3}\cos^2x+\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)+m>0$,

即 $2\sqrt{3}\cos^2x+\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)>-m$.

设 $y=2\sqrt{3}\cos^2x+\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}(1+\cos2x)+\dfrac{1}{2}\sin2x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos2x=\dfrac{1}{2}\sin2x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos2x+\sqrt{3}=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}$.

由 $x\in\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right]$,知 $2x+\dfrac{\pi}{3}\in\left[\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{4\pi}{3}\right]$,从而 $\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)\in\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$,$y\in\left[\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right]$.

所以 $-m<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,即 $m>-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

故选 A.

**二、填空题**

13.3

**提示**:由 $\dfrac{a_n+a_{n+1}}{2}<a_n$,得 $a_{n+1}<a_n$,所以数列 $\{a_n\}$ 为递减数列,故原命题是真命题,其逆否命题为真命题.易知原命题的逆命题为真命题,所以其否命题也为真命题.

14.方向相同或相反的两个向量共线

15.$[1,2)$

**提示**:两个都是假命题,则

$\begin{cases}x<2\text{ 或 }x>5,\\ 1\leqslant x\leqslant 4\end{cases}\Rightarrow 1\leqslant x<2$.

16.$(-4,0)$

**提示**:由 $g(x)<0$ 得 $2^x-2<0$,$x<1$.

又因为任意 $x\in\mathbf{R}$,使得 $f(x)<0$ 或 $g(x)<0$,所以 $f(x)=m(x-2m)(x+m+3)<0$ 在 $x\geqslant 1$ 时恒成立,所以 $\begin{cases}m<0,\\ -m-3<1,\\ 2m<1,\end{cases}$ 解得 $-4<m<0$.

**三、解答题**

17.**证明**:将“若 $m^2+n^2=2$,则 $m+n\leqslant 2$”视为原命题,则它的逆否命题为“若 $m+n>2$,则 $m^2+n^2\neq 2$”.

因为 $m+n>2$,

所以 $m^2+n^2\geqslant\dfrac{1}{2}(m+n)^2>\dfrac{1}{2}\times 2^2=2$,

所以 $m^2+n^2\neq 2$.

所以原命题的逆否命题是真命题,

从而原命题也为真命题,得证.

18.**证明**:充分性:

因为 $A,B$ 为锐角,且 $A+B=\dfrac{\pi}{4}$,

所以 $\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=1$,

可得 $\tan A+\tan B=1-\tan A\tan B$,

所以 $(1+\tan A)(1+\tan B)$

$=1+\tan A+\tan B+\tan A\tan B$

$=1+(1-\tan A\tan B)+\tan A\tan B$

$=2$.

必要性:

因为 $(1+\tan A)(1+\tan B)=2$,

所以 $\tan A+\tan B=1-\tan A\tan B$,

故 $\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=1$.

因为 $A,B$ 为锐角,所以 $0<A+B<\pi$,

从而 $A+B=\dfrac{\pi}{4}$.

综上可知,$A+B=\dfrac{\pi}{4}$ 为 $(1+\tan A)\cdot(1+\tan B)=2$ 的充要条件.

19.**解**:(1)由 $p$ 为真命题,

得 $0<a-\dfrac{3}{2}<1$,

解得 $\dfrac{3}{2}<a<\dfrac{5}{2}$.

故 $a$ 的取值范围是 $\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{2}\right)$.

(2)任意 $x\in\mathbf{R}$,有 $|x-1|\geqslant 0$,

故 $0<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{|x-1|}\leqslant 1$.

由 $q$ 为真命题,得 $a>1$.

故 $a$ 的取值范围是 $(1,+\infty)$.

(3)因为“$p$ 且 $q$”为假命题,“$p$ 或 $q$”为真命题,所以 $p,q$ 一真一假.

若 $p$ 真 $q$ 假,则 $a$ 不存在;

若 $p$ 假 $q$ 真,则 $1<a\leqslant\dfrac{3}{2}$ 或 $a\geqslant\dfrac{5}{2}$.

故 $a$ 的取值范围是

$\left(1,\dfrac{3}{2}\right]\cup\left[\dfrac{5}{2},+\infty\right)$.

20.**解**:(1)由 $M\cap P=\{x\mid 5<x\leqslant 8\}$,得 $-3\leqslant a\leqslant 5$,因此 $M\cap P=\{x\mid 5<x\leqslant 8\}$ 的充要条件是 $\{a\mid -3\leqslant a\leqslant 5\}$.

(2)求实数 $a$ 的一个值,使它成为 $M\cap P=\{x\mid 5<x\leqslant 8\}$ 的一个充分而不必要条件,就是在集合 $\{a\mid -3\leqslant a\leqslant 5\}$ 中取一个值,如取 $a=0$,此时必有 $M\cap P=\{x\mid 5<x\leqslant 8\}$;反之,$M\cap P=\{x\mid 5<x\leqslant 8\}$ 不一定有 $a=0$,故 $a=0$ 是 $M\cap P=\{x\mid 5<x\leqslant 8\}$ 的一个充分不必要条件.

(3)求实数 $a$ 的取值范围,使它成为 $M\cap P=\{x\mid 5<x\leqslant 8\}$ 的一个必要不充分条件就是另求一个集合,使 $\{a\mid -3\leqslant a\leqslant 5\}$ 是它的一个真子集.

如果 $\{a\mid a\leqslant 5\}$,则不一定有 $M\cap P=\{x\mid 5<x\leqslant 8\}$,但是 $M\cap P=\{x\mid 5<x\leqslant 8\}$ 时,必有 $a\leqslant 5$,故 $\{a\mid a\leqslant 5\}$ 是 $M\cap P=\{x\mid 5<x\leqslant 8\}$ 的一个必要不充分条件.

21.**解**:(1)因为 $f(x)+g(x)=a^2x^3+x^2+a^3$,　①

又 $f(x)$ 为奇函数,$g(x)$ 为偶函数,

所以 $-f(x)+g(x)=-a^2x^3+x^2+a^3$.　②

由①②,解得 $f(x)=a^2x^3$,$g(x)=x^2+a^3$ $(a\neq 0)$.

(2)若 $p$ 真,易知 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上是增函数,所以 $[f(x)]_{\min}=f(1)=a^2\geqslant 1$,解得 $a\leqslant -1$ 或 $a\geqslant 1$.

若 $q$ 真,对于 $x\in[-2,3]$,$[g(x)]_{\max}=g(3)=9+a^3\geqslant 17$,解得 $a\geqslant 2$.

若 $p$ 或 $q$ 为假命题,则 $p$ 假 $q$ 假,

所以 $a\in(-1,1)\cap(-\infty,2)=(-1,1)$.

故 $p$ 或 $q$ 为真命题时,$a\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

22.**解**:(1)若 $\{a_n\}$ 为递增数列,则 $a_{n+1}>a_n$,即 $3^{n+1}-m\cdot 2^{n+1}>3^n-m\cdot 2^n$.

化简,可得 $m<2\times\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$.

易知函数 $f(n)=2\times\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$ 是增函数,

所以 $f(n)\geqslant f(1)=3$.

所以 $m<3$.

又 $m>0$,所以 $m$ 的取值范围是 $(0,3)$.

(2)若 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要不充分条件,

则 $p$ 是 $q$ 的充分不必要条件.

当直线 $l$ 与圆 $O$ 相交时,有 $\dfrac{|m|}{2}<r$.

所以 $r\geqslant\dfrac{3}{2}$.

故 $r$ 的取值范围是 $\left[\dfrac{3}{2},+\infty\right)$.