第 8 期

第 3~4 版同步周测参考答案

一、选择题

1~6.ACABBD　7~12.CCACCA

二、填空题

13.$y^2=20x$

14.$\left(-\frac{7}{16},0\right)$

15.$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

16.2

三、解答题

17.**解**:(1)因为点$(-3,2)$在第二象限,所以抛物线的开口方向向左或向上,设所求抛物线的标准方程为$y^2=-2ax$ $(a>0)$或$x^2=2py(p>0)$.因为过点$(-3,2)$,所以$4=-2a\times(-3)$,或$9=2p\times2$,解得$a=\frac{2}{3}$,或$p=\frac{9}{4}$.所以所求抛物线的标准方程为$y^2=-\frac{4}{3}x$,或$x^2=\frac{9}{2}y$.

(2)令$x=0$,则$y=-2$;令$y=0$,则$x=4$.当焦点坐标为$(4,0)$时,所求抛物线的标准方程为$y^2=16x$;当焦点坐标为$(0,-2)$时,所求抛物线的标准方程为$x^2=-8y$.

18.**解**:设$B\left(x,\frac{x^2}{2p}\right)$,又$F\left(0,\frac{p}{2}\right)$,

则$x+0=2\sqrt{3}$,即$x=2\sqrt{3}$.

所以$B\left(2\sqrt{3},\frac{6}{p}\right)$.

因为$|BF|=2|AF|$,结合抛物线的定义,得$\frac{6}{p}+\frac{p}{2}=2\sqrt{3+\frac{p^2}{4}}$,解得$p=\pm2$.又$p>0$,所以$p=2$.

19.**解**:由$y^2=4x$,得$p=2$,其准线方程为$x=-1$,焦点为$F(1,0)$.

(1)由抛物线的定义可知,

$|AF|=x_1+\frac{p}{2}$,从而$x_1=4-1=3$.

代入$y^2=4x$中,解得$y_1=\pm2\sqrt{3}$.

所以点A的坐标为$(3,2\sqrt{3})$或$(3,-2\sqrt{3})$.

(2)当直线l的斜率存在时,

设直线l的方程为$y=k(x-1)$.

与抛物线方程联立并消去y,

整理得$k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$,

则$x_1+x_2=2+\frac{4}{k^2}$.

所以$|AB|=x_1+x_2+p=4+\frac{4}{k^2}>4$.

当直线l的斜率不存在时,直线l的方程为$x=1$,此时$|AB|=4$,

所以$|AB|\geqslant4$,即线段AB的长的最小值为4.

20.**解**:(1)设直线l的方程为$y=\frac{3}{2}(x-t)$,将其代入抛物线$y^2=3x$,得$3x^2-(6t+4)x+3t^2=0$.

设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,

则$x_1+x_2=2t+\frac{4}{3}$,$x_1x_2=t^2$,

由抛物线的定义,可得$|AF|+|BF|=x_1+x_2+p=2t+\frac{4}{3}+\frac{3}{2}=4$,解得$t=\frac{7}{12}$,所以直线l的方程为$y=\frac{3}{2}x-\frac{7}{8}$.

(2)若$\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}$,则$y_1=-3y_2$,

所以$\frac{3}{2}\cdot(x_1-t)=-3\times\frac{3}{2}(x_2-t)$,

化简得$x_1=-3x_2+4t$,

结合$x_1+x_2=2t+\frac{4}{3}$,$x_1x_2=t^2$,

解得$t=1$,$x_1=3$,$x_2=\frac{1}{3}$,

所以$|AB|=\sqrt{1+\frac{9}{4}}\times\sqrt{\left(3+\frac{1}{3}\right)^2-4}=\frac{4\sqrt{13}}{3}$.

21.(1)**解**:联立$x^2=-y$与$y=kx-3$,

得$x^2+kx-3=0$.

因为$\Delta_1=k^2+12>0$,

所以l与抛物线$x^2=-y$恒有2个交点.

若$m\geqslant3$,则l与抛物线$x^2=4y$至少有1个交点.

联立$x^2=4y$与$y=kx-3$,得$x^2-4kx+12=0$.

所以$\Delta_2=16k^2-48\geqslant0$.结合$k>0$,得$k\geqslant\sqrt{3}$.所以$k$的最小值为$\sqrt{3}$.

(2)**证明**:若$m=3$,则l与抛物线$x^2=4y$只有1个交点.

结合(1),可知$k=\sqrt{3}$,$A(2\sqrt{3},3)$.

由于$F(0,1)$为抛物线$x^2=4y$的焦点,

则$|\overrightarrow{FA}|=3+1=4$.

设$B(x_1,y_1)$,$C(x_2,y_2)$,

则$x_1+x_2=-k=-\sqrt{3}$,$x_1x_2=-3$.

所以$y_1+y_2=k(x_1+x_2)-6=-9$,$y_1y_2=(kx_1-3)(kx_2-3)=k^2x_1x_2-3k(x_1+x_2)+9=9$.

所以$\overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{FC}=x_1x_2+(y_1-1)(y_2-1)=x_1x_2+y_1y_2-(y_1+y_2)+1=16$.

所以$\overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{FC}=|\overrightarrow{FA}|^2$.

22.**解**:(1)由抛物线的性质,可得$\frac{p}{2}=1$,所以$p=2$,所以抛物线的准线方程为$x=-1$.

(2)设$A(x_A,y_A)$,$B(x_B,y_B)$,$C(x_C,y_C)$,重心$G(x_G,y_G)$.由(1)知抛物线方程为$y^2=4x$.

令$y_A=2t$,$t\neq0$,则$x_A=t^2$,由于直线AB过F,故直线AB的方程为$x=\frac{t^2-1}{2t}\cdot y+1$,

代入$y^2=4x$,得$y^2-\frac{2(t^2-1)}{t}y-4=0$,

所以$y_A\cdot y_B=2ty_B=-4$,即$y_B=-\frac{2}{t}$,

所以$B\left(\frac{1}{t^2},-\frac{2}{t}\right)$,

又$x_G=\frac{1}{3}(x_A+x_B+x_C)$,$y_G=\frac{1}{3}(y_A+y_B+y_C)$,因为重心G在x轴上,所以$2t-\frac{2}{t}+y_C=0$,

所以$C\left(\left(\frac{1}{t}-t\right)^2,2\left(\frac{1}{t}-t\right)\right)$,

$G\left(\frac{2t^4-2t^2+2}{3t^2},0\right)$,所以直线AC的方程为$y-2t=2t(x-t^2)$,得$Q(t^2-1,0)$,因为Q在焦点F的右侧,所以$t^2>2$,

所以$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{1}{2}|FG|\cdot|y_A|}{\frac{1}{2}|QG|\cdot|y_C|}$

$=\frac{\left|\frac{2t^4-5t^2+2}{3t^2}\right|\cdot|2t|}{\left|t^2-1-\frac{2t^4-2t^2+2}{3t^2}\right|\cdot\left|\frac{2}{t}-2t\right|}$

$=\frac{2t^4-t^2}{t^4-1}=2-\frac{t^2-2}{t^4-1}$.

令$m=t^2-2$,则$m>0$,$\frac{S_1}{S_2}=2-\frac{m}{m^2+4m+3}=2-\frac{1}{m+\frac{3}{m}+4}\geqslant2-\frac{1}{2\sqrt{m\cdot\frac{3}{m}}+4}=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以当且仅当$m=\sqrt{3}$时,$\frac{S_1}{S_2}$取得最小值,最小值为$1+\frac{\sqrt{3}}{2}$,此时$G(2,0)$.

第 5 期

第 3~4 版同步周测参考答案

一、选择题

1~6.BCBABC　7~12.BBBBDC

二、填空题

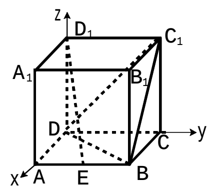
13.$\frac{\pi}{2}$或$\frac{\pi}{3}$　14.$\frac{\sqrt{3}}{3}$,45°,45°

15.$4\pm\sqrt{15}$　16.3

三、解答题

17.**证明**:以A为坐标原点,AB,AD,AP所在直线分别为x,y,z轴建立空间直角坐标系,设PA=AD=a,AB=b,则$P(0,0,a)$,$D(0,a,0)$,$C(b,a,0)$,$M\left(\frac{b}{2},\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$,$N\left(\frac{b}{2},0,0\right)$,所以$\overrightarrow{MN}=\left(0,-\frac{a}{2},-\frac{a}{2}\right)$,$\overrightarrow{PD}=(0,a,-a)$,$\overrightarrow{PC}=(b,a,-a)$.易知$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{PD}=0$且$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{PC}=0$,即$\overrightarrow{MN}$是平面PCD的一个法向量,所以$MN\perp$平面PCD.

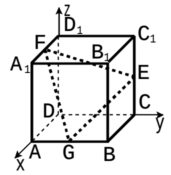
18.**解**:建立如图所示的空间直角坐标系,则$B(1,1,0)$,$C_1(0,1,1)$,$D_1(0,0,1)$,$E\left(1,\frac{1}{2},0\right)$.



(第 18 题图)

所以$\overrightarrow{D_1E}=\left(1,\frac{1}{2},-1\right)$,$\overrightarrow{DB}=(1,1,0)$,$\overrightarrow{DC_1}=(0,1,1)$.设$n=(x,y,z)$是平面$BC_1D$的法向量,则$\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{DB}=0,\\n\cdot\overrightarrow{DC_1}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}x+y=0,\\y+z=0.\end{cases}$令$y=-1$,得$n=(1,-1,1)$.设$D_1E$与平面$BC_1D$的夹角为$\theta$,则$\sin\theta=\left|\cos\langle\overrightarrow{D_1E},n\rangle\right|=\left|\frac{\overrightarrow{D_1E}\cdot n}{|\overrightarrow{D_1E}||n|}\right|=\left|\frac{1-\frac{1}{2}-1}{\frac{3}{2}\times\sqrt{3}}\right|=\frac{\sqrt{3}}{9}$.所以$D_1E$与平面$BC_1D$的夹角的正弦值为$\frac{\sqrt{3}}{9}$.

19.**解**:如图建立空间直角坐标系,



(第 19 题图)

则$A(a,0,0)$,$E\left(0,a,\frac{a}{2}\right)$,$F\left(\frac{a}{2},0,a\right)$,$G\left(a,\frac{a}{2},0\right)$,所以$\overrightarrow{EF}=\left(\frac{a}{2},-a,\frac{a}{2}\right)$,$\overrightarrow{EG}=\left(a,-\frac{a}{2},-\frac{a}{2}\right)$,$\overrightarrow{GA}=\left(0,-\frac{a}{2},0\right)$.设$n=(x,y,z)$是平面EFG的一个法向量,

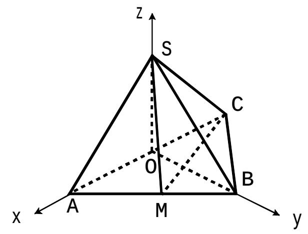
则$\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{EF}=0,\\n\cdot\overrightarrow{EG}=0,\end{cases}$所以$\begin{cases}x-2y+z=0,\\2x-y-z=0,\end{cases}$

所以$x=y=z$,可取$n=(1,1,1)$,

所以$d=\frac{|\overrightarrow{GA}\cdot n|}{|n|}=\frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}a$,

即点A到平面EFG的距离为$\frac{\sqrt{3}}{6}a$.

20.**解**:(1)取AC的中点O为坐标原点,建立空间直角坐标系(如图所示),则$A(2,0,0)$,$C(-2,0,0)$,$S(0,0,2)$,$B(0,2\sqrt{3},0)$,$M(1,\sqrt{3},0)$,



(第 20 题图)

所以$\overrightarrow{MS}=(-1,-\sqrt{3},2)$,$\overrightarrow{MC}=(-3,-\sqrt{3},0)$,$\overrightarrow{OS}=(0,0,2)$.

设$n=(x,y,z)$是平面SMC的一个法向量,则$\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{MS}=0,\\n\cdot\overrightarrow{MC}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-x-\sqrt{3}y+2z=0,\\-3x-\sqrt{3}y=0.\end{cases}$

令$x=-1$,得$n=(-1,\sqrt{3},1)$.

取$\overrightarrow{OS}$为平面AMC的法向量,所以$\cos\langle\overrightarrow{OS},n\rangle=\frac{\overrightarrow{OS}\cdot n}{|\overrightarrow{OS}||n|}=\frac{2}{2\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

所以平面SCM与平面ACM夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{5}}{5}$.

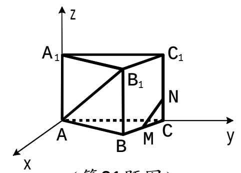
(2)因为$\overrightarrow{MB}=(-1,\sqrt{3},0)$,由(1)知平面SMC的法向量为$n=(-1,\sqrt{3},1)$,所以点B到平面SMC的距离

$d=\frac{|\overrightarrow{MB}\cdot n|}{|n|}=\frac{|1+3+0|}{\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

21.**解**:如图,以点A为原点,AC,AA_1所在直线分别为y,z轴,过A点垂直于AC的直线为x轴,建立空间直角坐标系A-xyz.因为正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的所有棱长都是2,所以$A(0,0,0)$,$B_1(\sqrt{3},1,2)$,$B(\sqrt{3},1,0)$,$C(0,2,0)$,所以$M\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},0\right)$.

假设在侧棱CC_1上存在点N,使得异面直线AB_1和MN所成的角等于45°,可设$N(0,2,m)(0\leqslant m\leqslant2)$,则$\overrightarrow{AB_1}=(\sqrt{3},1,2)$,$\overrightarrow{MN}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},m\right)$,所以$|\overrightarrow{AB_1}|=2\sqrt{2}$,$|\overrightarrow{MN}|=\sqrt{m^2+1}$,$\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{MN}=2m-1$.因为异面直线$AB_1$和MN所成的角等于45°,所以$\overrightarrow{AB_1}$和$\overrightarrow{MN}$的夹角是45°或135°.又因为$\cos\langle\overrightarrow{AB_1},\overrightarrow{MN}\rangle=\frac{\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{MN}}{|\overrightarrow{AB_1}|\cdot|\overrightarrow{MN}|}=\frac{2m-1}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{m^2+1}}$,所以$\frac{2m-1}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{m^2+1}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$,解得$m=-\frac{3}{4}$.

但$-\frac{3}{4}\notin[0,2]$,所以点N不在侧棱CC_1上,即在侧棱CC_1上不存在点N,使得异面直线AB_1和MN的夹角等于45°.

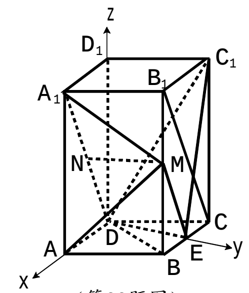


(第21题图)

22.(1)**证明**:连接B_1C,ME.因为M,E分别为BB_1,BC的中点,所以$ME\parallel B_1C$,且$ME=\frac{1}{2}B_1C$.又因为N为A_1D的中点,所以$ND=\frac{1}{2}A_1D$.由题设知$A_1B_1\underline{\mathbin{/\!/}}DC$,所以四边形$A_1B_1CD$为平行四边形,所以$B_1C\underline{\mathbin{/\!/}}A_1D$,故$ME\underline{\mathbin{/\!/}}ND$,因此四边形$MNDE$为平行四边形,$MN\parallel ED$.又$MN\not\subseteq$平面$EDC_1$,所以$MN\parallel$平面$C_1DE$.

(2)**解**:连接BD,因为四边形$ABCD$为菱形,$\angle BAD=60°$,所以$BD=CD$,所以$DE\perp DA$.

以D为坐标原点,$\overrightarrow{DA}$的方向为x轴正方向,建立如图所示的空间直角坐标系$D-xyz$,则$A(2,0,0)$,$A_1(2,0,4)$,$M(1,\sqrt{3},2)$,$N(1,0,2)$,$\overrightarrow{A_1A}=(0,0,-4)$,$\overrightarrow{A_1M}=(-1,\sqrt{3},-2)$,$\overrightarrow{A_1N}=(-1,0,-2)$,$\overrightarrow{MN}=(0,-\sqrt{3},0)$.



(第22题图)

设$\boldsymbol{m}=(x,y,z)$为平面A_1MA的法向量,

则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1M}=0,\\\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1A}=0,\end{cases}$

所以$\begin{cases}-x+\sqrt{3}y-2z=0,\\-4z=0.\end{cases}$

可取$\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},1,0)$.

设$\boldsymbol{n}=(p,q,r)$为平面A_1MN的法向量,

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MN}=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1N}=0,\end{cases}$

所以$\begin{cases}-\sqrt{3}q=0,\\-p-2r=0.\end{cases}$可取$\boldsymbol{n}=(2,0,-1)$.

于是$\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{2\times\sqrt{3}}{2\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$,

所以二面角$A-MA_1-N$的正弦值为$\frac{\sqrt{10}}{5}$.

②

第 6 期

第 2~3 版章节测试参考答案

一、选择题

1~6.DBDBCC　　7~12.CCDBCB

二、填空题

13.$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　14.$\frac{5}{6}$

15.$\pm\sqrt{39}$　　16.3

三、解答题

17. **解**：$\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$，

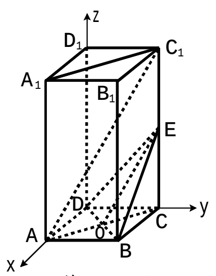
所以$(\overrightarrow{AC'})^2=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'})^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{AA'}^2+2(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA'})=25+9+49+2(5\times3\cos60^\circ+5\times7\cos45^\circ+3\times7\cos45^\circ)=98+56\sqrt{2}$，

所以$|\overrightarrow{AC'}|=\sqrt{98+56\sqrt{2}}$，

即AC′的长为$\sqrt{98+56\sqrt{2}}$.

18.(1)**证明**：连接AC，交BD于点O，连接OE，因为正四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，四边形$ABCD$是正方形，所以O是AC中点，因为E为CC_1的中点，所以$OE/\!/AC_1$，因为$AC_1\not\subseteq$平面BDE，$OE\subsetneqq$平面BDE，所以$AC_1/\!/$平面BDE.

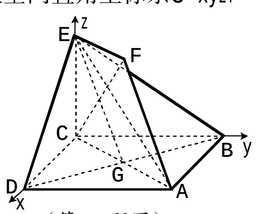
(2)**解**：以D为原点，DA所在直线为x轴，DC所在直线为y轴，DD_1所在直线为z轴，建立如图所示的空间直角坐标系，因为$AB=BC=1$，$AA_1=4$，所以$A_1(1,0,4)$，$C_1(0,1,4)$，$D(0,0,0)$，$E(0,1,2)$，则$\overrightarrow{A_1C_1}=(-1,1,0)$，$\overrightarrow{DE}=(0,1,2)$，设异面直线$A_1C_1$与$DE$的夹角为$\theta$，则$\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{A_1C_1}\cdot\overrightarrow{DE}|}{|\overrightarrow{A_1C_1}|\cdot|\overrightarrow{DE}|}=\frac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$.所以异面直线$A_1C_1$与$DE$夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{10}}{10}$.



(第 18 题图)

19.(1)**证明**：设AC与BD交于点G.因为EF∥AG，且EF=1，AG=$\frac{1}{2}$AC=1.所以四边形AGEF为平行四边形，所以AF∥EG.因为EG⫋平面BDE，AF⊄平面BDE，所以AF∥平面BDE.

(2)**证明**：因为正方形ABCD和四边形ACEF所在的平面相互垂直，且CE⊥AC，所以CE⊥平面ABCD.如图，以C为原点，建立空间直角坐标系C-xyz.

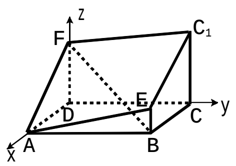


(第 19 题图)

则C(0,0,0)，A($\sqrt{2}$，$\sqrt{2}$，0)，B(0，$\sqrt{2}$，0)，F$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$，E(0,0,1)，D($\sqrt{2}$，0,0)，所以$\overrightarrow{CF}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$，$\overrightarrow{BE}=(0,-\sqrt{2},1)$，$\overrightarrow{DE}=(-\sqrt{2},0,1)$，所以$\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{BE}=0$，$\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{DE}=0$，所以CF⊥BE，CF⊥DE.又BE∩DE=E，所以CF⊥平面BDE.

(3)**解**：由(2)知，$\overrightarrow{CF}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$是平面BDE的一个法向量.设平面ABE的法向量为n=(x,y,z)，则n·$\overrightarrow{BA}$=0，n·$\overrightarrow{BE}$=0，即$\begin{cases}\sqrt{2}x=0,\\-\sqrt{2}y+z=0,\end{cases}$所以x=0，且z=$\sqrt{2}$y.令y=1，则z=$\sqrt{2}$，所以n=(0,1,$\sqrt{2}$).所以$\cos\langle n,\overrightarrow{CF}\rangle=\frac{n\cdot\overrightarrow{CF}}{|n||\overrightarrow{CF}|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.所以平面ABE与平面BED夹角的大小为$\frac{\pi}{6}$.

20.**解**：以D为坐标原点，DA，DC，DF所在直线分别为x轴，y轴，z轴建立空间直角坐标系(如图)，则$D(0,0,0)$，A(2,0,0)，$B(2,4,0)$，$C(0,4,0)$，$E(2,4,1)$，$C_1(0,4,3)$.



(第 20 题图)

(1)设$F(0,0,z)$.由$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{EC_1}$，得$(-2,0,z)=(-2,0,2)$，所以$z=2$.

所以$F(0,0,2)$，$\overrightarrow{BF}=(-2,-4,2)$，

所以$|\overrightarrow{BF}|=2\sqrt{6}$.

(2)设$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$为平面AEC_1F的法向量，又$\overrightarrow{AE}=(0,4,1)$，$\overrightarrow{AF}=(-2,0,2)$，

由$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AF}=0,\end{cases}$得$\begin{cases}4y+z=0,\\-2x+2z=0.\end{cases}$令$z=1$，

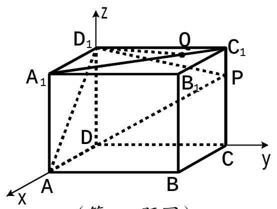
则$x=1$，$y=-\frac{1}{4}$，所以n=$\left(1,-\frac{1}{4},1\right)$.

又$\overrightarrow{CC_1}=(0,0,3)$，

则d=$\frac{|\overrightarrow{CC_1}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{4\sqrt{33}}{11}$.

所以点C到平面AEC_1F的距离为$\frac{4\sqrt{33}}{11}$.

21.**解**：(1)如图，建立空间直角坐标系，则$A(1,0,0)$，$B(1,1,0)$，$P(0,1,m)$，$C(0,1,0)$，$D(0,0,0)$，$B_1(1,1,1)$，$D_1(0,0,1)$.



(第 21 题图)

所以$\overrightarrow{BD}=(-1,-1,0)$，$\overrightarrow{BB_1}=(0,0,1)$，$\overrightarrow{AP}=(-1,1,m)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,1,0)$.

又由$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BB_1}=0$，

知$\overrightarrow{AC}$为平面BDD_1B_1的一个法向量.

设AP与平面BDD_1B_1的夹角为θ，

则$\sin\theta=\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right|=\frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+m^2}}$，

依题意有$\frac{2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+m^2}}=\frac{1}{3}$，

解得$m=4$，或 m=-4(舍去).

故当$m=4$时，直线AP与平面BDD_1B_1夹角的正弦值为$\frac{1}{3}$.

(2)若在线段A_1C_1上存在这样的点Q，设此点的横坐标为x，则$Q(x,1-x,1)$，所以$\overrightarrow{D_1Q}=(x,1-x,0)$.依题意，对任意的$m$要使$D_1Q$在平面$APD_1$上的投影垂直于$AP$，即$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{D_1Q}=0\Leftrightarrow-x+(1-x)=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$.即$Q$为$A_1C_1$的中点时，满足题设的要求.

22.(1)**证明**：以A为坐标原点，分别以$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AE}$所在直线为x,y,z轴建立空间直角坐标系(如图)，可得$A(0,0,0)$，$B(1,0,0)$，$C(1,2,0)$，$D(0,1,0)$，$E(0,0,2)$.设$CF=h(h>0)$，则$F(1,2,h)$.则$\overrightarrow{AB}=(1,0,0)$是平面$ADE$的法向量，又$\overrightarrow{BF}=(0,2,h)$，所以$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.又因为直线$BF\not\subseteq$平面$ADE$，所以$BF/\!/$平面$ADE$.

(2)**解**：依题意，$\overrightarrow{BD}=(-1,1,0)$，$\overrightarrow{BE}=(-1,0,2)$，$\overrightarrow{CE}=(-1,-2,2)$.

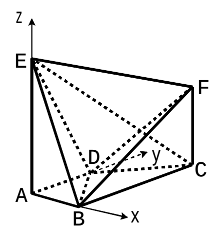
设$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$为平面BDE的法向量，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=-x+y=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BE}=-x+2z=0,\end{cases}$令$z=1$，得$\boldsymbol{n}=(2,2,1)$.

设 CE 与平面 BDE 所成角为θ，则$\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{CE},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{CE}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{CE}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{4}{9}$.所以直线$CE$与平面$BDE$所成角的正弦值为$\frac{4}{9}$.

(3)**解**：设$\boldsymbol{m}=(x,y,z)$为平面BDF的法向量，则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BD}=-x+y=0,\\\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BF}=2y+hz=0,\end{cases}$取$y=1$，可得$\boldsymbol{m}=\left(1,1,-\frac{2}{h}\right)$，由题意，$|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{\left|4-\frac{2}{h}\right|}{3\times\sqrt{2+\frac{4}{h^2}}}=\frac{1}{3}$，解得$h=\frac{8}{7}$.

经检验，符合题意.所以线段CF的长为$\frac{8}{7}$.



(第 22 题图)

第 7 期

第 3~4 版同步周测参考答案

一、选择题

1~6.DBBCCB　　7~12.ABCCBC

二、填空题

13.中心　　14.$\frac{3}{5}$

15.[1,2]　　16.$-\frac{25}{16}$

三、解答题

17.**解**：(1)设椭圆的方程为

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$或

$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$.

由已知得 2a=10，a=5.

又因为 e=$\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$，所以 c=4.

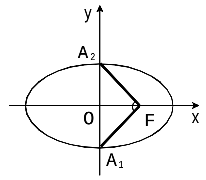
所以 $b^2=a^2-c^2=25-16=9$.

所以椭圆方程为

$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 或 $\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{9}=1$.

(2)依题意可设椭圆方程为

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$.



(第 17 题图)

如图所示，$\triangle A_1FA_2$为一等腰直角三角形，OF 为斜边 A_1A_2 的中线(高)，且|OF|=c，$|A_1A_2|=2b$，则 c=b=3，$a^2=b^2+c^2=18$，

故所求椭圆的方程为$\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$.

18.**解**：由已知，得$\frac{x^2}{\frac{m}{9}}+\frac{y^2}{\frac{m}{16}}=1$，

$a^2=\frac{m}{9}$，$b^2=\frac{m}{16}$，$c^2=\frac{7m}{144}$.

在$\triangle PF_1F_2$中，由面积公式，得

$S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|\sin60^\circ=3\sqrt{3}$，

解得$|PF_1|\cdot|PF_2|=12$.

在$\triangle PF_1F_2$中，由余弦定理，得

$4c^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot\cos60^\circ=|PF_1|^2+|PF_2|^2-|PF_1|\cdot|PF_2|=(|PF_1|+|PF_2|)^2-3|PF_1|\cdot|PF_2|$，

即 $4c^2=4a^2-3\times12$，所以 $b^2=a^2-c^2=9$，

即 9=$\frac{m}{16}$，解得 m=144.

由此可得 a=$\sqrt{\frac{m}{9}}$=4，c=$\sqrt{\frac{7m}{144}}=\sqrt{7}$，

所以离心率 e=$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

19.**解**：设 A(x_1,y_1)，B(x_2,y_2)，由题意知 $y_1<0$，$y_2>0$.

(1)直线 l 的方程为 y=$\sqrt{3}$(x-c)，其中 c=$\sqrt{a^2-b^2}$.

联立$\begin{cases}y=\sqrt{3}(x-c),\\\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\end{cases}$

得$(3a^2+b^2)y^2+2\sqrt{3}b^2cy-3b^4=0$.

解得 $y_1=\frac{-\sqrt{3}b^2(c+2a)}{3a^2+b^2}$，

$y_2=\frac{-\sqrt{3}b^2(c-2a)}{3a^2+b^2}$，

因为$\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$，所以$-y_1=2y_2$.

即$\frac{\sqrt{3}b^2(c+2a)}{3a^2+b^2}=2\cdot\frac{-\sqrt{3}b^2(c-2a)}{3a^2+b^2}$，

得离心率 e=$\frac{c}{a}=\frac{2}{3}$.

(2)因为|AB|=$\sqrt{1+\frac{1}{3}}|y_2-y_1|$，

所以$\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{4\sqrt{3}ab^2}{3a^2+b^2}=\frac{15}{4}$.

由$\frac{c}{a}=\frac{2}{3}$，得 b=$\frac{\sqrt{5}}{3}$a.

所以$\frac{5}{4}$a=$\frac{15}{4}$，得 a=3，b=$\sqrt{5}$.

所以椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$.

20.**解**：(1)根据题意，若 M 与 A 重合，即椭圆的右顶点的坐标为(2,0)，则 a=2，则椭圆的焦点在 x 轴上，且 c=$\sqrt{3}$，则椭圆焦点的坐标为($\sqrt{3}$,0)，($-\sqrt{3}$,0).

(2)若 m=3，则椭圆的方程为$\frac{x^2}{9}+y^2=1$，变形可得 $y^2=1-\frac{x^2}{9}$.

设 P(x,y)，则$|PA|^2=(x-2)^2+y^2=x^2-4x+4+y^2=\frac{8x^2}{9}-4x+5$.

又由$-3\leqslant x\leqslant3$，根据二次函数的性质，分析可得，

当 x=-3 时，$|PA|^2=\frac{8x^2}{9}-4x+5$ 取得最大值，且最大值为 25；

当 x=$\frac{9}{4}$时，$|PA|^2=\frac{8x^2}{9}-4x+5$ 取得最小值，且最小值为$\frac{1}{2}$.

所以|PA|的最大值为 5，最小值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

21.**解**：(1)将$y=x+b$代入$\frac{x^2}{2}+y^2=1$，消去y，整理得$3x^2+4bx+2b^2-2=0$.①

因为直线$y=x+b$与椭圆$\frac{x^2}{2}+y^2=1$相交于A，B两个不同的点，

所以$\Delta=16b^2-12(2b^2-2)=24-8b^2>0$，解得$-\sqrt{3}<b<\sqrt{3}$.

所以b的取值范围为$(-\sqrt{3},\sqrt{3})$.

(2)设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.当$b=1$时，方程①为$3x^2+4x=0$.

解得$x_1=0$，$x_2=-\frac{4}{3}$.所以$y_1=1$，$y_2=-\frac{1}{3}$.

所以$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

22.**解**：(1)由题意可得 2b=4，即 b=2，e=$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$a^2-b^2=c^2$，解得 a=$\sqrt{5}$，c=1，

所以椭圆方程为$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$.

(2)B(0,2)，设 PB 的方程为 y=kx+2，代入椭圆方程 $4x^2+5y^2=20$，可得$(4+5k^2)\cdot x^2+20kx=0$，

解得 x=$-\frac{20k}{4+5k^2}$，或 x=0，

所以 P$\left(-\frac{20k}{4+5k^2},\frac{8-10k^2}{4+5k^2}\right)$.

由 y=kx+2，令 y=0，可得 M$\left(-\frac{2}{k},0\right)$，

又|ON|=|OF|，所以 N(0,-1)，

由 OP⊥MN，得$\frac{8-10k^2}{-20k}\cdot\frac{1}{\frac{-2}{k}}=-1$，

解得 k=$\pm\frac{2\sqrt{30}}{5}$，

所以直线 PB 的斜率为$\pm\frac{2\sqrt{30}}{5}$.