第 8 期

第 3~4 版同步周测参考答案

一、选择题

1.B

2.C

提示：根据题意，平均速度为 $\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{2\times2^3-2\times1^3}{2-1}=14$.

3.B

提示：由定义知，函数在点 $x=x_0$ 处的导数只与 x_0 有关.

4.D

提示：$\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(a+2\Delta x)-f(a)}{3\Delta x}$

$=\frac{2}{3}\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(a+2\Delta x)-f(a)}{2\Delta x}=\frac{2}{3}f'(a)=1$，

则 $f'(a)=\frac{3}{2}$.

5.B

提示：割线的斜率 $k=\frac{\Delta y}{\Delta x}$

$=\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x+1}=\frac{2}{3}$.

6.D

7.A

提示：$s'=2\sin t+2t\cos t+1$，故选A.

8.A

9.D

提示：由已知条件，

得 $f'(x)=f'(-2)e^x-2x$.

所以 $f'(-2)=f'(-2)\times e^{-2}-2\times(-2)$，

解得 $f'(-2)=\frac{4e^2}{e^2-1}$.

10.A

提示：设 $A(2,f(2))$，$B(4,f(4))$.由图像知，$f(x)$ 的图像在点 A，B 处的切线斜率 k_A，k_B 与割线 AB 的斜率 k_{AB} 满足 $k_A<k_{AB}<k_B$，所以 $f'(2)<\frac{f(4)-f(2)}{4-2}<f'(4)$，即 $2f'(2)<f(4)-f(2)<2f'(4)$.

11.C

提示：画出各曲线，可知①④不存在自公切线；曲线②的一条自公切线为 $y=5$；曲线③的一条自公切线为 $y=-\frac{1}{4}$.

12.B

提示：由题意，$y=2^x$ 和 $y=3^x$ 在 x_0 处的导数相同，即 $2^{x_0}\ln2=3^{x_0}\ln3$.所以 $x_0=\log_{\frac{2}{3}}(\log_2 3)$.

二、填空题

13.$\frac{\pi}{4}$

提示：$f'(x)=e^x\cos x-e^x\sin x$，则 $f'(0)=1$.

所以所求切线的斜率 $k=\tan\theta=1$，

故倾斜角 $\theta=\frac{\pi}{4}$.

14.在第3min附近红茶温度大约以4°C/min的速率下降

15.$-\frac{3}{16}$

提示：设 $f(x)=x^{-3}$.由已知条件，得 $f'(2)=M$.又 $f'(x)=-3x^{-4}$，则 $f'(2)=-\frac{3}{16}$.故 $M=-\frac{3}{16}$.

16.4

提示：由 $y=x+\frac{4}{x}(x>0)$，得 $y'=1-\frac{4}{x^2}$.

设平行于直线 $x+y=0$ 的直线与曲线 $y=x+\frac{4}{x}(x>0)$ 切于点 $\left(x_0,x_0+\frac{4}{x_0}\right)$，

由 $1-\frac{4}{x_0^2}=-1(x_0>0)$，解得 $x_0=\sqrt{2}$.

所以点 $P(\sqrt{2},3\sqrt{2})$ 到直线 $x+y=0$ 的距离最小，最小值为 $\frac{|\sqrt{2}+3\sqrt{2}|}{\sqrt{2}}=4$.

三、解答题

17.**解：**(1)$y'=(3^xe^x)'-(2^x)'+(e)'$

$=(3^x)'e^x+3^x(e^x)'-(2^x)'$

$=3^x\ln3\cdot e^x+3^xe^x-2^x\ln2$

$=(\ln3+1)\cdot(3e)^x-2^x\ln2$.

(2)y'

$=\frac{(x+\cos x)'(x+\sin x)-(x+\cos x)(x+\sin x)'}{(x+\sin x)^2}$

$=\frac{(1-\sin x)(x+\sin x)-(x+\cos x)(1+\cos x)}{(x+\sin x)^2}$

$=\frac{-x\cos x-x\sin x+\sin x-\cos x-1}{(x+\sin x)^2}$.

18.**解：**(1)因为 $\Delta s=s(3)-s(2)=(3\times3^2+2\times3+1)-(3\times2^2+2\times2+1)=17$，

所以 $\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{17}{3-2}=17(m/s)$，即从 $t=2$ 到 $t=3$ 时，s 关于 t 的平均变化率为17，即此段时间内该质点的平均速度为17m/s.

(2)因为 $s'(t)=6t+2$，

所以 $s'(2)=6\times2+2=14(m/s)$.

故当 $t=2$ 时该质点的瞬时速度为14m/s.

(3)设该质点的速度为 v m/s，

则 $v(t)=s'(t)=6t+2$，

所以 $v'(t)=6$，所以 $v'(2)=6(m/s^2)$.

故当 $t=2$ 时该质点的加速度为 $6m/s^2$.

19.**解：**$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$，$g'(x)=\frac{a}{x}(x>0)$.

由已知，得 $\begin{cases}\sqrt{x}=a\ln x,\\ \frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{a}{x},\end{cases}$

解得 $a=\frac{e}{2}$，$x=e^2$.

所以两条曲线的交点坐标为 (e^2,e)，

切线的斜率 $k=f'(e^2)=\frac{1}{2e}$，

所以切线的方程为 $y-e=\frac{1}{2e}(x-e^2)$，

即 $\frac{x}{2e}-y+\frac{e}{2}=0$.

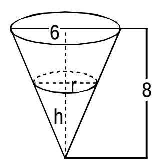
20.**解：**设 t 时刻水面高为 h cm，水面圆的半径是 r cm，如图所示，可知 $\frac{r}{3}=\frac{h}{8}$，得 $r=\frac{3h}{8}$.

故水的体积 $V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{3\pi}{64}h^3=20t$，

得 $h=4\left(\frac{20}{3\pi}\right)^{\frac{1}{3}}t^{\frac{1}{3}}$，$h'=\frac{4}{3}\left(\frac{20}{3\pi}\right)^{\frac{1}{3}}t^{-\frac{2}{3}}$.

可得 $h=4$ 时，$t=\frac{3\pi}{20}$，此时 $h'=\frac{80}{9\pi}$.

故水面升高的瞬时变化率为 $\frac{80}{9\pi}$ cm/s.



(第 20 题图)

21.(1)**解：**$f'(x)=x^2-4x+3=(x-2)^2-1\geqslant-1$，故切线斜率的取值范围为 $[-1,+\infty)$.

(2)**解：**结合(1)可知，

$f'(x)\geqslant-1$ 且 $-\frac{1}{f'(x)}\geqslant-1$，

即 $-1\leqslant f'(x)<0$ 或 $f'(x)\geqslant1$，

解得 $x\leqslant2-\sqrt{2}$，或 $1<x<3$，或 $x\geqslant2+\sqrt{2}$.

故切点横坐标的取值范围为 $(-\infty,2-\sqrt{2}]\cup(1,3)\cup[2+\sqrt{2},+\infty)$.

(3)**证明：**假设存在切线 l 与曲线 C 同时切于不同的两点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$x_1\neq x_2$，

则在点 A 处的切线方程是

$y-\left(\frac{1}{3}x_1^3-2x_1^2+3x_1\right)=(x_1^2-4x_1+3)(x-x_1)$，

即 $y=(x_1^2-4x_1+3)x+\left(-\frac{2}{3}x_1^3+2x_1^2\right)$；

同理，在点 B 处的切线方程是

$y=(x_2^2-4x_2+3)x+\left(-\frac{2}{3}x_2^3+2x_2^2\right)$.

由于两切线是同一直线，

则有 $x_1^2-4x_1+3=x_2^2-4x_2+3$

且 $-\frac{2}{3}x_1^3+2x_1^2=-\frac{2}{3}x_2^3+2x_2^2$，

化简得 $x_1+x_2=4$

且 $(x_1+x_2)^2-3(x_1+x_2)-x_1x_2=0$.

解得 $x_1=2$，$x_2=2$.

这与 $x_1\neq x_2$ 矛盾，所以不存在与曲线 C 同时切于两个不同点的直线.

22.**解：**(1)由题意知，C 在点 M 处的切线的斜率 $k=2$.

因为 $y'=2x+4$，所以 $2x_0+4=2$，

解得 $x_0=-1$.

所以 $y_0=\frac{1}{2}$.所以 $M\left(-1,\frac{1}{2}\right)$.

(2)设 $M(x_0,y_0)$ 为 C 上一点.

①若 $x_0=-2$，则 C 上点 $M\left(-2,-\frac{1}{2}\right)$ 处的切线斜率 $k=0$，过点 M 的法线方程为 $x=-2$，此法线过点 $P(-2,a)$.

②若 $x_0\neq-2$，则过点 $M(x_0,y_0)$ 的法线方程为 $y-y_0=-\frac{1}{2x_0+4}(x-x_0)$.　　①

若法线过点 $P(-2,a)$，则 $a-y_0=-\frac{1}{2x_0+4}(-2-x_0)$，即 $(x_0+2)^2=a$.　　②

若 $a>0$，则 $x_0=-2\pm\sqrt{a}$，从而 $y_0=\frac{2a-1}{2}$，

代入①中，化简，得 $x+2\sqrt{a}y+2-2a\sqrt{a}=0$ 或 $x-2\sqrt{a}y+2+2a\sqrt{a}=0$；

若 $a=0$，与 $x_0\neq-2$ 矛盾，舍去；

若 $a<0$，则②式无解，舍去.

综上，当 $a>0$ 时，在 C 上存在三个点 $\left(-2+\sqrt{a},\frac{2a-1}{2}\right)$，$\left(-2-\sqrt{a},\frac{2a-1}{2}\right)$ 及 $\left(-2,-\frac{1}{2}\right)$ 满足要求，其方程分别为 $x+2\sqrt{a}y+2-2a\sqrt{a}=0$，$x-2\sqrt{a}y+2+2a\sqrt{a}=0$，$x=-2$；当 $a\leqslant0$ 时，在 C 上存在一个点 $\left(-2,-\frac{1}{2}\right)$ 满足要求，其方程为 $x=-2$.

2020-2021 学年
数学·北师大(选修 1-1)答案页第 2 期
学习周报® ②

第 5 期

第 3~4 版同步周测参考答案

一、选择题

1~6.ACADDD　　7~12.ABACCA

二、填空题

13.$(x-1)^2+y^2=4$

14.$\left(-\frac{7}{16},0\right)$

提示：抛物线的标准方程是 $y^2=-\frac{7}{4}x$，则焦点在 x 轴的负半轴上，且 $2p=\frac{7}{4}$，故焦点坐标是 $\left(-\frac{7}{16},0\right)$.

15.$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

提示：设机器人为 $A(x,y)$，依题意得点 A 在以 $F(1,0)$ 为焦点，$x=-1$ 为准线的抛物线上，该抛物线的标准方程为 $y^2=4x$.

过点 $P(-1,0)$，斜率为 k 的直线为 $y=k(x+1)$.

由 $\begin{cases}y^2=4x,\\ y=kx+k,\end{cases}$ 得 $ky^2-4y+4k=0$.

当 $k=0$ 时，显然不符合题意；

当 $k\neq0$ 时，

依题意得 $\Delta=(-4)^2-4k\cdot4k<0$，

化简得 $k^2-1>0$，解得 $k>1$ 或 $k<-1$，

因此 k 的取值范围为 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

16.2

提示：因为 $F(1,0)$，所以直线 AB：$y=k(x-1)$，与 $y^2=4x$ 联立，化简可得 $k^2x^2-2(2+k^2)x+k^2=0$.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

则 $x_1+x_2=\frac{4+2k^2}{k^2}$，$x_1x_2=1$.

所以 $y_1+y_2=k(x_1+x_2-2)=\frac{4}{k}$，

$y_1y_2=k^2[x_1x_2-(x_1+x_2)+1]=-4$.

由 $\angle AMB=90°$，得 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.

又 $\overrightarrow{MA}=(x_1+1,y_1-1)$，$\overrightarrow{MB}=(x_2+1,y_2-1)$，

所以 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(x_1+1)(x_2+1)+(y_1-1)\cdot(y_2-1)=x_1x_2+(x_1+x_2)+y_1y_2-(y_1+y_2)+2=0$，

即 $1+2+\frac{4}{k^2}-4-\frac{4}{k}+2=0$，解得 $k=2$.

三、解答题

17.**解：**因为椭圆 $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{16}=1$ 的左顶点为 $(-8,0)$，所以抛物线的焦点为 $(-8,0)$.所以抛物线的方程为 $y^2=-32x$.

18.**解：**设 $B\left(x,\frac{x^2}{2p}\right)$，又 $F\left(0,\frac{p}{2}\right)$，

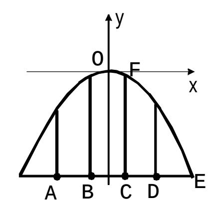
则 $x+0=2\sqrt{3}$，即 $x=2\sqrt{3}$.

所以 $B\left(2\sqrt{3},\frac{6}{p}\right)$.

因为 $|BF|=2|AF|$，结合抛物线的定义，得 $\frac{6}{p}+\frac{p}{2}=2\sqrt{3+\frac{p^2}{4}}$，解得 $p=\pm2$.

又 $p>0$，所以 $p=2$.

19.**解：**建立如图所示的平面直角坐标系.



(第19题图)

设抛物线方程为 $x^2=-2py(p>0)$.

由题意，得点 E 的坐标为 $(10,-4)$，

将其代入抛物线方程，解得 $p=\frac{25}{2}$.

所以抛物线方程为 $x^2=-25y$.

设点 $F(2,b)$，则 $b=-\frac{4}{25}$.

故最长支柱的长 $|CF|=4-\frac{4}{25}=\frac{96}{25}(m)$.

20.**解：**由 $y^2=4x$，得 $p=2$，其准线方程为 $x=-1$，焦点为 $F(1,0)$.

(1)由抛物线的定义可知，

$|AF|=x_1+\frac{p}{2}$，从而 $x_1=4-1=3$.

代入 $y^2=4x$ 中，解得 $y_1=\pm2\sqrt{3}$.

所以点 A 的坐标为 $(3,2\sqrt{3})$ 或 $(3,-2\sqrt{3})$.

(2)当直线 l 的斜率存在时，

设直线 l 的方程为 $y=k(x-1)$.

与抛物线方程联立并消去 y，

整理得 $k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$，

则 $x_1+x_2=2+\frac{4}{k^2}$.

所以 $|AB|=x_1+x_2+p=4+\frac{4}{k^2}>4$.

当直线 l 的斜率不存在时，直线 l 的方程为 $x=1$，此时 $|AB|=4$，

所以 $|AB|\geqslant4$，即线段 AB 的长的最小值为4.

21.(1)**解：**联立 $x^2=-y$ 与 $y=kx-3$，

得 $x^2+kx-3=0$.

因为 $\Delta_1=k^2+12>0$，

所以 l 与抛物线 $x^2=-y$ 恒有2个交点.

若 $m\geqslant3$，则 l 与抛物线 $x^2=4y$ 至少有1个交点.

联立 $x^2=4y$ 与 $y=kx-3$，得 $x^2-4kx+12=0$.

所以 $\Delta_2=16k^2-48\geqslant0$.结合 $k>0$，得 $k\geqslant\sqrt{3}$.所以 k 的最小值为 $\sqrt{3}$.

(2)**证明：**若 $m=3$，则 l 与抛物线 $x^2=4y$ 只有1个交点.

结合(1)，可知 $k=\sqrt{3}$，$A(2\sqrt{3},3)$.

由于 $F(0,1)$ 为抛物线 $x^2=4y$ 的焦点，

则 $|\overrightarrow{FA}|=3+1=4$.

设 $B(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$，

则 $x_1+x_2=-k=-\sqrt{3}$，$x_1x_2=-3$.

所以 $y_1+y_2=k(x_1+x_2)-6=-9$，$y_1y_2=(kx_1-3)(kx_2-3)=k^2x_1x_2-3k(x_1+x_2)+9=9$.

所以 $\overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{FC}=x_1x_2+(y_1-1)(y_2-1)=x_1x_2+y_1y_2-(y_1+y_2)+1=16$.

所以 $\overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{FC}=|\overrightarrow{FA}|^2$.

22.**解：**(1)由抛物线的性质，可得 $\frac{p}{2}=1$，所以 $p=2$，所以抛物线的准线方程为 $x=-1$.

(2)设 $A(x_A,y_A)$，$B(x_B,y_B)$，$C(x_C,y_C)$，重心 $G(x_G,y_G)$.由(1)知抛物线方程为 $y^2=4x$.

令 $y_A=2t$，$t\neq0$，则 $x_A=t^2$，由于直线 AB 过 F，故直线 AB 的方程为 $x=\frac{t^2-1}{2t}\cdot y+1$，

代入 $y^2=4x$，得 $y^2-\frac{2(t^2-1)}{t}y-4=0$，

所以 $y_A\cdot y_B=2ty_B=-4$，即 $y_B=-\frac{2}{t}$，

所以 $B\left(\frac{1}{t^2},-\frac{2}{t}\right)$.

又 $x_G=\frac{1}{3}(x_A+x_B+x_C)$，$y_G=\frac{1}{3}(y_A+y_B+y_C)$，

因为重心 G 在 x 轴上，所以 $2t-\frac{2}{t}+y_C=0$，

所以 $C\left(\left(\frac{1}{t}-t\right)^2,2\left(\frac{1}{t}-t\right)\right)$，$G\left(\frac{2t^4-2t^2+2}{3t^2},0\right)$，所以直线 AC 的方程为 $y-2t=2t(x-t^2)$，得 $Q(t^2-1,0)$，因为 Q 在焦点 F 的右侧，所以 $t^2>2$，

所以 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{1}{2}|FG|\cdot|y_A|}{\frac{1}{2}|QG|\cdot|y_C|}$

$=\frac{\left|\frac{2t^4-5t^2+2}{3t^2}\right|\cdot|2t|}{\left|t^2-1-\frac{2t^4-2t^2+2}{3t^2}\right|\cdot\left|\frac{2}{t}-2t\right|}$

$=\frac{2t^4-t^2}{t^4-1}=2-\frac{t^2-2}{t^4-1}$.

令 $m=t^2-2$，则 $m>0$，$\frac{S_1}{S_2}=2-\frac{m}{m^2+4m+3}=2-\frac{1}{m+\frac{3}{m}+4}\geqslant2-\frac{1}{2\sqrt{m\cdot\frac{3}{m}}+4}=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以当且仅当 $m=\sqrt{3}$ 时，$\frac{S_1}{S_2}$ 取得最小值，最小值为 $1+\frac{\sqrt{3}}{2}$，此时 $G(2,0)$.

②

第 6 期

第 3~4 版同步周测参考答案

一、选择题

1~6.AAABCA　　7~12.BCCADB

二、填空题

13.$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1(y<0)$

提示：由已知关系式可知点M与$A(0,5)$,$B(0,-5)$的距离之差等于8,则点M的轨迹是焦点在y轴上的双曲线的下支,其中$a=4$,$c=5$,则$b^2=9$.所以点M的轨迹方程为$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1(y<0)$.

14.2或$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

提示：当双曲线的焦点在x轴上时,有$\frac{b}{a}=\sqrt{3}$,则离心率$e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=2$;当双曲线的焦点在$y$轴上时,有$\frac{a}{b}=\sqrt{3}$,同理,得$e=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

15.$\frac{4}{5}$

提示：由方程$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$知$a^2=16$,$b^2=9$,即$a=4$,$c=\sqrt{16+9}=5$.在$\triangle ABP$中,利用正弦定理和双曲线的定义知,$\frac{|\sin A-\sin B|}{\sin P}=\frac{||PB|-|PA||}{|AB|}=\frac{2a}{2c}=\frac{2\times4}{2\times5}=\frac{4}{5}$.

16.$12\sqrt{6}$

提示：设左焦点为F_1,$|PF|-|PF_1|=2a=2$,所以$|PF|=2+|PF_1|$,$\triangle APF$的周长为$|AF|+|AP|+|PF|=|AF|+|AP|+2+|PF_1|$,$\triangle APF$周长最小即为$|AP|+|PF_1|$最小,当$A$,$P$,$F_1$在一条直线上时最小,过$AF_1$的直线方程为$\frac{x}{-3}+\frac{y}{6\sqrt{6}}=1$,与$x^2-\frac{y^2}{8}=1$联立,解得$P$点坐标为$(-2,2\sqrt{6})$,此时$S=S_{\triangle AF_1F}-S_{\triangle F_1PF}=12\sqrt{6}$.

三、解答题

17.**解：**双曲线中,$a=3$,$c=5$.不妨设$|PF_1|>|PF_2|$,则$|PF_1|-|PF_2|=2a=6$.又$|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot\cos60^\circ$,而$|F_1F_2|=2c=10$,得$|PF_1|^2+|PF_2|^2-|PF_1|\cdot|PF_2|=(|PF_1|-|PF_2|)^2+|PF_1|\cdot|PF_2|=100$,所以$|PF_1|\cdot|PF_2|=64$.故$\triangle F_1PF_2$的面积$S=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|\sin60^\circ=16\sqrt{3}$.

18.**解：**设重心$G(x,y)$,点$P(m,n)$,因为$F_1(-5,0)$,$F_2(5,0)$,

则有$\begin{cases}x=\frac{-5+5+m}{3},\\ y=\frac{0+0+n}{3},\end{cases}$故$\begin{cases}m=3x,\\ n=3y,\end{cases}$代入双曲线$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$中,得$\frac{9x^2}{16}-y^2=1$.

又P与F_1F_2不共线,所以$y\neq0$,故所求轨迹方程为$\frac{9x^2}{16}-y^2=1(y\neq0)$.

19.**解：**直线l的方程为$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$,即$bx+ay-ab=0$,则点$(1,0)$到直线$l$的距离$d_1=\frac{b(a-1)}{\sqrt{a^2+b^2}}$,点$(-1,0)$到直线$l$的距离$d_2=\frac{b(a+1)}{\sqrt{a^2+b^2}}$,$s=d_1+d_2=\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{2ab}{c}\geqslant\frac{4}{5}c$,即$5a\sqrt{c^2-a^2}\geqslant2c^2$,

于是有$5\sqrt{e^2-1}\geqslant2e^2$,

即$4e^4-25e^2+25\leqslant0$,得$\frac{5}{4}\leqslant e^2\leqslant5$.

又$e>1$,所以e的取值范围是

$\left[\frac{\sqrt{5}}{2},\sqrt{5}\right]$.

20.**解：**以直线AB为x轴,线段AB的垂直平分线为y轴,建立直角坐标系,如下图,则$A(3,0)$,$B(-3,0)$.

因为$|PB|-|PA|=4<6$,

所以P在双曲线的右支上,

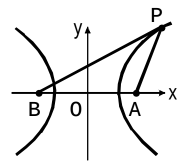
且$a=2$,$c=3$,$b=\sqrt{5}$.

所以P在双曲线$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$右支上.

因为P在A的北偏东30°方向,

所以$k_{AP}=\tan60^\circ=\sqrt{3}$.

所以AP所在直线的方程为$y=\sqrt{3}\cdot(x-3)$.与双曲线方程联立,解得点P的坐标为$(8,5\sqrt{3})$或$\left(\frac{16}{7},-\frac{5\sqrt{3}}{7}\right)$(舍去),所以$A$,$P$两地的距离$|AP|=10$千米.



(第 20 题图)

21.**解：**(1)双曲线的右焦点为$F(\sqrt{2},0)$,渐近线方程为$x\pm y=0$,

则圆心F到渐近线的距离$d=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$.所以圆的方程为$(x-\sqrt{2})^2+y^2=1$.

(2)设$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,经过点P的直线方程为$y=kx-1$(k显然存在).

联立方程组$\begin{cases}x^2-y^2=1,\\ y=kx-1,\end{cases}$消去$y$,

整理得$(1-k^2)x^2+2kx-2=0$.

所以$\Delta=(2k)^2-4(1-k^2)(-2)=8-4k^2>0$,且$x_1+x_2=\frac{-2k}{1-k^2}>0$,$x_1x_2=\frac{-2}{1-k^2}>0$,解得$1<k<\sqrt{2}$.又$y_1+y_2=k(x_1+x_2)-2=\frac{-2}{1-k^2}$,

所以线段MN的中点为$\left(\frac{-k}{1-k^2},\frac{-1}{1-k^2}\right)$,

垂直平分线的方程为

$y+\frac{1}{1-k^2}=-\frac{1}{k}\left(x+\frac{k}{1-k^2}\right)$.

令$x=0$,得截距$t=\frac{2}{k^2-1}>2$.

故t的取值范围是$(2,+\infty)$.

22.**解：**(1)双曲线C的焦点在坐标轴上,其渐近线方程为$y=\pm\sqrt{2}x$,

则可设双曲线C的方程为$x^2-\frac{y^2}{2}=\lambda$,将点$P\left(\frac{\sqrt{6}}{2},1\right)$代入双曲线$C$的方程,可得$\lambda=1$,所以双曲线$C$的标准方程为$x^2-\frac{y^2}{2}=1$.

(2)假设存在被点$B(1,1)$平分的弦.

设$B(1,1)$是弦MN的中点,且$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,则$x_1+x_2=2$,$y_1+y_2=2$.

因为点M,N在双曲线C上,所以$\begin{cases}2x_1^2-y_1^2=2,\\ 2x_2^2-y_2^2=2,\end{cases}$所以$2(x_1+x_2)(x_1-x_2)-(y_1-y_2)\cdot(y_1+y_2)=0$,所以$4(x_1-x_2)=2(y_1-y_2)$,

所以$k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=2$,

所以直线MN的方程为$y-1=2(x-1)$,

即$2x-y-1=0$,由$\begin{cases}2x^2-y^2=2,\\ 2x-y-1=0,\end{cases}$

得$2x^2-4x+3=0$,

因为$\Delta=16-4\times3\times2=-8<0$,所以直线$MN$与双曲线$C$无交点,所以不存在被点$B(1,1)$平分的弦.

第 7 期

第 2~3 版章节测试参考答案

一、选择题

1~6.DAADCC　　7~12.CDCAAA

二、填空题

13.2

提示：由抛物线的定义,得动点Q到焦点的距离的最小值为顶点到准线的距离,即$\frac{p}{2}=1$,$p=2$.

14.8

提示：根据双曲线的定义,有$|MF_2|-|MF_1|=2a=4$,$|NF_2|-|NF_1|=2a=4$,两式相加,得$|MF_2|+|NF_2|-|MN|=8$.

15.$\sqrt{15}$

提示：由椭圆方程可知$a=3$,$F(-2,0)$.

设右焦点为F',则$F'(2,0)$.

设PF的中点为A,连接PF',AO,因为点A在$|OF|$为半径的圆上,所以$|PF'|=2|AO|=4$.

由椭圆的定义,知$|PF|+|PF'|=2a=6$,则$|PF|=2$.

又$|FF'|=4$,故$\triangle PFF'$是等腰三角形.

连接AF',因为A是PF的中点,所以$AF'\perp PF$.所以$\tan\angle PFF'=\frac{AF'}{AF}=\sqrt{15}$.

故直线PF的斜率为$\sqrt{15}$.

16.$\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$

三、解答题

17.**解：**设点$N(x,y)$.因为N是EF的中点,$F(2,0)$,所以$E(2x-2,2y)$.又E是OM的中点,$O(0,0)$,所以$M(4x-4,4y)$.将其代入抛物线方程中,得$(4y)^2=8(4x-4)$,即$y^2=2x-2$,此即为点N的轨迹方程.

18.**解：**(1)把$M\left(\frac{2}{3},-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$代入方程$y^2=2px$,

得$p=2$,因此抛物线的方程为$y^2=4x$.

(2)抛物线的准线方程为$x=-1$,

所以$F_1(-1,0)$,设双曲线的右焦点为F,则$F(1,0)$,于是$2a=|MF_1|-|MF|=\frac{7}{3}-\frac{5}{3}=\frac{2}{3}$,因此$a=\frac{1}{3}$.

因为$c=1$,所以$b^2=c^2-a^2=\frac{8}{9}$,

于是,双曲线的方程为$\frac{x^2}{\frac{1}{9}}-\frac{y^2}{\frac{8}{9}}=1$.

19.**解：**由题意,知抛物线的焦点在x轴上,可设抛物线的方程为$y^2=ax(a\neq0)$.

由点$M\left(\frac{2}{3},-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$在抛物线上,

得$\left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2=\frac{2}{3}a$,解得$a=4$.

所以所求抛物线的方程为$y^2=4x$.

因为点$M\left(\frac{2}{3},-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$在椭圆上,

所以$\frac{4}{9a^2}+\frac{24}{9b^2}=1$.　①

又$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{1}{2}$,　②

由①②,可得$a^2=4$,$b^2=3$.

所以所求椭圆的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

20.**解：**(1)当k不存在时,直线l的方程为$x=1$,代入双曲线的方程,得$y=0$,即l与C有一个交点.

当k存在时,设直线l的方程为

$y=k(x-1)+2$,

代入C的方程,并整理,得

$(2-k^2)x^2+2(k^2-2k)x-k^2+4k-6=0$.

当$2-k^2=0$,即$k=\pm\sqrt{2}$时,

上述方程有唯一解.

当$2-k^2\neq0$,即$k\neq\pm\sqrt{2}$时,$\Delta=16(3-2k)$.由$\Delta=0$,解得$k=\frac{3}{2}$;由$\Delta>0$,解得$k<\frac{3}{2}$;由$\Delta<0$,解得$k>\frac{3}{2}$.

所以,当$k\in\left\{k\,\middle|\,k\text{不存在,或}k=\pm\sqrt{2}\text{,或}k=\frac{3}{2}\right\}$时,$l$与$C$只有一个交点;当$k\in\left\{k\,\middle|\,k<\frac{3}{2}\text{,且}k\neq\pm\sqrt{2}\right\}$时,$l$与$C$有两个交点;当$k\in\left\{k\,\middle|\,k>\frac{3}{2}\right\}$时,$l$与$C$无交点.

(2)设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,由(1)知,

$x_1+x_2=\frac{2(k^2-2k)}{k^2-2}=2\times1$,解得$k=1$.

所以直线AB的方程为$x-y+1=0$.

21.**解：**(1)连接PF_1.

由$\triangle POF_2$为等边三角形,

可知在$\triangle F_1PF_2$中,$\angle F_1PF_2=90^\circ$,$|PF_2|=c$,$|PF_1|=\sqrt{3}c$,

于是$2a=|PF_1|+|PF_2|=(\sqrt{3}+1)c$,

故C的离心率$e=\frac{c}{a}=\sqrt{3}-1$.

(2)由题意可知,满足条件的点$P(x,y)$存在当且仅当

$\begin{cases}\frac{1}{2}|y|\cdot2c=16, & ①\\ \frac{y}{x+c}\cdot\frac{y}{x-c}=-1, & ②\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. & ③\end{cases}$

由②③及$a^2=b^2+c^2$,得$y^2=\frac{b^4}{c^2}$.

又由①知$y^2=\frac{16^2}{c^2}$,故$b=4$.

由②③,得$x^2=\frac{a^2}{c^2}(c^2-b^2)$,

所以$c^2\geqslant b^2$,从而$a^2=b^2+c^2\geqslant2b^2=32$,

故$a\geqslant4\sqrt{2}$.

当$b=4$,$a\geqslant4\sqrt{2}$时,存在满足条件的点P.

所以$b=4$,a的取值范围为$[4\sqrt{2},+\infty)$.

22.(1)**解：**抛物线$C:x^2=-2py$经过点$(2,-1)$,可得$4=2p$,即$p=2$,

可得抛物线C的方程为$x^2=-4y$,其准线方程为$y=1$.

(2)**证明：**抛物线C的焦点为$F(0,-1)$,

设直线l的方程为$y=kx-1(k\neq0)$,

由$\begin{cases}y=kx-1,\\ x^2=-4y,\end{cases}$可得$x^2+4kx-4=0$.

设$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,

可得$x_1+x_2=-4k$,$x_1x_2=-4$,

直线OM的方程为$y=\frac{y_1}{x_1}x$,

即$y=-\frac{x_1}{4}x$,

直线ON的方程为$y=\frac{y_2}{x_2}x$,

即$y=-\frac{x_2}{4}x$,

可得$A\left(\frac{4}{x_1},-1\right)$,$B\left(\frac{4}{x_2},-1\right)$,

可得AB的中点的横坐标为$2\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)=2\cdot\frac{-4k}{-4}=2k$,

即有AB为直径的圆的圆心为$(2k,-1)$,

半径为$\frac{|AB|}{2}=\frac{1}{2}\left|\frac{4}{x_1}-\frac{4}{x_2}\right|=2\cdot\frac{\sqrt{16k^2+16}}{4}=2\sqrt{1+k^2}$,

可得圆的方程为

$(x-2k)^2+(y+1)^2=4(1+k^2)$,

化简得$x^2-4kx+(y+1)^2=4$,

由$x=0$,可得$y=1$,或$y=-3$.

则以AB为直径的圆经过y轴上的两个定点$(0,1)$,$(0,-3)$.