第 12 期

第 2~3 版综合测试(二)参考答案

一、选择题

1.C　2.B　3.D　4.A　5.C　6.B

7.C　8.A　9.A　10.B

11.A

提示:由题设,得 $a=2,b=1,c=\sqrt{3}$.$F_1P\perp F_2P$.所以 $\begin{cases}|F_1P|+|F_2P|=2a=4,\\ |F_1P|^2+|F_2P|^2=|F_1F_2|^2=4c^2=12,\\ |F_1P|>|F_2P|,\end{cases}$

解得$|F_1P|=2+\sqrt{2}$,$|F_2P|=2-\sqrt{2}$.所以直线 F_1P 的斜率 $k=\tan\angle PF_1F_2=\dfrac{|F_2P|}{|F_1P|}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=3-2\sqrt{2}$.

12.B

提示:依题意,记 $g(x)=xf(x)$,则 $g'(x)=xf'(x)+f(x)$,$g(0)=0$.当 $x>0$ 时,$g'(x)=x\left[f'(x)+\dfrac{f(x)}{x}\right]>0$,$g(x)$是增函数,$g(x)>0$;当 $x<0$ 时,$g'(x)=x\left[f'(x)+\dfrac{f(x)}{x}\right]<0$,$g(x)$是减函数,$g(x)>0$.在同一坐标系内画出函数 $y=g(x)$与 $y=-\dfrac{1}{x}$ 的大致图像,结合图像可知,它们共有 1 个公共点,因此函数 $F(x)=xf(x)+\dfrac{1}{x}$ 的零点个数是1,选 B.

二、填空题

13.若 $x\notin\mathbf{R}$,则 $x^2+1\leq1$

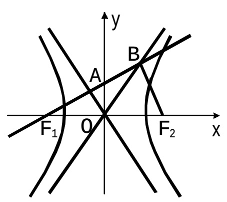
14.3

15.$a>4$

提示:$f'(x)=\left(\dfrac{a}{x^2}-\dfrac{a}{x}+1\right)e^x$.因为函数 $f(x)$既有极大值又有极小值,所以$f'(x)=0$有2个不等实数根,即$x^2-ax+a=0$有2个不等的正实数根.所以$\Delta=a^2-4a>0$且$a>0$,所以$a>4$.

16.2

提示:如图所示,由 $\overrightarrow{F_1A}=\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{F_1B}\cdot\overrightarrow{F_2B}=0$,易得$OA\perp F_1B$,则直线$F_1B$:$y=\dfrac{b}{a}(x+c)$,与$y=\dfrac{b}{a}x$联立,解得$B\left(\dfrac{a^2c}{b^2-a^2},\dfrac{abc}{b^2-a^2}\right)$,则$OB^2=\dfrac{a^4c^2}{(b^2-a^2)^2}+\dfrac{a^2b^2c^2}{(b^2-a^2)^2}=c^2$.化简,得 $b^2=3a^2$.所以$c^2=a^2+b^2=4a^2$,可得$e=\dfrac{c}{a}=2$.



(第16题图)

三、解答题

17.**证明**:若 $a-b=1$,则 $a=b+1$.故 $a^2-b^2+2a-4b-3=(b+1)^2-b^2+2(b+1)-4b-3=0$.

因此,原命题的逆否命题为真命题,从而原命题也为真命题,得证.

18.**解**:若 p 为真命题,则 $\begin{cases}a-1>0,\\2(a-1)-1>0,\end{cases}$或$\begin{cases}a-1<0,\\1\cdot(a-1)-1>0,\end{cases}$

解得 $a>\dfrac{3}{2}$;

若 q 为真命题,则 $a^2-4<0$,

解得$-2<a<2$.

(1)若"p 且 q"是真命题,则 p 真 q 真,所以实数 a 的取值范围为$\left(\dfrac{3}{2},2\right)$.

(2)由题意,得 p,q 同真假.

若 p 真 q 真,由(1)知$\dfrac{3}{2}<a<2$;

若 p 假 q 假,则$\begin{cases}a\leq\dfrac{3}{2},\\a\leq-2\text{ 或 }a\geq2\end{cases}\Rightarrow a\leq-2$.

所以实数 a 的取值范围为$(-\infty,-2]\cup\left(\dfrac{3}{2},2\right)$.

19.**解**:(1)因为 $e\geq\sqrt{2}k$,所以$\dfrac{\sqrt{3+m}}{\sqrt{3}}\geq\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{m}}{\sqrt{3}}$,解得 $m\leq3$.又$m>0$,所以实数 m 的取值范围为$(0,3]$.

(2)由 $m^2-(2a+2)m+a(a+2)\leq0$,得$(m-a)(m-a-2)\leq0$,所以 $a\leq m\leq a+2$.

因为 p 是 q 的必要不充分条件,所以$\begin{cases}a>0,\\a+2\leq3,\end{cases}$解得 $0<a\leq1$.

所以实数 a 的取值范围为$(0,1]$.

20.**解**:(1)由图可知当$x<1$ 或 $x>2$时,$f'(x)>0$;当 $1<x<2$ 时,$f'(x)<0$.

所以 $f(x)$的单调递增区间为$(-\infty,1)$,$(2,+\infty)$,单调递减区间为$(1,2)$.

(2)由图可知 $x=1,x=2$ 是 $f(x)$的极值点,因为 $a=1$,所以 $f'(x)=3x^2+2bx+c$,所以$\begin{cases}f'(1)=0,\\f'(2)=0,\end{cases}$代入解得 $b=-\dfrac{9}{2}$,$c=6$.所以 $f(x)=3x^3-\dfrac{9}{2}x^2+6x+1$;当 $x=1$ 时,$f(x)$有极大值$f(1)=\dfrac{11}{2}$;当 $x=2$ 时,$f(x)$有极小值$f(2)=19$.

21.(1)**解**:由题设可得 $c=1,b=1,a^2=b^2+c^2=2$,所以椭圆 C 的方程为$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$.

(2)**证明**:设 $P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,则直线 AP 的方程为 $y=\dfrac{y_1-1}{x_1}x+1$,令 $y=0$,得 $x=\dfrac{x_1}{1-y_1}$,即 $M\left(\dfrac{x_1}{1-y_1},0\right)$;

直线 AQ 的方程为 $y=\dfrac{y_2-1}{x_2}x+1$,令 $y=0$,得 $x=\dfrac{x_2}{1-y_2}$,即 $N\left(\dfrac{x_2}{1-y_2},0\right)$.

由$|OM|\cdot|ON|=2$,

得$\left|\dfrac{x_1}{1-y_1}\cdot\dfrac{x_2}{1-y_2}\right|=2$,

即$|x_1x_2|=2|(1-y_1)(1-y_2)|$.

由$\begin{cases}y=kx+t,\\\dfrac{x^2}{2}+y^2=1,\end{cases}$可得$(1+2k^2)x^2+4ktx+2t^2-2=0$,

则 $x_1+x_2=-\dfrac{4kt}{1+2k^2}$,$x_1x_2=\dfrac{2t^2-2}{1+2k^2}$.

所以 $y_1+y_2=kx_1+kx_2+2t=\dfrac{2t}{1+2k^2}$,

$y_1y_2=(kx_1+t)(kx_2+t)=k^2x_1x_2+kt(x_1+x_2)+t^2=\dfrac{t^2-2k^2}{1+2k^2}$.

故$(1-y_1)(1-y_2)=1-(y_1+y_2)+y_1y_2=\dfrac{(t-1)^2}{1+2k^2}$.

所以$\left|\dfrac{2t^2-2}{1+2k^2}\right|=2\left|\dfrac{(t-1)^2}{1+2k^2}\right|$,

解得 $t=0$,或 $t=1$(舍去).

所以直线 l 的方程为 $y=kx$,恒过原点$(0,0)$.

22.**解**:(1)$f'(x)=-\dfrac{a}{x^2}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-a}{x^2}$.

令 $f'(x)=0$,得 $x=a$.

①若 $a\leq0$,则 $f'(x)>0$,$f(x)$在区间$(0,e]$上单调递增,此时函数 $f(x)$无最小值.

②若 $0<a<e$,当 $x\in(0,a)$时,$f'(x)<0$,函数 $f(x)$在区间$(0,a]$上单调递减;

当 $x\in(a,e]$时,$f'(x)>0$,函数 $f(x)$在区间$[a,e]$上单调递增,所以当 $x=a$ 时,函数 $f(x)$取得最小值 $\ln a$.

③若 $a\geq e$,则 $f'(x)\leq0$,函数 $f(x)$在区间$(0,e]$上单调递减,所以当 $x=e$ 时,函数 $f(x)$取得最小值$\dfrac{a}{e}$.

综上可知,当 $a\leq0$ 时,函数 $f(x)$在区间$(0,e]$上无最小值;当 $0<a<e$ 时,函数 $f(x)$在区间$(0,e]$上的最小值为 $\ln a$;当 $a\geq e$ 时,函数 $f(x)$在区间$(0,e]$上的最小值为$\dfrac{a}{e}$.

(2)$g'(x)=\dfrac{e^x}{x}+(\ln x-1)e^x+1$

$=\left(\dfrac{1}{x}+\ln x-1\right)e^x+1$.

当 $a=1$ 时,$f(x)=\dfrac{1}{x}+\ln x-1$.

由(1)可知,此时 $f(x)$在区间$(0,e]$上的最小值为 $\ln1=0$,即$\dfrac{1}{x}+\ln x-1\geq0$.

若 $x_0\in(0,e]$,则 $e^{x_0}>0$,$\dfrac{1}{x_0}+\ln x_0-1\geq0$,

所以 $g'(x_0)=\left(\dfrac{1}{x_0}+\ln x_0-1\right)e^{x_0}+1\geq1>0$.

曲线 $y=g(x)$在点 $x=x_0$ 处的切线与 y 轴垂直等价于方程 $g'(x_0)=0$ 有实数解,而 $g'(x_0)>0$,故方程 $g'(x_0)=0$ 无实数解.

故不存在 $x_0\in(0,e]$,使曲线 $y=g(x)$在点 $x=x_0$ 处的切线与 y 轴垂直.

第 9 期

第 3~4 版同步周测参考答案

一、选择题

1.C　2.C　3.D　4.C

5.B

提示:A中,$y'=-\dfrac{1}{x^2}<0$,不存在极值点;B中,$y'=1-e^x$,令$y'=0$,得$x=0$,且$x<0$时,$y'>0$,$x>0$时,$y'<0$,则$x=0$为极大值点;C中,$y'=3x^2+6x+3=3(x+1)^2\geq0$,不存在极值点;D中,$y'=3x^2\geq0$,不存在极值点.故选B.

6.C

7.A

8.A

提示:$f'(x)=\dfrac{e^x(x+1)}{(x+2)^2}$,易得$f(x)$在$(-2,-1)$上单调递减,在$(-1,+\infty)$上单调递增.若$f(x)$在$(-2,a)$上有最小值,则 $a>-1$.

9.C

提示:$f'(x)=3x^2+2px+2$,若$|p|<\sqrt{6}$,则$f'(x)>0$,即$f(x)$无极值.

10.B

提示:$f'(x)=\sin x+x\cos x-\sin x=x\cos x$.

当$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$时,$f'(x)\geq0$,$f(x)$是增函数,所以$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)>f\left(\dfrac{3}{2}\right)>f(1)$.

又$f(-x)=f(x)$,所以$f\left(-\dfrac{3}{2}\right)=f\left(\dfrac{3}{2}\right)$.

所以$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)>f\left(-\dfrac{3}{2}\right)>f(1)$.

11.C

提示:设圆半径为 x,矩形的高记作 h,那么窗户面积 $S=\dfrac{\pi}{2}x^2+2hx$.

故窗户周长为

$l(x)=\pi x+2x+2h=\dfrac{\pi}{2}x+2x+\dfrac{S}{x}$.

令 $l'(x)=\dfrac{\pi}{2}+2-\dfrac{S}{x^2}=0$,

解得 $x=\sqrt{\dfrac{2S}{\pi+4}}$(舍去负值).

所以 $l(x)$只有一个极值点,因此 $x=\sqrt{\dfrac{2S}{\pi+4}}$为最小值点.故选 C.

12.B

提示:由已知条件,得方程$xe^x+x^2+2x=-a$恰有两个不相等的实数解.

设$f(x)=xe^x+x^2+2x$,

则$f'(x)=e^x+xe^x+2x+2=(x+1)(e^x+2)$.

当$x<-1$时,$f'(x)<0$,$f(x)$是减函数;当$x>-1$时,$f'(x)>0$,$f(x)$是增函数.

故$f(x)$的最小值为$f(-1)=-1-\dfrac{1}{e}<0$.结合$f(x)$的大致图像可知$-a>-1-\dfrac{1}{e}$,

所以$a<1+\dfrac{1}{e}$.

二、填空题

13.$(2,+\infty)$　　14.$\dfrac{8}{3}$

15.$(-\infty,-3)\cup(6,+\infty)$

提示:$f'(x)=3x^2+2ax+(a+6)$.因为$f(x)$有极大值和极小值,所以$f'(x)=0$有两个不相等的实根,所以$\Delta=4a^2-4\times3\times(a+6)>0$,解得$a<-3$,或$a>6$.

16.①②⑤

三、解答题

17.**解**:函数y的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

由题意,得$y'=e^x-1$,令$y'=0$,解得$x=0$.

因为在$(-\infty,0)$内,$y'<0$,

所以函数y在$(-\infty,0]$上单调递减;

因为在$(0,+\infty)$内,$y'>0$,

所以函数y在$[0,+\infty)$上单调递增.

18.**解**:(1)$f'(x)=x^2-m^2$,由已知得 $f'(1)=1-m^2=0(m>0)$,解得$m=1$.

所以$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x$.

(2)令$f'(x)=0$,得$x=\pm m$.当x变化时,$f'(x)$,$f(x)$的变化情况如下表:

x	$(-\infty,-m)$	$-m$	$(-m,m)$	m	$(m,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以$f(-m)=-\dfrac{m^3}{3}+m^3\geq\dfrac{2}{3}$,解得$m\geq1$.故实数$m$的取值范围为$[1,+\infty)$.

19.**解**:(1)由原式得

$f(x)=x^3-ax^2-4x+4a$,

所以$f'(x)=3x^2-2ax-4$.

(2)由$f'(-1)=0$,得$a=\dfrac{1}{2}$,

此时$f(x)=(x^2-4)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$,

$f'(x)=3x^2-x-4$.

由$f'(x)=0$,得$x=\dfrac{4}{3}$,或$x=-1$.

又$f\left(\dfrac{4}{3}\right)=-\dfrac{50}{27}$,$f(-1)=\dfrac{9}{2}$,

$f(-2)=0$,$f(2)=0$,

所以$f(x)$在$[-2,2]$上的最大值为$\dfrac{9}{2}$,最小值为$-\dfrac{50}{27}$.

20.**解**:(1)设需新建 n 个桥墩,

则$(n+1)x=m$,即 $n=\dfrac{m}{x}-1$,

所以 $y=f(x)$

$=256n+(n+1)(2+\sqrt{x})x$

$=256\left(\dfrac{m}{x}-1\right)+\dfrac{m}{x}(2+\sqrt{x})x$

$=\dfrac{256m}{x}+m\sqrt{x}+2m-256$.

(2)由(1),知

$f'(x)=-\dfrac{256m}{x^2}+\dfrac{1}{2}mx^{-\frac{1}{2}}$

$=\dfrac{m}{2x^2}(x^{\frac{3}{2}}-512)$.

令 $f'(x)=0$,得 $x=64$.

当 $0<x<64$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$为减函数;当 $64<x<640$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$为增函数.所以$f(x)$在 $x=64$ 处取得最小值,此时 $n=\dfrac{m}{x}-1=\dfrac{640}{64}-1=9$.故需新建 9 个桥墩才能使 y 最小.

21.(1)**解**:$f'(x)=x-\dfrac{a}{x}=\dfrac{x^2-a}{x}(x>0)$,

当 $a\leq0$ 时,$f'(x)>0$ 恒成立,

所以函数 $f(x)$的单调递增区间为$(0,+\infty)$;

当 $a>0$ 时,令 $f'(x)>0$,得 $x>\sqrt{a}$,

所以函数 $f(x)$的单调递增区间为$(\sqrt{a},+\infty)$,单调递减区间为$(0,\sqrt{a})$.

(2)**证明**:设 $F(x)=\dfrac{2}{3}x^3-\left(\dfrac{1}{2}x^2+\ln x\right)$,

故 $F'(x)=2x^2-x-\dfrac{1}{x}$

$=\dfrac{(x-1)(2x^2+x+1)}{x}$.

因为 $x>1$,所以 $F'(x)>0$.

所以 $F(x)$在$(1,+\infty)$上为增函数.

所以 $F(x)>F(1)=\dfrac{1}{6}>0$.

所以当 $x>1$ 时,$\dfrac{1}{2}x^2+\ln x<\dfrac{2}{3}x^3$.

22.(1)**证明**:设 $g(x)=f'(x)$,则 $g(x)=\cos x+x\sin x-1$,$g'(x)=x\cos x$.

当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$时,$g'(x)>0$;当 $x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$时,$g'(x)<0$,所以 $g(x)$在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$单调递增,在$\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$单调递减.

又 $g(0)=0$,$g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)>0$,$g(\pi)=-2$,故 $g(x)$在$(0,\pi)$有唯一零点.所以 $f'(x)$在$(0,\pi)$存在唯一零点.

(2)**解**:由题设知 $f(\pi)\geq a\pi$,$f(\pi)=0$,可得 $a\leq0$.

由(1)知,$f'(x)$在$(0,\pi)$只有一个零点,设为 x_0,且当 $x\in(0,x_0)$时,$f'(x)>0$;当 $x\in(x_0,\pi)$时,$f'(x)<0$,所以 $f(x)$在$(0,x_0)$单调递增,在(x_0,π)单调递减.

又 $f(0)=0$,$f(\pi)=0$,

所以当 $x\in[0,\pi]$时,$f(x)\geq0$.

又当 $a\leq0$,$x\in[0,\pi]$时,$ax\leq0$,故 $f(x)\geq ax$.

因此,a 的取值范围是$(-\infty,0]$.

③

第10期

第2~3版章节测试参考答案

一、选择题

1.A 2.C 3.A 4.C 5.D 6.A 7.D 8.D 9.C

提示:当 $x\geqslant1$ 时,$f'(x)\geqslant0$,函数 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上是增函数;当 $x<1$ 时,$f'(x)\leqslant0$,$f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上是减函数,故当 $x=1$ 时 $f(x)$ 取得最小值,即有 $f(0)\geqslant f(1)$,$f(2)\geqslant f(1)$,得 $f(0)+f(2)\geqslant2f(1)$.

10.D

11.A

提示:令 $f(x)=-x^3+x^2+x-2$,则 $f'(x)=-3x^2+2x+1$.令 $-3x^2+2x+1=0$,得 $x=1$,或 $x=-\frac{1}{3}$,故函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 和 $x=-\frac{1}{3}$ 处分别取得极大值 $f(1)=-1$ 和极小值 $f\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{59}{27}$.据此画出函数 $f(x)$ 的大致图像,可知图像与 x 轴只有一个交点,即方程只有一个根,且在 $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$ 内.

12.B

提示:根据导数的几何意义,将“可平行性”的定义转化为:关于 x 的方程 $f'(x)=a$(a 是导数值)至少有两个不相等的实根.①对于函数 $y=1$,$y'=0$ 恒成立,此时任意两点的切线都是重合的,不符合题意,故错误.②由 $y'=-\sin x$ 和三角函数的周期性知,$y'=a(-1\leqslant a\leqslant1)$ 的解有无穷多个,正确.③$f'(x)=3x^2-2x+a$,令 $3x^2-2x+a=m$(m 是导数值),即 $3x^2-2x+a-m=0$,当 $\Delta=4-12(a-m)\leqslant0$ 时,上述方程至多有一个实根,不符合题意,错误.④对于 $y=e^x-1(x<0)$,$y'=e^x\in(0,1)$;对于 $y=x+\frac{1}{x}$,$y'=1-\frac{1}{x^2}$,要使得分段函数 $f(x)$ 的图像具有“可平行性”,则 $1-\frac{1}{x^2}\in(0,1)$,得 $x>1$,所以 $m=1$,④正确.

二、填空题

13.$f'(2)$

14.$\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right)$

提示:$f'(x)=\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\in[-1,1]$,所以 $-1\leqslant\tan\alpha\leqslant1$.结合 $\alpha\in[0,\pi)$,解得 $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right)$.

15.2

提示:设底面边长为 a,

则高 $h=\sqrt{12-\frac{a^2}{2}}$,

所以体积 $V=\frac{1}{3}a^2h=\frac{1}{3}\sqrt{12a^4-\frac{a^6}{2}}$.

设 $y=12a^4-\frac{1}{2}a^6$,则 $y'=48a^3-3a^5$.

令 $y'=0(a>0)$,解得 $a=4$.

此时,体积最大,则高 $h=2$.

16.$[-e^2,+\infty)$

提示:$f'(x)=\frac{(x-1)e^x+a}{x^2}$.由已知条件知,$f'(x)\geqslant0$ 在 $[2,4]$ 上恒成立,即 $(x-1)e^x+a\geqslant0$ 在 $[2,4]$ 上恒成立.

记 $g(x)=(x-1)e^x+a$,$x\in[2,4]$,则 $g'(x)=xe^x>0$,$g(x)$ 在 $[2,4]$ 上单调递增,故 $[g(x)]_{\min}=g(2)=e^2+a\geqslant0$,解得 $a\geqslant-e^2$.

三、解答题

17.**解**:$\Delta y=\frac{1}{(1+\Delta x)^2}-1=\frac{-(\Delta x)^2-2\Delta x}{(1+\Delta x)^2}$.

故 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{-\Delta x-2}{(1+\Delta x)^2}=-2$.

所以该曲线在点 P 处的切线的斜率为 -2.

18.**解**:(1)$f'(x)=3x^2+1$,可得曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,-6)$ 处的切线的斜率 $k=3\times2^2+1=13$,故切线方程为 $y-(-6)=13\cdot(x-2)$,即 $13x-y-32=0$.

(2)设切点为 (m,m^3+m-16),

则切线的斜率 $k=3m^2+1=\frac{m^3+m-16}{m}$,

解得 $m=-2$,$k=13$.

所以切点坐标为 $(-2,-26)$,直线 l 的方程为 $y=13x$.

19.**解**:(1)依题意,得 $f'(x)=3x^2-x=x(3x-1)$.当 $0<x<\frac{1}{3}$ 时,$f'(x)<0$;当 $x>\frac{1}{3}$ 时,$f'(x)>0$.所以 $f(x)$ 有极小值 $f\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{54}$.

又 $f(0)=0$,$f(1)=\frac{1}{2}$,故 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值为 $\frac{1}{2}$,最小值为 $-\frac{1}{54}$.

(2)$f'(x)=3ax^2-x$.令 $g(x)=3ax^2-x$,则 $g'(x)=6ax-1$.由 $g'(x)<0$,得 $g(x)$ 的单调递减区间为 $\left(0,\frac{1}{6a}\right)$.故 $A=\left(0,\frac{1}{6a}\right)$.当 $x\in\left(0,\frac{1}{6a}\right)$ 时,$f'(x)=3ax^2-x=x(3ax-1)<0$,故 $y=f(x)$ 在区间 A 上单调递减.

20.**解**:(1)设 Q 为 AB 的中点,由条件知 PQ 垂直平分 AB,若 $\angle BAO=\theta$(rad),

则 $OB=OA=\frac{AQ}{\cos\angle BAO}=\frac{10}{\cos\theta}$,

$OP=10-10\tan\theta$,

所以 $y=OA+OB+OP=\frac{10}{\cos\theta}+\frac{10}{\cos\theta}+10-10\tan\theta$,

即 $y=\frac{20-10\sin\theta}{\cos\theta}+10\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\right)$.

(2)y'

$=\frac{-10\cos\theta\cos\theta-(20-10\sin\theta)(-\sin\theta)}{\cos^2\theta}$

$=\frac{10(2\sin\theta-1)}{\cos^2\theta}$.

令 $y'=0$,得 $\sin\theta=\frac{1}{2}$.

又 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$,所以 $\theta=\frac{\pi}{6}$.

当 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right)$ 时,$y'<0$,y 单调递减;

当 $\theta\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$ 时,$y'>0$,y 单调递增.

所以当 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 时,y 取得最小值.

此时 $OQ=\frac{10\sqrt{3}}{3}$ km,故污水处理厂位于线段 AB 的垂直平分线上,且距离 AB 边 $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ km 处.

21.**解**:(1)函数的定义域为 $(0,+\infty)$.

当 $a=1$ 时,$f(x)=x-\ln x$,

$f'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$.

当 $0<x<1$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减;当 $x>1$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增,

所以 $[f(x)]_{极小值}=f(1)=1$,无极大值.

(2)$f'(x)=(1-a)x+a-\frac{1}{x}$

$=\frac{(1-a)x^2+ax-1}{x}$

$=\frac{(1-a)\left(x-\frac{1}{a-1}\right)(x-1)}{x}$.

当 $a\in(3,4)$ 时,$f(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调递减,所以 $f(1)$ 是最大值,$f(2)$ 是最小值.

所以 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant f(1)-f(2)=\frac{a}{2}-\frac{3}{2}+\ln2$.

所以 $ma+\ln2>\frac{a}{2}-\frac{3}{2}+\ln2$.由 $a>0$,上式整理,得 $m>\frac{1}{2}-\frac{3}{2a}$.由 $3<a<4$,得 $0<\frac{1}{2}-\frac{3}{2a}<\frac{1}{8}$.所以 $m\geqslant\frac{1}{8}$.

所以实数 m 的取值范围是 $\left[\frac{1}{8},+\infty\right)$.

22.(1)**解**:由已知,$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,且 $f'(x)=\frac{1}{x}-[ae^x+a(x-1)e^x]=\frac{1-ax^2e^x}{x}$.

因此当 $a\leqslant0$ 时,$1-ax^2e^x>0$,从而 $f'(x)>0$,所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递增.

(2)**证明**:①由(1)知 $f'(x)=\frac{1-ax^2e^x}{x}$.

令 $g(x)=1-ax^2e^x$,由 $0<a<\frac{1}{e}$,可知 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递减,又 $g(1)=1-ae>0$,且 $g\left(\ln\frac{1}{a}\right)=1-a\left(\ln\frac{1}{a}\right)^2\cdot\frac{1}{a}=1-\left(\ln\frac{1}{a}\right)^2<0$,故 $g(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内有唯一解,不妨设为 x_0,则 $1<x_0<\ln\frac{1}{a}$.当 $x\in(0,x_0)$ 时,$f'(x)=\frac{g(x)}{x}>\frac{g(x_0)}{x}=0$,所以 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 内单调递增;当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时,$f'(x)=\frac{g(x)}{x}<\frac{g(x_0)}{x}=0$,所以 $f(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 内单调递减,因此 x_0 是 $f(x)$ 的唯一极值点.

令 $h(x)=\ln x-x+1$,则当 $x>1$ 时,$h'(x)=\frac{1-x}{x}<0$,故 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 内单调递减,从而当 $x>1$ 时,$h(x)<h(1)=0$,所以 $\ln x<x-1$,从而 $f\left(\ln\frac{1}{a}\right)=\ln\left(\ln\frac{1}{a}\right)-a\left(\ln\frac{1}{a}-1\right)e^{\ln\frac{1}{a}}=\ln\left(\ln\frac{1}{a}\right)-\left(\ln\frac{1}{a}-1\right)=h\left(\ln\frac{1}{a}\right)<0$.又因为 $f(x_0)>f(1)=0$,所以 $f(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 内有唯一零点.又 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 内有唯一零点 1,从而 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 恰有两个零点.

②由题意,$\begin{cases}f'(x_0)=0,\\f(x_1)=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}ax_0^2e^{x_0}=1,\\\ln x_1=a(x_1-1)e^{x_1},\end{cases}$

从而 $\ln x_1=\frac{x_1-1}{x_0^2}e^{x_1-x_0}$,即 $e^{x_1-x_0}=\frac{x_0^2\ln x_1}{x_1-1}$.

因为当 $x>1$ 时,$\ln x<x-1$,

又 $x_1>x_0>1$,故 $e^{x_1-x_0}<\frac{x_0^2(x_1-1)}{x_1-1}=x_0^2$,两边取对数,得 $x_1-x_0<2\ln x_0<2(x_0-1)$,整理得 $3x_0-x_1>2$.

第11期

第2~3版综合测试(一)参考答案

一、选择题

1.D 2.C 3.C 4.B 5.D 6.D 7.A

提示:由已知,得 $y_0+\frac{p}{2}=3y_0$,其中 $p=8$,所以 $y_0=2$.

8.A

提示:图像中的单调递减区间即为 $f'(x)\leqslant0$ 的解集,故选 A.

9.A

10.B

提示:易得甲产品的利润与投入资金满足 $y=\frac{1}{4}x$,乙产品的利润与投入资金满足 $y=\frac{5}{4}\sqrt{x}$.设乙产品的投入资金为 x 万元,则甲产品的投入资金为 $(10-x)$ 万元,其中 $0\leqslant x\leqslant10$,则可获得的利润 $y=\frac{1}{4}(10-x)+\frac{5}{4}\sqrt{x}$.从而 $y'=-\frac{1}{4}+\frac{5}{8\sqrt{x}}$.令 $y'=0$,解得 $x=\frac{25}{4}$.此时函数 y 取得最大值,为 $\frac{65}{16}$ 万元.

11.C

提示:若 $|PA|+|PB|=4=|AB|$,则点 P 的轨迹是线段 AB,故A错误;若 $|PA|-|PB|=3<|AB|$,则点 P 的轨迹是双曲线的左支,故B错误;对于C,设 $M(x,y)$,则 $y^2=\frac{3}{4}(4-x^2)$,$k_{AM}\cdot k_{BM}=\frac{y}{x-2}\cdot\frac{y}{x+2}=\frac{y^2}{x^2-4}=-\frac{3}{4}$,故正确;同理,得D中 $k_{AM}\cdot k_{BM}=\frac{3}{4}$,故错误.故选C.

12.D

提示:设切点为 $(x_0,x_0e^{x_0})$,由 $y'=e^x+xe^x$,得切线方程为 $y=(e^{x_0}+x_0e^{x_0})(x-x_0)+x_0e^{x_0}$.将点 P 的坐标代入并化简,得 $m=(-x_0^2-x_0-1)e^{x_0}$,则此关于 x_0 的方程有三个不相等的实根.令 $f(x)=(-x^2-x-1)e^x$,则 $f'(x)=-(x+1)(x+2)e^x$,可得 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 和 $(-1,+\infty)$ 上单调递减,在 $(-2,-1)$ 上单调递增,且极小值为 $f(-2)=-\frac{3}{e^2}$,极大值为 $f(-1)=-\frac{1}{e}$,由此画出 $f(x)$ 的大致图像,可知 $m\in\left(-\frac{3}{e^2},-\frac{1}{e}\right)$.

二、填空题

13.$a=1$,$b=-1$(答案不唯一)

14.$(e,1)$

15.4

提示:若 $x=0$,则不论 a 取何值,$f(x)\geqslant0$,显然成立;当 $x\in(0,1]$ 时,$f(x)=ax^3-3x+1\geqslant0$ 可转化为 $a\geqslant\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}$,设 $g(x)=\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}$,则 $g'(x)=\frac{3(1-2x)}{x^4}$,所以 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递增,在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 上单调递减,因此 $[g(x)]_{\max}=g\left(\frac{1}{2}\right)=4$,从而 $a\geqslant4$;当 $x\in[-1,0)$ 时,$f(x)=ax^3-3x+1\geqslant0$ 可转化为 $a\leqslant\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}$,设 $g(x)=\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}$,则 $g'(x)=\frac{3(1-2x)}{x^4}$,所以 $g(x)$ 在 $[-1,0)$ 上单调递增,因此 $[g(x)]_{\min}=g(-1)=4$,从而 $a\leqslant4$.综上所述,$a=4$.

16.$\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

提示:设椭圆的长半轴长、短半轴长、焦半距分别为 a、b、c,因为 $\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=0$,所以点 M 的轨迹是以原点 O 为圆心,焦半距为半径的圆.又点 M 总在椭圆的内部,所以 $c<b$,$c^2<b^2=a^2-c^2$,即 $2c^2<a^2$.所以 $e^2=\frac{c^2}{a^2}<\frac{1}{2}$,而 $e\in(0,1)$,故 $e\in\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

三、解答题

17.**解**:逆命题为:若 $a+b$ 是偶数,则 a,b 都是奇数.它是假命题.

否命题:若 a,b 不都是奇数,则 $a+b$ 不是偶数.它是假命题.

逆否命题为:若 $a+b$ 不是偶数,则 a,b 不都是奇数.它是真命题.

18.**解**:(1)$A=\{x|-2\leqslant x\leqslant5\}$,$B=\{x|m+1\leqslant x\leqslant2m-1\}$,$B\neq\varnothing$.

因为“命题 p:任意 $x\in B$,都有 $x\in A$”是真命题,所以 $B\subseteq A$,$B\neq\varnothing$.所以 $\begin{cases}m+1\leqslant2m-1,\\m+1\geqslant-2,\\2m-1\leqslant5.\end{cases}$ 解得 $2\leqslant m\leqslant3$.所以实数 m 的取值范围为 $[2,3]$.

(2)若 q 为真,则 $A\cap B\neq\varnothing$.

因为 $B\neq\varnothing$,所以 $m+1\leqslant2m-1$,即 $m\geqslant2$.所以 $\begin{cases}m+1\leqslant5,\\m\geqslant2,\end{cases}$ 所以 $2\leqslant m\leqslant4$.所以实数 m 的取值范围为 $[2,4]$.

19.**解**:(1)由离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{2}$,得 $a=b$,则可设双曲线的方程为 $x^2-y^2=\lambda$.将点 $(4,-\sqrt{10})$ 代入,得 $\lambda=6$.所以该双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{6}=1$.

(2)结合(1)可得 $|F_1F_2|=2\sqrt{6+6}=4\sqrt{3}$.又 $M(4,-\sqrt{10})$,所以 $\triangle F_1MF_2$ 的面积 $S=\frac{1}{2}\times4\sqrt{3}\times\sqrt{10}=2\sqrt{30}$.

20.(1)**解**:定义域为 $(0,+\infty)$,$f'(x)=\frac{1}{x}-x+1=\frac{-x^2+x+1}{x}$.由 $f'(x)>0$,解得 $0<x<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(0,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

(2)**证明**:令 $F(x)=f(x)-(x-1)$,则 $F'(x)=\frac{1}{x}-x+1-1=\frac{-(x+1)(x-1)}{x}$.

当 $x>1$ 时,$F'(x)<0$,$F(x)$ 单调递减,所以 $F(x)<F(1)=0$.故当 $x>1$ 时,$f(x)<x-1$.

21.**解**:(1)$f'(x)=6x^2-2ax=2x(3x-a)$.令 $f'(x)=0$,得 $x=0$,或 $x=\frac{a}{3}$.

若 $a>0$,则当 $x\in(-\infty,0)\cup\left(\frac{a}{3},+\infty\right)$ 时,$f'(x)>0$;当 $x\in\left(0,\frac{a}{3}\right)$ 时,$f'(x)<0$,

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$,$\left(\frac{a}{3},+\infty\right)$ 上单调递增,在 $\left(0,\frac{a}{3}\right)$ 上单调递减;

若 $a=0$,$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增;

若 $a<0$,则当 $x\in\left(-\infty,\frac{a}{3}\right)\cup(0,+\infty)$ 时,$f'(x)>0$;当 $x\in\left(\frac{a}{3},0\right)$ 时,$f'(x)<0$,

故 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\frac{a}{3}\right)$,$(0,+\infty)$ 上单调递增,在 $\left(\frac{a}{3},0\right)$ 上单调递减.

(2)当 $0<a<3$ 时,由(1)知,$f(x)$ 在 $\left(0,\frac{a}{3}\right)$ 上单调递减,在 $\left(\frac{a}{3},1\right)$ 上单调递增,所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最小值为 $f\left(\frac{a}{3}\right)=-\frac{a^3}{27}+2$,最大值为 $f(0)=2$ 或 $f(1)=4-a$.

于是,$m=-\frac{a^3}{27}+2$,$M=\begin{cases}4-a,0<a<2,\\2,2\leqslant a<3.\end{cases}$

所以 $M-m=\begin{cases}2-a+\frac{a^3}{27},0<a<2,\\\frac{a^3}{27},2\leqslant a<3.\end{cases}$

当 $0<a<2$ 时,可知 $2-a+\frac{a^3}{27}$ 单调递减,所以 $M-m$ 的取值范围是 $\left(\frac{8}{27},2\right)$;

当 $2\leqslant a<3$ 时,$\frac{a^3}{27}$ 单调递增,所以 $M-m$ 的取值范围是 $\left[\frac{8}{27},1\right)$.

综上,$M-m$ 的取值范围是 $\left[\frac{8}{27},2\right)$.

22.(1)**解**:由题意可得 $p=2$,所以圆 S 的圆心为 $S(0,1)$,半径为1,所以 $|BC|=2$.

若线段 AB,BC,CD 的长按此顺序构成一个等差数列,则 $|AB|+|CD|=2|BC|=4$.

设 $A(x_1,y_1)$,$D(x_2,y_2)$.

由 $\begin{cases}x^2=4y,\\y=kx+1,\end{cases}$ 得 $x^2-4kx-4=0$.

所以 $x_1+x_2=4k$,$y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2=4k^2+2$,$|AB|+|CD|=|AD|-|BC|=y_1+y_2+2-2=4k^2+2=4$,结合 $k>0$,解得 $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2)**证明**:由(1)可知 $Q(2k,2k^2+1)$.

当 $k=0$ 时,直线 l' 与抛物线没有两个交点,所以 $k\neq0$.

用 $-\frac{1}{k}$ 替换 k 可得 $P\left(-\frac{2}{k},\frac{2}{k^2}+1\right)$,计算得直线 PQ 的斜率 $k_{PQ}=\frac{k^2-1}{k}$.

所以直线 PQ 的方程为 $y-(2k^2+1)=\frac{k^2-1}{k}(x-2k)$,即 $y=\frac{k^2-1}{k}x+3$.所以直线 PQ 过定点 $(0,3)$.