第 4 期

第 2~3 版章节测试参考答案

一、选择题

1.C

提示：10×10 分$=10\times0.1$ 元$=1$ 元，故选 C.

2.D

3.C

4.B

5.C

6.B

提示：据已知可转化为$\dfrac{1\times\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}>\dfrac{127}{64}$，整理得 $2^n>128$，解得 $n>7$，故初始值为 $n=8$.

7.C

提示：正三角形的边对应正四面体的面，即正三角形表示的侧面，所以边的中点对应的就是正三角形的中心.

8.C

提示：垂直于同一个平面的两条直线平行.

9.A

提示：三棱柱有 0 个对角面；四棱柱有 2 个对角面$(0+2=0+(3-1))$；五棱柱有 5 个对角面$(2+3=2+(4-1))$；六棱柱有 9 个对角面$(5+4=5+(5-1))$.

猜想：若 k 棱柱有 $f(k)$ 个对角面，则$(k+1)$棱柱有 $f(k)+k-1$ 个对角面.故选A.

10.C

提示：因为 $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$，$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$，$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)$，

依此类推可得：$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}+\frac{1}{110}+\frac{1}{132}+\frac{1}{156}=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{13}\right)$，所以$\frac{1}{m}=\frac{1}{13}$，$\frac{1}{n}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{1}{20}$，$m=13,n=20$，即 $1\leqslant x\leqslant13,1\leqslant y\leqslant20$.又$\frac{x+y+2}{x+1}=1+\frac{y+1}{x+1}$，把$\frac{y+1}{x+1}$看成点$(x,y)$，$(-1,-1)$连线的斜率，结合 $m\leqslant n,m,n\in N_+$，在满足条件的点中，$(13,1)$，$(-1,-1)$连线的斜率最小，为$\frac{1+1}{13+1}=\frac{1}{7}$，故$\frac{x+y+2}{x+1}$最小值为$\frac{8}{7}$.故选 C.

11.A

提示：当 $n=k$ 时式子为 $4^{2k-1}+3^{k+1}$，则 $n=k+1$ 时，式子为 $4^{2k+1}+3^{k+2}=4^2\times4^{2k-1}+3\times3^{k+1}=16\times(4^{2k-1}+3^{k+1})-13\times3^{k+1}$，显然 A 正确，故选 A.

12.B

提示：由数据可知，进入立定跳远决赛的 8 人为 1~8 号，所以进入 30 秒跳绳决赛的 6 人从 1~8 号里产生.数据排序后可知 3 号，6 号，7 号必定进入 30 秒跳绳决赛，则得分为 $63,a,60,63,a-1$ 的 5 人中有 3 人进入 30 秒跳绳决赛. 若 1 号，5 号学生未进入 30 秒跳绳决赛，则 4 号学生就会进入决赛，与事实矛盾，所以 1 号，5 号学生必进入 30 秒跳绳决赛.故选 B.

二、填空题

13.-8

14.$\frac{8}{65}$

提示：观察猜想可得：$a_n=\frac{n}{n^2+1}$，所以当输入数据 8 时，输出数据为$\frac{8}{8^2+1}=\frac{8}{65}$.

15.$\frac{a^3}{8}$

16.$\frac{x}{(2^n-1)x+2^n}$

提示：观察 $f_1(x)$、$f_2(x)$、$f_3(x)$、$f_4(x)$的表达式可见，$f_n(x)$的分子为 x，分母中 x 的系数比常数项小 1，常数项依次为$2,4,8,16,\cdots,2^n$.

故 $f_n(x)=\frac{x}{(2^n-1)x+2^n}$.

三、解答题

17.解：$f(a)+f(c)>2f(b)$.

证明如下：因为 a,b,c 是互不相等的正数，

所以 $a+c>2\sqrt{ac}$.

因为 $b^2=ac$，所以 $ac+2(a+c)>b^2+4b$.

即 $ac+2(a+c)+4>b^2+4b+4$.

从而$(a+2)(c+2)>(b+2)^2$.

因为 $f(x)=\log_2x$ 是增函数，

所以 $\log_2[(a+2)(c+2)]>\log_2(b+2)^2$.

即 $\log_2(a+2)+\log_2(c+2)>2\log_2(b+2)$.

故 $f(a)+f(c)>2f(b)$.

18.证明：作斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的直截面 DEF，分别交 AA_1,BB_1,CC_1 于点 D,F,E，则$\angle DFE$ 为平面 ABB_1A_1 与平面 BCC_1B_1 所成角. 在$\triangle DEF$ 中有余弦定理：$DE^2=DF^2+EF^2-2DF\cdot EF\cos\angle DFE$，两边同乘以 AA_1^2，得 $DE^2\cdot AA_1^2=DF^2\cdot AA_1^2+EF^2\cdot AA_1^2-2DF\cdot AA_1\cdot EF\cdot AA_1\cos\angle DFE$.

即 $S^2_{AA_1C_1C}=S^2_{ABB_1A_1}+S^2_{BCC_1B_1}-2S_{ABB_1A_1}\cdot S_{BCC_1B_1}\cdot\cos\angle DFE$.

19.证明：要证明$\frac{a}{a+m}+\frac{b}{b+m}>\frac{c}{c+m}$，只需证明$\frac{a}{a+m}+\frac{b}{b+m}-\frac{c}{c+m}>0$ 即可.

因为$\frac{a}{a+m}+\frac{b}{b+m}-\frac{c}{c+m}=\frac{a(b+m)(c+m)+b(a+m)(c+m)-c(a+m)(b+m)}{(a+m)(b+m)(c+m)}$，

因为 $a>0,b>0,c>0,m>0$，

所以$(a+m)(b+m)(c+m)>0$，

因为 $a(b+m)(c+m)+b(a+m)(c+m)-c(a+m)(b+m)=abc+abm+acm+am^2+abc+abm+bcm+bm^2-abc-bcm-acm-cm^2=2abm+am^2+abc+bm^2-cm^2=2abm+abc+(a+b-c)m^2$，

因为$\triangle ABC$ 中任意两边之和大于第三边，

所以 $a+b-c>0$，所以$(a+b-c)m^2>0$，

所以 $2abm+abc+(a+b-c)m^2>0$，

所以$\frac{a}{a+m}+\frac{b}{b+m}>\frac{c}{c+m}$.

20.(1)证明：$\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\tan x+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan x\tan\frac{\pi}{4}}=\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}$.

(2)解：$f(x)$是以 4 为一个周期的周期函数.

证明如下：因为 $f(x+2)=f((x+1)+1)=\dfrac{1+f(x+1)}{1-f(x+1)}=\dfrac{1+\frac{1+f(x)}{1-f(x)}}{1-\frac{1+f(x)}{1-f(x)}}=-\dfrac{1}{f(x)}$，

所以 $f(x+4)=f((x+2)+2)=-\dfrac{1}{f(x+2)}=f(x)$，

所以 $f(x)$是周期函数.

21.解：由 $x_1=\frac{1}{2}$及 $x_{n+1}=\frac{1}{1+x_n}$，得 $x_2=\frac{2}{3}$，$x_4=\frac{5}{8}$，$x_6=\frac{13}{21}$，

由 $x_2>x_4>x_6$ 猜想：数列$\{x_{2n}\}$是递减数列.

下面用数学归纳法证明：

(1)当 $n=1$ 时，已证命题成立.

(2)假设当 $n=k$ 时命题成立，

即 $x_{2k}>x_{2k+2}$，那么 $x_{2k+2}-x_{2k+4}=\dfrac{1}{1+x_{2k+1}}-\dfrac{1}{1+x_{2k+3}}=\dfrac{x_{2k+3}-x_{2k+1}}{(1+x_{2k+1})(1+x_{2k+3})}=\dfrac{\frac{1}{1+x_{2k+2}}-\frac{1}{1+x_{2k}}}{(1+x_{2k+1})(1+x_{2k+3})}=\dfrac{x_{2k}-x_{2k+2}}{(1+x_{2k})(1+x_{2k+1})(1+x_{2k+2})(1+x_{2k+3})}>0$，

即 $x_{2(k+1)}>x_{2(k+1)+2}$，

也就是说，当 $n=k+1$ 时命题也成立.结合(1)和(2)知命题成立.

22.(1)解：由于$[(x-1)+(y+1)+(z+1)]^2$

$=(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2+2[(x-1)\cdot(y+1)+(y+1)(z+1)+(z+1)(x-1)]$

$\leqslant3[(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2]$，

因为 $x+y+z=1$，

所以$(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2\geqslant\frac{4}{3}$，

当且仅当 $x=\frac{5}{3}$，$y=-\frac{1}{3}$，$z=-\frac{1}{3}$时，等号成立. 所以 $(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2$的最小值为$\frac{4}{3}$.

(2)证明：由于$[(x-2)+(y-1)+(z-a)]^2$

$=(x-2)^2+(y-1)^2+(z-a)^2+2[(x-2)\cdot(y-1)+(y-1)(z-a)+(z-a)(x-2)]$

$\leqslant3[(x-2)^2+(y-1)^2+(z-a)^2]$，

因为 $x+y+z=1$，所以$(x-2)^2+(y-1)^2+(z-a)^2\geqslant\frac{(2+a)^2}{3}$，当且仅当 $x=\frac{4-a}{3}$，$y=\frac{1-a}{3}$，$z=\frac{2a-2}{3}$时，等号成立. 因此$(x-2)^2+(y-1)^2+(z-a)^2$的最小值为$\frac{(2+a)^2}{3}$.

由题设知$\frac{(2+a)^2}{3}\geqslant\frac{1}{3}$，解得 $a\leqslant-3$ 或 $a\geqslant-1$.

第 1 期

第 3~4 版同步周测参考答案

一、选择题

1.C

2.C

3.B

4.D

5.B

6.B

7.A

提示：只有①③正确.

对于②，式子$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$的左边表示与 c 共线的向量，而右边表示与 a 共线的向量，二者不一定相等；

对于④，应该是$|a\cdot b|\leqslant|a|\cdot|b|$；

对于⑤，当 a 与 b,c 都垂直时，不能得出 $b=c$.

8.B

提示：$1=1,3=1+2,6=1+2+3,10=1+2+3+4,\cdots$，第n个三角形数为$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

9.A

提示：如图所示，设双曲线方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，

则 $F(-c,0)(c>0)$，$B(0,b)$，$A(a,0)$，

所以$\overrightarrow{FB}=(c,b)$，$\overrightarrow{AB}=(-a,b)$.

又因为$\overrightarrow{FB}\perp\overrightarrow{AB}$，

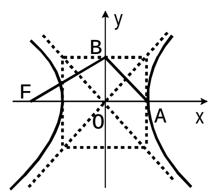
所以$\overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{AB}=b^2-ac=0$，

所以 $c^2-a^2-ac=0$，

所以 $e^2-e-1=0$，

所以 $e=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$或 $e=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$(舍去).

故选A.



(第 9 题图)

10.B

11.A

12.A

二、填空题

13.凸 n 边形的内角和是$(n-2)\times180^\circ(n\geqslant3,n\in\mathbf{N}_+)$

14.$\frac{4}{3}n(n+1)$

15.6

提示：由题意知，因为$\sqrt{8^2+15^2}=17$，此直角三角形的三边分别为 8,15,17，由该直角三角形内切圆的半径 $r=\frac{8+15-17}{2}=3$，得该圆直径的最大值为 6 步.

16.$\frac{x_1}{a^2}\cdot x+\frac{y_1}{b^2}\cdot y=1$

提示：当椭圆的离心率 e 趋近于 0 时，椭圆趋近于圆，此时 a,b 都趋近于圆的半径 r，由切线方程 $x_0\cdot x+y_0\cdot y=r^2$ 变形得$\frac{x_0}{r^2}\cdot x+\frac{y_0}{r^2}\cdot y=1$，则过椭圆上一点 $P(x_1,y_1)$的椭圆的切线方程为$\frac{x_1}{a^2}\cdot x+\frac{y_1}{b^2}\cdot y=1$.

三、解答题

17.解：(1)

	交点数	边数	区域数
(A)	4	5	2
(B)	5	8	4
(C)	8	12	5
(D)	10	15	6

(2)观察表格，若记一个平面图形的交点数、边数、区域数分别为 E、F、G，猜想 E、F、G 之间的数量关系为 $E+G-F=1$.

18.解：因为 $S_n=2n-a_n$，$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，$n\in N_+$，

所以，当 $n=1$ 时，有 $a_1=2-a_1$，

解得 $a_1=1=2-\frac{1}{2^0}$；

当 $n=2$ 时，有 $a_1+a_2=2\times2-a_2$，

解得 $a_2=\frac{3}{2}=2-\frac{1}{2^1}$；

当 $n=3$ 时，有 $a_1+a_2+a_3=2\times3-a_3$，

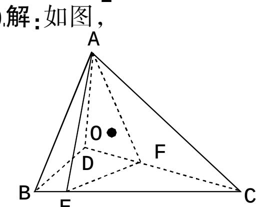
解得 $a_3=\frac{7}{4}=2-\frac{1}{2^2}$；

当 $n=4$ 时，有 $a_1+a_2+a_3+a_4=2\times4-a_4$，

解得 $a_4=\frac{15}{8}=2-\frac{1}{2^3}$.

猜想 $a_n=2-\frac{1}{2^{n-1}}(n\in N_+)$.

19.解：如图，



(第 19 题图)

截面 AEF 经过四面体 ABCD 的内切球(与四个面都相切的球)的球心 O，且与 BC,DC 分别交于 E,F，若截面将四面体分为体积相等的两部分，则四棱锥 A-BEFD 与三棱锥 A-EFC 的表面积相等.

20.解：因为 $f(x)=\frac{1}{3^x+\sqrt{3}}$，

所以 $f(0)+f(1)=\frac{1}{3^0+\sqrt{3}}+\frac{1}{3^1+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

$f(-1)+f(2)=\frac{1}{3^{-1}+\sqrt{3}}+\frac{1}{3^2+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

$f(-2)+f(3)=\frac{1}{3^{-2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{3^3+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

归纳猜想一般性结论：$f(-x)+f(x+1)=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

证明如下：$f(-x)+f(x+1)$

$=\frac{1}{3^{-x}+\sqrt{3}}+\frac{1}{3^{x+1}+\sqrt{3}}$

$=\frac{3^x}{1+\sqrt{3}\cdot3^x}+\frac{1}{3^{x+1}+\sqrt{3}}$

$=\frac{\sqrt{3}\cdot3^x}{\sqrt{3}+3^{x+1}}+\frac{1}{3^{x+1}+\sqrt{3}}$

$=\frac{\sqrt{3}\cdot3^x+1}{\sqrt{3}+3^{x+1}}+\frac{\sqrt{3}\cdot3^x+1}{\sqrt{3}(1+\sqrt{3}\cdot3^x)}$

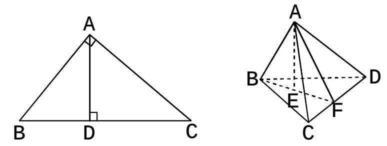
$=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

21.(1)证明：如图1所示，由题意，得$AD^2=BD\cdot DC$，$AB^2=BD\cdot BC$，$AC^2=BC\cdot DC$，

所以$\frac{1}{AD^2}=\frac{1}{BD\cdot DC}=\frac{BC^2}{BD\cdot BC\cdot DC\cdot BC}=\frac{BC^2}{AB^2\cdot AC^2}$.

又$BC^2=AB^2+AC^2$，

所以$\frac{1}{AD^2}=\frac{AB^2+AC^2}{AB^2\cdot AC^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}$.



(第 21 题图)

(2)解：在四面体$ABCD$中，AB，AC，AD两两垂直，$AE\perp$平面BCD，则$\frac{1}{AE^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}+\frac{1}{AD^2}$.理由如下：

如图2，连接BE并延长，交CD于点F，连接AF.

因为$AB\perp AC$，$AB\perp AD$，所以$AB\perp$平面ACD，

又$AF\subsetneqq$平面ACD，所以$AB\perp AF$.

在$\mathrm{Rt}\triangle ABF$中，$AE\perp BF$，所以$\frac{1}{AE^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AF^2}$.

在$\mathrm{Rt}\triangle ACD$中，$AF\perp CD$，所以$\frac{1}{AF^2}=\frac{1}{AC^2}+\frac{1}{AD^2}$，

所以$\frac{1}{AE^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}+\frac{1}{AD^2}$. 故猜想正确.

22.(1)解：已知 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in R$，$a_1+a_2+\cdots+a_n=1$，

求证：$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\geqslant\frac{1}{n}$.

(2)证明：构造函数 $f(x)=(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+\cdots+(x-a_n)^2$

$=nx^2-2(a_1+a_2+\cdots+a_n)x+a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$

$=nx^2-2x+a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$.

因为对一切 $x\in R$，都有 $f(x)\geqslant0$，

所以 $\Delta=4-4n(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)\leqslant0$，

所以 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\geqslant\frac{1}{n}$.

第2期

第3~4版同步周测参考答案

一、选择题

1.D

提示：若$|a|=|b|$，则$a=b$，显然a、b异号不成立；

若$|a|>|b|$，则$a>b$，利用$a=-3$，$b=1$，满足条件，不满足结果，B不正确；

若$a=0<b=5$，则$|a|>|b|$不成立，C不正确；

若$|a|=|b|$，则$a=\pm b$，成立.故选D.

2.C

3.D

提示：A，与两相互垂直的直线平行的平面的位置关系不能确定；B，平面内的一条直线与另一个平面的交线垂直，这两个平面的位置关系不能确定；C，这两个平面有可能平行或重合；D是成立的，故选D.

4.C

5.B

提示：$q=\sqrt{ab+\frac{mad}{n}+\frac{nbc}{m}+cd}$

$\geqslant\sqrt{ab+2\sqrt{abcd}+cd}$

$=\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$

$=p$.

6.C

提示：选项A中命题条件较少，不足以正面证明；选项B中命题是否定性命题，可以用反证法证明；选项D中命题是至少性命题，可以用反证法证明. 选项C不适合用反证法证明.故选C.

7.B

8.B

9.C

提示：假设$c/\!/b$，而由$c/\!/a$，可得$a/\!/b$，这与a，b异面矛盾，故c与b不可能是平行直线.故选C.

10.B

提示：分$\triangle ABC$的直线只能过一个顶点且与对边相交，如直线AD（点D在BC上），则$\angle ADB+\angle ADC=\pi$，若$\angle ADB$为钝角，则$\angle ADC$为锐角.而$\angle ADC>\angle BAD$，$\angle ADC>\angle ABD$，$\triangle ABD$与$\triangle ACD$不可能相似，与已知不符，只有当$\angle ADB=\angle ADC=\angle BAC=90°$时，才符合题意.

11.C

提示：由于a，b，c不全相等，则$a-b$，$b-c$，$c-a$中至少有一个不为0，故①正确；②显然成立；令$a=2$，$b=3$，$c=5$，满足$a\neq c$，$b\neq c$，$a\neq b$，故③错.

12.B

提示：因为$x>0$，$y>0$，$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}=1$，所以$x+\frac{y}{4}=\left(x+\frac{y}{4}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{4}{y}\right)=2+\frac{y}{4x}+\frac{4x}{y}\geqslant 2+2\sqrt{\frac{y}{4x}\cdot\frac{4x}{y}}=4$，等号在$y=4x$，即$x=2$，$y=8$时成立，所以$x+\frac{y}{4}$的最小值为4，要使不等式$m^2-3m>x+\frac{y}{4}$有解，应有$m^2-3m>4$，所以$m<-1$或$m>4$，故选B.

二、填空题

13.$a\neq 1$或$b\neq 1$

14.④

提示：因为$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$，所以$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}$，所以$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$，所以四边形ABCD为平行四边形.

15.$AC\perp BD$

提示：从结论出发，找一个使$A_1C\perp B_1D_1$成立的充分条件. 因而可以是：$AC\perp BD$或四边形ABCD为正方形.

16.$\left[-2,\frac{3}{2}\right)$

提示：当n为偶数时，$a<2-\frac{1}{n}$，而$2-\frac{1}{n}\geqslant 2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，所以$a<\frac{3}{2}$，

当n为奇数时，$a>-2-\frac{1}{n}$，而$-2-\frac{1}{n}<-2$，所以$a\geqslant -2$.

综上可得，$-2\leqslant a<\frac{3}{2}$.

三、解答题

17.证明：由题意得$\overrightarrow{AB}=(-4,4)$，$\overrightarrow{AC}=(5,5)$，要证明$\triangle ABC$是直角三角形，只需证明$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$，也就是证明$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，由于$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(-4,4)\cdot(5,5)=0$，故原命题成立.

18.证明：假设$\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$成立，则$\frac{2}{b}=\frac{a+c}{ac}=\frac{2b}{ac}$，所以$b^2=ac$.

又因为$b=\frac{a+c}{2}$，所以$\left(\frac{a+c}{2}\right)^2=ac$，即$a^2+c^2=2ac$，即$(a-c)^2=0$，

所以$a=c$，这与a，b，c两两不相等矛盾，

所以$\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$不成立.

19.证明：因为$a^3-b^3=a^2-b^2$且$a\neq b$，

所以$a^2+ab+b^2=a+b$，

由$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2>a^2+ab+b^2$，得$(a+b)^2>a+b$，

又$a+b>0$，所以$a+b>1$.

要证$a+b<\frac{4}{3}$，即证$3(a+b)<4$，

又因为$a+b>0$，

所以只需证明$3(a+b)^2<4(a+b)$，

又$a+b=a^2+ab+b^2$，

即证$3(a+b)^2<4(a^2+ab+b^2)$，也就是证明$(a-b)^2>0$.

因为a、b是不相等的两个正数，故$(a-b)^2>0$成立.

故$a+b<\frac{4}{3}$成立.

综上，得$1<a+b<\frac{4}{3}$.

20.(1)解：验证①式成立：因为$\sqrt{2}>1.41$，所以$2\sqrt{2}>2.82$，所以$2\sqrt{2}-1>1.82$，

又$\sqrt{3}<1.74$，所以$\sqrt{3}<2\sqrt{2}-1$.

(2)一般结论为：若$n\in\mathbf{N}_+$，则$\sqrt{n+2}<2\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.

证明：要证：$\sqrt{n+2}<2\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$，只需证：$\sqrt{n+2}+\sqrt{n}<2\sqrt{n+1}$，即证：$(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})^2<(2\sqrt{n+1})^2$，即证：$2n+2+2\sqrt{n(n+2)}\leqslant 4n+4$，即证：$\sqrt{n(n+2)}<n+1$，只需证：$n(n+2)<n^2+2n+1$，即证：$0<1$，显然成立，故$\sqrt{n+2}<2\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.

21.解：假设三个方程均无实根，则

$$\begin{cases}\Delta_1=16a^2-4(-4a+3)<0,\\ \Delta_2=(a-1)^2-4a^2<0,\\ \Delta_3=4a^2-4(-2a)<0,\end{cases}$$

解得$\begin{cases}-\frac{3}{2}<a<\frac{1}{2},\\ a<-1\text{或}a>\frac{1}{3},\\ -2<a<0,\end{cases}$即$-\frac{3}{2}<a<-1$，

所以当$a\geqslant -1$或$a\leqslant -\frac{3}{2}$时，三个方程至少有一个方程有实根.

所以实数a的取值范围是$\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right]\cup[-1,+\infty)$.

22.(1)证明：当$a+b\geqslant 0$时，$a\geqslant -b$且$b\geqslant -a$.

因为$f(x)$在$\mathbf{R}$上是增函数，

所以$f(a)\geqslant f(-b)$，$f(b)\geqslant f(-a)$，

所以$f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$.

(2)解：(1)中命题的逆命题为“如果$f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$，那么$a+b\geqslant 0$”，此命题成立.

用反证法证明如下：

假设$a+b<0$，则$a<-b$，

所以$f(a)<f(-b)$.

同理可得$f(b)<f(-a)$.

所以$f(a)+f(b)<f(-a)+f(-b)$，这与$f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$矛盾，

故假设不成立，

所以$a+b\geqslant 0$成立，即(1)中命题的逆命题成立.

第3期

第3~4版同步周测参考答案

一、选择题

1.D

2.B

3.B

4.D

提示：项数为$n^2-(n-1)=n^2-n+1$.

5.C

提示：因为用数学归纳法证明等式$f(n)=1+4+7+\cdots+(3n-2)=\frac{3n^2-n}{2}$时，

假设$n=k$时，命题成立，$f(k)=1+4+7+\cdots+(3k-2)=\frac{3k^2-k}{2}$，

则当$n=k+1$时，左端为$f(k+1)=1+4+7+\cdots+(3k-2)+[3(k+1)-2]$，

需要用到的$f(k+1)$与$f(k)$之间的关系式是$f(k+1)=f(k)+3k+1$.故选C.

6.B

7.C

8.B

9.A

提示：因为从$n=k$到$n=k+1$的过渡，增加了$(k+3)^3$，减少了k^3，故利用归纳假设，只需证明$(k+3)^3-k^3=9k^2+27k+27$能被9整除.

10.D

11.D

提示：在证明$n=k+1$时，没有使用归纳假设.

12.A

二、填空题

13.$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$

14.$2k$

15.5

提示：当$n=1$时，3^6+a^3能被14整除的数有$a=3$或5，当$a=3$且$n=2$时，$3^{10}+3^5$不能被14整除，故$a=5$.

16.没有用到归纳假设，不是数学归纳法

三、解答题

17.证明：(1)当$n=1$时，左边$=2$，

右边$=\frac{1\times(3+1)}{2}=2=$左边，等式成立.

(2)假设$n=k(k\geqslant 1)$时等式成立，即$(k+1)+(k+2)+\cdots+(k+k)=\frac{k(3k+1)}{2}$.

则当$n=k+1$时，

左边$=(k+2)+(k+3)+\cdots+(k+k)+(k+k+1)+(k+k+2)$

$=[(k+1)+(k+2)+\cdots+(k+k)]+3k+2$

$=\frac{k(3k+1)}{2}+3k+2=\frac{3k^2+7k+4}{2}$

$=\frac{(k+1)(3k+4)}{2}$

$=\frac{(k+1)[3(k+1)+1]}{2}$，

所以$n=k+1$时，等式成立.

根据(1)和(2)，可知对任意$n\in\mathbf{N}_+$，等式成立.

18.证明：(1)当$n=1$时，左边$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{13}{12}>1$，不等式成立.

(2)假设当$n=k$时，不等式成立，

当$n=k+1$时，不等式左边$=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3(k+1)+1}$

$=\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{3k+1}\right)+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3(k+1)+1}-\frac{1}{k+1}\geqslant 1+\left(\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}-\frac{1}{k+1}\right)$.

欲证上式左边大于等于1，只需证上式右边第二项大于等于0.

$\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}-\frac{1}{k+1}$

$=\frac{6k+6}{(3k+2)(3k+4)}-\frac{2}{3(k+1)}$

$=\frac{18(k+1)^2-2(3k+2)(3k+4)}{3(3k+2)(3k+4)(k+1)}$

$=\frac{2}{3(3k+2)(3k+4)(k+1)}>0$.

故当$n=k+1$时，不等式成立.

由(1)(2)知，不等式对任意$n\in\mathbf{N}_+$都成立.

19.解：由已知得$2b_n=a_n+a_{n+1}$，$a_{n+1}^2=b_nb_{n+1}$，$a_1=2$，$b_1=4$，

由此可得$a_2=6$，$b_2=9$，$a_3=12$，$b_3=16$，$a_4=20$，$b_4=25$.

猜想$a_n=n(n+1)$，$b_n=(n+1)^2$.

用数学归纳法证明如下：

①当$n=1$时，可得结论成立.

②假设当$n=k(k\geqslant 1,k\in\mathbf{N}_+)$时，结论成立，

即$a_k=k(k+1)$，$b_k=(k+1)^2$，

那么当$n=k+1$时，

$a_{k+1}=2b_k-a_k=2(k+1)^2-k(k+1)=(k+1)\cdot(k+2)$，

$b_{k+1}=\frac{a_{k+1}^2}{b_k}=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{(k+1)^2}=(k+2)^2$.

所以当$n=k+1$时，结论也成立.

由①②可知，$a_n=n(n+1)$，$b_n=(n+1)^2$对一切正整数n都成立.

20.证明：(1)当$n=1$时，$x+\frac{1}{x}\geqslant 2$成立.

当$n=2$时，$x^2+1+\frac{1}{x^2}\geqslant 2+2>2+1$成立.

(2)假设当$n=k$时，$x^k+x^{k-2}+\cdots+\frac{1}{x^{k-2}}+\frac{1}{x^k}\geqslant k+1$成立.

那么，当$n=k+2$时，$x^{k+2}+x^k+\cdots+\frac{1}{x^k}+\frac{1}{x^{k+2}}\geqslant k+1+\left(x^{k+2}+\frac{1}{x^{k+2}}\right)\geqslant k+1+2=(k+2)+1$.

这表明，当$n=k+2$时命题也成立.

根据(1)和(2)，可知原不等式成立.

21.证明：当$n=1$时，$2^1+2=4>n^2=1$，

当$n=2$时，$2^2+2=6>n^2=4$，

当$n=3$时，$2^3+2=10>n^2=9$，

当$n=4$时，$2^4+2=18>n^2=16$，

由此可以猜想，

$2^n+2>n^2(n\in\mathbf{N}_+)$成立.

下面用数学归纳法证明：

①当$n=1$时，左边$=2^1+2=4$，右边$=1$，所以左边>右边，所以原不等式成立.

当$n=2$时，左边$=2^2+2=6$，右边$=2^2=4$，所以左边>右边；

当$n=3$时，左边$=2^3+2=10$，右边$=3^2=9$，所以左边>右边.

②假设$n=k(k\geqslant 3$且$k\in\mathbf{N}_+)$时，不等式成立，即$2^k+2>k^2$，那么$n=k+1$时，$2^{k+1}+2=2\cdot 2^k+2=2(2^k+2)-2>2k^2-2$.

要证当$n=k+1$时结论成立，只需证$2k^2-2\geqslant(k+1)^2$，即证$k^2-2k-3\geqslant 0$，

即证$(k+1)(k-3)\geqslant 0$.

又因为$k+1>0$，$k-3\geqslant 0$，

所以$(k+1)(k-3)\geqslant 0$.

所以当$n=k+1$时，结论成立.

由①②可知，$n\in\mathbf{N}_+$，$2^n+2>n^2$.

22.解：令$n=1$，得$\frac{1}{2\times 4}=\frac{1}{a+b}$，即$a+b=8$. ①

又令$n=2$，得$\frac{1}{2\times 4}+\frac{1}{4\times 6}=\frac{2}{2a+b}$，即$2a+b=12$. ②

联立①②，解得$a=b=4$.

下面用数学归纳法证明：

(1)当$n=1$时，命题显然成立.

(2)假设$n=k$时，命题成立，即$\frac{1}{2\times 4}+\frac{1}{4\times 6}+\frac{1}{6\times 8}+\cdots+\frac{1}{2k(2k+2)}=\frac{k}{4k+4}$成立.

那么，当$n=k+1$时，$\frac{1}{2\times 4}+\frac{1}{4\times 6}+\frac{1}{6\times 8}+\cdots+\frac{1}{2k(2k+2)}+\frac{1}{(2k+2)(2k+4)}=\frac{k}{4k+4}+\frac{1}{(4k+4)(k+2)}=\frac{k^2+2k+1}{(4k+4)(k+2)}=\frac{k+1}{4k+8}=\frac{k+1}{4(k+1)+4}$.

这表明，当$n=k+1$时，命题也成立.

综上所述，对任意的自然数n，存在$a=b=4$，使$\frac{1}{2\times 4}+\frac{1}{4\times 6}+\frac{1}{6\times 8}+\cdots+\frac{1}{2n(2n+2)}=\frac{n}{an+b}$成立.