第 12 期

第 2~3 版综合测试(二)参考答案

一、选择题

1~6.DBDBAB

7~11.DBAAD

12.C

提示:函数 $f(x)$ 的零点满足 $x^2-2x=-a(e^{x-1}+e^{-x+1})$.设 $g(x)=e^{x-1}+e^{-x+1}$,则 $g'(x)=e^{x-1}-e^{-x+1}=e^{x-1}-\frac{1}{e^{x-1}}=\frac{e^{2(x-1)}-1}{e^{x-1}}$.令 $g'(x)=0$,得 $x=1$.当 $x<1$ 时,$g'(x)<0$,函数 $g(x)$ 单调递减;当 $x>1$ 时,$g'(x)>0$,函数 $g(x)$ 单调递增.当 $x=1$ 时,函数 $g(x)$ 取得最小值,最小值为 $g(1)=2$.设 $h(x)=x^2-2x$,当 $x=1$ 时,函数 $h(x)$ 取得最小值,最小值为 -1.显然 $a\neq0$,若 $-a>0$,函数 $h(x)$ 与函数 $-ag(x)$ 的交点个数为 0 或 2;若 $-a<0$,当 $-ag(1)=h(1)$ 时,函数 $h(x)$ 和 $-ag(x)$ 只有一个交点,即 $-a\times2=-1$,解得 $a=\frac{1}{2}$.故选 C.

二、填空题

13.$\frac{\sqrt{2}}{2}$

14.$[1,+\infty)$

15.6

16.M=N

三、解答题

17.**证明:**因为 $x\geqslant1,y\geqslant1$,所以 $x+y+\frac{1}{xy}\leqslant\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+xy\Leftrightarrow xy(x+y)+1\leqslant y+x+(xy)^2$.

将上式中的右式减左式,得

$[y+x+(xy)^2]-[xy(x+y)+1]=[(xy)^2-1]-[xy(x+y)-(x+y)]=(xy+1)(xy-1)-(x+y)(xy-1)=(xy-1)(xy-x-y+1)=(xy-1)\cdot(x-1)(y-1)$.

因为 $x\geqslant1,y\geqslant1$,所以 $(xy-1)(x-1)(y-1)\geqslant0$,从而所要证明的不等式成立.

18.**解:**$z_2=\frac{15-5i}{(2+i)^2}=\frac{15-5i}{3+4i}$

$=\frac{5(3-i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}=\frac{5-15i}{5}=1-3i$.

(1)$z_1+\overline{z}_2=(2-3i)+(1+3i)=3$.

(2)$z_1\cdot z_2=(2-3i)(1-3i)=2-9-9i=-7-9i$.

(3)$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2-3i}{1-3i}=\frac{(2-3i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)}$

$=\frac{2+9+3i}{10}=\frac{11}{10}+\frac{3}{10}i$.

19.**解:**(1)$z=\frac{(1-i)^2+3(1+i)}{2-i}=\frac{-2i+3+3i}{2-i}=\frac{3+i}{2-i}=\frac{(3+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{5+5i}{5}=1+i$.

若复数 z_1 与 z 在复平面上所对应的点关于虚轴对称,则它们实部互为相反数,虚部相等,所以 $z_1=-1+i$.

(2)因为复数 $z_2=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$ 满足 $z^2+az+b=1-i$,

所以 $(1+i)^2+a(1+i)+b=1-i$,

整理,得 $a+b+(2+a)i=1-i$,

所以 $\begin{cases}a+b=1,\\2+a=-1,\end{cases}$

解得 $a=-3,b=4$.

所以复数 $z_2=-3+4i$,

所以 z_2 的共轭复数为 $-3-4i$.

20.**解:**(1)当 $m=-2$ 时,$f(x)=e^x(x^3-2x^2-2x+2)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

因为 $f'(x)=e^x(x^3-2x^2-2x+2)+e^x(3x^2-4x-2)=xe^x(x^2+x-6)=(x+3)x(x-2)e^x$,

令 $f'(x)=0$,得 $x=-3$,或 $x=0$,或 $x=2$,

所以当 $x\in(-\infty,3)$ 或 $x\in(0,2)$ 时,$f'(x)<0$;当 $x\in(-3,0)$ 或 $x\in(2,+\infty)$ 时,$f'(x)>0$.

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,3)$ 上单调递减,在 $(-3,0)$ 上单调递增,在 $(0,2)$ 上单调递减,在 $(2,+\infty)$ 上单调递增,所以 $[f(x)]_{极小值}=f(-3)=-39e^{-3}$,$[f(x)]_{极小值}=f(2)=-2e^2$,$[f(x)]_{极大值}=f(0)=2$.

(2)$f'(x)=e^x(x^3+mx^2-2x+2)+e^x(3x^2+2mx-2)=xe^x[x^2+(m+3)x+2m-2]$.

因为 $f(x)$ 在 $[-2,-1]$ 上单调递增,

所以当 $x\in[-2,-1]$ 时,$f'(x)\geqslant0$.

又当 $x\in[-2,-1]$ 时,$xe^x<0$,

所以当 $x\in[-2,-1]$ 时,

$x^2+(m+3)x+2m-2\leqslant0$,

所以 $\begin{cases}(-2)^2-2(m+3)+2m-2\leqslant0,\\(-1)^2-(m+3)+2m-2\leqslant0,\end{cases}$

解得 $m\leqslant4$,

所以当 $m\in(-\infty,4]$ 时,$f(x)$ 在 $[-2,-1]$ 上单调递增.

21.(1)**证明:**依题意,$a_n=\sqrt{n^2+1}$,$b_n=n,c_n=\sqrt{n^2+1}-n$.

假设 $\{c_n\}$ 是等差数列,则 $2c_2=c_1+c_3$,所以 $2(\sqrt{5}-2)=\sqrt{2}-1+\sqrt{10}-3$.

所以 $2\sqrt{5}=\sqrt{2}+\sqrt{10}$,产生矛盾,

所以 $\{c_n\}$ 不是等差数列.

假设 $\{c_n\}$ 是等比数列,则 $c_2^2=c_1c_3$,即 $(\sqrt{5}-2)^2=(\sqrt{2}-1)(\sqrt{10}-3)$.

有 $6=6\sqrt{5}-3\sqrt{2}-\sqrt{10}$,产生矛盾,

所以 $\{c_n\}$ 也不是等比数列.

(2)**解:**因为 $c_{n+1}=\sqrt{(n+1)^2+1}-(n+1)>0$,$c_n=\sqrt{n^2+1}-n>0$,

所以 $\frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{\sqrt{(n+1)^2+1}-(n+1)}{\sqrt{n^2+1}-n}$

$=\frac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt{(n+1)^2+1}+(n+1)}$,

因为 $0<\sqrt{n^2+1}<\sqrt{(n+1)^2+1}$,

又 $0<n<n+1$,

所以 $\sqrt{n^2+1}+n<\sqrt{(n+1)^2+1}+n+1$,

所以 $0<\frac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt{(n+1)^2+1}+(n+1)}<1$,

所以 $0<\frac{c_{n+1}}{c_n}<1$,即 $c_{n+1}<c_n$.

22.(1)**解:**$f(x)$ 的定义域为 $(0,1)\cup(1,+\infty)$.因为 $f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{2}{(x-1)^2}>0$,所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$,$(1,+\infty)$ 上单调递增.因为 $f(e)=1-\frac{e+1}{e-1}<0$,$f(e^2)=2-\frac{e^2+1}{e^2-1}=\frac{e^2-3}{e^2-1}>0$,所以 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 有唯一零点 x_1,即 $f(x_1)=0$.又 $0<\frac{1}{x_1}<1$,$f\left(\frac{1}{x_1}\right)=-\ln x_1+\frac{x_1+1}{x_1-1}=-f(x_1)=0$,故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 有唯一零点 $\frac{1}{x_1}$.综上,$f(x)$ 有且仅有两个零点.

(2)**证明:**因为 $\frac{1}{x_0}=e^{-\ln x_0}$,故点 $B\left(-\ln x_0,\frac{1}{x_0}\right)$ 在曲线 $y=e^x$ 上.由题设知 $f(x_0)=0$,即 $\ln x_0=\frac{x_0+1}{x_0-1}$,故直线 AB 的斜率 $k=\frac{\frac{1}{x_0}-\ln x_0}{-\ln x_0-x_0}=\frac{\frac{1}{x_0}-\frac{x_0+1}{x_0-1}}{-\frac{x_0+1}{x_0-1}-x_0}=\frac{1}{x_0}$.曲线 $y=e^x$ 在点 $B\left(-\ln x_0,\frac{1}{x_0}\right)$ 处切线的斜率是 $\frac{1}{x_0}$,曲线 $y=\ln x$ 在点 $A(x_0,\ln x_0)$ 处切线的斜率也是 $\frac{1}{x_0}$,所以曲线 $y=\ln x$ 在点 $A(x_0,\ln x_0)$ 处的切线也是曲线 $y=e^x$ 的切线.

2020-2021 学年
数学·北师大(选修 2-2)答案页第 3 期
学习周报 ③

第 9 期

第 3~4 版同步周测参考答案

一、选择题

1.A 2.C 3.C 4.C 5.B

6.D 7.B 8.B

9.B

提示:设 $z_1=a+bi,z_2=c+di(a,b,c,d\in\mathbf{R})$,则 $z_1\overline{z}_2+\overline{z}_1z_2=(a+bi)(c-di)+(a-bi)(c+di)=(2ac+2bd)\in\mathbf{R}$.

10.C

提示:设 $z=x+yi(x,y\in\mathbf{R})$.

由已知,得 $x^2+y^2+i(2yi)\leqslant0$,

即 $x^2+y^2-2y\leqslant0$,即 $x^2+(y-1)^2\leqslant1$.

故选 C.

11.C

提示:$z^2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$,$z^3=-1$,$z^4=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$,$z^5=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$,$z^6=1$,所以原式 $=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+(-1+\sqrt{3}i)+(-3)+(-2-2\sqrt{3}i)+\left(\frac{5}{2}-\frac{5\sqrt{3}}{2}i\right)+6=3-3\sqrt{3}i=6\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=6\overline{z}$.

12.A

提示:设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$,

所以 $|2z+1|=\sqrt{(2a+1)^2+4b^2}$,

$|z-i|=\sqrt{a^2+(b-1)^2}$,

所以 $\sqrt{(2a+1)^2+4b^2}=\sqrt{a^2+(b-1)^2}$,

整理得 $a^2+b^2+\frac{4}{3}a+\frac{2}{3}b=0$,

所以 z 对应的点的轨迹是圆.

故选 A.

二、填空题

13.$\sqrt{13}$

14.5,2

15.1

提示:复数 z_1 和 z_2 在复平面内对应的点 A 的坐标为 $(1,1)$,B 的坐标为 $(-1,1)$,所以 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\times2\times1=1$.

16.-1

提示:因为 $x+\frac{1}{x}=-1$,所以 $x^2+x+1=0$.

所以 $x=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$,所以 $x^3=1$.

因为 $2020=3\times673+1$,所以 $x^{2020}=x$,

所以 $x^{2020}+\frac{1}{x^{2020}}=x+\frac{1}{x}=-1$.

三、解答题

17.**解:**(1)$\frac{1-\sqrt{3}i}{(\sqrt{3}+i)^2}=\frac{1-\sqrt{3}i}{2+2\sqrt{3}i}$

$=\frac{(1-\sqrt{3}i)^2}{2(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)}$

$=-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i$.

(2)$\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^3(4+5i)}{(5-4i)(1-i)}$

$=\frac{2\sqrt{2}(1+i)^2(1+i)(4+5i)}{(5-4i)(1-i)}$

$=\frac{2\sqrt{2}\cdot2i\cdot2i(4+5i)(5+4i)}{(5-4i)(5+4i)(1-i)(1+i)}$

$=\frac{-8\sqrt{2}\times41i}{41\times2}=-4\sqrt{2}i$.

18.**解:**(1)由 z 是实数,

得 $\begin{cases}m^2-2m-2>0,\\m^2+3m+2=0,\end{cases}$

解得 $m=-2$,或 $m=-1$.

即 $m=-2$,或 $m=-1$ 时,z 是实数.

(2)由 z 是纯虚数,

得 $\begin{cases}m^2-2m-2=1,\\m^2+3m+2\neq0,\end{cases}$

解得 $m=3$.

即 $m=3$ 时,z 是纯虚数.

(3)由 z 对应的点位于复平面的第一象限,得 $\begin{cases}m^2-2m-2>1,\\m^2+3m+2>0,\end{cases}$

解得 $m>3$,或 $m<-2$.

即 $m>3$,或 $m<-2$ 时,z 对应的点位于复平面的第一象限.

19.**解:**(1)因为 $z=\cos A+i\sin A$,所以 $z+1=1+\cos A+i\sin A$.

所以 $|z+1|=\sqrt{(1+\cos A)^2+\sin^2A}=\sqrt{2+2\cos A}$.

因为 $|z+1|=1$.所以 $2+2\cos A=1$.所以 $\cos A=-\frac{1}{2}$.又 $0<A<180°$,所以 $A=120°$.

所以 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

所以复数 $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

(2)由正弦定理,得 $a=2R\cdot\sin A$,$b=2R\cdot\sin B$,$c=2R\cdot\sin C$(其中 R 为 $\triangle ABC$ 外接圆的半径),

所以原式 $=\frac{\sin B-\sin C}{\sin A\cdot\cos(60°+C)}$.

因为 $B=180°-A-C=60°-C$,

所以原式 $=\frac{\sin(60°-C)-\sin C}{\sin120°\cdot\cos(60°+C)}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C-\frac{3}{2}\sin C}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos(60°+C)}=\frac{\cos C-\sqrt{3}\sin C}{\cos(60°+C)}=\frac{2\cos(60°+C)}{\cos(60°+C)}=2$,

即 $\frac{b-c}{a\cos(60°+C)}$ 的值为 2.

20.**解:**因为 $(x+\sqrt{3}i)^3=\log_{\sqrt{2}}\frac{1}{2^4}=-8$,

所以 $\left(\frac{x+\sqrt{3}i}{-2}\right)^3=1$,

所以 $\frac{x+\sqrt{3}i}{-2}=1$ 或 $\frac{x+\sqrt{3}i}{-2}=\omega$ 或 $\frac{x+\sqrt{3}i}{-2}=\overline{\omega}\left(其中\ \omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$.

若 $x+\sqrt{3}i=-2$,则 $x\notin\mathbf{R}$.

若 $x+\sqrt{3}i=-2\omega=1-\sqrt{3}i$,则 $x\notin\mathbf{R}$.

若 $x+\sqrt{3}i=-2\overline{\omega}=1+\sqrt{3}i$,则 $x=1$.

综上可知,存在满足题意的实数 x 且 $x=1$.

21.**解:**依题意得 z_1+z_2 为实数,因为 $z_1+z_2=\frac{3}{a+5}+\frac{2}{1-a}+[(a^2-10)+(2a-5)]i$,

所以 $\begin{cases}a^2+2a-15=0,\\a+5\neq0,\\1-a\neq0.\end{cases}$ 所以 $a=3$.

此时 $z_1=\frac{3}{8}-i$,$z_2=-1+i$,

即 $\overrightarrow{OZ_1}=\left(\frac{3}{8},-1\right)$,$\overrightarrow{OZ_2}=(-1,1)$.

所以 $\overrightarrow{OZ_1}\cdot\overrightarrow{OZ_2}=\frac{3}{8}\times(-1)+(-1)\times1=-\frac{11}{8}$.

22.**解:**由题意,得 $z_1=\frac{-1+5i}{1+i}=2+3i$,

于是 $|z_1-\overline{z}_2|=|4-a+2i|$

$=\sqrt{(4-a)^2+4}$,$|z_1|=\sqrt{13}$.

由 $\sqrt{(4-a)^2+4}<\sqrt{13}$,

得 $a^2-8a+7<0$,解得 $1<a<7$.

所以实数 a 的取值范围是 $(1,7)$.

③

第 10 期

第 2~3 版章节测试参考答案

一、选择题

1.D

2.D

3.C

4.B

提示：$z=\frac{2}{1-i}=\frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)}=1+i$，故 z 的共轭复数是 $1-i$.

5.A

提示：由 $\frac{1-i}{1+i}=-i$，得 $\overrightarrow{OA}=(0,-1)$，$\overrightarrow{OB}=(1,-\sqrt{3})$.

所以 $|\overrightarrow{OA}|=1$，$|\overrightarrow{OB}|=2$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\sqrt{3}$.

所以 $\cos\angle AOB=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

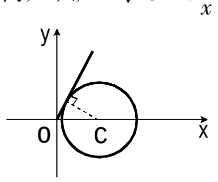
又 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$，所以 $\theta=\frac{\pi}{6}$.

6.A

7.C

8.D

提示：因为 $|(x-2)+yi|=\sqrt{3}$，所以 $(x-2)^2+y^2=3$，所以点 (x,y) 在以 $C(2,0)$ 为圆心，以 $\sqrt{3}$ 为半径的圆上，如图，由平面几何知识知 $-\sqrt{3}\leqslant\frac{y}{x}\leqslant\sqrt{3}$.



（第 8 题图）

9.C

提示：$\frac{a}{b}=\frac{3+2i}{4+xi}$

$=\frac{(3+2i)(4-xi)}{16+x^2}$

$=\frac{12+2x}{16+x^2}+\frac{8-3x}{16+x^2}\cdot i\in\mathbf{R}$，

所以 $\frac{8-3x}{16+x^2}=0$，所以 $x=\frac{8}{3}$.

10.B

提示：$z*\bar{z}=\frac{|z|+|\bar{z}|}{2}=\frac{2\sqrt{a^2+b^2}}{2}=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(a+b)^2-2ab}$，又因为 $ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$，所以 $-ab\geqslant-\frac{9}{4}$，$z*\bar{z}\geqslant\sqrt{9-2\times\frac{9}{4}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

11.C

提示：由题意知，$z=x+yi$，所以 $z-i=x+(y-1)i$.

因为 $|z-i|=1$，所以 $\sqrt{x^2+(y-1)^2}=1$，所以 $x^2+(y-1)^2=1$，故选 C.

12.D

提示：由条件知 $A=\{-2,-1,0,1,2\}$，

若 $z\in\mathbf{R}$，则 $a^2-a-2=0$，所以 $a=-1$ 或 2，所以 $p_1=\frac{2}{5}$；

若 $z=0$，则 $\begin{cases}a^2-1=0,\\a^2-a-2=0,\end{cases}$ 所以 $a=-1$，所以 $p_3=\frac{1}{5}$；

若 z 为虚数，则 $a^2-a-2\neq0$，所以 $a\neq-1$ 且 $a\neq2$，

所以 $p_2=\frac{3}{5}$；

若 z 为纯虚数，则 $\begin{cases}a^2-1=0,\\a^2-a-2\neq0,\end{cases}$ 所以 $a=1$，所以 $p_4=\frac{1}{5}$.

所以 $p_3=p_4<p_1<p_2$.

二、填空题

13.2

14.$\frac{9}{2}$

提示：把 $x=1+2i$ 代入 $x^2-mx+2n=0$ 中，得 $(1+2i)^2-m(1+2i)+2n=0$，即 $1-4+4i-m-2mi+2n=0$，所以 $(2n-m-3)+(4-2m)i=0$，

根据复数相等的充要条件，

得 $\begin{cases}-3-m+2n=0,\\4-2m=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}n=\frac{5}{2},\\m=2,\end{cases}$

所以 $m+n=\frac{5}{2}+2=\frac{9}{2}$.

15.0

提示：设 $z=m+ni(m,n\in\mathbf{R})$，

则 $\bar{z}=m-ni$.

所以 $b=z\cdot\bar{z}=m^2+n^2$，

$a=\frac{z^2-\bar{z}^2}{2i}=\frac{4mni}{2i}=2mn$.

故 $a-b=2mn-(m^2+n^2)=-(m-n)^2\leqslant0$，

即 $a-b$ 的最大值是 0.

16.①②

提示：当 z 为纯虚数时，z 与 $\bar{z}$ 对应的点均在虚轴上，故 P_1,O,P_2 三点共线，①正确；显然③错误；当 $z=0$ 时，$\overrightarrow{OP_1}$，$\overrightarrow{OP_2}$ 对应的复数均为 0，此时有 $\overrightarrow{OP_1}=\overrightarrow{OP_2}$，故②正确，④错误.

三、解答题

17.**解**：$z=\frac{(1+i)^2+3(1-i)}{2+i}=\frac{2i+3(1-i)}{2+i}=\frac{3-i}{2+i}=\frac{(3-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=1-i$，

将 $z=1-i$ 代入 $z^2+az+b=1+i$，得 $(1-i)^2+a(1-i)+b=1+i$，

即 $(a+b)-(a+2)i=1+i$，

所以 $\begin{cases}a+b=1,\\-(a+2)=1.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=-3,\\b=4.\end{cases}$

18.**解**：设原方程的一个实根为 $t=t_0$，则有 $(t_0^2+2t_0+2xy)+(t_0+x-y)i=0$.

根据复数相等的充要条件有

$\begin{cases}t_0^2+2t_0+2xy=0,&①\\t_0+x-y=0,&②\end{cases}$

把②代入①中消去 t_0，得 $(y-x)^2+2(y-x)+2xy=0$，

即 $(x-1)^2+(y+1)^2=2$.

故所求点的轨迹方程为 $(x-1)^2+(y+1)^2=2$.

19.**解**：(1)因为 $z\in\mathbf{R}$，所以 $m^2+2m-3=0$ 且 $m-1\neq0$，解得 $m=-3$.

(2)因为 z 是纯虚数，

所以 $\begin{cases}\frac{m(m+2)}{m-1}=0,\\m^2+2m-3\neq0,\end{cases}$

解得 $m=0$，或 $m=-2$.

(3)因为 z 对应的点位于复平面第二象限，所以 $\begin{cases}\frac{m(m+2)}{m-1}<0,\\m^2+2m-3>0,\end{cases}$

解得 $m<-3$.

所以 $m\in(-\infty,3)$.

(4)因为 z 对应的点在直线 $x+y+3=0$ 上，所以 $\frac{m(m+2)}{m-1}+(m^2+2m-3)+3=0$，

解得 $m=0$，或 $m=-2$.

20.**解**：因为 $z=\frac{(-1+3i)(1-i)-(1+3i)}{i}=\frac{1+i}{i}=1-i$，所以 $|z|=\sqrt{2}$.又 $\left|\frac{\omega}{z}\right|=\frac{|\omega|}{|z|}\leqslant\sqrt{2}$，所以 $|\omega|\leqslant2$.

而 $\omega=z+ai=(1-i)+ai=1+(a-1)i$，$a\in\mathbf{R}$，

则 $\sqrt{1^2+(a-1)^2}\leqslant2\Rightarrow(a-1)^2\leqslant3$，

所以 $-\sqrt{3}\leqslant a-1\leqslant\sqrt{3}$，$1-\sqrt{3}\leqslant a\leqslant1+\sqrt{3}$.

即 a 的取值范围为 $[1-\sqrt{3},1+\sqrt{3}]$.

21.(1)**解**：设 $z_1=a+bi(a,b\in\mathbf{R}$ 且 $b\neq0)$，则 $z_2=z_1+\frac{1}{z_1}=a+bi+\frac{1}{a+bi}=\left(a+\frac{a}{a^2+b^2}\right)+\left(b-\frac{b}{a^2+b^2}\right)i$.

因为 z_2 是实数，$b\neq0$，于是有 $a^2+b^2=1$，即 $|z_1|=1$，还可得 $z_2=2a$.

由 $-1\leqslant z_2\leqslant1$，得 $-1\leqslant2a\leqslant1$，解得 $-\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$，即 z_1 的实部的取值范围是 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

(2)**证明**：$\omega=\frac{1-z_1}{1+z_1}=\frac{1-a-bi}{1+a+bi}$

$=\frac{1-a^2-b^2-2bi}{(1+a)^2+b^2}$

$=-\frac{b}{a+1}i$.

因为 $a\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$，$b\neq0$，所以 ω 为纯虚数.

22.**解**：(1)当 $a=1,b=2,c=3,d=4$ 时，

$|z_1|=|1+2i|=\sqrt{5}$，$|z_2|=|3+4i|=5$，$|z_1\cdot z_2|=|(1+2i)(3+4i)|=|-5+10i|=5\sqrt{5}$.

(2)由(1)猜测，$|z_1|\cdot|z_2|=|z_1\cdot z_2|$.

证明如下：因为 $z_1=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，$z_2=c+di(c,d\in\mathbf{R})$，

所以 $|z_1|=\sqrt{a^2+b^2}$，$|z_2|=\sqrt{c^2+d^2}$，

$|z_1|\cdot|z_2|=\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$

$=\sqrt{a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2}$；

$z_1\cdot z_2=(a+bi)(c+di)$

$=(ac-bd)+(ad+bc)i$，

所以 $|z_1\cdot z_2|=\sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2}$

$=\sqrt{a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2}$.

所以 $|z_1|\cdot|z_2|=|z_1\cdot z_2|$.

第 11 期

第 2~3 版综合测试(一)参考答案

一、选择题

1~6.ADADBA

7.A 8.D

9.A

提示：分别将 $2+ai$，$b+i$ 代入方程得：

$\begin{cases}(2+ai)^2+p(2+ai)+q=0,&①\\(b+i)^2+p(b+i)+q=0,&②\end{cases}$

对①②整理，由复数相等的充要条件得：

$\begin{cases}2p+q-a^2+4=0,\\(p+4)a=0,\\pb+q+b^2-1=0,\\p+2b=0.\end{cases}$ 解得 $p=-4$，$q=5$.

10.B

11.D

提示：因为 $\frac{2-i}{a+i}=\frac{(2-i)(a-i)}{(a+i)(a-i)}=\frac{2a-1-(a+2)i}{a^2+1}$ 是纯虚数，所以 $2a-1=0\Rightarrow a=\frac{1}{2}$，所以 $|z|=|2a+1+\sqrt{2}i|=|2+\sqrt{2}i|=\sqrt{6}$，故选 D.

12.A

提示：令 $g(x)=\frac{f(x)}{x^2}$，则 $g'(x)=\frac{xf'(x)-2f(x)}{x^3}$.因为 $2f(x)<xf'(x)$，所以 $g'(x)>0$，所以函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $g(a)<g(b)$，即 $\frac{f(a)}{a^2}<\frac{f(b)}{b^2}$，所以 $b^2f(a)<a^2f(b)$.令 $h(x)=\frac{f(x)}{x^3}$，则 $h'(x)=\frac{xf'(x)-3f(x)}{x^4}$.因为 $xf'(x)<3\cdot f(x)$，所以 $h'(x)<0$，所以函数 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，所以 $h(a)>h(b)$，即 $\frac{f(a)}{a^3}>\frac{f(b)}{b^3}$，所以 $b^3f(a)>a^3f(b)$.故选 A.

二、填空题

13.$(a+b)*(a+c)$

14.3

提示：由 $(1+i)^{2n}=-2^n\cdot i$，得 $(2i)^n=2^n\cdot i^n=-2^n\cdot i$，所以 $i^n=-i$，即 $n=4k+3$，$k\in\mathbf{N}$，所以最小的正整数为 3.

15.$(-\infty,0)\cup\left(\frac{e}{2},+\infty\right)$

16.-3

提示：由题意可知，$f'(x)=3x^2+2ax+b$，$f'(0)=0$，所以 $b=0$，所以 $f(x)=x^2(x+a)$，有 $\frac{27}{4}=\int_0^{-a}[0-(x^3+ax^2)]dx=-\left(\frac{x^4}{4}+\frac{ax^3}{3}\right)\Big|_0^{-a}=\frac{a^4}{12}$，所以 $a=\pm3$.又 $-a>0\Rightarrow a<0$，得 $a=-3$.

三、解答题

17.**解**：设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，

由 $|z|=1$，得 $a^2+b^2=1$， ①

由 $(3+4i)\cdot z=(3+4i)(a+bi)=(3a-4b)+(4a+3b)i$ 是纯虚数，得 $3a-4b=0$，且 $4a+3b\neq0$. ②

联立①②解得 $\begin{cases}a=-\frac{4}{5},\\b=-\frac{3}{5},\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=\frac{4}{5},\\b=\frac{3}{5}.\end{cases}$

所以 $z=-\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i$ 或 $z=\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i$.

18.**证明**：$2\cos\frac{\pi}{4}=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$.

$2\cos\frac{\pi}{8}=2\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}$

$=2\cdot\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

$2\cos\frac{\pi}{16}=2\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{8}}{2}}$

$=2\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$

$=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$.

…

归纳一般性的结论：

$2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}}_{n\text{个}2}$.

19.**解**：由 $z=1+i$，可知 $\bar{z}=1-i$，代入 $az+2b\bar{z}=(a+2z)^2$，得 $a(1+i)+2b(1-i)=[a+2(1+i)]^2$，即 $a+2b+(a-2b)i=(a+2)^2-4+4(a+2)i$.

所以 $\begin{cases}a+2b=(a+2)^2-4,\\a-2b=4(a+2),\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=-4,\\b=2,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-2,\\b=-1.\end{cases}$

20.**证明**：已知 $a>b>c$，因为 $\frac{a-c}{a-b}+\frac{a-c}{b-c}=\frac{a-b+b-c}{a-b}+\frac{a-b+b-c}{b-c}=2+\frac{b-c}{a-b}+\frac{a-b}{b-c}\geqslant2+2\sqrt{\frac{b-c}{a-b}\cdot\frac{a-b}{b-c}}=4$，

所以 $\frac{a-c}{a-b}+\frac{a-c}{b-c}\geqslant4$，

即 $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\geqslant\frac{4}{a-c}$.

21.**解**：(1)以 A 为原点，AB 所在直线为 x 轴建立平面直角坐标系，则 $A(0,0)$，$B(2,0)$，$C(2,4)$，$D(0,2)$，曲线 AC 的方程为 $y=x^2(0\leqslant x\leqslant2)$.故曲线 AC 与 CD，AD 所围成区域的面积为 $S_{梯形ABCD}-\int_0^2x^2dx=\frac{1}{2}\times(2+4)\times2-\frac{x^3}{3}\Big|_0^2=\frac{10}{3}(km^2)$.

(2)设 $F(a,a^2)(0<a<\sqrt{2})$，则 $|DE|=2-a^2$，$|EF|=a$.由(1)可得直线 CD 的方程为 $y=x+2$，故 $G(a,a+2)$，所以 $|FG|=a+2-a^2$.所以该公园的面积 $S(a)=\frac{1}{2}(2-a^2+a+2-a^2)a=-a^3+\frac{1}{2}a^2+2a$.令 $S'(a)=-3a^2+a+2=0$，解得 $a=-\frac{2}{3}$（舍去），或 $a=1$.当 $0<a<1$ 时，$S'(a)>0$；当 $1<a<\sqrt{2}$ 时，$S'(a)<0$，所以 $S(a)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,\sqrt{2})$ 上单调递减.所以 $[S(a)]_{max}=S(1)=\frac{3}{2}$.所以该公园的最大面积是 $\frac{3}{2}km^2$.

22.**证明**：(1)$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{x-1}{x}+\ln x-1=\ln x-\frac{1}{x}$.因为 $y=\ln x$ 单调递增，$y=\frac{1}{x}$ 单调递减，所以 $f'(x)$ 单调递增.又 $f'(1)=-1<0$，$f'(2)=\ln2-\frac{1}{2}=\frac{\ln4-1}{2}>0$，故存在唯一 $x_0\in(1,2)$，使得 $f'(x_0)=0$.又当 $x<x_0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x>x_0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，因此，$f(x)$ 存在唯一的极值点.

(2)由(1)知 $f(x_0)<f(1)=-2$，又 $f(e^2)=e^2-3>0$，所以 $f(x)=0$ 在 $(x_0,+\infty)$ 内存在唯一根 $x=\alpha$.由 $\alpha>x_0>1$，得 $\frac{1}{\alpha}<1<x_0$.又 $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\ln\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}-1=\frac{f(\alpha)}{\alpha}=0$，故 $\frac{1}{\alpha}$ 是 $f(x)=0$ 在 $(0,x_0)$ 的唯一根.综上，$f(x)=0$ 有且仅有两个实根，且两个实根互为倒数.