第 8 期

第 2~3 版章节测试参考答案

一、选择题

1.A　2.B　3.A　4.A　5.B　6.D　7.B　8.A

提示：$f'(x)=\frac{x^2+2ax-1}{(x+a)^2}$.

由题意，得 $f'(1)=0$，解得 $a=0$.

当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$. 故 $f(1)$ 是函数 $f(x)$ 的极小值.

9.D

提示：由导函数 $y=f'(x)$ 的图像可知，$f(x)$ 先减后增，再递减，最后递增，排除 A，C；极大值点在 x 轴的右侧，排除 B，故选 D.

10.A

11.B

提示：根据二次函数的性质，可知A不成立. 对于 B，设 $f(x)=e^x-ex$，则 $f'(x)=e^x-e$，当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 的最小值为 $f(1)=0$，所以 $f(x)\geqslant 0$，故正确. 同理，可知 C，D 均不恒成立. 故选 B.

12.B

提示：由题意，知 $xe^x+x^2+2x=-a$ 恰有两个不同的实数解.

设 $f(x)=xe^x+x^2+2x$，

则 $f'(x)=e^x+xe^x+2x+2=(x+1)(e^x+2)$.

当 $x<-1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

当 $x>-1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

故 $f(x)$ 的最小值为 $f(-1)=-\frac{1}{e}-1$.

所以 $-a>-\frac{1}{e}-1$，解得 $a<\frac{1}{e}+1$.

故选 B.

二、填空题

13.$y=3x$　14.-2

15.$\frac{4}{3}$

提示：设圆锥的高为 h，底面半径为 r，

则 $1^2=(h-1)^2+r^2$，即 $r^2=2h-h^2$.

所以圆锥的体积

$V(h)=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{2}{3}\pi h^2-\frac{\pi}{3}h^3$.

令 $V'(h)=\frac{4}{3}\pi h-\pi h^2=0$，

解得 $h=\frac{4}{3}$ 或 $h=0$（舍去）.

易知当 $h=\frac{4}{3}$ 时，$V(h)$ 取得极大值也是最大值.

故当圆锥的体积最大时，圆锥的高为 $\frac{4}{3}$.

16.(3)(4)

提示：令 $F(x)=f(x)-g(x)$，

则 $F'(x)=f'(x)-g'(x)>0$，

所以 $F(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

又 $a<x<b$，

所以 $F(a)<F(x)<F(b)$，

即 $f(a)-g(a)<f(x)-g(x)<f(b)-g(b)$.

从而可知(3)(4)正确.

三、解答题

17.**解**：(1)化简，得 $f(x)=\frac{2e^x}{1-x}$.

因为 $f'(x)=\left(\frac{2e^x}{1-x}\right)'$

$=\frac{(2e^x)'(1-x)-2e^x(1-x)'}{(1-x)^2}$

$=\frac{2e^x(2-x)}{(1-x)^2}$，

所以 $f'(2)=0$.

(2)因为 $f'(x)=\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)'-x'+(\ln x)'$

$=-\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}-1+\frac{1}{x}$，

所以 $f'(1)=-\frac{3}{2}$.

18.**解**：(1)$f'(x)=3x^2-3$.

因为 P 为切点，

所以直线 l 的斜率 $k_1=f'(1)=0$，

所以直线 l 的方程为 $y=-2$.

(2)设切点坐标为 $(x_0,x_0^3-3x_0)(x_0\neq 1)$，

则直线 l 的斜率 $k_2=f'(x_0)=3x_0^2-3$，

所以直线 l 的方程为

$y-(x_0^3-3x_0)=(3x_0^2-3)(x-x_0)$.

又直线 l 过点 $P(1,-2)$，

所以 $-2-(x_0^3-3x_0)=(3x_0^2-3)(1-x_0)$，

解得 $x_0=1$（舍去）或 $x_0=-\frac{1}{2}$.

故所求直线 l 的斜率 $k_2=3x_0^2-3=-\frac{9}{4}$，

所以直线 l 的方程为

$y-(-2)=-\frac{9}{4}(x-1)$，

即 $9x+4y-1=0$.

19.**解**：(1)$f'(x)=e^x-2$.

令 $f'(x)>0$，解得 $x>\ln 2$；

令 $f'(x)<0$，解得 $x<\ln 2$.

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln 2)$ 上单调递减，

在 $(\ln 2,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $f(x)$ 有极小值 $f(\ln 2)=2-\ln 4$，无极大值.

(2)令 $g(x)=f(x)-x^2-(a-2)x-1=e^x-x^2-ax-1$，

则 $g'(x)=e^x-2x-a=f(x)-a$.

结合(1)可得

$[g'(x)]_{\min}=[f(x)]_{\min}-a=2-\ln 4-a$.

因为 $a<2-\ln 4$，所以 $g'(x)>0$.

所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $g(x)>g(0)=0$，

即 $f(x)>x^2+(a-2)x+1$.

20.**解**：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\sin x+b\cos x)dx=(b\sin x-a\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=b+a=4$，

$\int_0^{\frac{\pi}{6}}f(x)dx=(b\sin x-a\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{2}b-\frac{\sqrt{3}}{2}a+a=\frac{7-3\sqrt{3}}{2}$，

解得 $a=3$，$b=1$.

所以 $f(x)=3\sin x+\cos x=\sqrt{10}\sin(x+\varphi)\left(其中\ \tan\varphi=\frac{1}{3}\right)$.

故函数 $f(x)$ 的最大值为 $\sqrt{10}$，最小值为 $-\sqrt{10}$.

21.**解**：(1)种花区的造价为 $\frac{3a}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$，种草区的造价为 $2a\left(\frac{\theta}{2}-\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta\right)$，

故总造价

$f(\theta)=a\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\theta}{2}-\sin\theta\cos\theta\right)$，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$.

(2)$f'(\theta)$

$=a\left[-\frac{1}{2}-(\cos\theta\cos\theta-\sin\theta\sin\theta)\right]$

$=a\left(-\frac{1}{2}-\cos 2\theta\right)\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$.

令 $f'(\theta)=0$，解得 $\theta=\frac{\pi}{3}$.

当 θ 变化时，$f'(\theta)$，$f(\theta)$ 的变化情况如下表：

θ	$\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$	$\frac{\pi}{3}$	$\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$
$f'(\theta)$	$-$	0	$+$
$f(\theta)$	↘	极小值	↗

故当 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 时，总造价最小，最小值为

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=a\left(\frac{7}{12}\pi-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

22.(1)**证明**：设 $g(x)=f'(x)$，则 $g(x)=\cos x+x\sin x-1$，$g'(x)=x\cos x$.

当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$g'(x)>0$；当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 单调递增，在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 单调递减.

又 $g(0)=0$，$g\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$，$g(\pi)=-2$，

结合零点存在性定理知 $g(x)$ 在 $(0,\pi)$ 存在唯一零点且该零点在区间 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 内.

即 $f'(x)$ 在 $(0,\pi)$ 存在唯一零点.

(2)**解**：由题设知 $f(\pi)\geqslant a\pi$，$f(\pi)=0$，可得 $a\leqslant 0$.

由(1)知，$f'(x)$ 在 $(0,\pi)$ 只有一个零点，设为 x_0，且当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)>0$；

当 $x\in(x_0,\pi)$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 单调递增，在 (x_0,π) 单调递减.

又 $f(0)=0$，$f(\pi)=0$，所以当 $x\in[0,\pi]$ 时，$f(x)\geqslant 0$.

又当 $a\leqslant 0$，$x\in[0,\pi]$ 时，$ax\leqslant 0$，

故 $f(x)\geqslant ax$.

因此，a 的取值范围是 $(-\infty,0]$.

2020-2021 学年

数学·北师大(选修 2-2)答案页第 2 期

学习周报® ②

第 5 期

第 3~4 版同步周测参考答案

一、选择题

1.C

提示：Δx 作为分母不能为 0.

2.C

提示：$f(x)=kx+b$ 在区间 $[m,n]$ 上的平均变化率为 k，所以 $a=b=2$. 故选 C.

3.B

提示：由定义知，函数在点 $x=x_0$ 处的导数只与 x_0 有关.

4.D

提示：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+2\Delta x)-f(a)}{3\Delta x}$

$=\frac{2}{3}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+2\Delta x)-f(a)}{2\Delta x}$

$=\frac{2}{3}f'(a)=1$，

则 $f'(a)=\frac{3}{2}$.

5.B

提示：$f'(x_0)=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2}$，得 $x_0=1$.

6.C

7.B

提示：$f(x)$，$g(x)$ 的常数项可以是任意的.

8.D

9.D

10.D

提示：令 $g(x)=(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-2018)$，则 $f(x)=x\cdot g(x)$. 所以 $f'(x)=x\cdot g'(x)+g(x)$. 所以 $f'(0)=g(0)=(-1)\times(-2)\times(-3)\times\cdots\times(-2018)=1\times 2\times\cdots\times 2018$.

11.A

提示：因为 $f(x)=x^m+ax$ 的导数为 $f'(x)=2x+1$，所以 $m=2$，$a=1$，所以 $f(x)=x^2+x$，所以 $f(n)=n^2+n=n(n+1)$，所以数列 $\left\{\frac{1}{f(n)}\right\}(n\in\mathbf{N}_+)$ 的前 n 项和为：$S_n=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$，故选 A.

12.B

提示：由题意，$y=2^x$ 和 $y=3^x$ 在 x_0 处的导数相同，即 $2^{x_0}\ln 2=3^{x_0}\ln 3$.

所以 $x_0=\log_{\frac{2}{3}}(\log_2 3)$.

二、填空题

13.$y=2(x-\pi)$

提示：$y'=(\sin 2x)'=\cos 2x\cdot(2x)'=2\cos 2x$，所以 $k=y'|_{x=\pi}=2$. 又过点 $(\pi,0)$，所以切线方程为 $y=2(x-\pi)$.

14.2

提示：$s'=-8t+16$，由 $-8t+16=0$，得 $t=2$.

15.$\sqrt{2}-1$

提示：因为 $f'(x)=-f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin x+\cos x$，

所以 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}\Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}-1$.

16.4

提示：由 $y=x+\frac{4}{x}(x>0)$，得 $y'=1-\frac{4}{x^2}$.

设平行于直线 $x+y=0$ 的直线与曲线 $y=x+\frac{4}{x}(x>0)$ 切于点 $\left(x_0,x_0+\frac{4}{x_0}\right)$，

由 $1-\frac{4}{x_0^2}=-1(x_0>0)$，解得 $x_0=\sqrt{2}$.

所以点 $P(\sqrt{2},3\sqrt{2})$ 到直线 $x+y=0$ 的距离最小，

最小值为 $\frac{|\sqrt{2}+3\sqrt{2}|}{\sqrt{2}}=4$.

三、解答题

17.**解**：$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{2(x+\Delta x)+3}-\sqrt{2x+3}}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{[\sqrt{2(x+\Delta x)+3}]^2-(\sqrt{2x+3})^2}{\Delta x[\sqrt{2(x+\Delta x)+3}+\sqrt{2x+3}]}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{2}{\sqrt{2(x+\Delta x)+3}+\sqrt{2x+3}}$

$=\frac{1}{\sqrt{2x+3}}$.

18.**解**：(1)$y'=3^x\ln 3\cdot e^x+3^xe^x-2^x\ln 2=3^xe^x(\ln 3+1)-2^x\ln 2$.

(2)$y'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'$

$=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$

$=\frac{\cos x\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$.

19.**解**：$s'(t)=6t+1$，$s'(4)=25$，故 $v=25\,m/s$.

所以 $E=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}\times 10\times 25^2=3125(J)$.

答：运动开始后 4s 时物体的动能为 3125J.

20.**解**：(1)曲线 $f(x)$ 在 $x=-3$ 处切线的斜率 $f'(-3)>0$，所以在 $x=-3$ 附近曲线是上升的，即函数 $f(x)$ 在 $x=-3$ 附近单调递增.

(2)曲线 $f(x)$ 在 $x=-2$ 处切线的斜率 $f'(-2)<0$，所以在 $x=-2$ 附近曲线是下降的，即函数 $f(x)$ 在 $x=-2$ 附近单调递减.

(3)曲线 $f(x)$ 在 $x=0$ 处切线的斜率 $f'(0)$ 接近于 0，所以函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 附近几乎没有变化.

(4)曲线 $f(x)$ 在 $x=1$ 处切线的斜率 $f'(1)>0$，所以在 $x=1$ 附近曲线是上升的，即函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 附近单调递增.

21.(1)**解**：$f'(x)=a-\frac{1}{(x+b)^2}$，于是

$\begin{cases}f(2)=2a+\frac{1}{2+b}=3,\\ f'(2)=a-\frac{1}{(2+b)^2}=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=1,\\ b=-1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=\frac{9}{4},\\ b=-\frac{8}{3}.\end{cases}$

因为 $a,b\in\mathbf{Z}$，所以 $f(x)=x+\frac{1}{x-1}$.

(2)**证明**：在曲线 $y=f(x)$ 上任取一点 $\left(x_0,x_0+\frac{1}{x_0-1}\right)$.

由 $f'(x_0)=1-\frac{1}{(x_0-1)^2}$，得过此点的切线方程为

$y-\frac{x_0^2-x_0+1}{x_0-1}=\left[1-\frac{1}{(x_0-1)^2}\right](x-x_0)$.

令 $x=1$，得 $y=\frac{x_0+1}{x_0-1}$，即切线与直线 $x=1$ 的交点为 $\left(1,\frac{x_0+1}{x_0-1}\right)$；

令 $y=x$，得 $y=2x_0-1$，即切线与直线 $y=x$ 的交点为 $(2x_0-1,2x_0-1)$.

又直线 $x=1$ 与直线 $y=x$ 的交点为 $(1,1)$，

从而所围三角形的面积为

$\frac{1}{2}\left|\frac{x_0+1}{x_0-1}-1\right|\cdot|2x_0-1-1|$

$=\frac{1}{2}\left|\frac{2}{x_0-1}\right|\cdot 2|x_0-1|=2$.

所以所围三角形的面积为定值 2.

22.**解**：(1)由题意知，C 在点 M 处的切线的斜率 $k=2$.

因为 $y'=2x+4$，所以 $2x_0+4=2$，

解得 $x_0=-1$.

所以 $y_0=\frac{1}{2}$. 所以 $M\left(-1,\frac{1}{2}\right)$.

(2)设 $M(x_0,y_0)$ 为 C 上一点.

①若 $x_0=-2$，则 C 上点 $M\left(-2,-\frac{1}{2}\right)$ 处的切线斜率 $k=0$，过点 M 的法线方程为 $x=-2$，此法线过点 $P(-2,a)$.

②若 $x_0\neq -2$，则过点 $M(x_0,y_0)$ 的法线方程为 $y-y_0=-\frac{1}{2x_0+4}(x-x_0)$.　①

若法线过点 $P(-2,a)$，则 $a-y_0=-\frac{1}{2x_0+4}\cdot(-2-x_0)$，即 $(x_0+2)^2=a$.　②

若 $a>0$，则 $x_0=-2\pm\sqrt{a}$，从而 $y_0=\frac{2a-1}{2}$，代入①中，化简，得 $x+2\sqrt{a}y+2-2a\sqrt{a}=0$ 或 $x-2\sqrt{a}y+2+2a\sqrt{a}=0$；

若 $a=0$，与 $x_0\neq -2$ 矛盾，舍去；

若 $a<0$，则②式无解，舍去.

综上，当 $a>0$ 时，在 C 上存在三个点 $\left(-2+\sqrt{a},\frac{2a-1}{2}\right)$，$\left(-2-\sqrt{a},\frac{2a-1}{2}\right)$ 及 $\left(-2,-\frac{1}{2}\right)$ 满足要求，其方程分别为 $x+2\sqrt{a}y+2-2a\sqrt{a}=0$，$x-2\sqrt{a}y+2+2a\sqrt{a}=0$，$x=-2$；当 $a\leqslant 0$ 时，在 C 上存在一个点 $\left(-2,-\frac{1}{2}\right)$ 满足要求，其方程为 $x=-2$.

②

第 6 期

第 3~4 版同步周测参考答案

一、选择题

1.D　2.B　3.D　4.B　5.B　6.C

7.D

8.D

提示:由导函数图像可知,导数先是越来越大,则 $f(x)$ 的图像越来越“陡峭”;随后导数越来越小,则 $f(x)$ 的图像越来越“平缓”.故选 D.

9.C

提示:$f'(x)=3ax^2+3$.若函数 $f(x)$ 存在极值,则方程 $3ax^2+3=0$ 有解,则 $x^2=-\frac{3}{3a}>0$,所以 $a<0$.

10.D

提示:函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

令 $f'(x)=\frac{1}{3}-\frac{1}{x}=0$,解得 $x=3$.

当 $x\in(0,3)$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 是减函数;当 $x\in(3,+\infty)$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 是增函数.

故 $f(x)$ 有极小值 $f(3)=1-\ln3<0$.

又 $f(1)=\frac{1}{3}>0$,$f(6)=2-\ln6>0$,

故 $f(x)$ 在 $(0,3)$,$(3,+\infty)$ 内均有零点.

11.A

提示:因为 $f(x)$ 是 **R** 上的增函数,所以 $f'(x)>0$ 在 **R** 上恒成立.

$g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)$,

当 $x<0$ 时,由 $f(x)<0$,得 $g'(x)>0$,

故 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增;

当 $x>0$ 时,$g'(x)$ 的符号不确定,

故 $g(x)$ 的单调性不确定.故选 A.

12.B

二、填空题

13.$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$　14.$-2,-\frac{1}{2}$

15.$-1,(-\infty,0]$

16.$\frac{32\sqrt{3}}{3}$

提示:设剪成的小正三角形的边长为 x,则

$$S=\frac{(3-x)^2}{\frac{1}{2}(x+1)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(1-x)}=\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{(3-x)^2}{1-x^2}\ (0<x<1),$$

$$S'=\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{(2x-6)\cdot(1-x^2)-(3-x)^2\cdot(-2x)}{(1-x^2)^2}=\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{-2(3x-1)(x-3)}{(1-x^2)^2}.$$

令 $S'=0$,$0<x<1$,解得 $x=\frac{1}{3}$.

当 $x\in\left(0,\frac{1}{3}\right)$ 时,$S'<0$;

当 $x\in\left(\frac{1}{3},1\right)$ 时,$S'>0$.

故当 $x=\frac{1}{3}$ 时,S 取得最小值,最小值是 $\frac{32\sqrt{3}}{3}$.

三、解答题

17.**解**:$f'(x)=\frac{b(x^2-1)-bx\cdot2x}{(x^2-1)^2}=-\frac{b(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$.

当 $b>0$ 时,$f'(x)<0$,

故函数 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上是减函数;

当 $b<0$ 时,$f'(x)>0$,

故函数 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上是增函数.

18.**解**:(1)$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$.

令 $f'(x)<0$,得 $-1<x<3$.

所以 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(-1,3)$.

(2)结合(1),可得 $f(x)$,$f'(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	16	↘	−16	↗

所以 $f(x)$ 的极大值为 $f(-1)=16$,极小值为 $f(3)=-16$.

19.**解**:(1)依题意,铁路 AM 上的运费为 $2(50-x)$,

公路 MC 上的运费为 $4\sqrt{100+x^2}$,则由 A 到 C 的总运费为

$y=2(50-x)+4\sqrt{100+x^2}\ (0\leqslant x\leqslant50)$.

(2)$y'=-2+\frac{4x}{\sqrt{100+x^2}}\ (0\leqslant x\leqslant50)$.

令 $y'=0$,

解得 $x_1=\frac{10}{\sqrt{3}}$,$x_2=-\frac{10}{\sqrt{3}}$(舍去).

当 $0\leqslant x<\frac{10}{\sqrt{3}}$ 时,$y'<0$,

当 $50\geqslant x>\frac{10}{\sqrt{3}}$ 时,$y'>0$.

故当 $x=\frac{10}{\sqrt{3}}$ 时,y 取得最小值,

即当在距离点 B 为 $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ 时的点 M 处修筑公路至 C 时总运费最省.

20.**解**:设圆柱的底面半径为 r,高为 h,则由 $\pi r^2h=V$,得 $h=\frac{V}{\pi r^2}$.设造价为 $f(r)$,则 $f(r)=2\pi r^2a+2\pi rhb=2\pi r^2a+2\pi rb\cdot\frac{V}{\pi r^2}=2\pi r^2a+\frac{2bV}{r}$.

令 $f'(r)=4\pi ar-\frac{2bV}{r^2}=0$,得 $r=\sqrt[3]{\frac{bV}{2\pi a}}$.

当 $r<\sqrt[3]{\frac{bV}{2\pi a}}$ 时,$f'(r)<0$;

当 $r>\sqrt[3]{\frac{bV}{2\pi a}}$ 时,$f'(r)>0$.

故当 $r=\sqrt[3]{\frac{bV}{2\pi a}}$ 时,$f(r)$ 取得极小值.

此时 $\frac{2r}{h}=\frac{2r\cdot\pi r^2}{V}=\frac{2\pi}{V}\cdot\frac{bV}{2\pi a}=\frac{b}{a}$.

答:锅炉的底面直径与高的比为 $\frac{b}{a}$ 时,造价最低.

21.**解**:由 $g(x)$ 的图像,可知 $g(x)$ 的极大值为 $\frac{5}{6}$.

由 $g'(x)$ 的图像,可知 $g'(x)=0$ 的两根是 $x_1=1$,$x_2=2$,且 $x=1$ 是 $g(x)$ 的极大值点.

所以 $g(1)=\frac{5}{6}$.

又 $g'(x)=3ax^2+2bx+c$,

所以 $\begin{cases}1+2=-\frac{2b}{3a},\\1\times2=\frac{c}{3a},\\a+b+c=\frac{5}{6},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\frac{1}{3},\\b=-\frac{3}{2},\\c=2.\end{cases}$

所以 $g(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x$,

$g'(x)=x^2-3x+2$,

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\left(\frac{3}{2}+m\right)x^2+(2+3m)x-2m$.

若 $f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调递增,

则 $f'(x)=x^2-(3+2m)x+3m+2\geqslant0$ 在 $[2,+\infty)$ 上恒成立.

因为 $\Delta=(3+2m)^2-4(3m+2)=4m^2+1>0$,

所以 $\begin{cases}\frac{3+2m}{2}\leqslant2,\\f'(2)\geqslant0,\end{cases}$ 解得 $m\leqslant0$.

所以实数 m 的取值范围是 $(-\infty,0]$.

22.**解**:(1)$f'(x)=6x^2-2ax=2x(3x-a)$.

令 $f'(x)=0$,得 $x=0$ 或 $x=\frac{a}{3}$.

若 $a>0$,则当 $x\in(-\infty,0)\cup\left(\frac{a}{3},+\infty\right)$ 时,$f'(x)>0$;当 $x\in\left(0,\frac{a}{3}\right)$ 时,$f'(x)<0$.

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$,$\left(\frac{a}{3},+\infty\right)$ 单调递增,在 $\left(0,\frac{a}{3}\right)$ 单调递减;

若 $a=0$,$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递增;

若 $a<0$,则当 $x\in\left(-\infty,\frac{a}{3}\right)\cup(0,+\infty)$ 时,$f'(x)>0$;当 $x\in\left(\frac{a}{3},0\right)$ 时,$f'(x)<0$.

故 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\frac{a}{3}\right)$,$(0,+\infty)$ 单调递增,在 $\left(\frac{a}{3},0\right)$ 单调递减.

(2)满足题设条件的 a,b 存在.

(i)当 $a\leqslant0$ 时,由(1)知,$f(x)$ 在 $[0,1]$ 单调递增,所以 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 的最小值为 $f(0)=b$,最大值为 $f(1)=2-a+b$.此时 a,b 满足题设条件当且仅当 $b=-1$,$2-a+b=1$,即 $a=0$,$b=-1$.

(ii)当 $a\geqslant3$ 时,由(1)知,$f(x)$ 在 $[0,1]$ 单调递减,所以 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 的最大值为 $f(0)=b$,最小值为 $f(1)=2-a+b$.此时 a,b 满足题设条件当且仅当 $2-a+b=-1$,$b=1$,即 $a=4$,$b=1$.

(iii)当 $0<a<3$ 时,由(1)知,$f(x)$ 在 $[0,1]$ 的最小值为 $f\left(\frac{a}{3}\right)=-\frac{a^3}{27}+b$,最大值为 b 或 $2-a+b$.

若 $-\frac{a^3}{27}+b=-1$,$b=1$,则 $a=3\sqrt[3]{2}$,与 $0<a<3$ 矛盾.

若 $-\frac{a^3}{27}+b=-1$,$2-a+b=1$,则 $a=3\sqrt{3}$ 或 $a=-3\sqrt{3}$ 或 $a=0$,与 $0<a<3$ 矛盾.

综上,当且仅当 $a=0$,$b=-1$ 或 $a=4$,$b=1$ 时,$f(x)$ 在 $[0,1]$ 的最小值为 -1,最大值为 1.

第 7 期

第 3~4 版同步周测参考答案

一、选择题

1.A

2.B

3.A

4.C

提示:由定积分的几何意义,$f(x)\geqslant0$ 时,$\int_a^b f(x)dx$ 表示面积 S,当 $f(x)\leqslant0$ 时,$\int_a^b f(x)dx=-S$.故选 C.

5.A

提示:$\int_{-2}^{2}(x^2+\sin x+\sqrt{4-x^2})dx=\int_{-2}^{2}x^2dx+\int_{-2}^{2}\sin xdx+\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}dx=\frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{2}-\cos x\Big|_{-2}^{2}+\frac{1}{2}\pi\cdot2^2=\frac{16}{3}+2\pi$.故选 A.

6.C

提示:分别解方程组 $\begin{cases}y=2,\\y=\ln x,\end{cases}$ $\begin{cases}y=\ln x,\\x=e,\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}x=e^2,\\y=2,\end{cases}$ $\begin{cases}x=e,\\y=1,\end{cases}$ 所以积分区间为 $[1,2]$.

7.D

提示:由定积分性质(3)求 $f(x)$ 在区间 $[0,4]$ 上的定积分来实现,显然 D 正确.

8.D

提示:$\int_1^a\left(2x+\frac{1}{x}\right)dx=(x^2+\ln x)\Big|_1^a=a^2+\ln a-1=3+\ln2$,所以 $a=2$.

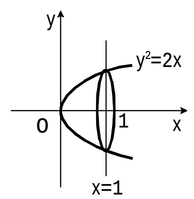
9.D

提示:$\int_3^6\frac{3}{\sqrt{6t}}dt=\sqrt{6t}\Big|_3^6=6-3\sqrt{2}$,故选 D.

10.D

提示:如图所示,因为 $y^2=2x$,所以 $[f(x)]^2=2x$,$x\in[0,1]$,

所以 $V=\pi\int_0^1[f(x)]^2dx=\pi\int_0^1 2xdx=\pi x^2\Big|_0^1=\pi$.



(第 10 题图)

11.C

提示:由题意,$A=1$,$\frac{T}{2}=\frac{2\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\pi$,所以 $T=2\pi$,$\omega=\frac{2\pi}{2\pi}=1$,所以 $f(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$,故当 $x=\frac{\pi}{6}$ 时,$f(x)=0$.

所以阴影面积为 $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left[-\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right]dx=\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$.故选 C.

12.B

提示:由题意,得 $S_{阴}=2\int_0^1(e-e^x)dx=2(ex-e^x)\Big|_0^1=2$,由几何概型得所求概率 $P=1-\frac{S_{阴}}{S_{正}}=1-\frac{2}{e^2}$.

二、填空题

13.$\frac{8}{3}$

提示:因为 $\int_0^1\frac{1}{2}f(x)dx=1$,

所以 $\int_0^1f(x)dx=2$,因为 $\int_{-1}^{0}3f(x)dx=2$,所以 $\int_{-1}^{0}f(x)dx=\frac{2}{3}$,

所以 $\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{0}f(x)dx+\int_0^1f(x)dx=2+\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$.

14.152m

提示:路程 $s=\int_0^6(18t-3t^2)dt+\int_6^8(3t^2-18t)dt=(9t^2-t^3)\Big|_0^6+(t^3-9t^2)\Big|_6^8=9\times6^2-6^3+8^3-9\times8^2-6^3+9\times6^2=152(m)$.

15.1

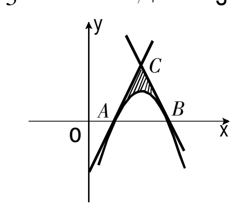
提示:因为 $f(1)=\lg1=0$,且 $\int_0^a3t^2dt=t^3\Big|_0^a=a^3-0^3=a^3$,所以 $f(0)=0+a^3=1$,所以 $a=1$.

16.$\frac{2}{3}$

提示:由 $y'=-2x+4$ 得在点 A,B 处切线的斜率分别为 2 和 -2,则切线方程分别为 $y=2x-2$ 和 $y=-2x+6$.

由 $\begin{cases}y=2x-2,\\y=-2x+6,\end{cases}$ 得两切线交点坐标为 $C(2,2)$,

所以 $S=S_{\triangle ABC}-\int_1^3(-x^2+4x-3)dx=\frac{1}{2}\times2\times2-\left(-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x\right)\Big|_1^3=2-\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$.



(第 16 题图)

三、解答题

17.**解**:(1)$\int_1^2\frac{1}{x(x+1)}dx=\int_1^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx=[\ln x-\ln(x+1)]\Big|_1^2=\ln\frac{4}{3}$.

(2)$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos x+2^x)dx=\left(\sin x+\frac{2^x}{\ln2}\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=2+\frac{1}{\ln2}\left(2^{\frac{\pi}{2}}-2^{-\frac{\pi}{2}}\right)$.

18.**解**:因为 $f(1)=4$,

所以 $a+b+c=4$.　①

$f'(x)=2ax+b$,

因为 $f'(1)=1$,所以 $2a+b=1$,　②

$\int_0^1f(x)dx=\left(\frac{1}{3}ax^3+\frac{1}{2}bx^2+cx\right)\Big|_0^1=\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b+c=\frac{19}{6}$,　③

由①②③,可得 $a=-1$,$b=3$,$c=2$.

所以 $f(x)=-x^2+3x+2$.

19.**解**:将三个解析式两两联立,

可得交点坐标 $(1,1)$,$(0,0)$,$(3,-1)$.

则 $S=\int_0^1\left(\sqrt{x}+\frac{1}{3}x\right)dx+\int_1^3\left(2-x+\frac{1}{3}x\right)dx=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^1+\left(2x-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_1^3=\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{4}{3}=\frac{13}{6}$.

20.**解**:$V=4\int_0^6(6t-t^2)dt=4\left(3t^2-\frac{1}{3}t^3\right)\Big|_0^6=4\left(3\times6\times6-\frac{1}{3}\times6\times6\times6\right)=144(cm^3)$.

答:从 $t=0$ 到 $t=6s$ 这段时间流出的水量为 $144cm^3$.

21.**解**:(1)设速度-时间函数式为 $v(t)=v_0+at$,将点 $(0,40)$,$(6,-20)$ 的坐标分别代入,得 $v_0=40$,$a=-10$,所以 $v(t)=40-10t$.

令 $v(t)=0\Rightarrow40-10t=0\Rightarrow t=4$,

物体从 0s 运动到距离水平地面的最大值为

$s=\int_0^4(40-10t)dt=(40t-5t^2)\Big|_0^4=80(m)$.

(2)由上述可知,物体在 0~6s 内的位移为

$s=\int_0^6(40-10t)dt=(40t-5t^2)\Big|_0^6=60(m)$.

(3)由上述可知,物体在 0~6s 内的路程为

$s=\int_0^6|40-10t|dt=\int_0^4(40-10t)dt-\int_4^6(40-10t)dt=(40t-5t^2)-(40t-5t^2)\Big|_4^6=80+20=100(m)$.

22.**解**:当 $a\leqslant0$ 时,

由题意可得 $\int_a^0(x^2-2x)dx=\frac{4}{3}$,

所以 $\left(\frac{1}{3}x^3-x^2\right)\Big|_a^0=\frac{4}{3}$,即 $a^3-3a^2+4=0$,

解得 $a=-1$,或 $a=2$.

又因为 $a\leqslant0$,所以 $a=-1$.

当 $0<a\leqslant2$ 时,由题意可得

$\int_0^a0-(x^2-2x)dx=\int_0^a(2x-x^2)dx=\frac{4}{3}$,

即 $a^3-3a^2+4=0$,

解得 $a=2$,或 $a=-1$(舍去).

所以存在常数 $a=-1$ 或 $a=2$,使得由抛物线 $y=x^2-2x$ 及直线 $x=0$,$x=a$,$y=0$ 围成的平面图形的面积为 $\frac{4}{3}$.