

一、选择题

1.A 2.C 3.D 4.B 5.C 6.A

7.A

8.B

提示:  $\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$

$$= \tan\left[(\alpha+\beta) - \left(\beta - \frac{\pi}{4}\right)\right] = \frac{3}{22}.$$

9.C

提示: 原式

$$= \frac{\tan 60^\circ(1 - \tan 10^\circ \tan 50^\circ) - \tan 60^\circ}{\tan 10^\circ \tan 50^\circ}$$

$$= -\sqrt{3}.$$

10.C

提示: 由已知得

$$\sin\alpha\cos\frac{\pi}{3} + \cos\alpha\sin\frac{\pi}{3} + \sin\alpha$$

$$= -\frac{4\sqrt{3}}{5},$$

$$\text{即 } \frac{3}{2}\sin\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha = -\frac{4\sqrt{3}}{5},$$

$$\text{即 } \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha + \frac{1}{2}\cos\alpha = -\frac{4}{5},$$

$$\text{所以 } \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{4}{5}.$$

$$\text{故 } \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) = -\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{4}{5}.$$

11.D

提示: 由已知条件得

$$\sin(A-B) = 1 - 2\cos A \sin B,$$

$$\text{所以 } \sin A \cos B - \cos A \sin B = 1 - 2\cos A \sin B,$$

$$\text{即 } \sin A \cos B + \cos A \sin B = 1,$$

$$\text{即 } \sin(A+B) = 1.$$

$$\text{所以 } A+B = 90^\circ.$$

$$\text{故 } \triangle ABC \text{ 是直角三角形.}$$

12.C

提示: 由两角和的余弦公式可知

①正确; 令  $\alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = 0$ , 可知②正确;

对于③, 公式成立还需保证  $\alpha + \beta \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$  及  $\tan\alpha \tan\beta \neq 1$ , 故③错误;

由两角差的正弦公式可知④错误. 故假命题是③④.

二、填空题

13.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

14.  $\sin 2 - \cos 2$

提示: 原式

$$= \sqrt{\sin^2 2 + \cos^2 2 - 2\sin 2 \cos 2}$$

$$= \sqrt{(\sin 2 - \cos 2)^2}$$

$$= |\sin 2 - \cos 2|$$

$$= \sin 2 - \cos 2.$$

15. 2

16.  $65^\circ$

三、解答题

17. 解: (1) 原式

$$= \frac{\sin(30^\circ + 17^\circ) - \sin 17^\circ \cos 30^\circ}{\cos 17^\circ}$$

$$= \frac{\sin 30^\circ \cos 17^\circ}{\cos 17^\circ}$$

$$= \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{2}.$$

(2) 因为  $\tan 60^\circ = \tan(25^\circ + 35^\circ)$

$$= \frac{\tan 25^\circ + \tan 35^\circ}{1 - \tan 25^\circ \tan 35^\circ} = \sqrt{3},$$

$$\text{所以 } \tan 25^\circ + \tan 35^\circ = \sqrt{3}(1 - \tan 25^\circ \tan 35^\circ),$$

$$\text{所以原式} = \sqrt{3}(1 - \tan 25^\circ \tan 35^\circ) + \sqrt{3} \tan 25^\circ \tan 35^\circ = \sqrt{3}.$$

18. 解: (1) 由于  $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ , 故  $\frac{\pi}{4} < \beta - \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4}$ .

$$\text{由 } \cos\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{3}, \text{ 得 } \sin\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{所以 } \tan\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{2\sqrt{2}}{1}.$$

$$\text{所以 } \tan \beta = \tan\left[\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4}\right] = \frac{\tan\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right) + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right) \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{2\sqrt{2} + 1}{1 - 2\sqrt{2}} = -\frac{9 + 4\sqrt{2}}{7}.$$

(2) 由于  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ , 故  $\frac{\pi}{2} < \alpha + \beta < \frac{3\pi}{2}$ .

$$\text{由 } \sin(\alpha + \beta) = \frac{4}{5}, \text{ 可得 } \cos(\alpha + \beta) = -\frac{3}{5}.$$

$$\text{所以 } \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left[(\alpha + \beta) - \left(\beta - \frac{\pi}{4}\right)\right] = \cos(\alpha + \beta)\cos\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right) + \sin(\alpha + \beta)\sin\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{3}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{4}{5} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{8\sqrt{2} - 3}{15}.$$

$$\text{19. 解: (1) 由 } \sin A + \cos A = \frac{1}{5},$$

$$\text{两边平方, 得 } 1 + 2\sin A \cdot \cos A = \frac{1}{25},$$

$$\text{故 } \sin A \cdot \cos A = -\frac{12}{25}.$$

$$\text{(2) } (\sin A - \cos A)^2 = 1 - 2\sin A \cdot \cos A = \frac{49}{25}.$$

$$\text{因为在 } \triangle ABC \text{ 中, } 0^\circ < A < 180^\circ,$$

$$\text{所以 } \sin A > 0,$$

$$\text{又 } \sin A \cos A < 0, \text{ 故 } \cos A < 0,$$

$$\text{所以 } \sin A - \cos A > 0, \text{ 则 } \sin A - \cos A = \frac{7}{5}.$$

$$\text{与已知条件联立, 可得 } \sin A = \frac{4}{5}, \cos A = -\frac{3}{5}, \text{ 所以 } \tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = -\frac{4}{3}.$$

$$\text{20. 解: (1) } \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{5}, \text{ ①}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \frac{3}{5}, \text{ ②}$$

由①②, 解得

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{2}{5}, \sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{5}.$$

$$\text{所以 } \tan\alpha\tan\beta = \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{(2) 由 } \alpha + \beta \in (0, \pi), \cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{5},$$

$$\text{得 } \sin(\alpha + \beta) = \frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

$$\text{由 } \alpha - \beta \in \left(-\frac{3\pi}{2}, 0\right), \cos(\alpha - \beta) = \frac{3}{5},$$

$$\text{得 } \sin(\alpha - \beta) = -\frac{4}{5}.$$

$$\text{所以 } \cos 2\beta = \cos[(\alpha + \beta) - (\alpha - \beta)] = \cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{2\sqrt{6}}{5} \times \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{3 - 8\sqrt{6}}{25}.$$

$$\text{21. 解: (1) } \tan B = \tan(\angle AMC - \angle BAM) = \frac{\tan \angle AMC - \tan \angle BAM}{1 + \tan \angle AMC \tan \angle BAM} = -1.$$

$$\text{又 } 0 < B < \pi, \text{ 所以 } B = \frac{3\pi}{4}.$$

$$\text{(2) 因为 } \alpha + \beta = B,$$

$$\text{所以 } \beta = B - \alpha = \frac{3\pi}{4} - \alpha.$$

$$\text{所以 } \sqrt{2}\sin\alpha - \sin\beta = \sqrt{2}\sin\alpha - \sin\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right).$$

$$\text{因为 } 0 < \alpha < \frac{3\pi}{4},$$

$$\text{所以 } -\frac{\pi}{4} < \alpha - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{所以 } -\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) < 1.$$

$$\text{所以 } \sqrt{2}\sin\alpha - \sin\beta \text{ 的取值范围是 } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right).$$

$$\text{22. (1) 证明: 因为 } a \text{ 与 } b \text{ 共线, 所以 } \sin\frac{\pi x}{2} \cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3} \cos\frac{\pi x}{2} = 0,$$

$$\text{即 } \sin\left(\frac{\pi x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = 0.$$

$$\text{(2) 解: 由 } \frac{\pi x}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbf{Z}),$$

$$\text{得对称轴方程是 } x = \frac{5}{3} + 2k (k \in \mathbf{Z}).$$

$$\text{(3) 解: 由 } f\left(\frac{4A}{\pi}\right) = f\left(\frac{4B}{\pi}\right) = \frac{1}{2},$$

$$\text{得 } \sin\left(2A - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(2B - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

$$\text{因为 } 0 < A < B < \pi,$$

$$\text{所以 } -\frac{\pi}{3} < 2A - \frac{\pi}{3} < 2B - \frac{\pi}{3} < \frac{5\pi}{3}.$$

$$\text{所以 } 2A - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}, 2B - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6},$$

$$\text{解得 } A = \frac{\pi}{4}, B = \frac{7\pi}{12}, \text{ 所以 } C = \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{所以 } \frac{\sin B}{\sin C} = \frac{\sin \frac{7\pi}{12}}{\sin \frac{\pi}{6}} = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}.$$

第 5 期

第 3-4 版同步周测参考答案

一、选择题

1.A 2.C 3.D 4.C

5.A

提示: 由减法的三角形法则易求得.

6.A

提示:  $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = 2\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 = 2\overrightarrow{AB}$ , 则  $\overrightarrow{AB}$  与  $\overrightarrow{BD}$  共线. 又两向量有公共点 B, 故 A, B, D 三点共线.

7.C

8.A

提示: 由  $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{CB}$  求得点 C 的坐标为 (3, 3), 代入直线方程  $y = \frac{1}{2}ax$ , 解得  $a = 2$ . 故选 A.

9.B

提示: 因为  $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}$ ,  $\overrightarrow{DA} = -\mathbf{e}_2$ ,  $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\mathbf{e}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{e}_2$ , 所以  $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\mathbf{e}_1 - \frac{2 - \sqrt{3}}{2}\mathbf{e}_2$ .

10.A

提示: 不妨设  $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$ . 由于  $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP} = -\mathbf{a} + 2\overrightarrow{PA} + \mathbf{b}$ , 即  $\overrightarrow{AP} = \frac{-\mathbf{a} + \mathbf{b}}{1 + 2\lambda}$ , 而  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\mathbf{a} + \mathbf{b}$ , 故有  $\frac{1}{1 + 2\lambda} = \lambda$ , 解得  $\lambda = \frac{1}{3}$ .

11.C

提示: 根据题意, 向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  是不共线的向量, 所以  $1 \cdot (3m - 2) - 2 \cdot m \neq 0$ , 解得  $m \neq 2$ .

12.C

提示: 由  $2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \mathbf{0}$ , 得  $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ , 所以 G 是 BC 的中点. 结合 G 是  $\triangle ABC$  的外心, 易知  $BC = 2$ ,  $\triangle ABC$  是直角三角形, 且  $\angle BAC = 90^\circ$ . 又  $\angle BOC = 90^\circ$ , 所以点 A, O 均在以 BC 为直径的圆上. 当  $|\overrightarrow{OA}|$  最大时, OA 为直径, 故  $|\overrightarrow{OA}|$  的最大值为 2.

二、填空题

13.  $\frac{1}{3}$

14. 7

提示: 向右平移  $\overrightarrow{AB}$ , 有 3 个位置可以平移, 则有  $3 \times 2 = 6$  个向量, 加上向量  $\overrightarrow{BA}$ , 共 7 个.

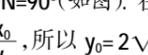
15.  $\mathbf{b}_6$

提示: 因为  $\overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_7} = \mathbf{0}$ , 所以  $\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_5 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_5 + \mathbf{b}_7 = \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_5A_6} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_5} +$

$$\overrightarrow{OA_7} = (\overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{A_2A_3}) + (\overrightarrow{OA_5} + \overrightarrow{A_5A_6}) + \overrightarrow{OA_7} = \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_6} + \overrightarrow{OA_7} = \mathbf{b}_6.$$

$$16. 2\sqrt{2}$$

提示: 易知  $MN \parallel y$  轴,  $\angle MNO = 45^\circ$ ,  $\angle MON = 90^\circ$  (如图). 在  $\triangle MON$  中,  $\cos 45^\circ = -\frac{x_0}{y_0}$ , 所以  $y_0 = 2\sqrt{2}$ .

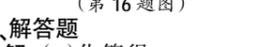


(第 16 题图)

三、解答题

17. 解: (1) 化简得  $m = a, n = -13a$ , 故  $n = -13m$ , 所以向量  $m, n$  平行.

(2) 向量  $4b - \frac{3}{2}a$  即下图中的向量  $\overrightarrow{MN}$ , 且  $|4b - \frac{3}{2}a| = 5$ .



(第 17 题图)

18. 解: (1)  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \mathbf{e}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{e}_1$ ,  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AN} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - (\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ .

(2) 若  $k\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$  与  $2\mathbf{e}_1 + k\mathbf{e}_2$  同向共线, 则存在  $\lambda > 0$ , 使得  $k\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = \lambda(2\mathbf{e}_1 + k\mathbf{e}_2)$ , 所以  $\begin{cases} k = 2\lambda, \\ 1 = k\lambda, \end{cases}$  解得  $k = \sqrt{2}$ .

19. 解: (1)  $3\mathbf{a} + \mathbf{b} - 2\mathbf{c} = 3(3, 2) + (-1, 2) - 2(4, 1) = (0, 6)$ .

(2) 设  $\mathbf{a} = m\mathbf{b} + n\mathbf{c}$ , 其中  $m, n \in \mathbf{R}$ , 即  $(3, 2) = (-m + 4n, 2m + n)$ , 所以  $\begin{cases} -m + 4n = 3, \\ 2m + n = 2, \end{cases}$  解得  $\begin{cases} m = \frac{5}{9}, \\ n = \frac{8}{9}. \end{cases}$

所以  $\mathbf{a} = \frac{5}{9}\mathbf{b} + \frac{8}{9}\mathbf{c}$ .

(3) 因为  $\mathbf{a} + k\mathbf{c} = (3 + 4k, 2 + k)$ ,  $2\mathbf{b} - \mathbf{a} = (-5, 2)$ , 所以  $2(3 + 4k) - (-5)(2 + k) = 0$ , 解得  $k = -\frac{16}{13}$ .

20. 解: 因为  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \mathbf{0}$ , 所以  $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OC}$ ,  $\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OD}$ . 所以  $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OC}|$ ,  $|\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OD}|$ , 故四边形 ABCD 是平行四边形.

又  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}|$ , 故四边形 ABCD 是菱形.

因为  $\cos \angle DAB = \frac{1}{2}$ ,  $\angle DAB \in (0^\circ, 180^\circ)$ , 所以  $\angle DAB = 60^\circ$ .

所以  $\triangle ABD$  是边长为 1 的正三角形.

所以  $|\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC}| = 2|\overrightarrow{AO}| = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ .

$|\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{BD}| = |\overrightarrow{AB}| = 1$ .

21. 证明: 如图, 令  $\overrightarrow{BC} = \mathbf{a}$ ,  $\overrightarrow{CA} = \mathbf{b}$  为一组基底. 根据已知有  $\overrightarrow{BL} = \lambda\mathbf{a}$ ,  $\overrightarrow{CM} = m\mathbf{b}$ . 因为  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = -\mathbf{a} - \mathbf{b}$ , 所以  $\overrightarrow{AN} = n\overrightarrow{AB} = -na - nb$ . 所以  $\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BL} = (-1 + \lambda)\mathbf{a} - \mathbf{b}$ , ①  $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM} = \mathbf{a} + m\mathbf{b}$ , ②  $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AN} = -\mathbf{a} + (1 - n)\mathbf{b}$ . ③ 把①②③代入已知式  $\overrightarrow{AL} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} = \mathbf{0}$ , 则有  $(1 - n)\mathbf{a} + (m - n)\mathbf{b} = \mathbf{0}$ . 根据平面向量基本定理, 有  $1 - n = m - n = 0$ , 所以  $l = m = n$ .

22. 解: (1) 因为  $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = -\mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{b}$ ,  $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\mathbf{b} - \mathbf{a$

一、选择题

1.A 提示:由题设,得  $a-b=(-1,1)$ ,  $|a-b|=\sqrt{2}$ .

2.B

3.C

提示:  $(a+\sqrt{2}b)^2=a^2+2\sqrt{2}a\cdot b+2b^2=1+0+2\times 4=9$ , 所以  $|a+\sqrt{2}b|=3$ .

4.B

提示:  $a$  在  $b$  方向上的射影为

$$|a|\cos\theta=\frac{a\cdot b}{|b|}=\frac{2\times 3+1\times 4}{5}=2.$$

5.B

6.A

提示:由题意,得  $\lambda a+b=(-3\lambda-1, 2\lambda)$ ,  $a-2b=(-1, 2)$ .

因为  $(\lambda a+b)\perp(a-2b)$ ,

所以  $(-3\lambda-1)\times(-1)+2\lambda\times 2=0$ ,

解得  $\lambda=-\frac{1}{7}$ .

7.D

8.B

提示:  $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}-2\overrightarrow{DA}=(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD})+(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ , 所以  $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=|\overrightarrow{AB}|^2-|\overrightarrow{AC}|^2=0$ , 所以  $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|$ , 所以  $\triangle ABC$  为等腰三角形.

9.B

提示:结论①③正确,②④错误.

10.D

提示:由  $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=1$ ,  $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$ , 不妨以  $O$  为原点,  $\overrightarrow{OA}$  的方向为  $x$  轴正方向建立平面直角坐标系, 则  $A(1,0), B(0,1)$ , 故  $C(\lambda, \mu), M(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .

所以  $\overrightarrow{MC}=(\lambda-\frac{1}{2}, \mu-\frac{1}{2})$ . 因为  $|\overrightarrow{MC}|=1$ , 所以  $(\lambda-\frac{1}{2})^2+(\mu-\frac{1}{2})^2=1$ . 故选 D.

11.B

提示:由  $\overrightarrow{OA}$  与  $\overrightarrow{OC}$  在  $\overrightarrow{OB}$  方向上的射影相等, 得  $\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|}=\frac{\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|}$ ,

所以  $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}$ . 所以  $3a+b=12+5b$ , 即  $3a-4b-12=0$ . 所以点  $(a,b)$  在直线  $3x-4y-12=0$  上,  $a^2+b^2$  表示原点  $O$  与直线  $3x-4y-12=0$  上的点的距离  $d$  的平方, 则  $d$  的最小值为  $\frac{12}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{12}{5}$ , 故  $a^2+b^2$  的最小值为  $\frac{144}{25}$ .

12.C

提示:由已知,得  $|a-te|^2\geq|a-e|^2$ , 展开, 得  $t^2-2t(a\cdot e)+2a\cdot e-1\geq 0$ . 由于上式对  $t\in\mathbf{R}$  恒成立, 故  $\Delta=4(a\cdot e)^2-4(2a\cdot e-1)\leq 0$ , 即  $(a\cdot e-1)^2\leq 0$ , 所以  $a\cdot e=1$ . 所以  $e\cdot(a-e)=a\cdot e-e^2=1-1=0$ . 所以  $e\perp(a-e)$ .

二、填空题

13.45°

14.135°

15. $\frac{2}{3}$

提示:由题设,得  $a\cdot c=a\cdot(2a-\sqrt{5}\cdot b)=2a^2-\sqrt{5}a\cdot b=2$ ,  $c^2=(2a-\sqrt{5}b)^2=4a^2-4\sqrt{5}a\cdot b+5b^2=9$ , 即  $|c|=3$ , 所以  $\cos\langle a, c\rangle=\frac{a\cdot c}{|a||c|}=\frac{2}{3}$ .

16.0, 2 $\sqrt{5}$

提示:在正方形  $ABCD$  中,  $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$ ,  $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AD}|=1$ ,

则  $|\lambda_1\overrightarrow{AB}+\lambda_2\overrightarrow{BC}+\lambda_3\overrightarrow{CD}+\lambda_4\overrightarrow{DA}+\lambda_5\overrightarrow{AC}+\lambda_6\overrightarrow{BD}|=|\lambda_1\overrightarrow{AB}+\lambda_2\overrightarrow{AD}-\lambda_3\overrightarrow{AB}-\lambda_4\overrightarrow{AD}+\lambda_5(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})+\lambda_6(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})|$

$=|(\lambda_1-\lambda_3+\lambda_5-\lambda_6)\overrightarrow{AB}+(\lambda_2-\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6)\overrightarrow{AD}|$

$=\sqrt{(\lambda_1-\lambda_3+\lambda_5-\lambda_6)^2+(\lambda_2-\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6)^2}$ . ①

由于  $\lambda_i(i=1, 2, 3, 4, 5, 6)$  取遍  $\pm 1$ , 可得

当  $\lambda_1-\lambda_3+\lambda_5-\lambda_6=\lambda_2-\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6=0$  时, ①式取得最小值 0, 此时可取  $\lambda_1=\lambda_3=\lambda_5=\lambda_6=1, \lambda_2=\lambda_4=-1$ ;

当  $\lambda_1-\lambda_3+\lambda_5-\lambda_6=2, \lambda_2-\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6=4$  时, ①式取得最大值  $2\sqrt{5}$ , 此时可取  $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=1, \lambda_5=\lambda_6=-1$ .

三、解答题

17.解:要保持平衡状态, 则  $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$ , 故  $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OC}$ . 以  $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$  为邻边作  $\square OAC'B'$ , 则  $|\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OC}'|$ , 且  $\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{OC}'$ , 所以  $|\overrightarrow{OA}|>|\overrightarrow{OB}|$ ,  $|\overrightarrow{OA}'|>|\overrightarrow{OC}'|$ . 所以细绳  $OA$  受力最大, 故细绳  $OA$  的耐力要求最高.

18.解:(1)由于  $|a|=1, |b|=\sqrt{3}$ ,  $|a+b|=2$ ,

故  $|a+b|^2=a^2+b^2+2a\cdot b=1+3+2a\cdot b=4$ , 所以  $a\cdot b=0$ , 即  $a\perp b$ .

所以向量  $a$  与  $b$  的夹角为  $90^\circ$ .

(2)假设存在实数  $\lambda$ , 使得  $(\lambda a-b)\perp(a+2b)$ , 那么  $(\lambda a-b)\cdot(a+2b)=\lambda a^2+(2\lambda-1)\cdot a\cdot b-2b^2=\lambda+0-6=0$ ,

解得  $\lambda=6$ .

故存在实数  $\lambda=6$ , 使得  $(\lambda a-b)\perp(a+2b)$ .

19.解:(1)因为四边形  $ABCD$  是矩形, 所以  $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$ , 即  $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\mathbf{0}$ .

因为  $AB=9, BC=6, \overrightarrow{CP}=2\overrightarrow{PD}$ , 所以  $|\overrightarrow{CP}|=6, |\overrightarrow{PD}|=3$ ,

则  $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DP})\cdot(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{PC})$

$=(\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{BC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB})$

$=|\overrightarrow{BC}|^2-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}-\frac{2}{9}|\overrightarrow{AB}|^2$

$=6^2-\frac{2}{9}\times 9^2=18$ .

(2)设  $\overrightarrow{AB}$  与  $\overrightarrow{AD}$  的夹角为  $\theta$ .

与(1)同理, 易得  $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=|\overrightarrow{BC}|^2-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}-\frac{2}{9}|\overrightarrow{AB}|^2=6^2-\frac{1}{3}\times 9\times 6\times \cos\theta-\frac{2}{9}\times 9^2=6$ , 解得  $\cos\theta=\frac{2}{3}$ .

故  $\overrightarrow{AB}$  与  $\overrightarrow{AD}$  夹角的余弦值为  $\frac{2}{3}$ .

20.解:(1)因为  $a=(-1, 2), b=(3, 2)$ , 所以  $a-b=(-4, 0)$ . 故  $a\cdot(a-b)=(-1)\times(-4)+2\times 0=4$ .

(2)  $a+b=(2, 4), 2a-b=(-5, 2)$ , 所以  $(a+b)\cdot(2a-b)=2\times(-5)+4\times 2=-2$ .

(3)因为  $b\cdot c=3\times 2+2\times 1=8$ ,

所以  $a(b\cdot c)=8(-1, 2)=(-8, 16)$ ; 因为  $a\cdot b=-1\times 3+2\times 2=1$ , 所以  $(a\cdot b)c=(2, 1)$ .

21.解:(1)设  $\overrightarrow{OM}=(x, y)$ , 因为点  $M$  在直线  $OP$  上, 所以向量  $\overrightarrow{OM}$  与  $\overrightarrow{OP}$  共线.

又  $\overrightarrow{OP}=(2, 1)$ , 所以  $x-2y=0$ , 即  $x=2y$ , 所以  $\overrightarrow{OM}=(2y, y)$ .

又  $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA}=(1, 7)$ , 所以  $\overrightarrow{MA}=(1-2y, 7-y)$ .

同理  $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}=(5-2y, 1-y)$ , 于是  $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(1-2y)(5-2y)+(7-y)(1-y)=5y^2-20y+12=5(y-2)^2-8$ .

所以当  $y=2$  时,  $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$  取得最小值  $-8$ , 此时  $\overrightarrow{OM}=(4, 2)$ .

(2)当  $\overrightarrow{OM}=(4, 2)$ , 即  $y=2$  时, 有  $\overrightarrow{MA}=(-3, 5), \overrightarrow{MB}=(1, -1)$ , 所以  $|\overrightarrow{MA}|=\sqrt{34}, |\overrightarrow{MB}|=\sqrt{2}$ .

所以  $\cos\angle AMB=\frac{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}}{|\overrightarrow{MA}||\overrightarrow{MB}|}=\frac{-4\sqrt{17}}{17}$ .

22.解:(1)  $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ , 又  $\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ , 所以  $x=\frac{1}{3}, y=\frac{2}{3}$ .

(2)由  $\overrightarrow{BP}$  与  $\overrightarrow{AD}$  共线, 可设  $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{AD}, \lambda\in\mathbf{R}$ .

因为  $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ , 所以  $\overrightarrow{BP}=\frac{\lambda}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2\lambda}{3}\overrightarrow{AC}$ .

所以  $\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{AB}=-(\frac{\lambda}{3}+1)\overrightarrow{AB}-\frac{2\lambda}{3}\overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AC}=-(\frac{\lambda}{3}+1)\overrightarrow{AB}+(1-\frac{2\lambda}{3})\overrightarrow{AC}$ .

所以  $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=(\frac{\lambda}{3}+1)^2|\overrightarrow{AB}|^2+(\frac{\lambda}{3}+1)\cdot(\frac{4\lambda}{3}-1)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\frac{2\lambda}{3}(1-\frac{2\lambda}{3})|\overrightarrow{AC}|^2$ . ①

因为  $AB=2, AC=5, \cos\angle CAB=\frac{3}{5}$ , 所以  $|\overrightarrow{AB}|^2=4, |\overrightarrow{AC}|^2=25, \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=6$ .

把②代入①并整理, 得  $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=\frac{128}{9}\lambda^2-8\lambda-2$ .

因为  $\overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{PC}$ , 所以  $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=0$ , 即  $\frac{128}{9}\lambda^2-8\lambda-2=0$ , 解得  $\lambda_1=\frac{3}{4}, \lambda_2=-\frac{3}{16}$ , 所以  $|\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{AD}}|=\lambda$  或  $|\frac{3}{4}$  或  $|\frac{3}{16}$ .

第 7 期

第 2-3 版章节测试参考答案

一、选择题

1.C 2.B 3.D 4.D 5.B 6.A

7.B

提示:设  $a$  与  $b$  的夹角为  $\theta$ . 因为  $(a-b)\perp b$ , 所以  $(a-b)\cdot b=a\cdot b-b^2=|a|\cdot|b|\cos\theta-b^2=0$ . 又  $|a|=2|b|$ , 可得  $\cos\theta=\frac{1}{2}$ . 因为  $\theta\in[0, \pi]$ , 所以  $\theta=\frac{\pi}{3}$ .

8.B 提示:设  $a-2b$  与  $a$  的夹角为  $\theta$ , 则  $a-2b$  在  $a$  方向上的射影为  $|a-2b|\cdot\cos\theta=\frac{(a-2b)\cdot a}{|a|}=\frac{|a|^2-2a\cdot b}{|a|}=1$ .

9.B 提示:由  $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AB}=(1-\lambda)\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ , 且  $\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{CP}=-2, AB=1, AC=2, \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ , 得  $3\lambda-2=0$ , 解得  $\lambda=\frac{2}{3}$ . 故选 B.

10.D 提示:设  $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AN}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$ , 得  $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}$ , 由平行四边形法则, 于是  $NP\parallel AB$ , 所以  $\frac{S_{\triangle ANP}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{|\overrightarrow{AN}|}{|\overrightarrow{AC}|}=\frac{1}{5}$ .

同理可得  $\frac{S_{\triangle APO}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{1}{4}$ , 所以  $\frac{S_{\triangle ANP}}{S_{\triangle APO}}=\frac{4}{5}$ .

11.B 12.C 提示:当点  $P$  在边  $AB$  上时,  $m\in[0, 1], n=0$ , 所以  $m+n\in[0, 1]$ .

取  $AB$  的中点  $O$ , 连接  $OC$ , 则  $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AD}$ . 当点  $P$  在边  $BC$  上时, 设  $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}, \lambda\in[0, 1]$ , 则  $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\lambda(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=\overrightarrow{AB}+\lambda(\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB})=(1-\frac{\lambda}{2})\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AD}$ . 所以  $m=1-\frac{\lambda}{2}, n=\lambda$ .

所以  $m+n=1+\frac{\lambda}{2}\in[1, \frac{3}{2}]$ .

当点  $P$  在边  $AC$  上时, 由向量加法的平行四边形法则, 得  $n\in[0, 1], m\in[0, \frac{1}{2}]$ , 所以  $m+n\in[0, \frac{3}{2}]$ .

所以  $m+n$  的取值范围是  $[0, \frac{3}{2}]$ .

故选 C.

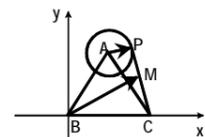
二、填空题

13.6. 相反

14.4 提示:力  $F$  对物体所做的功  $W=F\cdot\overrightarrow{AB}=(2, 3)\cdot(2, 0)=4$ .

15. $\frac{3}{2}$  提示:  $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{ED}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$ , 所以  $\overrightarrow{EC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}$ . 又  $\overrightarrow{EC}=\lambda\overrightarrow{AD}+\mu\overrightarrow{AB}$ , 所以  $\lambda=\frac{1}{2}, \mu=1$ , 所以  $\lambda+\mu=\frac{3}{2}$ .

16. $\frac{49}{4}$  提示:建立如图所示的平面直角坐标系, 则  $B(0, 0), C(2\sqrt{3}, 0), A(\sqrt{3}, 3)$ . 由  $|\overrightarrow{AP}|=1$ , 知点  $P$  的轨迹是以  $A(\sqrt{3}, 3)$  为圆心, 1 为半径的圆.



(第 16 题图)

设  $P(x, y)$ , 由  $\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{MC}$ , 得  $M(\frac{x+2\sqrt{3}}{2}, \frac{y}{2})$ , 则  $\overrightarrow{BM}=(\frac{x+2\sqrt{3}}{2}, \frac{y}{2})$ .

故  $|\overrightarrow{BM}|^2=\frac{1}{4}[(x+2\sqrt{3})^2+y^2]$ , 它表示圆  $A$  上的点到点  $N(-2\sqrt{3}, 0)$  的距离  $d$  平方的  $\frac{1}{4}$ .

结合图形可知,  $d_{\max}=|\overrightarrow{AN}|+1=7$ , 所以  $(|\overrightarrow{BM}|^2)_{\max}=\frac{1}{4}d_{\max}^2=\frac{49}{4}$ .

三、解答题

17.解:根据题意, 得  $\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$ ,  $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{BA}=(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{a}=2\mathbf{a}+\mathbf{b}$ ,  $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{BC}=(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{b}=\mathbf{a}+2\mathbf{b}$ ,  $\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BF}=(\mathbf{a}+2\mathbf{b})-(2\mathbf{a}+\mathbf{b})=-\mathbf{a}+\mathbf{b}$ .

18.解:(1)由  $(2a-3b)\cdot(2a+b)=61$ , 解得  $a\cdot b=-6$ .

所以  $\cos\theta=\frac{a\cdot b}{|a||b|}=\frac{-6}{4\times 3}=-\frac{1}{2}$ .

又  $0\leq\theta\leq\pi$ , 所以  $\theta=\frac{2\pi}{3}$ .

(2)  $|a-b|^2=a^2-2a\cdot b+b^2=37$ , 所以  $|a-b|=\sqrt{37}$ ;

$|a+b|^2=a^2+2a\cdot b+b^2=13$ , 所以  $|a+b|=\sqrt{13}$ .

19.解:(1)  $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\mathbf{e}_1+(1+\lambda)\mathbf{e}_2$ , 因为  $A, E, C$  三点共线, 所以存在实数  $m$ , 使得  $\overrightarrow{AE}=m\overrightarrow{EC}$ , 即  $\mathbf{e}_1+(1+\lambda)\mathbf{e}_2=m(-2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2)$ . 因为  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  是平面内两个不共线的非零向量, 所以  $1=-2m$ , 且  $1+\lambda=m$ , 解得  $\lambda=-\frac{3}{2}$ .

(2)  $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EC}=-3\mathbf{e}_1-\frac{1}{2}\mathbf{e}_2=-3(2, 1)-\frac{1}{2}(2, -2)=(-7, -2)$ .

在平行四边形  $ABCD$  中,  $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ , 设点  $A$  的坐标为  $(x, y)$ , 则  $\begin{cases} 3-x=-7, \\ 5-y=-2, \end{cases}$  解得  $\begin{cases} x=10, \\ y=7. \end{cases}$  所以点  $A$  的坐标为  $(10, 7)$ .

20.解:设点  $P$  的坐标为  $(x_1, y_1)$ , 则  $\overrightarrow{AP}=(x_1-2, y_1-3), \overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}=(5-2, 4-3)+\lambda(7-2, 10-3)=(3+5\lambda, 1+7\lambda)$ .

由  $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}$ , 得  $\begin{cases} x_1-2=3+5\lambda, \\ y_1-3=1+7\lambda, \end{cases}$  解得  $\begin{cases} x_1=5+5\lambda, \\ y_1=4+7\lambda. \end{cases}$  所以点  $P$  的坐标为  $(5+5\lambda, 4+7\lambda)$ .

(1)令  $5+5\lambda=4+7\lambda$ , 得  $\lambda=\frac{1}{2}$ .

所以当  $\lambda=\frac{1}{2}$  时, 点  $P$  在直线  $y=x$  上.

(2)若  $P$  为第一象限内的点, 则有  $\begin{cases} 5+5\lambda>0, \\ 4+7\lambda>0, \end{cases}$  解得  $\lambda>-\frac{4}{7}$ .

故  $\lambda$  的取值范围为  $(-\frac{4}{7}, +\infty)$ .

21.(1)解:由题意, 得  $M(0, \frac{1}{2}), N(2, \frac{1}{2})$ .

所以  $\overrightarrow{MP}=(t, \frac{1}{2}), \overrightarrow{NP}=(t-2, \frac{1}{2})$ .

因为  $MP\perp NP$ , 所以  $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{NP}=(t-2)\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=0$ , 解得  $t=\frac{2\pm\sqrt{3}}{2}$ .

(2)证明:设  $R(x, y)$ , 则  $\overrightarrow{MR}=(x, y-\frac{1}{2})$ .

因为  $\overrightarrow{MP}$  与  $\overrightarrow{MR}$  共线, 所以  $t(y-\frac{1}{2})-\frac{1}{2}x=0$ . ①

又  $\overrightarrow{ON}=(2-t, \frac{1}{2})$ ,  $\overrightarrow{NR}=(x-2, y-\frac{1}{2})$ .  $\overrightarrow{ON}$  与  $\overrightarrow{NR}$  共线, 所以  $(2-t)(y-\frac{1}{2})-\frac{1}{2}(x-2)=0$ . ②

联立①②, 解得  $x=\frac{$