

一、选择题

1.D

2.C

提示:若两点确定的直线与已知平面垂直,则过这两点有无数个平面与已知平面垂直;否则有且只有一个.

3.C

提示:由 $AD \perp BC, BD \perp AD \Rightarrow AD \perp$ 平面 BCD . 因为 $AD \not\subset$ 平面 ADC , 所以平面 $ADC \perp$ 平面 BCD .

4.D

提示:根据二面角的平面角的定义解题.

5.D

提示:取 BC 的中点 E , 连接 A_1E, AE , 可得 $A_1E \perp BC, AE \perp BC$, 则 $\angle A_1EA$ 为二面角 A_1-BC-A 的平面角. 设 $AA_1 = a$, 则 $AE = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, 所以 $\tan \angle A_1EA =$

$$\frac{AA_1}{AE} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

6.C

7.B

8.C

9.B

10.D

提示:连接 BC . 因为 $BD \perp AB$, 且 $\beta \perp \alpha$, 所以 $BD \perp \alpha$, 则 $BD \perp BC$.

$$\text{在 Rt}\triangle BAC \text{ 中, } BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 5.$$

$$\text{在 Rt}\triangle CBD \text{ 中, } CD = \sqrt{BC^2 + BD^2} = 13.$$

11.B

提示:由 $PH \perp$ 平面 ABC , 且点 P 到 $\triangle ABC$ 的三边的距离相等, 知点 H 到三边的距离相等, 所以点 H 是 $\triangle ABC$ 的内心.

12.C

提示: $BC \perp AC, BC \perp PA \Rightarrow BC \perp$ 平面 $PAC \Rightarrow BC \perp PC \Rightarrow \angle PCB = 90^\circ$. 故选 C.

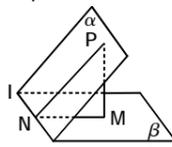
二、填空题

13.垂直

提示:由条件可知,这条直线和三角形所在平面垂直,故和三角形的第三边也垂直.

14.30°

提示:如图所示,过点 P 作 $PM \perp \beta$, 垂足为 M , 作 $PN \perp l$, 垂足为 N , 连接 MN , 则 $l \perp$ 平面 PNM , 所以 $l \perp MN$, 所以 $\angle PNM$ 就是二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角. 在 $\text{Rt}\triangle PMN$ 中, $PN=2PM$, 所以 $\angle PNM=30^\circ$, 即二面角 $\alpha-l-\beta$ 的度数为 30° .



(第14题图)

15.①③

提示:①③能保证这条直线垂直于

该平面内的两条相交直线,②④中的两条直线可能是平行的.

16.若 $a \perp \alpha$ 且 $a \not\subset \beta$, 则 $\alpha \perp \beta$ (或:若 $a \perp \alpha$ 且 $a \parallel \beta$, 则 $\alpha \perp \beta$. 答案不唯一)

三、解答题

17.证明:连接 AC, BD ,

则 O 是 AC, BD 的中点.

因为四边形 $ABCD$ 是正方形,

所以 $AC \perp BD$.

因为 $BB_1 \perp$ 平面 $ABCD$,

$AC \not\subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $AC \perp BB_1$.

又因为 $BO \cap BB_1 = B$,

所以 $AC \perp$ 平面 BB_1O .

因为 EF 是 $\triangle ABC$ 的中位线,

所以 $EF \parallel AC$.

所以 $EF \perp$ 平面 BB_1O .

18.证明:因为 $PA \perp$ 平面 ABC ,

所以 $PA \perp BC$.

因为 AB 是 $\odot O$ 的直径,

所以 $AC \perp BC$.

而 $PA \cap AC = A$, 所以 $BC \perp$ 平面 PAC .

又因为 $AE \not\subset$ 平面 PAC ,

所以 $BC \perp AE$.

因为 $PC \perp AE$, 且 $PC \cap BC = C$,

所以 $AE \perp$ 平面 PBC .

又 $PB \not\subset$ 平面 PBC , 所以 $AE \perp PB$.

19.证明:(1)连接 AC_1 , 与 A_1C 交于点 E , 连接 DE .

由三棱柱的定义, 可知侧面 AA_1C_1C 是平行四边形, 所以 E 为 AC_1 的中点. 又 D 是 AB 的中点, 所以 $DE \parallel BC_1$.

因为 $DE \not\subset$ 平面 A_1DC , $BC_1 \not\subset$ 平面 A_1DC , 所以 $BC_1 \parallel$ 平面 A_1DC .

(2)连接 A_1B . 因为侧面 ABB_1A_1 为菱形, 且 $\angle A_1AB = 60^\circ$, 所以 $\triangle A_1AB$ 是等边三角形. 所以 $AB \perp A_1D$.

因为 $AC = BC$, 所以 $AB \perp CD$.

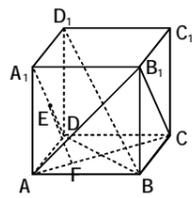
又 $A_1D \cap CD = D$,

所以 $AB \perp$ 平面 A_1DC .

又 $AB \not\subset$ 平面 ABC ,

所以平面 $A_1DC \perp$ 平面 ABC .

20.证明:如图所示, 连接 AB_1, B_1C, BD .



(第20题图)

因为 $DD_1 \perp$ 平面 $ABCD, AC \not\subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $DD_1 \perp AC$.

又 $AC \perp BD, BD \cap DD_1 = D$,

所以 $AC \perp$ 平面 BDD_1 ,

所以 $AC \perp BD_1$.

同理可证 $B_1C \perp BD_1$.

又 $AC \cap B_1C = C$,

所以 $BD_1 \perp$ 平面 AB_1C .

因为 $EF \perp A_1D, A_1D \parallel B_1C$, 所以 $EF \perp B_1C$.

又 $EF \perp AC, B_1C \cap AC = C$,

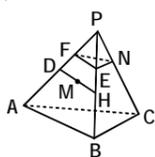
所以 $EF \perp$ 平面 AB_1C .

所以 $EF \parallel BD_1$.

21.解:在 PC 上任取一点 N , 过点 N 在平面 PBC 内作 PC 的垂线交 PB 于 E , 过点 N 在平面 PAC 内作 PC 的垂线交 PA 于 F , 连接 EF , 过点 M 在平面 PAB 内作 EF 的平行线分别交 PA, PB 于 D, H , 则 DH 即为所求. 证明如下:

由作法知 PC 垂直于平面 NEF , 所以 $PC \perp EF$.

又 $DH \parallel EF$, 所以 $DH \perp PC$.



(第21题图)

22.(1)证明:因为在菱形 $ABCD$ 中, $\angle DAB = 60^\circ, G$ 为 AD 的中点, 所以 $BG \perp AD$.

又平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD, BG \not\subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $BG \perp$ 平面 PAD .

(2)解:连接 PG .

因为 $\triangle PAD$ 为正三角形, G 为 AD 的中点, 所以 $PG \perp AD$.

由(1)知 $BG \perp AD, PG \cap BG = G$,

所以 $AD \perp$ 平面 PGB .

因为 $AD \parallel BC$,

所以 $BC \perp$ 平面 PGB .

所以 $BC \perp PB, BC \perp BG$.

所以 $\angle PBG$ 为二面角 $A-BC-P$ 的平面角.

$$\text{在 } \triangle PAD \text{ 中, } PG = \frac{\sqrt{3}}{2}a;$$

$$\text{在菱形 } ABCD \text{ 中, } BG = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

所以在 $\text{Rt}\triangle PGB$ 中, $\angle PBG = 45^\circ$, 即二面角 $A-BC-P$ 的大小是 45° .

(3)解:当 F 为 PC 的中点时, 满足平面 $DEF \perp$ 平面 $ABCD$. 证明如下:

取 PC 的中点 F , 连接 DE, EF, DF .

在 $\triangle PBC$ 中, E, F 分别为 BC, PC 的中点, 则 $FE \parallel PB$.

在菱形 $ABCD$ 中, 易证 $GB \parallel DE$.

而 $FE \not\subset$ 平面 $DEF, DE \not\subset$ 平面 DEF ,

所以 $PB \parallel$ 平面 $DEF, GB \parallel$ 平面 DEF .

又 $PB \cap GB = B$,

所以平面 $PGB \parallel$ 平面 DEF .

易证 $PG \perp$ 平面 $ABCD$,

而 $PG \not\subset$ 平面 PGB ,

所以平面 $PGB \perp$ 平面 $ABCD$.

故平面 $DEF \perp$ 平面 $ABCD$.

第1期

第3-4版同步周测参考答案

一、选择题

1.D

2.D

3.D

4.B

提示:在题中所给图形中,包含范围最小的是正方体,其次是正四棱柱,然后依次是长方体、直四棱柱、棱柱,故选 B.

5.C

6.A

7.B

8.A

9.B

10.D

11.A

提示:将侧面展开,最短距离为长、宽分别为 $2\pi, 4$ 的矩形的对角线长.

12.C

提示:由主视图知小正方体共 3 列,且左侧高一层,中间最高两层,右侧最高两层.结合左视图可知搭成这个几何体至少需要小正方体的个数为 $3+2+1=6$.

二、填空题

$$13. \frac{\sqrt{2}}{4} \quad 14. 18$$

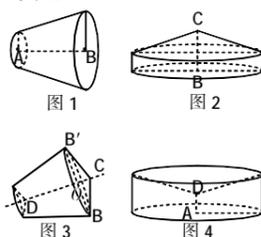
15. 正方体、长方体、球

16. ①③④⑤

提示:因为有六个面,所以①正确;因为侧棱的延长线不能交于一点,所以②不正确;把几何体放倒就会发现③正确;由切割法可知④正确;由补形法可知⑤正确.

三、解答题

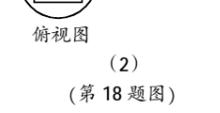
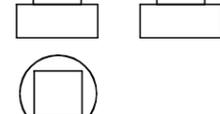
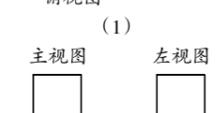
17.解:以 AB 为轴旋转所得几何体是一个圆台,如图 1;以 BC 为轴旋转所得几何体是由一个圆柱和一个圆锥拼接而成,如图 2;以 CD 为轴旋转所得几何体是一个圆台挖去一个小圆锥后,再与一个大圆锥拼接而成,如图 3;以 DA 为轴旋转所得几何体是一个圆柱挖去一个圆锥而成,如图 4.



(第17题图)

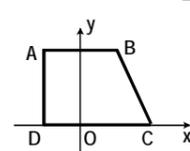
18.解:三视图如图所示.

主视图 左视图



(第18题图)

19.解:如图,建立平面直角坐标系 xOy , 在 x 轴上截取 $OD = O'D' = 1, OC = O'C' = 2$, 在过点 D 且与 y 轴平行的直线上截取 $DA = 2D'A' = 2$, 在过点 A 且与 x 轴平行的直线上截取 $AB = A'B' = 2$, 连接 BC , 即得到了原图形. 易知原四边形 $ABCD$ 是直角梯形, 上底 $AB = 2$, 下底 $CD = 3$, 高 $AD = 2$, 所以其面积 $S = \frac{(2+3) \times 2}{2} = 5$.



(第19题图)

20.解:由三视图可知该几何体的下方是一个四棱柱,上方是一个四棱锥,并且底面重合.

(1)画轴.如图 1 所示,画出 x 轴、 y 轴、 z 轴,三轴交于点 O , 使 $\angle xOy = 45^\circ, \angle xOz = 90^\circ$.

(2)画棱柱的底面.以 O 为中点,在 x 轴上画 $MN = 2$, 在 y 轴上画 $EQ = 1$, 分别过点 M, N 作 y 轴的平行线,过点 E, Q 作 x 轴的平行线,设它们的交点分别为 A, B, C, D , 则四边形 $ABCD$ 就是该棱柱的下底面.

(3)画棱柱的侧棱.分别以 A, B, C, D 四个顶点为起点作平行于 z 轴, 长

度为 1 的线段,得四条侧棱 AA', BB', CC', DD' , 顺次连接 A', B', C', D' .

(4)画四棱锥的顶点.在 z 轴上截取线段 OP , 使 $OP = 2$.

(5)成图.连接 PA', PB', PC', PD' , 擦去辅助线,将被遮挡部分改为虚线,可得图 2 所示的直观图.

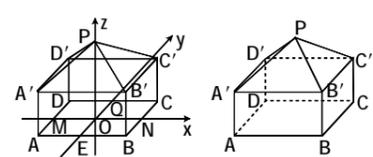
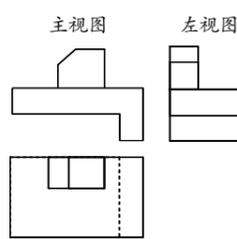


图1 图2

(第20题图)

21.解:由于主视图正确,观察可知左视图少画两条轮廓线,俯视图少画三条看得见的轮廓线,一条分界线和一条看不见的轮廓线,补上后如图所示.



(第21题图)

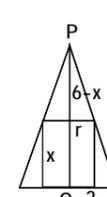
22.解:(1)如图所示,设内接圆柱的底面圆半径为 r .

$$\text{由已知,得 } \frac{6-x}{6} = \frac{r}{2},$$

$$\text{所以 } r = \frac{6-x}{3}.$$

$$\text{故 } S = \frac{2(6-x)}{3} \cdot x = -\frac{2}{3}x^2 + 4x,$$

$$\text{即 } S = -\frac{2}{3}x^2 + 4x, \text{ 其中 } 0 < x < 6.$$



(第22题图)

$$(2) \text{ 当 } x = -\frac{4}{2 \times (-\frac{2}{3})} = 3 \text{ 时, } S \text{ 最大.}$$

一、选择题

- 1.C
2.A
提示:由公理 1 可知选 A.

3.B
提示:自行车前后轮与撑脚分别接触地面,这三个接触点不在同一条直线上,故选 B.

4.A
提示:设直线 EF 与 GH 的交点为 P,则 P ∈ EF ⊄ 平面 ADB,且 P ∈ GH ⊄ 平面 CDB.因为平面 ADB ∩ 平面 CDB = DB,所以 P ∈ DB,即交点在直线 DB 上.

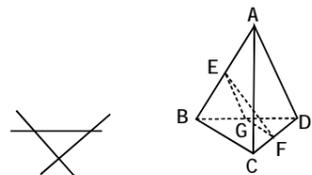
5.C
提示:A, B 中直线 PQ 与 RS 平行; D 中直线 PQ 与 RS 相交.

6.A
提示:如果一条直线上有一个点在平面外,那么该直线与平面平行或相交,从而可知 A 正确.

7.D
提示:由 m ⊄ α, A ∈ m, A ∈ α, 可知 m 与 α 相交.又 n ⊄ α, 所以 m 与 n 一定不平行.故选 D.

- 8.C
9.C

提示:两两平行且不共面的三条直线中,每两条直线可以确定一个平面,则三条直线可以确定三个平面,即 m=3.这三个平面把空间分成七个部分(把平面看作直线,空间的分割情况如图所示),即 n=7.



(第 9 题图)

(第 10 题图)

10.B
提示:如图,取 BD 的中点 G,连接 EG, FG, 则 ∠EFG (或其补角) 为异面直线 EF 与 BC 所成的角.

因为 $EG = \frac{1}{2}AD, GF = \frac{1}{2}BC, AD=BC,$
所以 $EG=GF.$
因为 $AD \perp BC, EG \parallel AD, GF \parallel BC,$
所以 $EG \perp GF.$
所以 $\triangle EGF$ 为等腰直角三角形.
所以 $\angle EFG = 45^\circ.$

11.A
提示:当 $l \cap \alpha = P$ 时, a, b, c, ... 是过点 P 的直线.

当 $l \parallel \alpha$ 时, 过 l 作平面 β , 使 $\beta \cap \alpha = a$, 则 l 与 a 共面.

由 $l \parallel \alpha$, 知 l 与 α 无公共点. 又 $a \subset \alpha$, 所以 l 与 a 无公共点. 所以 $l \parallel a$.

同理, $l \parallel b, l \parallel c, \dots$ 故 $a \parallel b \parallel c \dots$
故选 A.

12.C
提示:借助长方体模型判断可知③错误, ①②④正确.

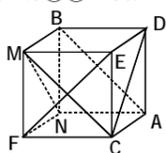
二、填空题
13.75° 或 105°

14.4
提示:当四点共面时能确定 1 个平面;若这四点不共面,则任意三点可确定 1 个平面,故可确定 4 个平面.

15.(1)30°; (2)60°
提示:(1)因为 $A_1F_1 \parallel B_1E_1, B_1E_1 \parallel BE,$ 所以 $A_1F_1 \parallel BE,$ 所以 $\angle EBD$ (或其补角) 是异面直线 A_1F_1 与 BD 所成的角. 由正六边形的性质可知 $\angle EBD = 30^\circ.$

(2)因为 $B_1E_1 \parallel BE,$ 所以直线 C_1F_1 与 B_1E_1 相交所成的锐角(或直角)是异面直线 C_1F_1 与 BE 所成的角. 由正六边形的性质可知该角为 60°.

16.①③
提示:把展开图还原后如图所示,则 $AB \perp EF, EF$ 与 MN 为异面直线. $AB \parallel CM, MN \perp CD$, 只有 ①③ 正确.



(第 16 题图)

三、解答题
17.解:(1)错误. 因为点 A ∈ 平面 $CC_1B_1B,$ 所以直线 $AC_1 \not\subset$ 平面 $CC_1B_1B.$

(2)正确. 因为 $O \in$ 直线 $AC \subset$ 平面 $AA_1C_1C, O \in$ 直线 $BD \subset$ 平面 $BB_1D_1D,$ 且 $O_1 \in$ 直线 $A_1C_1 \subset$ 平面 $AA_1C_1C, O_1 \in$ 直线 $B_1D_1 \subset$ 平面 $BB_1D_1D,$ 所以平面 AA_1C_1C 与平面 BB_1D_1D 的交线为 $OO_1.$

(3)(4)都正确. 因为 $AD \parallel B_1C_1,$ 所以 A, B, C, D 共面.

18.证明:由公理 2, 可知点 A, B, D 确定一个平面, 设其为 $\alpha,$ 则 $E \in AB \subset \alpha, F \in AD \subset \alpha,$ 所以 $EF \subset \alpha,$ 即 $m \subset \alpha.$ 又 $G \in m,$ 所以 $G \in \alpha.$ 所以 $BG \subset \alpha.$ 因为 $C \in BG,$ 所以 $C \in \alpha.$ 所以四边形 ABCD 是平面四边形.

19.证明:因为 E, H 是 $\triangle ABD$ 的中位线, 所以 $EH \parallel BD,$ 且 $EH = \frac{1}{2}BD.$

因为 $\frac{CF}{CB} = \frac{CG}{CD} = \frac{2}{3},$

所以 $FG \parallel BD,$ 且 $FG = \frac{2}{3}BD.$

所以 $EH \parallel FG,$ 且 $EH \neq FG,$ 故四边形 EFGH 为梯形, 且直线 EF 与 GH 必相交.

设交点为 P, 因为 $EF \subset$ 平面 ABC, GH ⊄ 平面 ACD.

所以 P ∈ 平面 ABC, 且 P ∈ 平面 ACD. 又平面 ABC ∩ 平面 ACD = AC, 所以 P ∈ AC.

所以直线 EF, GH, AC 交于一点.

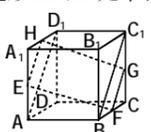
20.证明:连接 $BC_1, AD_1,$ 如图. 因为 E, F, G, H 分别是 AA_1, BC, CC_1, DA_1 的中点,

所以 $EH \parallel \frac{1}{2}AD_1, FG \parallel \frac{1}{2}BC_1.$

因为 $AB \parallel D_1C_1,$ 所以四边形 ABC_1D_1 是平行四边形.

所以 $AD_1 \parallel BC_1.$

所以 $EH \parallel FG.$ 所以四边形 EFGH 是平行四边形.



(第 20 题图)

21.证明:原命题即:已知 $a \parallel \alpha, A \in \alpha, A \in b, b \parallel a,$ 求证: $b \subset \alpha.$ 证明如下:

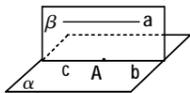
如图, 因为 $a \parallel \alpha, A \in \alpha,$ 所以 $A \notin a.$ 所以由 A 和 a 可确定一个平面 $\beta,$ 则 $A \in \beta.$

所以 α 与 β 相交于过点 A 的直线. 设 $\alpha \cap \beta = c,$ 则 $A \in c.$

由 $a \parallel \alpha,$ 知 a 与 α 无公共点, 而 $c \subset \alpha,$ 所以 a 与 c 无公共点.

因为 $a \not\subset \beta, c \subset \beta,$ 所以 $a \parallel c.$ 又 $a \parallel b,$ 则 b 与 c 平行或重合.

因为 $A \in b, A \in c,$ 所以 b 与 c 重合. 所以 $b \subset \alpha.$



(第 21 题图)

22.解:(1)F 是 A_1D_1 的中点. 理由如下: 分别取 A_1D_1, AD 的中点 F, G, 连接 BG, FG, FB_1, DF (如图 1).

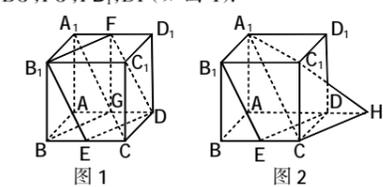


图 1

图 2

(第 22 题图)

在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 易证四边形 BEDG 和四边形 BB_1FG 都是平行四边形,

所以 $DE \parallel BG, BG \parallel B_1F.$ 所以 $DE \parallel B_1F,$ 所以 B_1, E, D, F 四点共面.

所以 $A_1D_1 \cap$ 平面 $B_1ED = F.$

(2)如图 2, 过点 C 作 $CH \parallel DE,$ 交 AD 的延长线于点 H, 连接 $A_1H,$ 则 $\angle A_1CH$ (或其补角) 是异面直线 A_1C 与 DE 所成的角.

因为 $A_1C = \sqrt{2^2+2^2+2^2} = 2\sqrt{3}, CH = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}, A_1H = \sqrt{2^2+(2+1)^2} = \sqrt{13},$ 所以 $A_1C^2 + CH^2 \neq A_1H^2,$ 所以 $\angle A_1CH$ 不是直角.

第 3 期

第 3-4 版同步周测参考答案

一、选择题

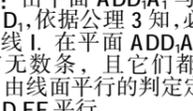
- 1.D
2.A

3.C
提示:由面面平行的性质可知截面四边形是矩形.

4.B
提示:由已知条件,可知 $DE \parallel BC,$ 则 $DE \parallel$ 平面 ABC. 又 $DE \subset$ 平面 DEFG, 平面 DEFG ∩ 平面 ABC = GF, 所以 $DE \parallel GF.$ 所以 $GF \parallel BC.$ 所以 $GF \neq BC,$ 即 $GF \neq DE,$ 所以直线 DG 与 EF 必相交.

5.D
提示:由平面 ADD_1A_1 与平面 D, EF 有公共点 $D_1,$ 依据公理 3 知, 必有过该点的公共直线 l. 在平面 ADD_1A_1 内与 l 平行的线有无数条, 且它们都不在平面 D, EF 内, 由线面平行的判定定理知它们都与平面 D, EF 平行.

6.C
提示:如图, 过点 P 作 AC 的平行线 PD 交 VC 于点 D, 作 VB 的平行线交 AB 于点 F, 过点 D 作 VB 的平行线交 BC 于点 E, 连接 EF, 由 $PF \parallel DE,$ 故 P, D, E, F 共面, 且平面 PDEF 与 VB 和 AC 都平行, 易知四边形 PDEF 是平行四边形, 故选 C.



(第 6 题图)

7.A
提示:平面 EFH 即平面 EFDC. 易证 B, G // EC, 所以 B, G // 平面 EFDC. 故选 A.

8.C
提示:由平面平行的性质定理, 易证 $\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}.$ 所以 $AC = \frac{DF}{DE} \times AB = \frac{5}{2} \times 6 = 15.$

9.C
提示:侧面有 3 对互相平行, 两底面互相平行, 共 4 对.

10.D
提示:作平面 $\gamma \parallel \alpha, \gamma \parallel \beta,$ 且平面 γ 到平面 α 的距离等于平面 γ 到平面 β 的距离, 则不论 A, B 分别在平面 α, β 内如何移动, 所有的动点 C 都在平面 γ 内, 故选 D.

11.C
12.C
提示:连接 AC, 交 BQ 于点 N, 连接 MN. 因为 $PA \parallel$ 平面 MQB, $PA \subset$ 平面 PAC, 平面 PAC ∩ 平面 MQB = MN, 所以 $PA \parallel MN.$ 所以 $\frac{PM}{PC} = \frac{AN}{AC} = t.$ 连接 BD, 交 AC 于点 O. 易知 AO, BO 都是等边 $\triangle ABD$ 的中线, 所以 N 是等边 $\triangle ABD$ 的重心. 令菱形 ABCD 的边长为 a, 可得 $AN = \frac{\sqrt{3}}{3}a, AC = \sqrt{3}a$ 所以 $t = \frac{1}{3}.$

二、填空题
13. $b \parallel \alpha$ 或 $b \not\subset \alpha$

14.12

提示:设 AB, A, B, C, D, CD 的中点分别为 E, F, G, H, 连接 EF, FG, GH, HE, EG, FH, 这 6 条直线都与平面 BCC_1B_1 平行; 顺次连接四边形 ADD_1A_1 各边中点得到一个四边形, 该四边形的四条边及两条对角线所在直线都与平面 BCC_1B_1 平行, 故共有 12 条.

15.平行
提示:因为过 A_1, C_1, B 的平面与底面 A, B, C, D_1 的交线为 $A_1C_1,$ 又正方体的两底面互相平行, 则由两个平面平行的性质定理知 $l \parallel A_1C_1.$

16. $2\sqrt{6}$
提示:根据题意可知, 这只蚂蚁行走的轨迹所围成的图形即为正方体的过 B, 且与平面 A, BE 平行的截面. 分别取 A_1D_1, BC 的中点 F, G, 连接 $FB_1, FD, GB_1, GD.$ 易得 $GD \parallel BE, FD \parallel A_1E,$ 又 $GD \cap FD = D,$ 所以平面 $FDGB_1 \parallel$ 平面 A, BE. 故四边形 $FDGB_1$ 即为满足要求的截面. 由正方体的棱长为 2, 可得四边形 $FDGB_1$ 为菱形, 连接 $FG, B_1D,$ 则 $FG = 2\sqrt{2}, B_1D = 2\sqrt{3},$ 故 $S = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{3} = 2\sqrt{6}.$

三、解答题
17.证明:连接 BD 与 AC 相交于 O, 连接 EO, 如图.



(第 17 题图)

在 $\square ABCD$ 中, O 是 BD 的中点, 又 E 是 PD 的中点, 所以 $EO \parallel PB.$

因为 $PB \subset$ 平面 AEC, $EO \not\subset$ 平面 AEC, 所以 $PB \parallel$ 平面 AEC.

18.证明:由已知得平面 ABE // 平面 DCC, F, 又平面 AEC, F ∩ 平面 ABE = AE, 平面 AEC, F ∩ 平面 DCC, F = C, F, 所以 $AE \parallel C, F$ 同理可得 $AF \parallel C, E,$ 所以四边形 AEC, F 是平行四边形.

19.解:因为 $A \notin \alpha,$ 所以 A, a 确定一个平面, 设为 $\beta.$ 因为 $B \in \alpha,$ 所以 $B \in \beta.$ 所以 $B \in \beta \cap \alpha,$ 又 $A \in \beta,$ 所以 $AB \subset \beta.$ 同理 $AC \subset \beta, AD \subset \beta.$ 因为点 A 与直线 a 在 α 的异侧, 所以 β 与 α 相交, 即平面 ABD 与 α 相交, 交线为 EG. 因为 $BD \parallel \alpha, BD \subset$ 平面 ABD, 平面 $ABD \cap \alpha = EG,$ 所以 $BD \parallel EG,$ 所以 $\frac{EG}{BD} = \frac{AG}{AD} = \frac{AF}{AC},$ 所以 $EG = \frac{AF}{AC} \cdot BD = \frac{5}{9} \times 4 = \frac{20}{9}.$

20.证明:如图所示, 在直线 a 上任取一点 P, 过点 P 作直线 $b' \parallel b,$ 则 a 与 b' 可确定一个平面, 记为 $\alpha.$ 因为 $b' \not\subset \alpha, b \not\subset \alpha,$ 所以 $b \parallel \alpha.$



(第 20 题图)

在直线 b 上任取一点 Q, 过点 Q 作直线 $a' \parallel a,$ 则 a' 与 b 可确定一个平面, 记为 $\beta.$

因为 $a \not\subset \alpha, a' \not\subset \alpha,$ 所以 $a' \parallel \alpha.$ 又 $a' \cap b = Q,$ 所以 $\alpha \parallel \beta.$

21.证明:(1)连接 AE, 则 AE 必过 DF 与 GN 的交点 O.

连接 MO, 则 MO 为 $\triangle ABE$ 的中位线, 所以 $MO \parallel BE.$

又 $MO \not\subset$ 平面 DMF, $BE \subset$ 平面 DMF, 所以 $BE \parallel$ 平面 DMF.

(2)因为 N, G 分别为 $\square ADEF$ 的边 AD, EF 的中点, 所以 $NG \parallel DE.$

又 $NG \not\subset$ 平面 MNG, $DE \subset$ 平面 MNG, 所以 $DE \parallel$ 平面 MNG.

因为 MN 为 $\triangle ABD$ 的中位线, 所以 $MN \parallel BD.$

又 $MN \not\subset$ 平面 MNG, $BD \subset$ 平面 MNG, 所以 $BD \parallel$ 平面 MNG.

又 $DE \cap BD = D,$ 所以平面 BDE // 平面 MNG.

22.(1)证明:取 CD 的中点 M, 连接 PM, QM, 如图所示.

因为 QM 是 $\triangle D_1DC$ 的中位线, 所以 $QM \parallel DD_1.$

又 $DD_1 \subset$ 平面 PQM, $QM \not\subset$ 平面 PQM, 所以 $DD_1 \parallel$ 平面 PQM.

易证四边形 APMD 是平行四边形, 所以 $PM \parallel AD.$

又 $AD \subset$ 平面 PQM, $PM \not\subset$ 平面 PQM, 所以 $AD \parallel$ 平面 PQM.

因为 $AD \cap DD_1 = D,$ 所以平面 $ADD_1A_1 \parallel$ 平面 PQM. 又 $PQ \subset$ 平面 PQM, 所以 $PQ \parallel$ 平面 $ADD_1A_1.$



(第 22 题图)

(2)解:过点 B 作 PD 的平行线, 交 CP 于点 F, 则 $EF \parallel$ 平面 DPQ. 证明如下: 连接 EB, QE, 如图所示.

因为 Q, E 分别为 CD_1, CC_1 的中点, 所以 $QE \parallel \frac{1}{2}C_1D_1.$

又 P 为 AB 的中点, 且 $AB \parallel C_1D_1,$ 所以 $QE \parallel PB.$

所以四边形 PBEQ 是平行四边形. 所以 $BE \parallel PQ.$

又 $BE \subset$ 平面 DPQ, $PQ \subset$ 平面 DPQ, 所以 $BE \parallel$ 平面 DPQ.

因为 $BF \parallel PD,$ 且 $BF \subset$ 平面 DPQ, $PD \not\subset$ 平面 DPQ, 所以 $BF \parallel$ 平面 DPQ.

因为 $BE \cap BF = B,$ 所以平面 BEF // 平面 DPQ. 又 $EF \subset$ 平面 BEF, 所以 $EF \parallel$ 平面 DPQ.

第8期
第3-4版同步周测参考答案

一、选择题

1.D 2.D 3.D 4.B

5.C

提示:由直线 $l_1: y = ax - 2a + 5$,可得 $y - 5 = a(x - 2)$,由点斜式可知该直线过定点 $A(2, 5)$,则点 A 到直线 l_2 的距离为

$$\frac{|2 - 10 + 3|}{\sqrt{1 + (-2)^2}} = \sqrt{5}.$$

6.C 7.A 8.D 9.D 10.D

11.D

提示:由题意知点 $M(x_0, y_0)$ 到直线 $x + 3y - 2 = 0$ 与直线 $x + 3y + 6 = 0$ 的距离相等,

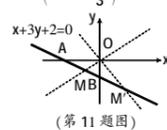
$$\text{所以 } \frac{|x_0 + 3y_0 - 2|}{\sqrt{10}} = \frac{|x_0 + 3y_0 + 6|}{\sqrt{10}}.$$

化简,得 $x_0 + 3y_0 + 2 = 0$.又 $x_0 > -2$,所以点 M 在射线 $x + 3y + 2 = 0(x > -2)$ 上.

由斜率的计算公式,可知 $\frac{y_0}{x_0}$ 表示点 M 与原点 O 连线的斜率 k .

由下图可知,当点 M 在线段 AB 内(不包括端点 B)时, $k > 0$;当点 M 在射线 BM 上(不包括端点 B)时, $k < -\frac{1}{3}$,所以 $\frac{y_0}{x_0}$

的取值范围是 $(-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (0, +\infty)$.



12.A

提示:设 $C(m, n)$,则 $\triangle ABC$ 的重心为 $G(\frac{2+m}{3}, \frac{4+n}{3})$,代入欧拉线方程中,整理得 $m - n + 4 = 0$.

由 $A(2, 0), B(0, 4)$,可得 AB 的垂直平分线的方程为 $x - 2y + 3 = 0$.

与欧拉线的方程联立,解得 $x = -1, y = 1$,即 $\triangle ABC$ 的外心为 $O(-1, 1)$.

由 $|OC|^2 = |OA|^2$,得 $(m+1)^2 + (n-1)^2 = 3^2 + 1^2 = 10$.

联立①②,解得 $m = -4, n = 0$,或 $m = 0, n = 4$.

当 $m = 0, n = 4$ 时 B, C 重合,舍去,所以顶点 C 的坐标是 $(-4, 0)$.

二、填空题

13. $(-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$

14.2 或 $\sqrt{2}$

提示:若 AB 为斜边,则点 O 到直线 $y = x + m$ 的距离等于1,由 $\frac{|m|}{\sqrt{2}} = 1$,解得

$m = \sqrt{2}$;若 OA 或 OB 为斜边,则点 O 到直线 $y = x + m$ 的距离等于 $\sqrt{2}$,由 $\frac{|m|}{\sqrt{2}} =$

$\sqrt{2}$,解得 $m = 2$.故 $m = 2$ 或 $m = \sqrt{2}$.

15. $2x - y + 1 = 0$

提示:由题意知, l 必在 l_1 与 l_2 之间,设 $l: 2x - y + c = 0$,则 $c = \frac{3 + (-1)}{2} = 1$.故直线 l 的方程为 $2x - y + 1 = 0$.

16. $\sqrt{13}$

提示: $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 4x + 8} = \sqrt{(x-0)^2 + (0+1)^2} + \sqrt{(x-2)^2 + (0-2)^2}$.令 $P(x, 0), A(0, -1), B(2, 2)$,则 $f(x) = |PA| + |PB|$.由平面几何知识可知, $|PA| + |PB| \geq |AB| = \sqrt{13}$.故 $f(x)$ 的最小值是 $\sqrt{13}$.

三、解答题

17.解:若 $m = 0$,则 $l_1: x = -6, l_2: 2x - 3y = 0$,此时两直线相交;

若 $m \neq 0$,由 $\frac{m-2}{1} = \frac{3}{m}$,解得 $m = -1$,或 $m = 3$;由 $\frac{3}{m} = \frac{2m}{6}$,解得 $m = \pm 3$.

(1)当 $m \neq -1$ 且 $m \neq 3$ 时, $\frac{m-2}{1} \neq \frac{3}{m}$,两直线相交;

(2)当 $m = -1$ 时, $\frac{m-2}{1} = \frac{3}{m} = \frac{2m}{6}$,两直线平行;

(3)当 $m = 3$ 时, $\frac{m-2}{1} = \frac{3}{m} = \frac{2m}{6}$,两直线重合.

18.(1)证明:由两点间的距离公式,计算得 $|AB|^2 = 2, |AC|^2 = 18, |BC|^2 = 20$.所以 $|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2$.所以 $\angle BAC = 90^\circ$.即 $\triangle ABC$ 是直角三角形.

(2)解:结合(1)可得 $|AB| = \sqrt{2}, |AC| = 3\sqrt{2}$,

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2} |AB| \cdot |AC| = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 3$.

19.解:(1)当 $l_1 \perp l_2$ 时,有 $(-2) \times (-\frac{a}{4}) = -1$,解得 $a = -2$.

由 $\begin{cases} 2x + y + 4 = 0, \\ -2x + 4y + 1 = 0, \end{cases}$ 解得 $x = -\frac{3}{2}, y = -1$.

所以 l_1 与 l_2 的交点坐标为 $(-\frac{3}{2}, -1)$.

(2)当 $l_1 // l_2$ 时,有 $-2 = -\frac{a}{4}$,解得 $a = 8$.

由两平行线间的距离公式,得 l_1 与 l_2 间的距离 $d = \frac{|16-1|}{\sqrt{8^2+4^2}} = \frac{3\sqrt{5}}{4}$.

20.解:(1)直线 $l_1: 2x - y + a = 0$ 即 $-4x + 2y - 2a = 0$,所以 $\frac{|-2a-1|}{\sqrt{16+4}} = \frac{7\sqrt{5}}{10}$,解得 $a = 3$,或 $a = -4$.又 $a > 0$,所以 $a = 3$.

(2)假设存在点 P ,设其坐标为 (m, n) ,则 $m > 0, n > 0$.

由点 P 满足条件②,可得 $\frac{|2m-n+3|}{\sqrt{4+1}} = \frac{1}{2}, \frac{|4m-2n-1|}{\sqrt{16+4}}$

化简,得 $4m - 2n + 13 = 0$,或 $12m - 6n + 11 = 0$.

由点 P 满足条件③,可得

$$\frac{|2m-n+3|}{\sqrt{4+1}} = \frac{|m+n-1|}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{5}.$$

化简,得 $m - 2n + 4 = 0$,或 $3m + 2 = 0$.由 $m > 0$,舍去 $3m + 2 = 0$.

联立 $4m - 2n + 13 = 0$ 与 $m - 2n + 4 = 0$,解得 $m = -3, n = \frac{1}{2}$;

联立 $12m - 6n + 11 = 0$ 与 $m - 2n + 4 = 0$,解得 $m = \frac{1}{9}, n = \frac{37}{18}$.

又 $m > 0$,所以点 P 的坐标为 $(\frac{1}{9}, \frac{37}{18})$.

故能找到一点 $P(\frac{1}{9}, \frac{37}{18})$ 同时满足这三个条件.

21.解:设点 P 的坐标为 (x, y) ,由题意有 $\frac{|PM|}{|PN|} = \sqrt{2}$,

$$\text{即 } \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{(x-1)^2 + y^2},$$

整理,得 $x^2 + y^2 - 6x + 1 = 0$.

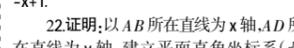
因为点 N 到直线 PM 的距离为1, $|MN| = 2$,所以 $\angle PMN = 30^\circ$.直线 PM 的斜率为 $\pm \frac{\sqrt{3}}{3}$,

故有 $\frac{y}{x+1} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$.

联立①②,解得点 P 的坐标为 $(2 + \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$ 或 $(2 - \sqrt{3}, -1 + \sqrt{3})$ 或 $(2 + \sqrt{3}, -1 - \sqrt{3})$ 或 $(2 - \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3})$.

故直线 PN 的方程为 $y = x - 1$ 或 $y = -x + 1$.

22.证明:以 AB 所在直线为 x 轴, AD 所在直线为 y 轴,建立平面直角坐标系(如图).



设 $AD = 1$,则 $D(0, 1), A(0, 0), E(1, 0), F(2, 0), C(3, 1)$,求得直线 AC 的方程为 $y = \frac{1}{3}x$.直线 DF 的方程为 $x + 2y - 2 = 0$.

联立方程 $\begin{cases} y = \frac{1}{3}x, \\ x + 2y - 2 = 0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = \frac{6}{5}, \\ y = \frac{2}{5}. \end{cases}$

所以点 G 的坐标为 $(\frac{6}{5}, \frac{2}{5})$.

所以直线 EG 的斜率 $k_{EG} = \frac{\frac{2}{5} - 0}{\frac{6}{5} - 1} = 2$.

因为直线 DF 的斜率 $k_{DF} = \frac{1-0}{0-2} = -\frac{1}{2}$,所以 $k_{EG} \cdot k_{DF} = -1$,所以 $EG \perp DF$.

2020-2021 学年

数学·北师大(必修2)答案页第2期

第5期

第3-4版同步周测参考答案

一、选择题

1.B 2.C

3.D

提示:A中底面积相同,但高不同,所以体积不等;B中高度相同,但底面积不同,所以体积不等;C中计算公式不同,所以体积不同.故选D.

4.B 5.B 6.D

7.A

提示:三个侧面都是直角边长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的等腰直角三角形,底面是边长为1的等边三角形.

8.D

提示:设圆台的母线长为 l .由题知,中截面是半径为 $\frac{5+R}{2}$ 的圆面,则

$$\left[\pi \times \frac{1}{2} \times \left(5 + \frac{5+R}{2} \right) \right] : \left[\pi \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{5+R}{2} + R \right) \right] = 1:2,$$

解得 $R = 25$.

9.C

提示:设上底面面积为 S ,则下底面面积为 $4S$.设高为 h ,那么 $V_{A_1-ABC} = \frac{1}{3}Sh$,

$$V_{C-A_1BC} = \frac{4}{3}Sh, V_{B-A_1BC} = \frac{1}{3}(S + \sqrt{S \times 4S} + 4S)h - \frac{1}{3}Sh - \frac{4}{3}Sh = \frac{2}{3}Sh.$$

从而可知选C.

10.C

提示:设体积为 V ,则 $S_{正} = 6\sqrt{3}V^{\frac{2}{3}}, S_{侧} = 2\pi \left(\sqrt{\frac{3V}{2\pi}} \right)^2 + 4\pi \left(\sqrt{\frac{3V}{2\pi}} \right) = 3\sqrt{2\pi}V^{\frac{2}{3}}$,

$S_{侧} = \sqrt[3]{36\pi}V^{\frac{2}{3}}$,比较可得 $S_{侧} < S_{正} < S_{底}$.

11.B

提示:如图所示,将底面 $ABCD$ 展开至四边形 $ABFG$ 位置,使其与四边形 ABC_1D_1 在一个平面内,则 $D_1E + CE$ 的最小值为 $D_1F = \sqrt{GF^2 + D_1G^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$.



12.C

提示:由题意知球的半径 r 是棱柱底面三角形内切圆的半径,可得 $r = 1$,即球的直径为2.又棱柱的高为12,所以加工成

6个球.所以剩余石料的体积为 $\frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times 12 - 6 \times \frac{4}{3}\pi \times 1^3 = 72 - 8\pi$.

$$12 - 6 \times \frac{4\pi \cdot 1^3}{3} = 72 - 8\pi.$$

二、填空题

13. $a^2\pi$

14. 8cm^3

提示:尽可能大的正方体为球的内接正方体,其体对角线的长度等于球的直径,由此易得正方体的棱长为2cm,故体积是 8cm^3 .

15. 80π

提示:设圆台上、下底面的圆心分别为 M, N .球 O 的半径为 R ,当 M, N 在球心 O 的异侧时,如图所示,

则 $OM + ON = 6$,即 $\sqrt{R^2 - 2^2} + \sqrt{R^2 - 4^2} = 6$,解得 $R^2 = 20$.

当 M, N 在球心 O 的同侧时,同理,可解得 R 不存在.

故球 O 的表面积为 $4\pi R^2 = 80\pi$.

16. $\frac{1}{2}\pi r^2(a+b)$

提示:补上一个相同形状的几何体,如图所示,可得底面半径为 r ,高为 $a+b$ 的圆柱.故所求几何体的体积为 $\frac{1}{2}\pi r^2(a+b)$.

17.解:连接 AC 和 BD 交于 O ,连接 SO .作 $SP \perp AB$ 于 P ,连接 OP .

在 $\text{Rt}\triangle SOP$ 中, $SO = \sqrt{7}m, OP = \frac{1}{2}BC = 1m$,所以 $SP = 2\sqrt{2}m$,则 $\triangle SAB$ 的面积是 $\frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}(\text{m}^2)$.

所以四棱锥的侧面积是 $4 \times 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}(\text{m}^2)$,即制造这个塔顶需要 $8\sqrt{2}\text{m}^2$ 铁板.

18.解:过点 F 作 $FO \perp$ 平面 $ABCD$ 于 $O, FM \perp AB$ 于 $M, FN \perp BC$ 于 N ,连接 OM, ON .

则 $ON = \frac{1}{2}(AB - EF) = 1, FN = \sqrt{3}$,所以 $FO = \sqrt{FN^2 - ON^2} = \sqrt{2}$.

又 $OM = \frac{1}{2}BC = 1$,所以 $FM = \sqrt{FO^2 + OM^2} = \sqrt{3}$.

所以此几何体的表面积 $S = \frac{1}{2} \times (2 + 4) \times \sqrt{3} \times 2 + \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 \times 2 + 4 \times 2 = 8 + 8\sqrt{3}$.

19.解:设圆柱底面圆半径为 r ,则母



线长为 $2r$.因为圆柱表面积为 6π ,所以 $6\pi = 2\pi r^2 + 4\pi r^2$,所以 $r = 1$.

因为四棱柱的底面是圆柱底面的内接正方形,所以正方形的边长为 $\sqrt{2}$,所以四棱柱的体积 $V = (\sqrt{2})^2 \times 2 = 4$.

20.解:(1) $S = \frac{1}{3} \times \pi \times 18^2 = 108\pi(\text{cm}^2)$, $S_2 = \frac{2}{3} \times \pi \times 18^2 = 216\pi(\text{cm}^2)$.

(2)设较小圆锥的底面半径为 r_1 ,则有 $2\pi r_1 = \frac{1}{3} \times 2\pi \times 18$,解得 $r_1 = 6$.

所以 $h_1 = \sqrt{18^2 - r_1^2} = 12\sqrt{2}(\text{cm})$.同理可得较大圆锥的底面半径 $r_2 = 12$, $h_2 = \sqrt{18^2 - r_2^2} = 6\sqrt{5}(\text{cm})$.

所以 $h_1 : h_2 = 12\sqrt{2} : 6\sqrt{5} = 2\sqrt{2} : \sqrt{5}$.

21.解:(1)由三视图可知,该几何体是个组合体,其上部分是个三棱锥,其三条侧棱两两垂直;下部分为一个半球,并且三棱锥的底面与半球的底面相切.

(2)由图可知, $V_{三棱锥} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 1 = \frac{1}{6}$;球半径 $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $V_{半球} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}\pi}{6}$.

所以此几何体的体积 $V = \frac{1 + \sqrt{2}\pi}{6}(\text{cm}^3)$.

(3)这100件铁件的质量 $m = 100 \times \frac{1 + \sqrt{2}\pi}{6} \approx 7.8 \approx 130 \times (1 + 1.4 \times 3.1) = 694.2(\text{g})$.

22.解:(1)因为 $AE = BE' = x$,所以 $EE' = 20 - 2x$.由 $EE' > 0$,得 $0 < x < 10$.

故礼品袋的侧面积 $S = S_{正方形} - 4S_{\triangle SBE'} - 4S_{\triangle SAE'} = 20 \times 20 - 4 \times \frac{1}{2} (20 - 2x) \times 10 - 4 \times \frac{1}{2} x^2 = -2x^2 + 40x$.

即 $S = -2x^2 + 40x, 0 < x < 10$.

(2)当 $x = 5$ 时,在四棱锥 $S-EFGH$ 中, $OE = OF = 5, EF = 5\sqrt{2}, SE = 5\sqrt{5}$.高 $SO = \sqrt{SE^2 - OE^2} = 10$.

包装盒的内径最小值,即为正四棱锥 $S-EFGH$ 的外接球的半径 R .设外接球的球心为 O' ,则点 O' 在正四棱锥 $S-EFGH$ 的高 SO 上,连接 EO' ,则在 $\text{Rt}\triangle EOO'$ 中, $OE^2 + O'O^2 = O'E^2$,即 $5^2 + (10 - R)^2 = R^2$,解得 $R = \frac{25}{4}$.

故包装盒的内径的最小值是 $\frac{25}{4}\text{cm}$.

② 第 2-3 版章节测试参考答案
一、选择题

- 1.B
2.C
提示:俯视图应为两个实线同心圆.
3.D 4.D 5.B 6.D
7.B

提示:两个平行平面可以把空间分成 3 部分;两个相交平面可以把空间分成 4 部分.故选 B.

8.C
提示:取 AB 的中点 H,连接 HE,EF,FG,GH,则平面 EFGH 即为 α .从而可得 $BC \parallel \alpha, AD \parallel \alpha$.故选 C.

9.C
提示:设三棱台的高为 h,上底面面积为 S,则下底面面积为 4S.

$$\text{所以 } V_{\text{台}} = \frac{1}{3}h(S+4S+\sqrt{S \cdot 4S}) = \frac{7}{3}Sh.$$

$$V_{\text{台}} = Sh. \text{ 所以 } \frac{V_{\text{台}}}{V_{\text{台}} - V_{\text{柱}}} = \frac{7}{4}.$$

10.C
提示:根据题意,可知取出的两个玻璃球的体积之和等于下降的水的体积.设水面下降 h cm,则有 $\frac{4}{3}\pi \times 3^2 \times 2 = \pi \times 8^2 \times h$,解得 $h = \frac{9}{8}$.

11.A
提示:将正四面体补成正方体,其中正四面体的棱为正方体的面对角线,可得正方体的棱长为 $2\sqrt{2}$.若球 O 与正四面体的各棱相切,则球 O 是正方体的内切球,其半径 $R = \sqrt{2}$.故球 O 的体积 $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$.

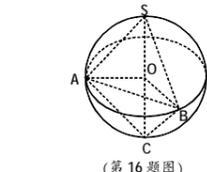
12.B
提示:在等边 $\triangle ABC$ 中,有 $DE \perp AF$,则在旋转过程中,有 $DE \perp A'G$ 且 $DE \perp FG$.又 $A'G \cap FG = G$,所以 $DE \perp$ 平面 $A'GF$.所以 $DE \perp A'F$.且平面 $A'GF \perp$ 平面 $BCED$,交线为 AF ,所以点 A' 在平面 ABC 上的投影在线段 AF 上,故①③④正确.因为 $EF \parallel AB$,所以 $\angle A'EF$ 就是 $A'E$ 与 BD 所成的角.当 $\angle A'EF = 90^\circ$ 时, $A'E \perp BD$,故②不正确.

二、填空题
13. 50° 或 130° 14. 45°

15. $6\sqrt{2}$
提示:分别取 $CC_1, B_1C_1, A_1B_1, AA_1$ 的中点 G, H, M, N.连接 EF, FG, GH, HM, MN, NE.构成边长为 $\sqrt{2}$ 的正六边形 EFGHMN.易证平面 EFGHMN \parallel 平面 AB_1C_1 ,所以正六边形 EFGHMN 即为满足条件的图形,其周长为 $6\sqrt{2}$.

16. 36π
提示:显然 O 是 SC 的中点,连接 OA, OB. 如图所示,则由已知条件,得 $OA \perp SC, OB \perp SC$.因为平面 $SCA \perp$ 平面 SCB ,交线为 SC,所以 $OA \perp$ 平面 $SCB, OB \perp$ 平面 SCB .

设球 O 的半径为 r, 则 $V_{\text{A}_1\text{SCF}} = \frac{1}{3}S_{\triangle\text{SCB}} \cdot OA = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2r \times r = 9$, 解得 $r = 3$.故球 O 的表面积为 $4\pi r^2 = 36\pi$.



(第 16 题图)

三、解答题
17. 解:根据题意,该几何体是正四棱台与球的组合体,它的三视图如图所示.



(第 17 题图)

18. 解:根据三视图可知,此几何体为圆台.其直观图画法如下:

(1)画轴,画 x 轴, z 轴,记坐标原点为 O,使 $\angle xOz = 90^\circ$,如图 1 所示.
(2)画圆台的两底面.在 x 轴上取 A, B 两点,使 AB 的长度等于俯视图中大圆的直径,且 $OA = OB$.选择椭圆模板中适当的椭圆过 A, B 两点,使它成为圆台的下底面.在 z 轴上截取点 O',使 OO' 等于主视图的高度,过点 O'作 Ox 轴的平行线 O'x'轴,类似圆台下底面的作法作出圆台的上底面.

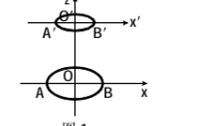


图 1 (第 18 题图)

(3)成图.连接 $A'A, B'B$, 去掉辅助线,将被遮挡的部分改为虚线,即得到几何体的直观图如图 2 所示.

19. 解:(1)由三视图知 $AC \perp$ 平面 $BCED$,且 $EC = BC = AC = 4, BD = a$,故该几何体的体积 $V = \frac{1}{3} \times 4 \times \frac{(a+4) \times 4}{2} = 16$,解得 $a = 2$.

(2)在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, $AB = 4\sqrt{2}, BD = 2$, 则 $AD = 6$.过点 B 作 $BH \perp AD$ 于 H, 可得 $BH = \frac{4\sqrt{2}}{3}$.将 $\text{Rt}\triangle ABD$ 绕斜边 AD 所在直线旋转一周,所得旋转体由两个同底的圆锥构成,其中圆锥的底面半径为 $\frac{4\sqrt{2}}{3}$,母线长分别为 $4\sqrt{2}, 2$.故该旋转体的表面积 $S = \pi \times \frac{4\sqrt{2}}{3} \times (4\sqrt{2} + 2) = \frac{(32+8\sqrt{2})\pi}{3}$.

20. 证明:(1)因为 $BB_1 \parallel DD_1$, 所以四边形 BB_1D_1D 是平行四边形.所以 $BD \parallel B_1D_1$.因为 MN 是 $\triangle CDB$ 的中位线,所以 $MN \parallel BD$.所以 $MN \parallel B_1D_1$.(2)连接 A_1C_1 , 与 B_1D_1 交于点 O_1 ,

则 O_1 是 A_1C_1 的中点.连接 EO_1 , 则 EO_1 是 $\triangle AA_1C_1$ 的中位线.

所以 $EO_1 \parallel AC_1$.又 $AC_1 \not\subset$ 平面 $EB_1D_1, EO_1 \subset$ 平面 EB_1D_1 , 所以 $AC_1 \parallel$ 平面 EB_1D_1 .(3)由(1)得 $BD \parallel B_1D_1$, 因为 $BD \subset$ 平面 $BDC, B_1D_1 \not\subset$ 平面 BDC ,

所以 $B_1D_1 \parallel$ 平面 BDC .连接 AC, 与 BD 交于点 O, 连接 OC, 与(2)同理,可证得 $OC \parallel AC_1$, 又 $EO_1 \parallel AC_1$, 所以 $EO_1 \parallel OC$.因为 $OC \subset$ 平面 $BDC, EO_1 \not\subset$ 平面 BDC , 所以 $EO_1 \parallel$ 平面 BDC .又 $B, D, O \in$ 平面 BDC , 所以平面 $EB_1D_1 \parallel$ 平面 BDC .21. 证明:(1)连接 OO_1 , 则 $OO_1 \perp$ 平面 BCD .

因为 O, O1 分别为 AC, BC 的中点, 所以 $AB \parallel OO_1$.所以 $AB \perp$ 平面 BCD .(2)因为 $AB \perp$ 平面 BCD , 所以 $AB \perp CD$.又 BC 为圆 O 的直径, 所以 $BD \perp CD$.因为 $AB \cap BD = B$, 所以 $CD \perp$ 平面 ABD .又 $CD \subset$ 平面 ADC , 所以平面 $ADC \perp$ 平面 ABD .22. (1)证明:连接 BD, 与 AC 交于点 O.连接 SO.由题意,得 $SO \perp AC$.在正方形 ABCD 中, $AC \perp BD$, 又 $SO \cap BD = O$, 所以 $AC \perp$ 平面 SBD , 得 $AC \perp SD$.(2)解:连接 OP, 由(1)知 $AC \perp$ 平面 SBD , 所以 $AC \perp OP$, 且 $AC \perp OD$.所以 $\angle POD$ 是二面角 P-AC-D 的平面角.

设正方形 ABCD 的边长为 a, 则 $SD = \sqrt{2}a$.又 $OD = \frac{\sqrt{2}}{2}a$, 所以 $\angle SDO = 60^\circ$.由 $SD \perp$ 平面 PAC , 知 $SD \perp OP$, 所以 $\angle POD = 30^\circ$, 即二面角 P-AC-D 的大小为 30° .(3)解:在棱 SC 上存在一点 E, 使 $BE \parallel$ 平面 PAC .

由(2)可得 $PD = \frac{\sqrt{2}}{4}a$, 故可在 SP 上取一点 N, 使 $PN = PD$.过 N 作 PC 的平行线与 SC 的交点即为 E, 连接 BN, BE.在 $\triangle BND$ 中, 知 $BN \parallel PO$, 由于 $NE \parallel PC$, 且 $BN, NE \not\subset$ 平面 $PAC, PO, PC \subset$ 平面 PAC , 故 $BN \parallel$ 平面 PAC , $NE \parallel$ 平面 PAC .又 $BN \cap NE = N$, 所以平面 $BEN \parallel$ 平面 PAC .故 $BE \parallel$ 平面 PAC .

由于 $SN = SD - 2PD = \frac{\sqrt{2}}{2}a$, 故 $SN : NP = 2 : 1$, 所以 $SE : EC = 2 : 1$.

数学·北师大(必修 2)答案页第 2 期



第 7 期

第 3-4 版同步周测参考答案

一、选择题
1.D 2.A 3.C 4.B 5.B

6.A
提示:令 $x=0$, 得 $y=6$; 令 $y=0$, 得 $x=-2$. 所以直线 l 在 y 轴上的截距是 6, 在 x 轴上的截距是 -2. 故选 A.

7.D
提示:由已知,得 $3m+m(2m+1)=0$, 解得 $m=-2$, 或 $m=0$.

8.D 9.B
10.C

提示:由点斜式,知直线 l 过定点 P $(0, -\sqrt{3})$. 在平面直角坐标系中画出直线 $x+y-3=0$, 设其与 y 轴, x 轴的交点分别为 A $(0, 3), B(3, 0)$, 直线 l 的倾斜角为 θ , 则当 θ 最小时, $\tan \theta = k_m = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 即 $\theta = 30^\circ$;

当 θ 最大时, $\theta = 90^\circ$. 所以 $\theta \in (30^\circ, 90^\circ)$.

11.A
提示:由直线的倾斜角大于 60° , 知斜率 $k > \tan 60^\circ = \sqrt{3}$, 或 $k < 0$, 或 k 不存在.

①若 $k = -\frac{a}{b} > \sqrt{3}$, 可得 $b = -1, a = 2; b = 1, a = -2, -3$, 共 3 条. ②若 $k < 0$, 则 $ab > 0$, 可得 $a = -3, b = -2, -1; a = -2, b = -3, -1; a = -1, b = -3, -2; a = 1, b = 2; a = 2, b = 1$, 共 8 条. ③若 k 不存在, 则 $b = 0$, 此时 $a = -3, -2, -1, 1, 2$, 共 5 条. 综上所述, 符合条件的直线共有 $3+8+5=16$ (条).

12.C
提示:显然两条直线平行. 因为 $P(x_1, y_1)$ 在直线 l 上, 所以 $f(x_1, y_1) = 0$. 所以原方程化为 $f(x, y) - f(x_1, y_1) = 0$. 显然 $P_2(x_2, y_2)$ 满足此方程. 故选 C.

二、填空题
13. $3x-2y=0$ 或 $x-y+1=0$

提示:当直线过原点时, 直线方程为 $y = \frac{3}{2}x$, 即 $3x-2y=0$; 当直线不过原点时, 设方程为 $\frac{x}{a} + \frac{y}{-a} = 1$, 把点 $P(2, 3)$ 代入, 解得 $a = -1$, 故直线方程为 $x-y+1=0$.

14. 12

提示:由斜率相等, 得 $\frac{3+3}{4-2} = \frac{k-3}{5-4}$, 解得 $k = 12$.

15. $(-\infty, -4] \cup [\frac{3}{4}, +\infty)$
提示:在平面直角坐标系中标出 P, A, B 三点, 易知直线 l 的斜率 $k \leq k_{PA}$ 或 $k \geq k_{PB}$ 时满足题意. 因为 $k_{PA} = -4, k_{PB} = \frac{3}{4}$, 所以 $k \geq \frac{3}{4}$ 或 $k \leq -4$.

16. ④
提示:当倾斜角为 90° 时, 斜率不存在, 故①②错误; 若 $k_1 < 0, k_2 > 0$, 则 α_1 为钝角, α_2 为锐角, $\alpha_1 > \alpha_2$, ③错误; ④正确.

三、解答题
17. 解:若 $a = -1$, 则直线 l 的方程为 $y = -3$, 此时 l 不过第二象限; 若 $a \neq -1$, 则直线 l 可化为 $y = -(a+1)x + a - 2$.

由直线 l 不经过第二象限, 得 $\begin{cases} -(a+1) > 0, \\ a-2 < 0, \end{cases}$ 解得 $a < -1$.

综上, 实数 a 的取值范围为 $(-\infty, -1]$.

18. 解:因为 A $(2, 0), B(0, 2)$, 所以斜率 $k = \frac{2-0}{0-2} = -1$.

所以直线 l 的点斜式为 $y-0 = -(x-2)$, 一般式为 $x+y-2=0$.

19. 解:(1)由点斜式, 得直线 l 的方程为 $y-5 = -\frac{3}{4}(x+2)$, 即 $3x+4y-14=0$.

(2)设所求直线方程为 $3x+4y+m=0$, 将点 $(2, 3)$ 代入, 解得 $m = -18$. 所以所求直线方程为 $3x+4y-18=0$.

(3)设所求直线方程为 $4x-3y+n=0$, 将点 $(2, 3)$ 代入, 解得 $n = 1$. 所以所求直线方程为 $4x-3y+1=0$.

20. 解:(1)当 x, y 的系数不同时为零时, 该方程表示一条直线.

令 $m^2-2m-3=0$, 解得 $m = -1$, 或 $m = 3$; 令 $2m^2+m-1=0$, 解得 $m = -1$, 或 $m = \frac{1}{2}$.

$m \neq -1$.

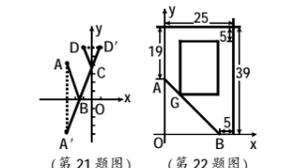
(2)若该方程表示的直线的斜率不存在, 则 $2m^2+m-1=0$. 结合(1), 可知 $m = \frac{1}{2}$, 此时的直线方程为 $x = \frac{4}{3}$.

(3)令 $y = 0$, 则 $(m^2-2m-3)x + 6-2m = 0$. 所以 $m^2-2m-3 \neq 0$ 且 $\frac{2m-6}{m^2-2m-3} = -3$, 解得 $m = -\frac{5}{3}$.

(4)由倾斜角是 45° , 得直线的斜率为 1, 所以 $\frac{m^2-2m-3}{2m^2+m-1} = 1$, 解得 $m = \frac{4}{3}$, 或 $m = -1$ (舍去). 所以 $m = \frac{4}{3}$.

21. 解:如图, 由镜面反射的对称原理可知, 点 A $(-3, 4)$ 关于 x 轴的对称点 A' 在光线 BC 的反向延长线上, 由对称性可知 A' $(-3, -4)$; 点 D $(-1, 6)$ 关于 y 轴的对称点 D' 在光线 BC 的延长线上, 由对称性可知 D' $(1, 6)$.

所以点 A', D' 在直线 BC 上. 由两点式, 得光线 BC 所在直线的方程为 $\frac{y-6}{-4-6} = \frac{x-1}{-3-1}$, 即 $5x-2y+7=0$.



(第 21 题图)

22. 解:如图, 建立平面直角坐标系, 可知 A $(0, 20), B(20, 0)$, 故 AB 所在直线的方程为 $\frac{x}{20} + \frac{y}{20} = 1$, 即 $x+y=20$.

设 $G(x, y)$, 由 $y=20-x$, 可知 $G(x, 20-x)$. 所以教学楼的面积 $S = [39-5-(20-x)][25-(5+x)] = (14+x)(20-x) = -x^2+6x+20 \times 14 = -(x-3)^2+289$.

故当 $x=3$ 时, S 有最大值 289. 故在线段 AB 上取点 G, 使其到 OA 的距离为 3m, 到 OB 的距离为 17m, 过此点分别作两围墙的平行线, 在离围墙 5m 处确定矩形的另两个顶点, 则第四个顶点随之确定, 如此矩形的面积最大.