第8期

第3~4版同步周测参考答案

一、选择题

1.C 2.C

3.A

提示:$2=a+2b\geq 2\sqrt{2ab}$,解得 $ab\leq\frac{1}{2}$.故选A.

4.A 5.C

6.D

提示:$\frac{x}{x+y}+\frac{2y}{x+2y}=\frac{1}{1+\frac{y}{x}}+\frac{2\frac{y}{x}}{1+2\frac{y}{x}}$,设 $t=\frac{y}{x}>0$,所以原式$=\frac{1}{1+t}+\frac{2t}{2t+1}=\frac{1}{1+t}+\frac{2t+1-1}{2t+1}=1+\frac{t}{(t+1)(2t+1)}=1+\frac{1}{2t+\frac{1}{t}+3}$.因为 $2t+\frac{1}{t}\geq 2\sqrt{2}$,当 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时等号立,所以最大值为 $1+\frac{1}{2\sqrt{2}+3}=4-2\sqrt{2}$.

7.B 8.C

9.A

提示:设两食堂1月份的营业额均为m,9月份的营业额均为n.由题意,可知甲食堂的营业额构成等差数列,乙食堂的营业额构成等比数列,则5月份甲食堂的营业额 $y_1=\frac{m+n}{2}$,乙食堂的营业额 $y_2=\sqrt{mn}$,因为 $m\neq n$,所以由基本不等式知 $y_1>y_2$.故本年5月份甲食堂的营业额较高.

10.C

提示:因为 $a>b>0$,所以 $b(a-b)>0$.

所以 $b(a-b)\leq\left(\frac{b+a-b}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}$,

所以 $a^2+\frac{1}{b(a-b)}\geq a^2+\frac{4}{a^2}\geq 4$,

当且仅当 $\begin{cases}b=a-b,\\a^2=\frac{4}{a^2}\end{cases}$,即 $\begin{cases}a=\sqrt{2},\\b=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ 时,等号成立.故选C.

11.C

提示:由已知,可得 $6\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)=1$,所以 $2a+b=6\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)\cdot(2a+b)=6\left(5+\frac{2a}{b}+\frac{2b}{a}\right)\geq 6\times(5+4)=54$,当且仅当 $\frac{2a}{b}=\frac{2b}{a}$ 时等号成立,所以 $9m\leq 54$,即 $m\leq 6$,故选C.

12.B

提示:$\frac{(x+y)(x+ay)}{xy}=\frac{x^2+(a+1)xy+ay^2}{xy}=a+1+\frac{x^2+ay^2}{xy}\geq a+1+2\sqrt{a}=(\sqrt{a}+1)^2$,当且仅当 $x=\sqrt{a}\,y$ 时等号成立,所以 $\frac{(x+y)(x+ay)}{xy}$ 的最小值为 $(\sqrt{a}+1)^2$,于是 $(\sqrt{a}+1)^2\geq 9$ 恒成立,所以 $a\geq 4$,故选B.

二、填空题

13.≤

提示:因为 $a^2+a-2>0$,所以 $a<-2$ 或 $a>1$,又 $a>0$,所以 $a>1$,因为 $t>0$,所以 $\frac{t+1}{2}\geq\sqrt{t}$,所以 $\log_a\frac{t+1}{2}\geq\log_a\sqrt{t}=\frac{1}{2}\log_a t$.

14.$4\sqrt{2}$

提示:因为 $a>0,b>0$,所以 $\sqrt{ab}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq 2\sqrt{\frac{1}{ab}}$,即 $ab\geq 2$,当且仅当 $a=b=\sqrt{2}$ 时取等号,所以 $a^3+b^3\geq 2\sqrt{(ab)^3}\geq 2\sqrt{2^3}=4\sqrt{2}$,当且仅当 $a=b=\sqrt{2}$ 时取等号,则 a^3+b^3 的最小值为 $4\sqrt{2}$.

15.$4\sqrt{3}$

提示:$\frac{(x+1)(2y+1)}{\sqrt{xy}}=\frac{2xy+x+2y+1}{\sqrt{xy}}=\frac{2xy+6}{\sqrt{xy}}=2\sqrt{xy}+\frac{6}{\sqrt{xy}}\geq 2\sqrt{2\sqrt{xy}\cdot\frac{6}{\sqrt{xy}}}=4\sqrt{3}$,当且仅当 $2\sqrt{xy}=\frac{6}{\sqrt{xy}}$,即 $\begin{cases}x=3,\\y=1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=2,\\y=\frac{3}{2}\end{cases}$ 时等号成立.故 $\frac{(x+1)(2y+1)}{\sqrt{xy}}$ 的最小值为 $4\sqrt{3}$.

16.1-2lg2

提示:由 $f(a)=f(b)$ 及 $0<a<b$ 可得 $\lg b=-\lg a$,即 $\lg(ab)=0$,即 $ab=1$,则 $\frac{1}{a}+\frac{4}{b}=\frac{4a+b}{ab}=4a+b\geq 2\sqrt{4ab}=4$,当且仅当 $b=4a$ 时,$\frac{1}{a}+\frac{4}{b}$ 取得最小值,由 $ab=1,b=4a$,可得 $a=\frac{1}{2},b=2$,所以 $f(a+b)=f\left(\frac{5}{2}\right)=\lg\frac{5}{2}=1-2\lg2$.

三、解答题

17.证明:因为 a,b,c 均为正实数,

所以 $\frac{2b}{a}+\frac{a}{2b}\geq 2$(当且仅当 $a=2b$ 时等号成立),

$\frac{3c}{a}+\frac{a}{3c}\geq 2$(当且仅当 $a=3c$ 时等号成立),

$\frac{3c}{2b}+\frac{2b}{3c}\geq 2$(当且仅当 $2b=3c$ 时等号成立),

将上述三式相加得 $\left(\frac{2b}{a}+\frac{a}{2b}\right)+\left(\frac{3c}{a}+\frac{a}{3c}\right)+\left(\frac{3c}{2b}+\frac{2b}{3c}\right)\geq 6$(当且仅当 $a=2b=3c$ 时等号成立),所以 $\left(\frac{2b}{a}+\frac{a}{2b}-1\right)+\left(\frac{3c}{a}+\frac{a}{3c}-1\right)+\left(\frac{3c}{2b}+\frac{2b}{3c}-1\right)\geq 3$(当且仅当 $a=2b=3c$ 时等号成立),

即 $\frac{2b+3c-a}{a}+\frac{a+3c-2b}{2b}+\frac{a+2b-3c}{3c}\geq 3$(当且仅当 $a=2b=3c$ 时等号成立).

18.解:(1)因为 $x>0,y>0$,由基本不等式,得 $2x+5y\geq 2\sqrt{2x5y}$,即 $20\geq 2\sqrt{10}\cdot\sqrt{xy}$,所以 $xy\leq 10$,当且仅当 $2x=5y$ 时,即 $x=5,y=2$ 时等号成立.

所以 $u=\lg x+\lg y=\lg(xy)\leq\lg10=1$.

故 u 的最大值是1.

(2)由已知,得 $xy=100$.

所以 $5x+2y\geq 2\sqrt{10xy}=20\sqrt{10}$,当且仅当 $5x=2y$,即 $x=2\sqrt{10}$,$y=5\sqrt{10}$ 时,等号成立.

所以 v 的最小值是 $20\sqrt{10}$.

19.解:错误.

因为 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq 2\sqrt{\frac{1}{xy}}$, ①

当且仅当 $x=y$ 时,等号成立.

$x+2y\geq 2\sqrt{2xy}$, ②

当且仅当 $x=2y$ 时,等号成立,而当 $x>0,y>0$ 时①②的等号同时成立是不可能的.

正确解法:因为 $x+2y=1$,且 $x>0,y>0$,

所以 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)(x+2y)=3+\frac{2y}{x}+\frac{x}{y}\geq 3+2\sqrt{\frac{2y}{x}\cdot\frac{x}{y}}=3+2\sqrt{2}$,

当且仅当 $\frac{2y}{x}=\frac{x}{y}$,即 $x=\sqrt{2}\,y$ 时,等号成立.

又 $x+2y=1$,所以 $\begin{cases}x=\sqrt{2}-1,\\y=\frac{2-\sqrt{2}}{2}.\end{cases}$

所以 $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)_{\min}=3+2\sqrt{2}$.

20.解:因为 $x>0,y>0$,

所以不等式 $\left(3k-\frac{1}{2}\right)x+ky\geq\sqrt{2xy}$ 恒成立等价于 $\left(3k-\frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{x}{y}}+k\sqrt{\frac{y}{x}}\geq\sqrt{2}$ 恒成立.又 $k>\frac{1}{6}$,所以 $\left(3k-\frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{x}{y}}+k\sqrt{\frac{y}{x}}\geq 2\sqrt{k\left(3k-\frac{1}{2}\right)}$,所以 $2\sqrt{k\left(3k-\frac{1}{2}\right)}\geq\sqrt{2}$,解得 $k\leq-\frac{1}{3}$(舍去)或 $k\geq\frac{1}{2}$,所以 $k_{\min}=\frac{1}{2}$.

21.解:(1)设捕捞 n 年后的总盈利为 y 万元,则

$y=50n-98-\left[12\times n+\frac{n(n-1)}{2}\times4\right]$

$=-2n^2+40n-98$

$=-2(n-10)^2+102$.

所以捕捞10年后总盈利最大,最大是102万元.

(2)年平均利润为 $\frac{y}{n}=-2\left(n+\frac{49}{n}-20\right)\leq-2\left(2\sqrt{n\cdot\frac{49}{n}}-20\right)=12$,

当且仅当 $n=\frac{49}{n}$,即 $n=7$ 时上式取等号.

所以,捕捞7年后的平均利润最大,最大是12万元.

22.解:(1) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}=\frac{a^2+b^2}{ab}\geq\frac{2ab}{ab}=2$,当且仅当 $a=b=1$ 时,等号成立.所以 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 的最小值为2.

(2)因为 $a^2+b^2\geq 2ab$,所以 $(a+b)^2\leq 2(a^2+b^2)=2(a+b)$,所以 $(a+b)^2-2(a+b)\leq 0$.

又 $a,b\in(0,+\infty)$,所以 $0<a+b\leq 2$.

从而有 $(a+1)(b+1)\leq\left[\frac{(a+1)+(b+1)}{2}\right]^2\leq 4$,当且仅当 $a+1=b+1$,即 $a=b=1$ 时,等号成立.

因此存在 $a=1,b=1$,满足 $(a+1)(b+1)=4$.

第5期

第3~4版同步周测参考答案

一、选择题

1.D 2.D

3.B

提示:由余弦定理,得 $AB=20\sqrt{31}$(m).

4.B

提示:由已知,得 $\angle ACB=80°$.

又 $AC=BC$,所以 $\angle CBA=50°$.

所以 $\angle ABD=60°-50°=10°$.

即灯塔A在灯塔B的北偏西10°.

5.B 6.A 7.B 8.B

9.A

提示:设水柱高度是 h,水柱底端为 C,则在△ABC中,∠BAC=60°,$AC=h$,$AB=100$,$BC=\sqrt{3}h$,根据余弦定理,得 $(\sqrt{3}h)^2=h^2+100^2-2\cdot h\cdot100\cdot\cos60°$,即 $h^2+50h-5000=0$,即 $(h-50)\cdot(h+100)=0$,解得 $h=50$ 或 -100(负值舍去),故水柱的高度是50m.

10.C

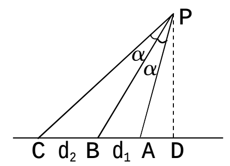
11.A

提示:因为 $\cos B=\frac{7^2+5^2-6^2}{2\times7\times5}=\frac{19}{35}$,

所以 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|\cos B=7\times5\times\frac{19}{35}=19$.

12.C

提示:设山顶为点P,山高为PD,第一、二、三辆车分别为A,B,C,俯角差为α,作出图形如图,



(第12题图)

由题知∠CPB=∠BPA=α,由正弦定理,得 $\frac{d_2}{\sin\alpha}=\frac{PB}{\sin\angle PCB}$,$\frac{d_1}{\sin\alpha}=\frac{PB}{\sin\angle PAB}$,

即 $PB\sin\alpha=d_2\sin\angle PCB=d_1\sin\angle PAB$,

又因为 $1>\sin\angle PAB>\sin\angle PCB>0$,

所以 $d_1<d_2$.

二、填空题

13.9

14.$10\sqrt{2}$

提示:由题意得,$AB=80\times\frac{15}{60}=20$,∠PAB=30°,∠APB=75°-30°=45°,在△ABP中,由正弦定理得 $\frac{20}{\sin45°}=\frac{PB}{\sin30°}$,

所以 $PB=\frac{20\sin30°}{\sin45°}=\frac{20\times\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=10\sqrt{2}$.

15.$\sqrt{3}-1$

提示:在△ABC中,由正弦定理,得 $BC=\frac{100\sin15°}{\sin30°}=200\sin15°$.

在△DBC中,∠CDB=90°+θ,

由正弦定理,

得 $\frac{50}{\sin45°}=\frac{200\sin15°}{\sin(90°+\theta)}$,

所以 $\cos\theta=\sin(90°+\theta)$

$=2\sqrt{2}\sin15°=\sqrt{3}-1$.

16.$\frac{12\sqrt{2}}{5}$,$\frac{7\sqrt{2}}{10}$

三、解答题

17.解:(1)由余弦定理,得

$BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cos A=7$,

故 $BD=\sqrt{7}$.

由正弦定理,得

$\sin\angle ABD=\frac{AD\sin A}{BD}=\frac{\sqrt{21}}{7}$.

(2)在△BCD中,

$\cos C=\frac{BC^2+CD^2-BD^2}{2BC\cdot CD}=\frac{1}{8}$.

因为 $C\in(0,\pi)$,所以 $\sin C=\frac{3\sqrt{7}}{8}$.

所以△BCD的面积 $S=\frac{1}{2}BC\cdot CD\cdot\sin C=\frac{3\sqrt{7}}{4}$.

18.解:在△ADC中,∠DAC=30°,∠ADC=60°-∠DAC=30°,所以CD=AC=0.1.

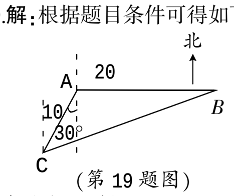
又∠BCD=180°-60°-60°=60°,

故CB是△CAD底边AD的中垂线,所以BD=BA.

在△ABC中,$\frac{AB}{\sin\angle BCA}=\frac{AC}{\sin\angle ABC}$,即 $AB=\frac{AC\sin60°}{\sin15°}=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{20}$.

因此,$BD=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{20}\approx0.33$.故B,D间的距离约为0.33km.

19.解:根据题目条件可得如下示意图.



(第19题图)

由余弦定理,得

$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos\angle CAB$

$=20^2+10^2-2\times20\times10\cos120°=700$,

所以 $BC=10\sqrt{7}$.

由正弦定理,得

$\sin\angle ACB=\frac{AB\cdot\sin\angle CAB}{BC}$

$=\frac{20\times\sin120°}{10\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$.

又0°<∠ACB<90°,

所以 $\cos\angle ACB=\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

所以 $\sin\theta=\sin(30°+\angle ACB)$

$=\sin30°\cos\angle ACB+\cos30°\sin\angle ACB$

$=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{7}}{7}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{21}}{7}$

$=\frac{5\sqrt{7}}{14}$.

20.解:设E为BC的中点,连接DE,

则DE∥AB,且 $DE=\frac{1}{2}AB=\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

设BE=x.

在△BDE中,由余弦定理,得 $BD^2=BE^2+ED^2-2BE\cdot ED\cos\angle BED$,

即 $5=x^2+\frac{8}{3}+2\times\frac{2\sqrt{6}}{3}\times\frac{\sqrt{6}}{6}x$,

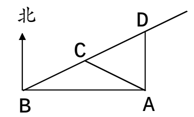
解得 $x=1$,$x=-\frac{7}{3}$(舍去).故BC=2.

从而 $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos B=\frac{28}{3}$,

即 $AC=\frac{2\sqrt{21}}{3}$.

故 $\sin A=\frac{BC\sin B}{AC}=\frac{\sqrt{70}}{14}$.

21.解:如图所示,考点为A,检查开始处为B,设公路上C,D两点到考点的距离为1千米.



(第21题图)

在△ABC中,$AB=\sqrt{3}$(千米),AC=1(千米),∠ABC=30°,

由正弦定理,得 $\sin\angle ACB=\frac{\sin30°}{AC}\cdot AB=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以∠ACB=120°(∠ACB=60°不合题意),

所以∠BAC=30°,所以BC=AC=1(千米),

在△ACD中,AC=AD,∠ACD=60°,

所以△ACD为等边三角形,所以CD=1(千米).

因为 $\frac{BC}{12}\times60=5$,所以在BC上需5分钟,CD上需5分钟.

所以最长需要5分钟检查员开始收不到信号,并持续至少5分钟才算合格.

22.解:(1)由题设及正弦定理,得

$\sin A\sin\frac{A+C}{2}=\sin B\sin A$.

因为 $\sin A\neq0$,所以 $\sin\frac{A+C}{2}=\sin B$.

由 $A+B+C=180°$,可得 $\sin\frac{A+C}{2}=\cos\frac{B}{2}$,

故 $\cos\frac{B}{2}=2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$.因为 $\cos\frac{B}{2}\neq0$,

所以 $\sin\frac{B}{2}=\frac{1}{2}$.因此B=60°.

(2)由题设及(1)知△ABC面积 $S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}a$.

由正弦定理,得 $a=\frac{c\sin A}{\sin C}=\frac{\sin(120°-C)}{\sin C}=\frac{\sqrt{3}}{2\tan C}+\frac{1}{2}$.

由于△ABC为锐角三角形,故0°<A<90°,0°<C<90°.

由(1)知A+C=120°,所以30°<C<90°,故 $\frac{1}{2}<a<2$,从而 $\frac{\sqrt{3}}{8}<S_{\triangle ABC}<\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因此,△ABC面积的取值范围是 $\left(\frac{\sqrt{3}}{8},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

第 6 期

第 2~3 版章节测试参考答案

一、选择题

1.A 2.D 3.B 4.B 5.B 6.A

7.D

8.D

提示:由题意得 $B=60°$,

由余弦定理,得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=a^2+c^2-ac$,

又三边 a,b,c 成等比数列,

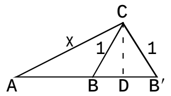
所以 $b^2=ac$,上式即为 $a^2+c^2-2ac=(a-c)^2=0$,

则 a=c,所以△ABC 是等边三角形.

9.D

提示:结合下图可知,三角形有两解的条件为 $b>a$,且 $b\sin A<a$,

即 $x>1$,且 $x\sin30°<1$,解得 $1<x<2$.



(第 9 题图)

10.A

提示:由题意,知 a=c+4,b=c+2,故角 A 为△ABC 中的最大角,即 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$,解得 $A=60°$(舍去)或 $A=120°$.由余弦定理,得 $\cos A=\cos120°=\frac{c^2+(c+2)^2-(c+4)^2}{2c(c+2)}=-\frac{1}{2}$,解得 c=3,所以 b=5,所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{15\sqrt{3}}{4}$.

11.C

提示:△ABC 中,$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\cdot\sin C$,

由余弦定理:$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$,

且 $2S=(a+b)^2-c^2$,得 $ab\sin C=(a+b)^2-(a^2+b^2-2ab\cos C)$,

整理得 $\sin C-2\cos C=2$,所以 $(\sin C-2\cos C)^2=4$.

所以 $\frac{(\sin C-2\cos C)^2}{\sin^2C+\cos^2C}=4$,化简可得 $3\tan^2C+4\tan C=0$.

因为 $C\in(0,180°)$,所以 $\tan C=-\frac{4}{3}$.

12.B

二、填空题

13.$15\sqrt{3}$

提示:由于三边长构成公差为 4 的等差数列,

故可设三边长分别为 x-4,x,x+4.

由一个内角为 120°,知其必是最长边 x+4 所对的角.

由余弦定理得,$(x+4)^2=x^2+(x-4)^2-2x(x-4)\cdot\cos120°$,

所以 $2x^2-20x=0$,所以 $x=0$(舍去)或 $x=10$,

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times(10-4)\times10\times\sin120°=15\sqrt{3}$.

14.$\sqrt{10}$

提示:由 $3\sin A=2\sin B$,可得 3BC=2AC.因为 AC=3,所以 BC=2.又 $\cos C=\frac{1}{4}$,所以 $AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos C=3^2+2^2-2\times3\times2\times\frac{1}{4}=10$.故 $AB=\sqrt{10}$.

15.$100\sqrt{6}$

提示:在 $\triangle ABC$ 中,∠CAB=30°,∠ACB=75°-30°=45°,根据正弦定理,得

$BC=\frac{AB}{\sin\angle ACB}\times\sin\angle BAC$

$=\frac{600}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\times\frac{1}{2}=300\sqrt{2}$.

所以 $CD=BC\times\tan\angle DBC=300\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=100\sqrt{6}$.

16.4

提示:在△ABC 中,$\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin A}=\frac{AB}{\sin C}$,$\frac{AC+BC}{\sin B+\sin A}=\frac{AB}{\sin C}$,

$AC+BC=2(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sin A+\sin B)$

$=4(\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

$=4\cos\frac{A-B}{2}\leqslant4$,所以 $(AC+BC)_{max}=4$.

三、解答题

17.**解**:(1)由 $a=c$,得 $C=A=75°$,

所以 $B=180°-75°-75°=30°$.

由正弦定理,得

$b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})\sin30°}{\sin75°}=2$.

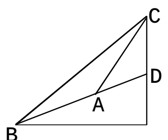
(2)因为 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$,所以 $C=15°$;因为 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{1}{2}$,所以 $B=60°$.所以 $A=180°-60°-15°=105°$.

18.**解**:(1)由余弦定理,得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$,即 $(c+2)^2=9+c^2-2\times3c\times\left(-\frac{1}{2}\right)$,解得 $c=5$.所以 $b=c+2=7$.

(2)在 $\triangle ABC$ 中,因为 $\cos B=-\frac{1}{2}$,所以 $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

结合正弦定理,得 $\sin A=\frac{a\sin B}{b}=\frac{3\sqrt{3}}{14}$.所以 $\sin(B+C)=\sin(\pi-A)=\sin A=\frac{3\sqrt{3}}{14}$.

19.**解**:如图所示,由题意,得



(第 19 题图)

∠ABC = 45°-30° = 15°,

∠DAC = 60° - 30°=30°.

所以∠BAC=150°,∠ACB = 15°,

所以 AC=AB=40m,∠ADC=120°,∠ACD=30°.

在△ACD 中,由正弦定理,得

$CD=\frac{\sin\angle CAD}{\sin\angle ADC}\cdot AC=\frac{\sin30°}{\sin120°}\cdot40$

$=\frac{40\sqrt{3}}{3}$(m).

答:转播塔的高度为 $\frac{40\sqrt{3}}{3}$m.

20.**解**:(1)在 $Rt\triangle ABC$ 中,易得 $AC=5$,$\cos C=\frac{3}{5}$,$\sin C=\frac{4}{5}$.

又 $AD=4DC$,所以 $AD=4$,$DC=1$.

在 $\triangle BCD$ 中,由余弦定理,得 $BD^2=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cos C$

$=3^2+1^2-2\times3\times1\times\frac{3}{5}=\frac{32}{5}$,

所以 $BD=\frac{4\sqrt{10}}{5}$.

(2)在 $\triangle BCD$ 中,由正弦定理,

得 $\sin\angle CBD=\frac{CD\sin C}{BD}=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

21.**解**:(1)由已知,得

$\sin(B+C)=3\sin A\cos B$,

即 $\sin A=3\sin A\cos B$.

又 $\sin A\neq0$,所以 $\cos B=\frac{1}{3}$.

(2)$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cos B=\frac{1}{3}\cdot ac=2$,

故 $ac=6$. ①

由余弦定理,得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$,

所以 $a^2+c^2=12$. ②

由①②,解得 $a=c=\sqrt{6}$.

22.**解**:(1)连接 BD,在 $\triangle BCD$ 中,由余弦定理,得 $BD^2=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cdot\cos\angle BCD=(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2-2\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\cos120°=9$,故 $BD=3$.因为 $BC=CD$,$\angle BCD=120°$,

所以 $\angle BDC=30°$,$\angle BDE=90°$.

所以在 $Rt\triangle BDE$ 中,$BE^2=BD^2+DE^2=3^2+(3\sqrt{3})^2=36$,故 $BE=6$(m).

(2)设 $\angle ABE=\alpha$,则 $\angle AEB=120°-\alpha$.

在 $\triangle ABE$ 中,由正弦定理,得

$\frac{AB}{\sin(120°-\alpha)}=\frac{AE}{\sin\alpha}$

$=\frac{BE}{\sin60°}=4\sqrt{3}$,

故 $AB=4\sqrt{3}\sin(120°-\alpha)$,

$AE=4\sqrt{3}\sin\alpha$,

$AB+AE=4\sqrt{3}[\sin(120°-\alpha)+\sin\alpha]$

$=4\sqrt{3}(\sin120°\cos\alpha-\cos120°\cdot\sin\alpha+\sin\alpha)$

$=4\sqrt{3}\left(\frac{3}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha\right)$

$=12\sin(\alpha+30°)$.

因为 $\triangle ABE$ 为锐角三角形,

所以 $30°<\alpha<90°$,$60°<\alpha+30°<120°$,

$\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin(\alpha+30°)\leqslant1$,

所以书架总长度 $AB+AE$ 的取值范围是 $(6\sqrt{3},12]$.

第 7 期

第 3~4 版同步周测参考答案

一、选择题

1.C

2.B

提示:因为 $a_1\in(0,1)$,$a_2\in(0,1)$,所以 $-1<a_1-1<0$,$-1<a_2-1<0$,所以 $M-N=a_1a_2-(a_1+a_2-1)=a_1a_2-a_1-a_2+1=a_1(a_2-1)-(a_2-1)=(a_1-1)(a_2-1)>0$,所以 $M>N$.

3.A

提示:因为 a>b>c,且 a+b+c=0,所以 a>0,c<0.又 $\begin{cases}b>c,\\a>0,\end{cases}$ 所以 ab>ac.

4.C 5.C

6.A

提示:不等式 $x^2+ax+4<0$ 的解集不是空集,即不等式 $x^2+ax+4<0$ 有解,所以 $\Delta=a^2-4\times1\times4>0$,解得 $a>4$ 或 $a<-4$.

7.D

提示:由题意知 $x^2+px+q=(x-1)(x-2)$,则待解不等式等价于 $(x-1)(x-2)\cdot(x^2-5x-6)>0\Rightarrow(x-1)(x-2)(x-6)(x+1)>0\Rightarrow x<-1$ 或 $1<x<2$ 或 $x>6$.

8.C

提示:结合二次函数的图像,知 $\begin{cases}a>0,\\\Delta<0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a>0,\\ac>\frac{1}{4}.\end{cases}$ 故选 C.

9.C

提示:画出 $y=\frac{1}{x}$ 的图像,可确定 x 的取值范围.

10.B

提示:由 $a\odot b=ab+2a+b$,得 $x\odot(x-2)=x(x-2)+2x+x-2=x^2+x-2<0$,解得 $-2<x<1$.

11.B

提示:令 $f(x)=x^2+(m^2-1)x+m-2$,则由题意,知 $\begin{cases}f(-1)<0,\\f(1)<0,\end{cases}$

所以 $\begin{cases}m^2-m>0,\\m^2+m-2<0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}m>1,\text{或 }m<0,\\-2<m<1,\end{cases}$

解得 $-2<m<0$.

12.C

提示:由 $f(1-x)=f(1+x)$,知 $f(x)$ 的对轴称为 $x=\frac{a}{2}=1$,故 $a=2$.

又 $f(x)$ 开口向下,所以当 $x\in[-1,1]$ 时,$f(x)$ 为增函数,$[f(x)]_{min}=f(-1)=-1-2+b^2-b+1=b^2-b-2$,$f(x)>0$ 对 $x\in[-1,1]$ 恒成立,即 $[f(x)]_{min}=b^2-b-2>0$ 恒成立,解得 $b<-1$,或 $b>2$.

二、填空题

13.27

提示:由已知,得 $\left(\frac{x^2}{y}\right)^2\in[16,81]$,$\frac{1}{xy^2}\in\left[\frac{1}{8},\frac{1}{3}\right]$.

故 $\frac{x^3}{y^4}=\left(\frac{x^2}{y}\right)^2\cdot\frac{1}{xy^2}\in[2,27]$.

所以 $\frac{x^3}{y^4}$ 的最大值是 27.

14.③

提示:①不等式可化为 $(x+2)^2>0$,所以解集为 $\{x|x\neq-2\}$;②不等式解集为 $\{x|x\neq0\}$;③由 $\Delta=1-4<0$,所以不等式解集为 **R**;④由定义域要求 $x\neq0$,所以解集为 $\{x|x\neq0\}$.

15.130;15

提示:①顾客需要支付 60+80-10=130(元);②设订单总金额为 m 元,则 $(m-x)\times80\%\geqslant m\times70\%$,即 $x\leqslant\frac{m}{8}$.由题意可得 $m\geqslant120$,所以 $x\leqslant\frac{120}{8}=15$,则 x 的最大值为 15.

16.$\left[-\frac{8}{9},1\right]$

提示:由题意得,不等式 $x^2-6kx+k+8\geqslant0$ 的解集为 **R**,所以函数 $y=x^2-6kx+k+8$ 的图像在 x 轴上方,与 x 轴至多有一个公共点.

所以 $\Delta=(-6k)^2-4\times1\times(k+8)\leqslant0$,

整理得 $9k^2-k-8\leqslant0$,解得 $-\frac{8}{9}\leqslant k\leqslant1$.

三、解答题

17.**证明**:$\frac{b}{3a}-\frac{b+m}{3a+m}$

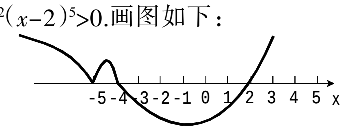
$=\frac{b(3a+m)-3a(b+m)}{3a(3a+m)}$

$=\frac{m(b-3a)}{3a(3a+m)}$.

因为 $a>0>b$,$m>0$,所以 $b-3a<0$,$3a+m>0$,则 $\frac{m(b-3a)}{3a(3a+m)}<0$.

所以 $\frac{b}{3a}<\frac{b+m}{3a+m}$.

18.**解**:(1)由题意,可知 $(x+4)(x+5)^2(x-2)^5>0$.画图如下:



(第 18 题图)

可知原不等式的解集为 $(-\infty,-5)\cup(-5,-4)\cup(2,+\infty)$.

(2)原不等式移项,得 $\frac{2x-1}{x+3}-1>0$,

化简,得 $\frac{x-4}{x+3}>0$,即 $(x-4)(x+3)>0$,

解得 $x<-3$,或 $x>4$.

所以原不等式的解集为 $\{x|x<-3$,或 $x>4\}$.

19.**解**:(1)当 $m=1$ 时,不等式 $f(x)>0$ 为 $2x^2-x>0$,

因此所求解集为 $(-\infty,0)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

(2)不等式 $f(x)+1>0$ 即 $(m+1)x^2-mx+m>0$,

由题意知 $\frac{3}{2}$,3 是方程 $(m+1)x^2-mx+m=0$ 的两根,因此 $\frac{3}{2}+3=\frac{m}{m+1}$,$\frac{3}{2}\times3=\frac{m}{m+1}\Rightarrow m=-\frac{9}{7}$.

20.**解**:由题意,设 $a=\lg x$,$b=\lg y$,

所以 $\lg(xy)=a+b$,$\lg\frac{x}{y}=a-b$,

$\lg(x^4y^2)=4a+2b$.

设 $4a+2b=m(a+b)+n(a-b)$,

所以 $\begin{cases}m+n=4,\\m-n=2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=3,\\n=1.\end{cases}$

又因为 $3\leqslant3(a+b)\leqslant6$,$3\leqslant a-b\leqslant4$,

所以 $6\leqslant4a+2b\leqslant10$,

所以 $\lg(x^4y^2)$ 的取值范围为 $[6,10]$.

21.**解**:设花坛的宽度为 xm,则草坪的长为 $(800-2x)$m,宽为 $(600-2x)$m.

根据题意得 $(800-2x)\cdot(600-2x)\geqslant\frac{1}{2}\times800\times600$,

整理得 $x^2-700x+60\,000\geqslant0$,

解不等式得 $x\geqslant600$(舍去)或 $x\leqslant100$,

由题意知 $x>0$,所以 $0<x\leqslant100$.

当 x 在 $(0,100]$ 内取值时,绿草坪的面积不小于总面积的二分之一.

22.**解**:(1)若 $m=0$,则 $f(x)=-\frac{3}{2}<0$,满足要求.

若 $m\neq0$,则需 $m<0$ 且 $\Delta=m^2+4\times m\times\frac{3}{2}<0$,解得 $-6<m<0$.

综上,实数 m 的取值范围是 $(-6,0]$.

(2)对于 $x\in[1,3]$,由 $f(x)<-m+\frac{5}{2}$ 恒成立,可得 $m(x^2-x+1)<4$ 恒成立.

因为 $x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$,所以 $m<\frac{4}{x^2-x+1}$ 恒成立.

设 $g(x)=\frac{4}{x^2-x+1}$,由 $x\in[1,3]$,可得 $x^2-x+1\in[1,7]$,所以 $g(x)\geqslant\frac{4}{7}$.

所以 m 的取值范围是 $\left(-\infty,\frac{4}{7}\right)$.