第 4 期

第 3~4 版同步周测参考答案

一、选择题

1.B　2.C

3.C

提示:由 $A:B:C=1:2:3$,得 $A=30°$,$B=60°$,$C=90°$. 根据正弦定理,得 $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=\frac{1}{2}:\frac{\sqrt{3}}{2}:1=1:\sqrt{3}:2$.

4.C

提示:因为 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{-\sqrt{3}ab}{2ab}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以 $C=150°$.

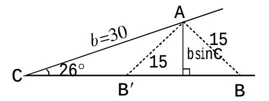
5.C

提示:由已知易得 $AB=BC=6$,

故 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\times BC\times\sin B=9\sqrt{3}$.

6.B

提示:因为 $c=b\sin30°>b\sin C$,又 $c<b$,如图,所以此三角形有两解.



(第 6 题图)

7.D　8.A

9.D

提示:$\frac{b}{a}=\frac{\sin B}{\sin A}=\frac{\sin2A}{\sin A}=\frac{2\sin A\cos A}{\sin A}=2\cos A$.

因为 $B=2A$,所以 $C=\pi-A-B=\pi-3A$.

又因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形,所以 $0<\pi-3A<\frac{\pi}{2}$,所以 $\frac{\pi}{6}<A<\frac{\pi}{3}$.

又 $B=2A$,所以 $0<2A<\frac{\pi}{2}$,所以 $0<A<\frac{\pi}{4}$,所以 $\frac{\pi}{6}<A<\frac{\pi}{4}$,所以 $\cos A\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,所以 $2\cos A\in(\sqrt{2},\sqrt{3})$,故选 D.

10.B

提示:$\boldsymbol{p}\parallel\boldsymbol{q}\Rightarrow(a+c)(c-a)-b(b-a)=0$,即 $c^2-a^2-b^2+ab=0\Rightarrow\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{2}=\cos C$,

又因为 $C\in(0,\pi)$,所以 $C=\frac{\pi}{3}$.

11.D

12.B

提示:因为 $3a\cos A=b\cos C+c\cos B$,所以 $3\sin A\cos A=\sin B\cos C+\sin C\cos B=\sin(B+C)=\sin A$,

又 $A\in(0,\pi)$,所以 $\sin A\neq0$,所以 $\cos A=\frac{1}{3}$.因为 $b+c=3$,所以 $c=3-b$.

所以 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+(3-b)^2-2b(3-b)\cdot\frac{1}{3}=\frac{8}{3}b^2-8b+9=\frac{8}{3}\left(b-\frac{3}{2}\right)^2+3\geqslant3$,所以 a 的最小值为 $\sqrt{3}$.

二、填空题

13.30°

提示:由正弦定理,得 $\sin B=b\cdot\frac{\sin A}{a}=2\times\frac{\sin60°}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$.

所以 $B=30°$,或 $B=150°$.

又 $b<a$,所以 $B<A$.所以 $B=30°$.

14.$6\sqrt{3}$

提示:由 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$,得 $6^2=(2c)^2+c^2-4c^2\cos\frac{\pi}{3}$,解得 $c^2=12$.

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=c^2\sin B=6\sqrt{3}$.

15.$\frac{5}{8}$

提示:由 $a^2=b^2+\frac{1}{4}c^2$,得 $c^2=4a^2-4b^2$.

又 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$,

所以 $\frac{a\cos B}{c}=\frac{a^2+c^2-b^2}{2c^2}=\frac{a^2+(4a^2-4b^2)-b^2}{2\times(4a^2-4b^2)}=\frac{5}{8}$.

16.120°

提示:由正弦定理可得 $a:b:c=3:5:7$.不妨设 $a=3$,$b=5$,$c=7$,则 c 边最大,所以角 C 最大. 由余弦定理的推论,得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{3^2+5^2-7^2}{2\times3\times5}=-\frac{1}{2}$.

因为 $0°<C<180°$,所以 $C=120°$.

三、解答题

17.**解**:由正弦定理,得 $\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{6\sin30°}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

由 $b=6$,$a=2\sqrt{3}$,知 $b>a$,所以 $B>A$.

所以 $B=60°$或 $120°$.

(1) 当 $B=60°$时,$C=180°-A-B=180°-30°-60°=90°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中,$C=90°$,$a=2\sqrt{3}$,$b=6$,则 $c=4\sqrt{3}$.

(2) 当 $B=120°$时,$C=180°-A-B=180°-30°-120°=30°$,所以 $A=C$,则有 $a=c=2\sqrt{3}$.

18.**解**:(1)由 $b+c=2c\cos^2\frac{A}{2}=2c\cdot\frac{1+\cos A}{2}=c(1+\cos A)$,得 $b=c\cos A$.

结合余弦定理,得

$b=c\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.

化简,得 $a^2+b^2=c^2$.

所以 $\triangle ABC$ 是直角三角形.

(2)由 $(a+b+c)(a+b-c)=3ab$,

得 $(a+b)^2-c^2=3ab$,

即 $a^2+b^2-c^2=ab$.

所以 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{ab}{2ab}=\frac{1}{2}$.

因为 $0°<C<180°$,所以 $C=60°$.

由 $2\cos A\sin B=\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$,

化简,得 $\sin(A-B)=0$.

因为 A,B 均为 $\triangle ABC$ 的内角,所以 $A=B$.

因此 $\triangle ABC$ 为等边三角形.

19.**解**:(1)设 $\triangle ABC$外接圆的半径为R,则$2R=\frac{c}{\sin C}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$,可得$R=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

所以$S_1=\pi R^2=\frac{4\pi}{3}$.

(2)若$\sin B=2\sin A$,则$b=2a$.又$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$,所以$4=a^2+4a^2-4a^2\cdot\cos\frac{\pi}{3}$,

解得$a^2=\frac{4}{3}$.

所以$S_2=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}a\cdot2a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

20.**解**:(1)由已知,得$\sin^2B+\sin^2C-\sin^2A=\sin B\sin C$,故由正弦定理,得$b^2+c^2-a^2=bc$.

由余弦定理的推论,得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$.因为$0<A<\pi$,所以$A=\frac{\pi}{3}$.

(2)由(1)知,$B=\frac{2\pi}{3}-C$.由题设及正弦定理,得$\sqrt{2}\sin A+\sin\left(\frac{2\pi}{3}-C\right)=2\sin C$,即$\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C+\frac{1}{2}\sin C=2\sin C$,可得$\cos\left(C+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.由于$0<C<\frac{2\pi}{3}$,所以$\sin\left(C+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

故$\sin C=\sin\left(C+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(C+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\frac{\pi}{3}-\cos\left(C+\frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

21.**解**:设航行 xh 后,甲船到达 C 点,乙船到达 D 点,

在$\triangle BCD$ 中,$BC=100-50x$,$BD=30x$,其中 $0\leqslant x\leqslant2$,$\angle CBD=60°$,

由余弦定理,得 $CD^2=(100-50x)^2+(30x)^2-2(100-50x)(30x)\cos60°=4900x^2-13000x+10000$,

当 $x=\frac{13000}{2\times4900}=\frac{65}{49}=1\frac{16}{49}$ 时,CD^2 最小,从而 CD 最小.

答:航行 $1\frac{16}{49}$h 后,两船之间的距离最短.

22.**解**:(1)由$\frac{\tan A}{\tan B}=\frac{2c-b}{b}$,结合正弦定理,得$\frac{\sin A\cos B}{\cos A\sin B}=\frac{2\sin C-\sin B}{\sin B}$.

又 $\sin B\neq0$,

所以$\sin A\cos B=2\sin C\cos A-\sin B\cos A$,

即 $\sin A\cos B+\sin B\cos A=2\sin C\cos A$,

即 $\sin(A+B)=2\sin C\cos A=\sin C$.

因为 $\sin C\neq0$,所以 $\cos A=\frac{1}{2}$.

又 $0<A<\pi$,所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

(2)由(1)知 $\cos A=\frac{1}{2}$,

所以 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2-bc$.①

由 $\sin(B+C)=6\cos B\sin C=\sin A$,

得$\frac{a}{c}=6\times\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$,

即 $2a^2=3b^2-3c^2$.　②

由①②消去 a,得 $b^2+2bc-5c^2=0$,

即$\left(\frac{b}{c}\right)^2+2\cdot\frac{b}{c}-5=0$,

解得$\frac{b}{c}=-\sqrt{6}-1$(舍去),或$\frac{b}{c}=\sqrt{6}-1$.

第 1 期

第 3~4 版同步周测参考答案

一、选择题

1.C　2.C

3.A

提示:由已知,得 $a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$.

所以 $a_3=3$,$a_4=-2$,$a_5=-5$,$a_6=-3$.

4.B

提示:由 $a_n=\frac{2n+1}{n}=2+\frac{1}{n}$,

可知数列$\{a_n\}$为递减数列.

5.D

提示:$a_{51}=1+2\times(51-1)=101$.

6.C

提示:由题意,得$\begin{cases}2x=a+b,\\2b=x+2x,\end{cases}$所以 $a=\frac{x}{2}$,$b=\frac{3}{2}x$.所以$\frac{a}{b}=\frac{1}{3}$.

7.C

8.A

提示:设公差为 d,则$\begin{cases}4a_1+6d=0,\\a_1+4d=5,\end{cases}$解得 $a_1=-3$,$d=2$. 所以 $a_n=2n-5$,$S_n=n^2-4n$.故选 A.

9.D　10.B　11.A

12.C

提示:因为$S_{2018}>0$,$S_{2019}<0$,

所以$\frac{2018(a_1+a_{2018})}{2}=\frac{2018(a_{1009}+a_{1010})}{2}>0$,$\frac{2019(a_1+a_{2019})}{2}=2019a_{1010}<0$,

所以$a_{1009}+a_{1010}>0$,$a_{1010}<0$,所以$a_{1009}>0$,$a_{1010}<0$,$|a_{1009}|>|a_{1010}|$,

由等差数列的单调性即可得出:此数列中绝对值最小的项为a_{1010},故选C.

二、填空题

13.$a_n=\sqrt{n}$($n\in\mathbf{N}_+$)

14.4

提示:设公差为 d,则由已知,可得 $d=2a_1$. 所以$\frac{S_{10}}{S_5}=\frac{10(a_1+a_{10})}{5(a_1+a_5)}=\frac{2(2a_1+9d)}{2a_1+4d}=\frac{2(2a_1+18a_1)}{2a_1+8a_1}=4$.

15.1 或 2

提示:因为 a,b,c 成等差数列,所以 $2b=a+c$. 又 $\Delta=4b^2-4ac=(a+c)^2-4ac=(a-c)^2\geqslant0$,所以有 1 或 2 个交点.

16.25

提示:设这两个数列分别为$\{a_n\}$,$\{b_n\}$,则 $a_n=3n+2$,$b_n=4n-1$.

令 $a_k=b_m$,则 $3k+2=4m-1$. 所以 $3k=4m-3=3(m-1)+m$.所以 m 能被 3 整除.

设 $m=3p$($p\in\mathbf{N}_+$),则 $k=4p-1$.

因为 $k,m\in[1,100]$,

所以 $1\leqslant3p\leqslant100$,$1\leqslant4p-1\leqslant100$.

解得 $1\leqslant p\leqslant25$. 所以它们共有 25 个相同的项.

三、解答题

17.**解**:(1)数列的奇数项为 0,偶数项为 1,因此通项公式可用分段形式来表示,记为 $a_n=\begin{cases}0(n\text{ 为奇数}),\\1(n\text{ 为偶数}),\end{cases}$或 $a_n=\frac{1}{2}-(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{2}$.

(2) 数列的分母是序号 n 加 1,分子是分母的平方减去 1,故 $a_n=\frac{(n+1)^2-1}{n+1}$.

(3)$a_n=\frac{(-1)^n}{n(n+1)}$.

(4)$a_n=\frac{7}{9}(10^n-1)$.

18.**解**:(1)设$\{a_n\}$的公差为 d,

由已知条件,知$\begin{cases}a_1+d=1,\\a_1+4d=-5,\end{cases}$

解得 $a_1=3$,$d=-2$.

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=-2n+5$.

(2)$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=-n^2+4n=4-(n-2)^2$,所以当 $n=2$ 时,S_n 取得最大值 4.

19.(1)**证明**:因为 $a_n=4-\frac{4}{a_{n-1}}$($n\geqslant2$),所以 $a_{n+1}=4-\frac{4}{a_n}$($n\in\mathbf{N}_+$).

所以 $b_{n+1}-b_n=\frac{1}{a_{n+1}-2}-\frac{1}{a_n-2}=\frac{1}{2-\frac{4}{a_n}}-\frac{1}{a_n-2}=\frac{a_n-2}{2(a_n-2)}=\frac{1}{2}$.

又 $b_1=\frac{1}{a_1-2}=\frac{1}{2}$,所以$\{b_n\}$是首项为$\frac{1}{2}$,公差为$\frac{1}{2}$的等差数列.

(2)**解**:由(1)可得 $b_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(n-1)=\frac{n}{2}$.所以$\frac{1}{a_n-2}=\frac{n}{2}$.所以 $a_n=2+\frac{2}{n}$.

20.**解**:(1)依题意,数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{12}$ 是首项为 20,公差为 15 的等差数列,所以 $a_n=20+15(n-1)=15n+5$($1\leqslant n\leqslant12$),且 $a_{12}=15\times12+5=185$;

$a_{13},a_{14},a_{15},\cdots,a_{30}$ 是首项为 $a_{13}=a_{12}-10=175$,公差为-10 的等差数列,所以 $a_n=175+(n-13)\cdot(-10)=-10n+305$($13\leqslant n\leqslant30$).

综上,

$a_n=\begin{cases}15n+5(1\leqslant n\leqslant12,n\in\mathbf{N}_+),\\-10n+305(13\leqslant n\leqslant30,n\in\mathbf{N}_+).\end{cases}$

(2)6 月 1 日到 12 日的销售量为$\frac{12\times(20+185)}{2}=1230$(件),

13 日到 30 日的销售量为 $18\times175+\frac{18\times17\times(-10)}{2}=1620$(件),

故 6 月份的总销售量为 $1230+1620=2850$(件).

21.**解**:(1)$a_1=S_1=-14$,$a_2=S_2-S_1=-4$,$a_3=S_3-S_2=-2$.

由于 $a_2-a_1\neq a_3-a_2$,故这个数列不是等差数列.

(2)当 $n=1$ 时,$a_1=S_1=-14$.

当 $n\geqslant2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-7n-8-[(n-1)^2-7(n-1)-8]=2n-8$.

因为 $n=1$ 时不满足 $a_n=2n-8$,

所以 $a_n=\begin{cases}-14(n=1),\\2n-8(n\geqslant2).\end{cases}$

(3)由 $a_n=2n-8$,可知当 $n\leqslant4$ 时,$a_n\leqslant0$;当 $n\geqslant5$ 时,$a_n>0$.

所以当 $n\leqslant4$ 时,$T_n=-S_n=-n^2+7n+8$;

当 $n\geqslant5$ 时,$T_n=-S_4+(S_n-S_4)=S_n-2S_4=n^2-7n-8-2\times(-20)=n^2-7n+32$.

故 $T_n=\begin{cases}-n^2+7n+8(1\leqslant n\leqslant4),\\n^2-7n+32(n\geqslant5).\end{cases}$

22.**解**:(1)由 $a_3+a_8=a_4+a_7=8$,$a_4\cdot a_7=15$,且 $a_4<a_7$,

解得 $a_4=3$,$a_7=5$.

故该数列的公差 $d=\frac{a_7-a_4}{7-4}=\frac{2}{3}$.

所以通项公式为 $a_n=a_4+(n-4)\cdot d=3+(n-4)\cdot\frac{2}{3}=\frac{2n+1}{3}$.

(2)$b_n=\frac{1}{9a_{n-1}a_n}$

$=\frac{1}{9\left(\frac{2}{3}n-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}n+\frac{1}{3}\right)}$

$=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$.

又 $b_1=\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)$,

所以 $S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$.

①

第 2 期

第 3~4 版同步周测参考答案

一、选择题

1.B　2.C

3.A

提示： 由等比数列的定义，可得 $a_{2019}=8a_{2016}=a_{2016}\cdot q^3$，所以 $q^3=8$，即 $q=2$.

4.A

提示： 由 $a_1>0$，且 $q>1$，知 $a_{n+1}>a_n$，所以是递增数列.

5.C

提示： $\frac{a_{19}+a_{20}}{a_9+a_{10}}=q^{10}=\frac{b}{a}$，$\frac{a_{99}+a_{100}}{a_9+a_{10}}=q^{90}=(q^{10})^9=\left(\frac{b}{a}\right)^9$，$a_{99}+a_{100}=\left(\frac{b}{a}\right)^9(a_9+a_{10})=\frac{b^9}{a^8}$.

6.C

7.D

提示： 由 $a_4+a_8=\frac{1}{8}(a_1+a_5)$，得 $a_4(1+q^4)=\frac{1}{8}a_1(1+q^4)$，则 $a_4=\frac{1}{8}a_1$，所以 $q^3=\frac{1}{8}$，即 $q=\frac{1}{2}$，

则 $\frac{S_8}{S_4}=\frac{a_1\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^8\right]}{a_1\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^4\right]}=1+\frac{1}{16}=\frac{17}{16}$，故选 D.

8.A

提示： 根据题意，设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，

若 $a_2a_6=8(a_4-2)$，则有 $a_4^2=8(a_4-2)$，即 $a_4^2-8a_4+16=0$，解得 $a_4=4$，

则 $q^3=\frac{a_4}{a_1}=\frac{4}{\frac{1}{2}}=8$，所以 $q=2$，所以 $S_{2019}=\frac{a_1(1-2^{2019})}{1-2}=2^{2018}-\frac{1}{2}$.故选 A.

9.C

提示： 设这女子每天分别织布 a_n 尺，则数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，公比 $q=2$.

则 $\frac{a_1(2^5-1)}{2-1}=5$，解得 $a_1=\frac{5}{31}$.所以 $a_2=\frac{5}{31}\times2=\frac{10}{31}$.故选 C.

10.C

提示： 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，则 $S_{10}-S_5=q^5S_5$，所以 $6-2=2q^5$，所以 $q^5=2$，所以 $a_{16}+a_{17}+a_{18}+a_{19}+a_{20}=a_1q^{15}+a_2q^{15}+a_3q^{15}+a_4q^{15}+a_5q^{15}=q^{15}(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)=q^{15}S_5=2^3\times2=16$.

11.D

提示： 由等比数列的性质，可得 $a_1a_5=a_2a_4$.因为 $a_2^2+a_4^2=900-2a_1a_5$，所以 $a_2^2+a_4^2=900-2a_2a_4$，

所以 $(a_2+a_4)^2=900$，又 $a_n>0$，所以 $a_2+a_4=30$，又 $a_5=9a_3$，所以 $a_1(q+q^3)=30$，$a_3q^2=9a_3$，$q>0$.

解得 $q=3$，$a_1=1$. 所以 $a_{2019}=3^{2018}=(3^4)^{504}\times3^2=81^{504}\times9$，所以 a_{2019} 的个位数字是 9.故选 D.

12.C

提示： 设 a,b,c 的公比为 q，

由已知得 $\begin{cases}2m=a+b,\\2n=b+c,\end{cases}$

即 $\begin{cases}2m=a+aq,\\2n=\frac{c}{q}+c,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}\frac{a}{m}=\frac{2}{1+q},\\\frac{c}{n}=\frac{2q}{1+q}.\end{cases}$

所以 $\frac{a}{m}+\frac{c}{n}=\frac{2}{1+q}+\frac{2q}{1+q}=2$.

故选 C.

二、填空题

13.$-\frac{\sqrt{2}}{4}$

提示： $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=-\sqrt{2}x\Rightarrow x=-\frac{\sqrt{2}}{4}$.

14.$-\frac{1}{3}$

15.$\frac{1}{16}$

提示： 由题意知，正方形的边长构成以 $\sqrt{2}$ 为首项，以 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 为公比的等比数列，现已知共得到 1023 个正方形，则有 $1+2+\cdots+2^{n-1}=1023$，所以 $n=10$，所以最小正方形的边长为 $\sqrt{2}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^9=\frac{1}{16}$.

16.①②③

提示： 对于命题①，由题设条件知 $\begin{cases}2a_n=a_{n-1}+a_{n+1},\\a_n^2=a_{n-1}\cdot a_{n+1},\end{cases}$ 消去 a_n，得 $a_{n+1}=a_{n-1}$，再由 $\{a_n\}$ 为等差数列，得公差 $d=0$，所以 $a_n=a_{n+1}$.对于命题②，由 $S_n=an^2+bn(a,b\in\mathbf{R})$，得 $a_n=b+a+(n-1)\cdot2a$，当 $n=1$ 时，也适合上式，所以 $\{a_n\}$ 为等差数列.对于命题③，由 $S_n=1-(-1)^n$，得 $a_n=2\cdot(-1)^{n-1}$，当 $n=1$ 时，也适合上式，故 $\{a_n\}$ 为等比数列.

三、解答题

17.**解：** 设原来的三个数分别为 $3t$，$4t$，$5t(t\neq0)$.则 $(3t+1)5t=16t^2$，解得 $t=5$，或 $t=0$(舍)，所以 $3t=15$，$4t=20$，$5t=25$.所以原来的三个数分别为 15，20，25.

18.**解：** 由已知，得

$\begin{cases}a_1\cdot3^4=162,&①\\\frac{a_1(1-3^n)}{1-3}=242.&②\end{cases}$

由①，得 $81a_1=162$，解得 $a_1=2$.

将 $a_1=2$ 代入②，解得 $n=5$.

所以首项 $a_1=2$，项数 $n=5$.

19.**解：** 当 $x=1$ 时，$S_n=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

当 $x\neq1$ 时，由 $S_n=1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^3}+\cdots+\frac{n}{x^{n-1}}$，得 $\frac{S_n}{x}=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}+\cdots+\frac{n-1}{x^{n-1}}+\frac{n}{x^n}$，

两式相减，得 $\left(1-\frac{1}{x}\right)S_n=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\cdots+\frac{1}{x^{n-1}}-\frac{n}{x^n}=\frac{1-\frac{1}{x^n}}{1-\frac{1}{x}}-\frac{n}{x^n}=\frac{x^{n+1}-x-n(x-1)}{x^n(x-1)}$.

故 $S_n=\frac{x^{n+1}-x-n(x-1)}{x^{n-1}(x-1)^2}$.

综上，$S_n=\begin{cases}\frac{n(n+1)}{2}(x=1),\\\frac{x^{n+1}-x-n(x-1)}{x^{n-1}(x-1)^2}(x\neq1).\end{cases}$

20.**解：** 剩下9000元要30个月还清，设这30个月的还款数构成数列 $\{a_n\}$，

则 $a_1=300+9000\times1\%=390$，$a_2=300+(9000-300)\times1\%=387$，

所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为390，公差为−3的等差数列. 故 $a_{10}=390-3\times9=363$，即第10个月应交付363元；

$S_{30}=30\times390+\frac{30\times29\times(-3)}{2}=10395$，

即实际花费10395+1000=11395元.

21.(1)**解：** 当 $n\leqslant6$ 时，$\{a_n\}$ 是首项为120，公差为−10的等差数列，故 $a_n=120-10(n-1)=130-10n$；

当 $n\geqslant7$ 时，$\{a_n\}$ 是首项为 $(130-60)\times\frac{3}{4}=70\times\frac{3}{4}$，公比为 $\frac{3}{4}$ 的等比数列，故 $a_n=70\times\frac{3}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n-7}=70\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n-6}$.

所以第 n 年初 M 的价值 $a_n=\begin{cases}130-10n,1\leqslant n\leqslant6,\\70\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n-6},n\geqslant7\end{cases}(n\in\mathbf{N}_+)$.

(2)**证明：** 记 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，

当 $1\leqslant n\leqslant6$ 时，$S_n=\frac{(120+130-10n)n}{2}=(125-5n)n$，所以 $A_n=\frac{S_n}{n}=125-5n$.故 $A_n\in[95,120]$，此时 $A_n>80$.

当 $n\geqslant7$ 时，由于 $S_6=570$，故 $S_n=570+(a_7+a_8+\cdots+a_n)=570+\frac{70\times\frac{3}{4}\times\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n-6}\right]}{1-\frac{3}{4}}=780-210\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n-6}$，

所以 $A_n=\frac{S_n}{n}\ \frac{780-210\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n-6}}{n}$.因为 $\{a_n\}$ 是递减数列，所以 $\{A_n\}$ 是递减数列.

又 $A_8=\frac{780-210\times\left(\frac{3}{4}\right)^2}{8}\approx82.734>80$，$A_9=\frac{780-210\times\left(\frac{3}{4}\right)^3}{9}\approx76.823<80$，所以必须在第九年初对 M 更新.

22.(1)**证明：** 点 (a_n,a_{n+1}) 在函数 $f(x)=x^2+2x$ 的图像上，则 $a_{n+1}=a_n^2+2a_n$，即 $a_{n+1}+1=a_n^2+2a_n+1$，得 $a_{n+1}+1=(a_n+1)^2$，

两边取常用对数，则 $\lg(a_{n+1}+1)=\lg(a_n+1)^2(a_n+1>0,a_{n+1}+1>0$ 恒成立)，

即 $\lg(a_{n+1}+1)=2\lg(a_n+1)$，

得 $\frac{\lg(a_{n+1}+1)}{\lg(a_n+1)}=2$.

故数列 $\{\lg(1+a_n)\}$ 是等比数列.

(2)**解：** $\lg T_n=\lg(1+a_1)+\lg(1+a_2)+\cdots+\lg(1+a_n)$，而数列 $\{\lg(1+a_n)\}$ 是以 $\lg3$ 为首项，2为公比的等比数列，即 $\lg T_n=\frac{(1-2^n)\lg3}{1-2}=(2^n-1)\lg3=\lg3^{2^n-1}$，故 $T_n=3^{2^n-1}$.

又因为 $\lg(1+a_n)=2^{n-1}\lg3=\lg3^{2^{n-1}}$，

所以 $1+a_n=3^{2^{n-1}}$，故 $a_n=3^{2^{n-1}}-1$.

第 3 期

第 2~3 版章节测试参考答案

一、选择题

1.A

2.C

提示： 令 $a_n=40+(n-1)\cdot(-3)<0$，解得 $n>14\frac{1}{3}$.故第一个负数项是第 15 项.

3.C

提示： 根据题意，$a_3\cdot a_5=a_4^2=81$.

4.C

提示： $a_1=S_1=2$，$a_2=S_2-S_1=1$，$a_3=S_3-S_2=3$.

5.C　6.B

7.B

提示： 由题意 $a_3^2=a_1a_7$，即 $(a_1+2d)^2=a_1(a_1+6d)$，得 $a_1d=2d^2$.又 $d\neq0$，所以 $a_1=2d$，$S_7=7a_1+\frac{7\times6}{2}d=35d=35$. 所以 $d=1$，$a_1=2$，$a_n=a_1+(n-1)d=n+1$.

8.D　9.C　10.D　11.C　12.B

二、填空题

13.$a_n=\frac{(2n-1)(2n+1)}{2n}$

提示： 这是一个分数数列，各分母组成偶数数列，通项为 $2n$；各分子可分解为 1×3，3×5，5×7，7×9，…，通项为 $(2n-1)(2n+1)$，故 $a_n=\frac{(2n-1)(2n+1)}{2n}$.

14.$\frac{121}{3}$　15.136

16.$n+2^n$

提示： 由题意设等差数列 $\{a_n\}$ 和等比数列 $\{b_n\}$ 的公差和公比分别为 d,q，由题意可得 $a_1+b_1=3$，$a_1+d+b_1q=6$，$a_1+2d+b_1q^2=11$，$a_1+3d+b_1q^3=20$，$a_1+4d+b_1q^4=37$，结合数列的各项均为正整数可解得 $a_1=1$，$b_1=2$，$d=1$，$q=2$，所以 $e_n=a_n+b_n=1+(n-1)\times1+2\times2^{n-1}=n+2^n$.

三、解答题

17.**解：** 因为 $a_1=2$，$a_n=\frac{2a_{n-1}}{a_{n-1}+2}(n\geqslant2,n\in\mathrm{N}_+)$，

所以 $a_2=\frac{2a_1}{a_1+2}=\frac{2\times2}{2+2}=1$；$a_3=\frac{2a_2}{a_2+2}=\frac{2\times1}{1+2}=\frac{2}{3}$；$a_4=\frac{2a_3}{a_3+2}=\frac{2\times\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}+2}=\frac{1}{2}$.

即 $a_1=2=\frac{2}{1}$，$a_2=\frac{2}{2}$，$a_3=\frac{2}{3}$，$a_4=\frac{2}{4}$，

所以数列 $\{a_n\}$ 的一个通项公式为 $a_n=\frac{2}{n}(n\in\mathrm{N}_+)$.

18.**解：** (1)设 $\{a_n\}$ 的公比为 q，由题设得 $2q^2=4q+16$，即 $q^2-2q-8=0$.解得 $q=-2$(舍去)，或 $q=4$.

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2\times4^{n-1}=2^{2n-1}$.

(2)由(1)得 $b_n=(2n-1)\log_2 2=2n-1$.因为 $b_1=1$，$b_{n+1}-b_n=2(n+1)-1-2n+1=2$，

所以 $\{b_n\}$ 是以1为首项，2为公差的等差数列. 所以 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n=\frac{n(1+2n-1)}{2}=n^2$.

19.**解：** (1)设公差为 d.由 $a_{17}=a_1+16d$，即 $-12=-60+16d$，解得 $d=3$.

所以 $a_n=-60+3(n-1)=3n-63$.

(2)由 $a_n\leqslant0$，得 $3n-63\leqslant0$，即 $n\leqslant21$，

所以 $|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{30}|$

$=-(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{21})+(a_{22}+a_{23}+\cdots+a_{30})$

$=(3+6+9+\cdots+60)+(3+6+\cdots+27)$

$=\frac{(3+60)}{2}\times20+\frac{(3+27)}{2}\times9$

$=765$.

20.**解：** (1)由题知，对 $n\in\mathbf{N}_+$ 有 $b_n=500-a_n$，

所以当 $n\in\mathbf{N}_+$ 且 $n\geqslant2$ 时，$a_n=\frac{4}{5}a_{n-1}+\frac{3}{10}\cdot(500-a_{n-1})$，即 $a_n=\frac{1}{2}a_{n-1}+150$.

所以 $a_n-300=\frac{1}{2}(a_{n-1}-300)$，

所以当 $a_1=300$ 时，$\{a_n-300\}$ 不是等比数列.

当 $a_1\neq300$ 时，$\{a_n-300\}$ 是以 a_1-300 为首项，$\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列.

(2)当 $a_1=200$ 时，$a_n-300=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot(a_1-300)$，

即 $a_n=300-\frac{100}{2^{n-1}}$，

所以 $a_{10}=300-\frac{100}{2^9}\approx300$.

所以第 10 个星期一选 A 种菜的大约有 300 人.

21.(1)**证明：** 因为 $a_{n+1}=a_n+6a_{n-1}(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}_+)$，

所以 $a_{n+1}+2a_n=3a_n+6a_{n-1}=3(a_n+2a_{n-1})(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}_+)$.

又 $a_1=5$，$a_2=5$，所以 $a_2+2a_1=15$，

所以 $a_n+2a_{n-1}\neq0(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}_+)$，

所以 $\frac{a_{n+1}+2a_n}{a_n+2a_{n-1}}=3(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}_+)$，

所以数列 $\{a_{n+1}+2a_n\}$ 是以 15 为首项，3 为公比的等比数列.

(2)**解：** 由(1)得 $a_{n+1}+2a_n=15\times3^{n-1}=5\times3^n$，则 $a_{n+1}=-2a_n+5\times3^n$，

所以 $a_{n+1}-3^{n+1}=-2(a_n-3^n)$.又因为 $a_1-3=2$，所以 $a_n-3^n\neq0$，

所以 $\{a_n-3^n\}$ 是以 2 为首项，−2 为公比的等比数列.

所以 $a_n-3^n=2\times(-2)^{n-1}$，

即 $a_n=2\times(-2)^{n-1}+3^n(n\in\mathbf{N}_+)$.

(3)**解：** 由(2)及 $3^nb_n=n(3^n-a_n)$ 可得 $3^nb_n=-n(a_n-3^n)=-n[2\times(-2)^{n-1}]$

$=n(-2)^n$，

所以 $b_n=n\left(-\frac{2}{3}\right)^n$.

所以 $T_n=|b_1|+|b_2|+\cdots+|b_n|=\frac{2}{3}+2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cdots+n\left(\frac{2}{3}\right)^n$，①

①$\times\frac{2}{3}$，得 $\frac{2}{3}T_n=\left(\frac{2}{3}\right)^2+2\times\left(\frac{2}{3}\right)^3+\cdots+(n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^n+n\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$，②

①−②，得 $\frac{1}{3}T_n=\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^n-n\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

$=2-3\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}-n\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}=2-(n+3)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$，所以 $T_n=6-2(n+3)\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

22.(1)**证明：** 因为 $f(x)=\frac{1}{4^x+2}$，

所以 $f(x)+f(1-x)=\frac{1}{4^x+2}+\frac{1}{4^{1-x}+2}=\frac{1}{4^x+2}+\frac{4^x}{4+2\cdot4^x}=\frac{2+4^x}{2(2+4^x)}=\frac{1}{2}$.

(2)**解：** 由(1)知 $f(x)+f(1-x)=\frac{1}{2}$，

故 $f(0)+f(1)=f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{n-1}{n}\right)$

$=f\left(\frac{2}{n}\right)+f\left(\frac{n-2}{n}\right)=\cdots=\frac{1}{2}$.

$a_n=f(0)+f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)+f(1)$，

又 $a_n=f(1)+f\left(\frac{n-1}{n}\right)+\left(\frac{n-2}{n}\right)+\cdots+f(0)$，

两式相加，得 $2a_n=[f(0)+f(1)]+\left[f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]+\left[f\left(\frac{2}{n}\right)+f\left(\frac{n-2}{n}\right)\right]+\cdots+[f(1)+f(0)]=\frac{1}{2}(n+1)$，

所以 $a_n=\frac{n+1}{4}$，$n\in\mathrm{N}_+$.

(3)**解：** 由(2)知 $a_n=\frac{n+1}{4}$，$n\in\mathrm{N}_+$.

所以 $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{4}$，$n\in\mathrm{N}_+$，

所以数列 $\{a_n\}$ 是一个等差数列，

所以 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n\left(\frac{1}{2}+\frac{n+1}{4}\right)}{2}=\frac{n(n+3)}{8}$，

由 $S_n\geqslant\lambda a_n\Rightarrow\frac{n(n+3)}{8}\geqslant\lambda\cdot\frac{n+1}{4}\Rightarrow\lambda\leqslant\frac{n(n+3)}{2(n+1)}=\frac{1}{2}\left[(n+1)-\frac{2}{n+1}+1\right]$.

又因为 $g(n)=(n+1)-\frac{2}{n+1}+1$ 在 $n\in\mathrm{N}_+$ 上为递增函数，

所以 $\left[(n+1)-\frac{2}{n+1}+1\right]_{\min}=g(1)=2$，

所以 $\lambda\leqslant1$，

所以实数 λ 的取值范围为 $(-\infty,1]$.