第12期

第2~3版综合测试(二)参考答案

一、选择题

1.A　2.D

3.C

提示：由题意，得 $\frac{c}{\sin C}=2\times4=8$.所以 $S=\frac12 ab\sin C=\frac12\cdot\frac{16\sqrt2}{c}\cdot\sin C=\frac{8\sqrt2}{8}=\sqrt2$.

4.B

提示：$c=2a\cos B=2a\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，即 $a^2=b^2$，故 $a=b$.

5.C　6.C

7.C

提示：设公比为 q，因为数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，所以 $a_4\cdot a_{14}=a_7\cdot a_{11}=6$.又因为 $a_4+a_{14}=5$，所以 $a_4(5-a_4)=6$，解得 $a_4=2$，或 $a_4=3$.所以 $a_{14}=3$，或 $a_{14}=2$，所以 $q^{10}=\frac32$，或 $q^{10}=\frac23$.因为 $\frac{a_{20}}{a_{10}}=q^{10}$，所以 $\frac{a_{20}}{a_{10}}=\frac32$ 或 $\frac23$.

8.B

9.D

提示：由题意知，方程 $x^2-ax-6a=0$ 有两根分别为 m 和 n，

则有 $\begin{cases}\Delta=a^2+24a>0\Rightarrow a<-24 \text{ 或 } a>0,\\ m+n=a,\\ mn=-6a.\end{cases}$

又 $0<n-m\le5$，

所以 $(n-m)^2=(n+m)^2-4nm=a^2+24a\le25$，即 $a^2+24a-25\le0$，解得 $-25\le a\le1$.

所以 $-25\le a<-24$ 或 $0<a\le1$.

故实数 a 的取值范围是 $[-25,-24)\cup(0,1]$.

10.B

提示：因为 $\boldsymbol{p}\parallel\boldsymbol{q}$，所以 $(a+c)(c-a)=b(b-a)$，即 $b^2+a^2-c^2=ab$.

所以 $\cos C=\frac{b^2+a^2-c^2}{2ab}=\frac12$.

又 $0<C<\pi$，所以 $C=\frac{\pi}{3}$.

11.B

提示：将 $a_n-a_{n+1}=a_na_{n+1}$ 两边同时除以 a_na_{n+1}，可得 $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=1$，即 $b_{n+1}-b_n=1$，

所以 $\{b_n\}$ 是公差 $d=1$ 的等差数列，

其前9项和为 $\frac{9(b_1+b_9)}{2}=90$，

所以 $b_1+b_9=20$，

将 $b_9=b_1+8d=b_1+8$，代入得 $b_1=6$，所以 $b_4=9$，$b_6=11$，所以 $b_4b_6=99$.

12.C

提示：设 $AC=x$，则 $AB=26-x$，$\cos C=\frac{AC^2+BC^2-AB^2}{2AC\cdot BC}=\frac{13x-25}{12x}$.

故 $S=\frac12 AC\cdot BC\sin C=\frac12\cdot x\cdot24\cdot\sqrt{1-\left(\frac{13x-25}{12x}\right)^2}=5\sqrt{(x-1)(25-x)}\le5\cdot\frac{(x-1)+(25-x)}{2}=60$，

当且仅当 $x-1=25-x$，即 $x=13$ 时，等号成立.故 $\triangle ABC$ 面积的最大值是60.

二、填空题

13.$(\sqrt5,\sqrt{13})$　14.-4

15.$-\frac78$

提示：根据等比数列的性质，知 S_3,S_6-S_3,S_9-S_6 成等比数列，即 $8,7-8,S_9-7$ 成等比数列，所以 $(-1)^2=8(S_9-7)$，解得 $S_9=7\frac18$，所以 $a_4+a_5+\cdots+a_9=7\frac18-8=-\frac78$.

16.$\frac92$

提示：$\frac{(x+1)(2y+1)}{xy}=\frac{2xy+x+2y+1}{xy}=\frac{2xy+5}{xy}=2+\frac{5}{xy}$.因为 $4=x+2y\ge2\sqrt{2xy}$，所以 $0<xy\le2$，$\frac{5}{xy}\ge\frac52$.所以 $\frac{(x+1)(2y+1)}{xy}$ 的最小值为 $2+\frac52=\frac92$.

三、解答题

17.解：(1)在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理，得 $b\sin C=c\sin B$，又由 $3c\sin B=4a\sin C$，得 $3b\sin C=4a\sin C$，即 $3b=4a$.

又因为 $b+c=2a$，所以 $b=\frac{4a}{3}$，$c=\frac{2a}{3}$.由余弦定理的推论，可得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+\frac49a^2-\frac{16}{9}a^2}{2\cdot a\cdot\frac23a}=-\frac14$.

(2)由(1)可得 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2B}=\frac{\sqrt{15}}{4}$，

从而 $\sin2B=2\sin B\cos B=-\frac{\sqrt{15}}{8}$，$\cos2B=\cos^2B-\sin^2B=-\frac78$.

故 $\sin\left(2B+\frac{\pi}{6}\right)=\sin2B\cos\frac{\pi}{6}+\cos2B\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{15}}{8}\times\frac{\sqrt3}{2}-\frac78\times\frac12=-\frac{3\sqrt5+7}{16}$.

18.解：设 x h后，B 船至 D 处，A 船至 C 处，$BD=20x$，$BC=100-15x$，因为 $x>0$，$100-15x>0$，所以 $0<x<\frac{20}{3}$，由余弦定理，得 $DC^2=(20x)^2+(100-15x)^2-2\cdot20x\cdot(100-15x)\cdot\cos120°$

$=325x^2-1\,000x+10\,000$

$=325\left(x-\frac{20}{13}\right)^2+10\,000-\frac{10\,000}{13}\ \left(0<x<\frac{20}{3}\right)$.

所以 $x=\frac{20}{13}$ h后，两船最近，可鸣笛问好.

19.(1)证明：由题设得 $4(a_{n+1}+b_{n+1})=2(a_n+b_n)$，即 $a_{n+1}+b_{n+1}=\frac12(a_n+b_n)$.

又因为 $a_1+b_1=1$，所以 $\{a_n+b_n\}$ 是首项为1，公比为 $\frac12$ 的等比数列.

由题设得 $4(a_{n+1}-b_{n+1})=4(a_n-b_n)+8$，即 $a_{n+1}-b_{n+1}=a_n-b_n+2$.

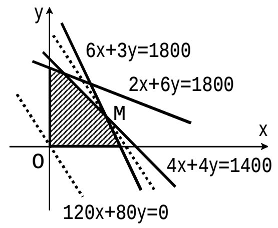
又因为 $a_1-b_1=1$，所以 $\{a_n-b_n\}$ 是首项为1，公差为2的等差数列.

(2)解：由(1)知，$a_n+b_n=\frac{1}{2^{n-1}}$，$a_n-b_n=2n-1$.

所以 $a_n=\frac12[(a_n+b_n)+(a_n-b_n)]=\frac{1}{2^n}+n-\frac12$，$b_n=\frac12[(a_n+b_n)-(a_n-b_n)]=\frac{1}{2^n}-n+\frac12$.

20.解：设每月生产布料 A，B 分别为 x 匹、y 匹，利润为 z 元，

那么 $\begin{cases}4x+4y\le1400,\\ 6x+3y\le1800,\\ 2x+6y\le1800,\\ x\ge0,\\ y\ge0,\end{cases}$ 目标函数为 $z=120x+80y$.作出上述不等式组所表示的平面区域(如图中阴影部分)，即可行域.



(第20题图)

把 $z=120x+80y$ 变形为 $y=-\frac32x+\frac{1}{80}z$，这是斜率为 $-\frac32$，在y轴上的截距为 $\frac{1}{80}z$，随 z 变化的一族平行直线.由图可以看出，当直线 $y=-\frac32x+\frac{1}{80}z$ 经过可行域上点 M 时，截距 $\frac{1}{80}z$ 最大，即 z 最大.解方程组 $\begin{cases}4x+4y=1400,\\ 6x+3y=1800,\end{cases}$ 得点 M 的坐标为 $(250,100)$，所以 $z_{\max}=120\times250+80\times100=38000$(元).

答：该公司每月生产布料 A，B 分别为250匹、100匹时，可产生最大的利润，最大的利润是38000元.

21.解：(1)因为不等式 $f(x)>0$ 的解集为 $(-1,3)$，所以-1和3是方程 $f(x)=0$ 的两实根，从而有：$\begin{cases}f(-1)=-a-b+5=0,\\ f(3)=9a+3(b-2)+3=0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}a-b+5=0,\\ 3a+b-1=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-1,\\ b=4.\end{cases}$

(2)由 $f(1)=2$，$a>0$，$b>0$ 得到 $a+b=1$，所以 $\frac1a+\frac4b=\left(\frac1a+\frac4b\right)\cdot(a+b)=5+\frac ba+\frac{4a}{b}\ge5+2\sqrt{\frac ba\cdot\frac{4a}{b}}=9$，当且仅当 $\begin{cases}\frac ba=\frac{4a}{b},\\ a+b=1,\end{cases}$

即 $\begin{cases}a=\frac13,\\ b=\frac23\end{cases}$ 时"="成立.

所以 $\frac1a+\frac4b$ 的最小值为9.

22.解：(1)因为 $f(1)=a=\frac13$，

所以 $f(x)=\left(\frac13\right)^x$.

所以 $a_1=f(1)-c=\frac13-c$，

$a_2=[f(2)-c]-[f(1)-c]=-\frac29$，

$a_3=[f(3)-c]-[f(2)-c]=-\frac{2}{27}$.

又数列 $\{a_n\}$ 成等比数列，

所以 $a_1=\frac{a_2^2}{a_3}=-\frac23=\frac13-c$，所以 $c=1$.

又公比 $q=\frac{a_2}{a_1}=\frac13$，

所以 $a_n=-\frac23\left(\frac13\right)^{n-1}=-2\left(\frac13\right)^n(n\in\mathbf{N}_+)$.

因为 $S_n-S_{n-1}=(\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}})(\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}})=\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}\ (n\ge2)$，

又 $b_n>0$，$\sqrt{S_n}>0$，

所以 $\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}}=1$，

故数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 构成一个首项为1，公差为1的等差数列，

所以 $\sqrt{S_n}=1+(n-1)\times1=n$，$S_n=n^2$.

当 $n\ge2$ 时，$b_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1$.

又 $b_1=1$ 满足上式，

所以 $b_n=2n-1(n\in\mathbf{N}_+)$.

(2)$T_n=\frac{1}{b_1b_2}+\frac{1}{b_2b_3}+\frac{1}{b_3b_4}+\cdots+\frac{1}{b_nb_{n+1}}=\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\times(2n+1)}=\frac12\times\left(1-\frac13\right)+\frac12\times\left(\frac13-\frac15\right)+\frac12\times\left(\frac15-\frac17\right)+\cdots+\frac12\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac12\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$.

由 $T_n=\frac{n}{2n+1}>\frac{1001}{2019}$，得 $n>\frac{1001}{17}$，

故满足 $T_n>\frac{1001}{2019}$ 的最小正整数为59.

第9期

第3~4版同步周测参考答案

一、选择题

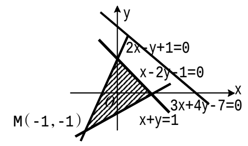
1.B　2.B　3.C　4.B　5.C

6.C　7.D　8.B　9.D　10.C

11.D

提示：作出可行域如下图所示.

因为 $\frac{|3x+4y-7|}{\sqrt{3^2+4^2}}$ 表示可行域内动点 (x,y) 到直线 $l:3x+4y-7=0$ 的距离，而由图可知，点 $M(-1,-1)$ 到直线 l 的距离最大，所以 $|3x+4y-7|_{\max}=5\times\frac{|3\times(-1)+4\times(-1)-7|}{\sqrt{3^2+4^2}}=14$.



(第11题图)

12.C

二、填空题

13.$5m+4n-1\le0$　14.1　15.$[-1,20]$

16.③④

提示：由已知条件，得 $(2a-3b+1)\cdot(2-0+1)<0$，故 $2a-3b+1<0$，①错；由 $2a-3b+1<0$，得 $3b>2a+1$，当 $a>0$ 时，可得 $\frac ba>\frac23+\frac{1}{3a}$，所以 $\frac ba$ 不存在最小值，②错；$\frac{b}{a-1}$ 表示平面区域 $2a-3b+1<0$ 内的点 (a,b) 与点 $(1,0)$ 连线的斜率，画出可行域 $\begin{cases}2a-3b+1<0,\\ a>0,\\ b>0,\end{cases}$ 可知③正确；$\sqrt{a^2+b^2}$ 表示平面区域 $2a-3b+1<0$ 内的点 (a,b) 与原点间的距离，由于原点到直线 $2x-3y+1=0$ 的距离 $d=\frac{1}{\sqrt{4+9}}=\frac{\sqrt{13}}{13}$，故 $\sqrt{a^2+b^2}>\frac{\sqrt{13}}{13}$ 恒成立，④正确.故正确说法的序号是③④.

三、解答题

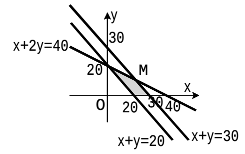
17.解：设开设初中班 x 个，高中班 y 个.

根据题意，得

$\begin{cases}20\le x+y\le30,\\ 26x+54y+2\times2x+2\times3y\le1200,\\ x\ge0,\\ y\ge0,\\ x,y\in\mathbf{N}.\end{cases}$

即 $\begin{cases}20\le x+y\le30,\\ x+2y\le40,\\ x\ge0,\\ y\ge0,\\ x,y\in\mathbf{N}.\end{cases}$

用图形表示这个限制条件，得到如图所示的平面区域(阴影部分).



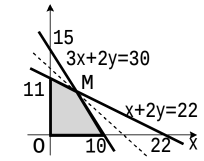
(第17题图)

18.解：设空调、洗衣机的月供应量分别是 x 台，y 台，总利润是 z 百元，可得

$\begin{cases}30x+20y\le300,\\ 5x+10y\le110,\\ x\ge0,y\ge0,\\ x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}3x+2y\le30,\\ x+2y\le22,\\ x\ge0,y\ge0,\\ x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N},\end{cases}$

目标函数为 $z=6x+8y$.

作出不等式组所表示的平面区域，如图中阴影部分所示.



(第18题图)

由 $z=6x+8y$ 得 $y=-\frac34x+\frac z8$，由图可得，当直线经过可行域上的点 M 时，截距 $\frac z8$ 最大，即 z 最大.

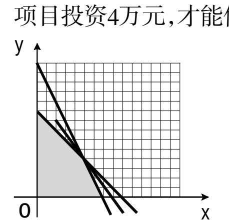
解方程组 $\begin{cases}3x+2y=30,\\ x+2y=22,\end{cases}$ 得点 M 的坐标为 $(4,9)$，满足 $x,y\in\mathbf{N}$，所以 $z_{\max}=6\times4+8\times9=96$.

答：当空调的月供应量为4台，洗衣机的月供应量为9台时，可获得最大利润，最大利润为9 600元.

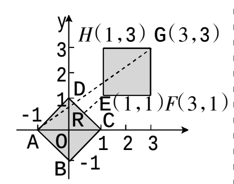
19.解：(1)由题意，知 x,y 满足的条件为 $\begin{cases}x+y\le9,\\ 0.2x+0.1y\le1.4,\\ x\ge0,\\ y\ge0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x+y\le9,\\ 2x+y\le14,\\ x\ge0,\\ y\ge0,\end{cases}$ 用图形表示如图中阴影部分(含边界)所示.

(2)目标函数为 $z=x+0.6y$，结合(1)中可行域可知，当平行直线 $x+0.6y=z$ 经过直线 $x+y=9$ 与 $2x+y=14$ 的交点 A 时，z 最大.解方程组 $\begin{cases}x+y=9,\\ 2x+y=14,\end{cases}$ 得 $A(5,4)$.

答：投资人对甲项目投资5万元，对乙项目投资4万元，才能使可能的盈利最大.



(第19题图)



(第20题图)

20.解：(1)不等式 $|x|+|y|\le1$ 等价于不等式组 $\begin{cases}x+y\le1,x\ge0,y\ge0,\\ x-y\le1,x\ge0,y\le0,\\ x-y\ge-1,x\le0,y\ge0,\\ x+y\ge-1,x\le0,y\le0,\end{cases}$ $\begin{cases}|x-2|\le1,\\ |y-2|\le1,\end{cases}$ 等价于 $\begin{cases}1\le x\le3,\\ 1\le y\le3,\end{cases}$

由此可作出点 P 和点 Q 所在的平面区域，分别为如图所示的四边形 $ABCD$ 内部(含边界)，四边形 $EFGH$ 内部(含边界).

(2)由图易知 $|AG|$(或 $|BG|$)为所求的最大值，$|ER|$ 为所求的最小值，易求得 $|AG|=\sqrt{(-1-3)^2+(0-3)^2}=5$，$|ER|=\frac12|OE|=\frac{\sqrt2}{2}$.

21.解：(1)画出满足不等式组的平面区域，如图1所示，再作出点 $P(-2,1)$，由图易知 $|PQ|$ 的最小值为2.

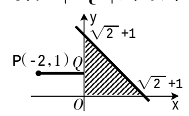


图1

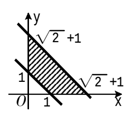


图2

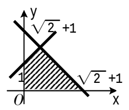


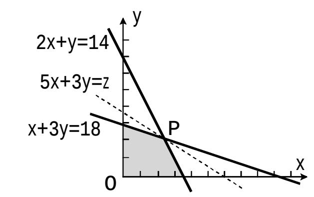
图3

(2)不等式 $x-ky+k\ge0$ 中，$x-ky+k=0$ 表示过点 $(0,1)$ 的直线.

结合图1中的平面区域，可知当 $k=\pm1$ 时，新不等式组满足要求，如图2、图3所示.故 $k=\pm1$.

22.解：(1)设生产 A，B 产品分别为 xt，yt，其利润总额为 z 万元，则约束条件为 $\begin{cases}2x+y\le14,\\ x+3y\le18,\\ x\ge0,\\ y\ge0,\end{cases}$ 目标函数为 $z=5x+3y$.画出可行域如图所示，当平行直线 $5x+3y=z$ 经过点 P 时，z 取得最大值.解方程组 $\begin{cases}2x+y=14,\\ x+3y=18,\end{cases}$ 得 $P\left(\frac{24}{5},\frac{22}{5}\right)$.所以 $z_{\max}=5x+3y=37.2$.

答：在现有原料条件下，生产 A 产品 $\frac{24}{5}$t，B 产品 $\frac{22}{5}$t 时，才能使利润最大.



(第22题图)

(2)设 B 产品的利润为 a 万元 $(a>0)$，则利润函数为 $z=5x+ay$.

若原最优解不变，则平行直线 $5x+ay=z$ 在直线 $2x+y=14$ 与直线 $x+3y=18$ 之间，所以 $-2\le-\frac5a\le-\frac13$，解得 $\frac52\le a\le15$.

所以每吨 B 产品的利润在 $\left[\frac52,15\right]$(万元)范围内变化时，原最优解不变；当超出这个范围时，最优解将变为 $(7,0)$ 或 $(0,6)$.

③

第10期

第2~3版章节测试参考答案

一、选择题

1.D 2.D 3.A 4.D 5.A 6.B

7.C 8.A 9.B

10.D

提示:由 $AC=a,BC=b$,可得圆 O 的半径 $DO=\frac{a+b}{2}$. 连接 AD,BD,则 $\triangle ACD\backsim\triangle DCB$,所以 $DC=\sqrt{AC\cdot BC}=\sqrt{ab}$.又 $\triangle CDE\backsim\triangle ODC$,则 $DE=\frac{DC^2}{DO}=\frac{2ab}{a+b}$.因为 $DE<DC<DO$,所以 $\frac{2ab}{a+b}<\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}$ $(a>0,b>0)$.

11.B

12.D

提示:取 $a=-1$,可知 A 不正确;取 $a=4$,可知 B 不正确;取 $a=1$,可知 C 不正确,故选 D.

二、填空题

13.$\left(-1,\frac{2}{3}\right)$ 14.$\frac{9}{2}$ 15.$\frac{1}{2}$

16.$(1,3)$

提示:由已知条件,可得 $a^2-b^2=3xy>0$,所以 $a^2>b^2$.又 $a>0,b>0$,所以 $a>b$.

若 a,b,c 能作为三角形的三边长,则 $b+c>a$ 且 $a+b>c$,

即 $\sqrt{x^2-xy+y^2}+\lambda\sqrt{xy}>x+y$, ①

$x+y+\sqrt{x^2-xy+y^2}>\lambda\sqrt{xy}$. ②

由①,得 $\lambda>\frac{x+y-\sqrt{x^2-xy+y^2}}{\sqrt{xy}}=\frac{3\sqrt{xy}}{x+y+\sqrt{x^2-xy+y^2}}$,

又 $\frac{3\sqrt{xy}}{x+y+\sqrt{x^2-xy+y^2}}\leqslant\frac{3\sqrt{xy}}{2\sqrt{xy}+\sqrt{2xy-xy}}=1$,所以 $\lambda>1$.

由②,同理可得 $\lambda<3$.

所以正实数 λ 的取值范围是 $(1,3)$.

三、解答题

17.**证明:**因为 $(x^2+y^2+z^2+1)-(x+y+z)$

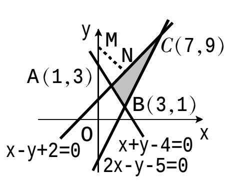
$=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}>0$,

所以 $x^2+y^2+z^2+1>x+y+z$.

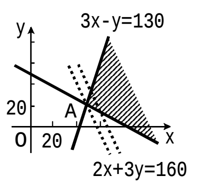
18.**解:**作出可行域,如图所示,并求出顶点的坐标 $A(1,3),B(3,1),C(7,9)$.

(1)易知平行直线 $x+2y-4=z$ 过点 C 时,z 最大,将 $C(7,9)$ 代入 $z=x+2y-4$,得最大值为 21.

(2)$z=x^2+(y-5)^2$ 表示可行域内任一点 (x,y) 到定点 $M(0,5)$ 的距离的平方,过点 M 作直线 AC 的垂线,垂足为 N,则 z 的最小值是 $|MN|^2=\frac{9}{2}$.



(第18题图)



(第19题图)

19.**解:**(1)由题意得 $x+y+z=100$,所以 $z=100-x-y$,

所以混合物成本 $C=11x+9y+4z=7x+5y+400$.

(2)由题意,得

$$\begin{cases}600x+700y+400z\geqslant56000,\\800x+400y+500z\geqslant63000,\\x\geqslant0,\\y\geqslant0.\end{cases}$$

因为 $z=100-x-y$,所以 $\begin{cases}2x+3y\geqslant160,\\3x-y\geqslant130,\\x\geqslant0,\\y\geqslant0.\end{cases}$

作出约束条件所表示的可行域,如图所示.

由 $\begin{cases}3x-y=130,\\2x+3y=160,\end{cases}$ 得点A的坐标为 $x=50,y=20$.

作直线 $7x+5y+400=C$,易知该直线截距越小,C越小,所以该直线过点A(50,20)时,直线在y轴上的截距最小,从而使C最小,此时 $C=7\times50+5\times20+400=850$(元).

答:用50千克甲种食物,20千克乙种食物,30千克丙种食物混合时,成本最低.

20.**解:**(1)第 n 次投入后,产量为 $(10+n)$ 万件,每件产品的销售价格为100元,固定成本为 $\frac{80}{\sqrt{n+1}}$ 元,科技成本投入为 $100n$,

所以年利润为

$f(n)=(10+n)\left(100-\frac{80}{\sqrt{n+1}}\right)-100n$

$=1000-\frac{80(10+n)}{\sqrt{n+1}}(n\in\mathbf{N}_+)$.

(2)$f(n)=1000-80\left(\frac{n+1}{\sqrt{n+1}}+\frac{9}{\sqrt{n+1}}\right)$

$=1000-80\left(\sqrt{n+1}+\frac{9}{\sqrt{n+1}}\right)$

$\leqslant1000-80\times6=520$,

当且仅当 $\sqrt{n+1}=\frac{9}{\sqrt{n+1}}$,

即 $n=8$ 时,等号成立.

故从今年算起第8年利润最高,最高利润为520万元.

21.**解:**(1)因为 $a>0,b>0$,所以 $a+2b+mab>0$ 恒成立等价于 $-m<\frac{1}{b}+\frac{2}{a}$ 恒成立.

因为 $a+b=2$,

所以 $\frac{1}{b}+\frac{2}{a}=\frac{1}{2}(a+b)\left(\frac{1}{b}+\frac{2}{a}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(3+\frac{a}{b}+\frac{2b}{a}\right)$

$\geqslant\frac{1}{2}\left(3+2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{2b}{a}}\right)$

$=\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$,

当且仅当 $\frac{a}{b}=\frac{2b}{a}$,即 $a=2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1),b=2(\sqrt{2}-1)$ 时取"=".

所以 $-m<\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$,得实数 m 的取值范围是 $\left(-\frac{3+2\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$.

(2)由题知 $a\neq0$.

当 $a>0$ 时,$\frac{1}{2|a|}+\frac{|a|}{b}=\frac{1}{2a}+\frac{a}{b}=\frac{a+b}{4a}+\frac{a}{b}=\frac{1}{4}+\frac{b}{4a}+\frac{a}{b}$

$\geqslant\frac{1}{4}+2\sqrt{\frac{b}{4a}\cdot\frac{a}{b}}=\frac{5}{4}$,

当且仅当 $\frac{b}{4a}=\frac{a}{b}$,即 $a=\frac{2}{3},b=\frac{4}{3}$ 时取"=";

当 $a<0$ 时,$\frac{1}{2|a|}+\frac{|a|}{b}=\frac{1}{-2a}+\frac{-a}{b}=\frac{a+b}{-4a}+\frac{-a}{b}=-\frac{1}{4}+\frac{b}{-4a}+\frac{-a}{b}\geqslant-\frac{1}{4}+2\cdot\sqrt{\frac{b}{-4a}\cdot\frac{-a}{b}}=\frac{3}{4}$,

当且仅当 $\frac{b}{-4a}=\frac{-a}{b}$,即 $a=-2,b=4$ 时取"=".

综上可知,$\frac{1}{2|a|}+\frac{|a|}{b}$ 的最小值为 $\frac{3}{4}$.

22.**解:**(1)由 $f(0)=1$,得 $c=1$,

所以 $f(x)=ax^2+bx+1$.

①若 $f(x)<0$ 的解集为 $\left(\frac{1}{2},1\right)$,则 $\frac{1}{2}$ 和 1 是方程 $ax^2+bx+1=0$ 的两根,

所以 $\frac{1}{2}+1=-\frac{b}{a}$ 且 $\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{a}$,

解得 $a=2,b=-3$.所以 $f(x)=2x^2-3x+1$.

②若 $f(1)=0$,则 $a+b+1=0$,即 $b=-a-1$ $(a<1)$.所以 $f(x)=ax^2-(a+1)x+1$.

当 $a=0$ 时,$f(x)=-x+1$,由 $f(x)>0$,得 $x<1$.

当 $a\neq0$ 时,$f(x)=(ax-1)(x-1)$

$=a\left(x-\frac{1}{a}\right)\cdot(x-1)$.

若 $0<a<1$,则 $\frac{1}{a}>1$,由 $f(x)>0$,得 $x<1$ 或 $x>\frac{1}{a}$;

若 $a<0$,则 $\frac{1}{a}<1$,由 $f(x)>0$,得 $\frac{1}{a}<x<1$.

综上,当 $a=0$ 时,$f(x)>0$ 的解集为 $(-\infty,1)$;当 $0<a<1$ 时,$f(x)>0$ 的解集为 $(-\infty,1)\cup\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$;当 $a<0$ 时,$f(x)>0$ 的解集为 $\left(\frac{1}{a},1\right)$.

(2)根据题意可设 $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)$,

由 $x_1,x_2\in(m,m+1)$,得 $m-x_1<0,m-x_2<0,m+1-x_1>0,m+1-x_2>0$.

所以 $f(m)f(m+1)$

$=(m-x_1)(m-x_2)(m+1-x_1)(m+1-x_2)$

$=[(x_1-m)(m+1-x_1)][(x_2-m)(m+1-x_2)]$

$\leqslant\left(\frac{x_1-m+m+1-x_1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{x_2-m+m+1-x_2}{2}\right)^2$

$=\frac{1}{16}$,

当且仅当 $x_1-m=m+1-x_1,x_2-m=m+1-x_2$,即 $x_1=x_2=m+\frac{1}{2}$ 时取"=".

所以 $f(m)f(m+1)$ 的最大值为 $\frac{1}{16}$.

第11期

第2~3版综合测试(一)参考答案

一、选择题

1.A

提示:由正弦定理,得 $\frac{\sqrt{5}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sin B}$,所以 $\sin B=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.又 $a<b$,所以B有两个解,即满足条件的△ABC有两个.

2.B 3.B 4.C 5.A

6.A 7.D

8.B

提示:$1\notin P$ 有两种情形,一种是 $\frac{1+1}{1+a}\geqslant2$,另一种是 $x=1$ 使分母为0,即 $1+a=0$,解得 $-1\leqslant a\leqslant0$.

9.C

提示:由 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{k}{a+b}\geqslant0$,得 $k\geqslant-\frac{(a+b)^2}{ab}$,而 $\frac{(a+b)^2}{ab}=\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+2\geqslant4$,所以 $-\frac{(a+b)^2}{ab}\leqslant-4$,

因此要使 $k\geqslant-\frac{(a+b)^2}{ab}$ 恒成立,应有 $k\geqslant-4$,即实数 k 的最小值等于 -4.

10.A

提示:因为 $\overrightarrow{P_nP_{n+1}}=(1,2)$,所以 $(1,a_{n+1}-a_n)=(1,2)$,$a_{n+1}-a_n=2$,公差为 $d=2$.

所以 $a_1+2(a_1+2)=3,3a_1+1=0,a_1=-\frac{1}{3}$,

所以 $S_n=n\left(-\frac{1}{3}\right)+\frac{n(n-1)}{2}\cdot2=n\left(n-\frac{4}{3}\right)$.

11.B

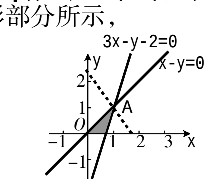
提示:由于不等式 $-x^2+6x-8>0$ 的解集为 $\{x|2<x<4\}$,

所以 $a=2,c=4$.又角 A,B,C 依次成等差数列,

所以 $B=\frac{\pi}{3}$,所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times2\times4\times\sin\frac{\pi}{3}=2\sqrt{3}$.

12.B

提示:作出不等式组表示的区域如图阴影部分所示,



(第12题图)

由图可知,$z=ax+by(a>0,b>0)$ 过点 $A(1,1)$ 时取最大值,所以 $a+b=4,ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=4$,

因为 $a>0,b>0$,所以 $ab\in(0,4]$.

二、填空题

13.$(-5,0)$

提示:由 $-2<a<b<3$,知 $\begin{cases}-2<a<3,\\-3<-b<2,\\a<b,\end{cases}$

解得 $-5<a-b<0$.

14.33

提示:$a_5+a_6+a_7=S_7-S_4=49-16=33$.

15.$\frac{21}{2}$

16.3

提示:由A,B,C成等差数列,可知 $B=\frac{\pi}{3}$.由余弦定理,得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{1}{2}$,即 $a^2+c^2-b^2=ac$.所以 $\frac{(a+c)^2-b^2}{ac}=\frac{a^2+c^2-b^2+2ac}{ac}=\frac{ac+2ac}{ac}=3$.

三、解答题

17.**解:**(1)由余弦定理的推论,得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$,即 $\frac{2}{3}=\frac{(3c)^2+c^2-(\sqrt{2})^2}{2\times3c\times c}$,

解得 $c=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(2)因为 $\frac{\sin A}{a}=\frac{\cos B}{2b}$,由正弦定理,得 $\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\cos B}{2b}$,所以 $2\sin B=\cos B$.

又 $\sin^2B+\cos^2B=1$,故 $\cos^2B=\frac{4}{5}$.因为 $\sin B>0$,所以 $\cos B=2\sin B>0$,从而 $\cos B=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

因此 $\sin\left(B+\frac{\pi}{2}\right)=\cos B=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

18.**解:**将 $A=60°$ 看作已知条件,

由 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ 及 $a=\sqrt{3},B=45°$,得 $b=\sqrt{2}$.

由 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$ 及 $a=\sqrt{3},A=60°,B=45°$,得 $c=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.

若已知条件为 $b=\sqrt{2}$,则由 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$,得 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以 $A=60°$ 或 $120°$,与答案矛盾.

若已知条件为 $c=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$,则 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=2$,所以 $b=\sqrt{2}$,$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$,所以 $A=60°$.

综上所述,涂污处的已知条件为 $c=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.

19.**解:**因为 $x^2-2x+3=(x-1)^2+2>0$,

所以不等式 $\frac{4x+m}{x^2-2x+3}<2$ 同解于 $4x+m<2x^2-4x+6$,即 $2x^2-8x+6-m>0$.

要使原不等式对任意实数 x 恒成立,只要 $2x^2-8x+6-m>0$ 对任意实数 x 恒成立.

所以 $\Delta<0$,即 $64-8(6-m)<0$,解得 $m<-2$.

所以实数 m 的取值范围为 $(-\infty,-2)$.

20.(1)**证明:**因为 $a_1=S_1,a_n+S_n=n$,①

所以 $a_1+S_1=1$,得 $a_1=\frac{1}{2}$.又 $a_{n+1}+S_{n+1}=n+1$,②

①②两式相减得 $2(a_{n+1}-1)=a_n-1$,即 $\frac{a_{n+1}-1}{a_n-1}=\frac{1}{2}$,也即 $\frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{1}{2}$,

故数列 $\{c_n\}$ 是等比数列.

(2)**解:**因为 $c_1=a_1-1=-\frac{1}{2}$,所以 $c_n=-\frac{1}{2^n}$,

$a_n=c_n+1=1-\frac{1}{2^n}$,

当 $n\geqslant2$ 时,$a_{n-1}=1-\frac{1}{2^{n-1}}$.故当 $n\geqslant2$ 时,$b_n=a_n-a_{n-1}=\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^n}$.

又 $b_1=a_1=\frac{1}{2}$,即 $b_n=\frac{1}{2^n}$.

21.**解:**设楼层总数为 n,总费用为 y 元,则征地面积为 $\frac{2.5A}{n}$ m²,征地费用为 $\frac{2.5A}{n}\times2388=\frac{5970A}{n}$ 元,

楼层建筑费用为

$[445+445+(445+30)+(445+30\times2)+\cdots+445+30\times(n-2)]\cdot\frac{A}{n}=\left(15n+\frac{30}{n}+400\right)A$,

从而 $y=\frac{5970A}{n}+15nA+\frac{30A}{n}+400A=\left(15n+\frac{6000}{n}+400\right)A\geqslant1000A$(元),当且仅当 $15n=\frac{6000}{n}$,即 $n=20$(层)时,总费用 y 最少.

故当这幢宿舍楼的楼层为20层时,总费用最少,且最少总费用为 $1000A$ 元.

22.**解:**(1)设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d,等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q.依题意,得 $\begin{cases}3q=3+2d,\\3q^2=15+4d,\end{cases}$ 解得 $d=3,q=3$.

故 $a_n=3+3(n-1)=3n,b_n=3\times3^{n-1}=3^n$.

所以,$\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=3n$,$\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=3^n$.

(2)$a_1c_1+a_2c_2+\cdots+a_{2n}c_{2n}=(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1})+(a_2b_1+a_4b_2+a_6b_3+\cdots+a_{2n}b_n)$

$=\left[3n+\frac{n(n-1)}{2}\times6\right]+(6\times3+12\times3^2+18\times3^3+\cdots+6n\times3^n)$

$=3n^2+6(1\times3+2\times3^2+\cdots+n\times3^n)$.

记 $T_n=1\times3+2\times3^2+\cdots+n\times3^n$, ①

则 $3T_n=1\times3^2+2\times3^3+\cdots+n\times3^{n+1}$, ②

②-①,得 $2T_n=-3-3^2-3^3-\cdots-3^n+n\times3^{n+1}=-\frac{3(1-3^n)}{1-3}+n\times3^{n+1}=\frac{(2n-1)3^{n+1}+3}{2}$.

所以 $a_1c_1+a_2c_2+\cdots+a_{2n}c_{2n}=3n^2+6T_n=\frac{(2n-1)3^{n+2}+6n^2+9}{2}(n\in\mathbf{N}_+)$.