第8期

第3~4版章节测试参考答案

一、选择题

1~6.DCCADA　7~12.BCCACA

二、填空题

13.1

14.0

15.$\{k\mid k=0$ 或 $k\geqslant 1\}$

16.2

三、解答题

17.**证明**:原方程可化为$-3x^2+(4a+4c-2b)x+b^2-4ac=0$,

$\Delta=(4a+4c-2b)^2-4\times(-3)(b^2-4ac)=16a^2+16b^2+16c^2-16ab-16bc-16ac=8[(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2]$.

因为不论 a,b,c 为何值,都有$(a-b)^2\geqslant 0,(a-c)^2\geqslant 0,(b-c)^2\geqslant 0$,

所以$\Delta\geqslant 0$,所以该方程必有实数根.

18.**解**:(1)符合条件的是$f(x)=ax+b$.

若模型为$f(x)=2^x+a$,则由$f(1)=2^1+a=4$,得$a=2$,即$f(x)=2^x+2$,

此时$f(2)=6$,$f(3)=10$,$f(4)=18$,与已知相差太大,不符合.

若模型为$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}x+a$,则$f(x)$是减函数,与已知不符合.

由已知得$\begin{cases}a+b=4,\\3a+b=7,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=\dfrac{3}{2},\\b=\dfrac{5}{2},\end{cases}$

所以$f(x)=\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}(x\in\mathbf{N})$.

(2)2020年预计年产量为$f(7)=\frac{3}{2}\times 7+\frac{5}{2}=13$,2020年实际年产量为$13\times(1-30\%)=9.1$.

答:最适合的模型解析式为$f(x)=\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}(x\in\mathbf{N})$,2020年的实际产量为9.1万件.

19.**解**:(1)设$f(x)=ax^2+bx+c$,$a\neq 0$,

因为二次函数$f(x)$满足$f(x)=f(2-x)$,所以$f(x)$的图象关于直线$x=1$对称,即$-\frac{b}{2a}=1$.①

因为$f(1)=4$,$f(3)=0$,

所以$f(1)=a+b+c=4$,②

$f(3)=9a+3b+c=0$,③

联立①②③,解得$a=-1,b=2,c=3$,

故$f(x)=-x^2+2x+3$.

(2)设$g(x)=-x^2+2x+3-2^x-m$,

在$[1,4)$上$f(x)$的图象恒在曲线$y=2^x+m$的上方等价于$g(x)>0$在$[1,4)$上恒成立,即$m<-x^2+2x+3-2^x$在$[1,4)$上恒成立,

因为$y=-x^2+2x+3$在$[1,4)$上单调递减,$y=2^x$在$[1,4)$上单调递增,

所以$h(x)=-x^2+2x+3-2^x$在$[1,4)$上单调递减,则$[h(x)]_{\min}=h(4)=-16+8+3-16=-21$.

故m的取值范围为$(-\infty,-21]$.

20.**解**:(1)因为$f(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$,

所以$f(2)+f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2^2}{1+2^2}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{2^2}{1+2^2}+\frac{1}{2^2+1}=1$,

同理可得$f(3)+f\left(\frac{1}{3}\right)=1$,

$f(4)+f\left(\frac{1}{4}\right)=1$.

(2)由(1)猜想$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=1$.

证明:$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{1}{x^2+1}=1$.

(3)令$S=f(1)+f(2)+\cdots+f(2020)+f\left(\frac{1}{2020}\right)+f\left(\frac{1}{2019}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)$,

则$S=f(1)+f\left(\frac{1}{2}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{2020}\right)+f(2020)+f(2019)+\cdots+f(2)+f(1)$,

则$2S=4040$,故$S=2020$.

21.**解**:(1)要使函数$f(x)$有意义,x必须满足$\frac{1+x}{1-x}>0$,所以$-1<x<1$,

因此,$f(x)$的定义域为$(-1,1)$.

(2)函数$f(x)$为奇函数.因为$f(x)$的定义域为$(-1,1)$,对$(-1,1)$内的任意x有,

$f(-x)=\frac{2^{-x}-1}{2^{-x}+1}+\log_2\frac{1-x}{1+x}=\frac{1-2^x}{1+2^x}-\log_2\frac{1+x}{1-x}=-f(x)$,所以$f(x)$为奇函数.

(3)函数$g(x)$的零点即方程$g(x)=0$的根,即$f(1-x^2)+f\left(\frac{3x}{2}\right)=0$的根,

又$f(x)$为奇函数,所以$f\left(\frac{3x}{2}\right)=-f(1-x^2)=f(x^2-1)$.

任取$x_1,x_2\in(-1,1)$,且$x_1<x_2$,

$f(x_1)-f(x_2)=\left(\frac{2^{x_1}-1}{2^{x_1}+1}+\log_2\frac{1+x_1}{1-x_1}\right)-\left(\frac{2^{x_2}-1}{2^{x_2}+1}+\log_2\frac{1+x_2}{1-x_2}\right)=\frac{2(2^{x_1}-2^{x_2})}{(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)}+\log_2\left(\frac{1+x_1}{1-x_1}\cdot\frac{1-x_2}{1+x_2}\right)$.

因为$x_1<x_2$,所以$0<2^{x_1}<2^{x_2}$,

所以$\frac{2(2^{x_1}-2^{x_2})}{(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)}<0$.

因为$x_1,x_2\in(-1,1)$且$x_1<x_2$,

所以$(1-x_1)(1+x_2)-(1+x_1)(1-x_2)=2(x_2-x_1)>0$,

所以$0<\frac{1+x_1}{1-x_1}\cdot\frac{1-x_2}{1+x_2}<1$,

所以$\log_2\left(\frac{1+x_1}{1-x_1}\cdot\frac{1-x_2}{1+x_2}\right)<0$,

所以$f(x_1)-f(x_2)<0$,即$f(x_1)<f(x_2)$,所以$f(x)$在定义域$(-1,1)$上为增函数,

所以由$f\left(\frac{3x}{2}\right)=-f(1-x^2)=f(x^2-1)$,得$\frac{3x}{2}=x^2-1$,解得$x=2$或$-\frac{1}{2}$,

验证当$x=2$时,$1-x^2<-1$不符合题意;当$x=-\frac{1}{2}$时,符合题意,所以函数$g(x)$的零点为$x=-\frac{1}{2}$.

22.**解**:(1)因为$f(x)+g(x)=e^x$,

所以$f(-x)+g(-x)=e^{-x}$,

因为函数$f(x)$为偶函数,$g(x)$为奇函数,所以$f(x)-g(x)=e^{-x}$,

所以$f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$,$g(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

(2)易知$\frac{g(x)}{f(x)}$为奇函数,其函数图象关于$(0,0)$中心对称,

所以函数$F(x)=\frac{g\left(x-\frac{1}{2}\right)}{f\left(x-\frac{1}{2}\right)}+1$的图象关于点$\left(\frac{1}{2},1\right)$中心对称,

即对任意的$x\in\mathbf{R}$,$F(1-x)+F(x)=2$成立.

因为$H(n)=F\left(\frac{1}{n}\right)+F\left(\frac{2}{n}\right)+F\left(\frac{3}{n}\right)+\cdots+F\left(\frac{n-1}{n}\right)$,

$H(n)=F\left(\frac{n-1}{n}\right)+F\left(\frac{n-2}{n}\right)+F\left(\frac{n-3}{n}\right)+\cdots+F\left(\frac{1}{n}\right)$,

两式相加,得

$2H(n)=\left[F\left(\frac{1}{n}\right)+F\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]+\left[F\left(\frac{2}{n}\right)+F\left(\frac{n-2}{n}\right)\right]+\left[F\left(\frac{3}{n}\right)+F\left(\frac{n-3}{n}\right)\right]+\cdots+\left[F\left(\frac{n-1}{n}\right)+F\left(\frac{1}{n}\right)\right]$,

即$2H(n)=2(n-1)$,所以$H(n)=n-1$.

所以$g(2x)>H(n)\cdot g(x)$,即$e^{2x}-e^{-2x}>(n-1)(e^x-e^{-x})$.

所以$(e^x-e^{-x})[(e^x+e^{-x})-(n-1)]>0$.

因为$x\in(0,1]$,所以$e^x-e^{-x}>0$,

所以$e^x+e^{-x}+1>n$恒成立.

令$t=e^x$,$t\in(1,e]$,则$y=t+\frac{1}{t}+1$在$(1,e]$上单调递增.所以$y=e^x+e^{-x}+1$在$(0,1]$上单调递增.所以$y>3$,

所以$n\leqslant 3$.又已知$n\geqslant 2$,所以$n=2$,或$n=3$.

第5期

第3~4版同步周测参考答案

一、选择题

1~6.AABBCD　7~12.DCBDBB

二、填空题

13.$(-\infty,-4)$　14.$\frac{4\sqrt{3}}{3}$

15.$\left(\frac{1}{3},1\right)$　16.$\frac{4\sqrt{3}}{9}$

三、解答题

17.**解**:(1)$\frac{\log_3 4}{\log_9 8}=\frac{\log_3 2^2}{\log_{3^2}2^3}=\frac{2\log_3 2}{\frac{3}{2}\log_3 2}=\frac{4}{3}$.

(2)原式$=\frac{1}{4}+\left(\frac{4}{3}\right)^{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)}+\lg(2\times 10)-\lg 2-(\log_3 2)\cdot(\log_2 3)+(\sqrt{2}-1)^0=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+\lg 2+1-\lg 2-(\log_3 2)\cdot\frac{1}{\log_3 2}+1=1+1-1+1=2$.

18.(1)**证明**:任设$x_1<x_2$,$f(x_1)-f(x_2)=\log_2(2^{x_1}+1)-\log_2(2^{x_2}+1)=\log_2\frac{2^{x_1}+1}{2^{x_2}+1}$,

因为$x_1<x_2$,所以$0<2^{x_1}+1<2^{x_2}+1$,

所以$0<\frac{2^{x_1}+1}{2^{x_2}+1}<1$,所以$\log_2\frac{2^{x_1}+1}{2^{x_2}+1}<0$,即$f(x_1)<f(x_2)$,所以函数$f(x)$在定义域R上是增函数.

(2)**解**:由$g(x)=m+f(x)$,

所以$m=g(x)-f(x)=\log_2\left(1-\frac{2}{2^x+1}\right)$,

当$1\leqslant x\leqslant 2$时,$\frac{2}{5}\leqslant\frac{2}{2^x+1}\leqslant\frac{2}{3}$,$\frac{1}{3}\leqslant 1-\frac{2}{2^x+1}\leqslant\frac{3}{5}$,故$m\in\left[\log_2\frac{1}{3},\log_2\frac{3}{5}\right]$.

19.**解**:(1)根据题意,函数$f(x)=x^{-m+3}$为偶函数,且$f(3)<f(5)$,则$-m+3>0$,又$m\in\mathbf{N}$,可得$m=0$或1或2.

当$m=0$时,$f(x)=x^3$为奇函数,不满足题意;当$m=1$时,$f(x)=x^2$,满足题意;

当$m=2$时,$f(x)=x$为奇函数,不满足题意.所以$m=1$,$f(x)=x^2$.

(2)根据题意,$g(x)=\log_a[f(x)-ax]=\log_a(x^2-ax)=\log_a\left[\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}\right]$,

其中$a>0$,且$a\neq 1$.

设$t=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}$,则$y=g(x)=\log_a t$,

当$0<a<1$时,$0<\frac{a}{2}<\frac{1}{2}$,函数$t=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}$在$(2,3)$是增函数,$y=\log_a t$为减函数,

则$g(x)=\log_a[f(x)-ax]$在$(2,3)$上为减函数,不符合题意;

当$a>1$时,$\frac{a}{2}>\frac{1}{2}$,$t=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}$在$\left(\frac{a}{2},+\infty\right)$是增函数,

又由$x^2-ax>0$,得$x>a$,函数y在$(a,+\infty)$上是增函数,

此时若$g(x)=\log_a[f(x)-ax](a>0$,且$a\neq 1)$在$(2,3]$上为增函数,则有$\begin{cases}a>1,\\a\leqslant 2,\end{cases}$

可得$1<a\leqslant 2$,故实数a的取值范围为$(1,2]$.

20.**解**:(1)函数$f(x)$为奇函数.

证明:由$\frac{x+1}{x-1}>0$,解得$x<-1$或$x>1$,

所以函数$f(x)$的定义域为$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

对任意的$x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$,有$f(-x)=\ln\frac{-x+1}{-x-1}=\ln\frac{x-1}{x+1}=\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{-1}=-\ln\frac{x+1}{x-1}=-f(x)$,

所以函数$f(x)$为奇函数.

(2)令$g(x)=\frac{x+1}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}$,易知$g(x)$在区间$(1,+\infty)$单调递减,

由复合函数的单调性可得$f(x)$在区间$(1,+\infty)$单调递减.

(3)由$x^2+x+3=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}>1$;$2x^2-4x+7=2(x-1)^2+5>1$,

所以$f(x^2+x+3)>-f(-2x^2+4x-7)=f(2x^2-4x+7)$,

等价于$x^2+x+3<2x^2-4x+7$,所以$x^2-5x+4>0$,所以$x\in(-\infty,1)\cup(4,+\infty)$.

21.**解**:(1)函数$f(x)=\lg[(a^2-1)x^2+(a+1)x+1]$的定义域为$\mathbf{R}$,

即$(a^2-1)x^2+(a+1)x+1>0$在$\mathbf{R}$上恒成立.

当$a^2-1=0$时,得$a=-1$或$a=1$.

当$a=1$时,显然$2x+1>0$在$\mathbf{R}$上不能恒成立,故舍去;

当$a=-1$时,$1>0$恒成立.

当$a^2-1\neq 0$,即$a\neq\pm 1$时,

则$\begin{cases}a^2-1>0,\\\Delta=(a+1)^2-4(a^2-1)<0,\end{cases}$

解得$a>\frac{5}{3}$或$a<-1$.

综上,实数a的取值范围为$(-\infty,-1]\cup\left(\frac{5}{3},+\infty\right)$.

(2)设$u(x)=(a^2-1)x^2+(a+1)x+1$,因为$f(x)$的值域为$\mathbf{R}$,

所以$u(x)=(a^2-1)x^2+(a+1)x+1$的函数值要取遍所有的正数,

即$(0,+\infty)$是$u(x)$值域的子集.

当$a^2-1=0$时,得$a=-1$或$a=1$.当$a=1$时,符合题意;当$a=-1$时,不符合题意.

当$a\neq\pm 1$时,函数$u(x)$为二次函数,即函数$u(x)=(a^2-1)x^2+(a+1)x+1$的图象与x轴有交点且开口向上,

则$\begin{cases}a^2-1>0,\\\Delta=(a+1)^2-4(a^2-1)\geqslant 0,\end{cases}$

解得$1<a\leqslant\frac{5}{3}$.

综上可知,实数a的取值范围为$\left[1,\frac{5}{3}\right]$.

22.**解**:(1)函数$f(x)=\log_4(4^x+1)+kx$为偶函数,所以$f(-x)=f(x)$,

所以$\log_4(4^{-x}+1)-kx=\log_4(4^x+1)+kx$,

得$2kx=\log_4\frac{4^x+1}{4^x}-\log_4(4^x+1)=\log_4 4^{-x}=-x$,

得$2k=-1$,即$k=-\frac{1}{2}$.

(2)若$x\in[1,2]$时,函数$f(x)$的图象恒在$g(x)$图象的下方,则$f(x)\leqslant g(x)$恒成立,

即$\log_4(4^x+1)-\frac{1}{2}x\leqslant\log_4(3\cdot 2^x+a)$,

即$\log_4\frac{4^x+1}{2^x}\leqslant\log_4(3\cdot 2^x+a)$,

化简得$2^x+\frac{1}{2^x}\leqslant 3\cdot 2^x+a$,

即$a\geqslant -2\times 2^x+\frac{1}{2^x}$恒成立.

因为$y=-2\cdot 2^x+\frac{1}{2^x}$在$[1,2]$上单调递减,所以当$x=1$时,函数取得最大值$y=-4+\frac{1}{2}=-\frac{7}{2}$,所以$a\geqslant -\frac{7}{2}$,

所以实数a的取值范围为$\left[-\frac{7}{2},+\infty\right)$.

(3)当$a>-3$时,函数$y=-4^{f(x)-kx}+16^{g(x)}=-4^{\log_4(4^x+1)}+4^{\log_4(3\times 2^x+a)^2}=-4^x-1+(3\times 2^x+a)^2=8\times(2^x)^2+6a\times 2^x+a^2-1$.

设$t=2^x$,因为$x\in[0,1]$,所以$1\leqslant t\leqslant 2$,

则设$m(t)=8t^2+6at+a^2-1$,函数图象的对称轴为$t=-\frac{6a}{2\times 8}=-\frac{3a}{8}$,

因为$a>-3$,所以$-\frac{3a}{8}<\frac{9}{8}$,

若$-\frac{3a}{8}\leqslant 1$,即$a\geqslant -\frac{8}{3}$,则函数$m(t)$在$[1,2]$上的最小值$h(a)=m(1)=a^2+6a+7$;

若$1<-\frac{3a}{8}<\frac{9}{8}$,即$-3<a<-\frac{8}{3}$,则函数$m(t)$在$[1,2]$上的最小值$h(a)=m\left(-\frac{3a}{8}\right)=-\frac{1}{8}a^2-1$.

综上,函数y在$x\in[0,1]$上的最小值$h(a)=\begin{cases}a^2+6a+7,a\geqslant -\dfrac{8}{3},\\-\dfrac{1}{8}a^2-1,-3<a<-\dfrac{8}{3}.\end{cases}$

第 6 期

第 2~3 版章节测试参考答案

一、选择题

1~6.BDBBDD

7~12.BCDAAD

二、填空题

13.$y=x^{\frac{1}{2}}$

14.$\frac{1}{2}$

提示:因为函数 $f(x)$ 是奇函数,所以 $f(0)=0$,即 $a-\frac{1}{2^0+1}=0$,解得 $a=\frac{1}{2}$.

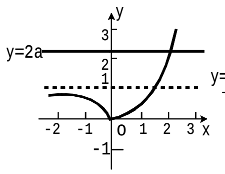
15.$\left(0,\frac{1}{2}\right)$

提示:函数 $y=a^x-1$ 的图象是由函数 $y=a^x$ 的图象向下平移一个单位长度得到的,

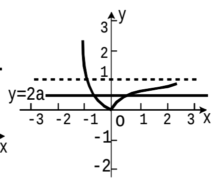
当 $a>1$ 时,作出函数 $y=|a^x-1|$ 的图象如图①,此时 $2a>2$,

故直线 $y=2a$ 与函数 $y=|a^x-1|$ 的图象只有一个交点,与题意不符;

当 $0<a<1$ 时,$0<2a<2$,作出函数 $y=|a^x-1|$ 的图象如图②,由题意可知 $0<2a<1$,即 $0<a<\frac{1}{2}$.



图①



图②

16.8

提示:$\log_2 3\times\log_3 4\times\log_4 5\times\cdots\log_{k+1}(k+2)=\frac{\lg 3}{\lg 2}\times\frac{\lg 4}{\lg 3}\times\cdots\times\frac{\lg(k+2)}{\lg(k+1)}=\log_2(k+2)$,

则 $k+2=2^n(n\in Z)$,

又 $k\in[1,1000]$,

故 $k+2=2^2,2^3,\cdots,2^9$,

故 $k\in\{2,6,14,30,62,126,254,510\}$,所以在区间 $[1,1000]$ 内共有 8 个“期盼数”.

三、解答题

17.**解**:因为 $a>1$,所以 $f(x)=\log_a x$ 在 $[a,2a]$ 上是增函数,所以最大值为 $f(2a)$,最小值为 $f(a)$.

所以 $f(2a)-f(a)=\log_a 2a-\log_a a=\frac{1}{2}$,

即 $\log_a 2=\frac{1}{2}$,所以 $a=4$.

18.**解**:(1)$(9\sqrt{3})^{-\frac{4}{5}}=\left(3^2\times 3^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{4}{5}}=\left(3^{\frac{5}{2}}\right)^{-\frac{4}{5}}=3^{-2}=\frac{1}{9}$.

(2)$\log_2(\log_3 81)+\ln e^2-\lg 1000+\log_a 1=\log_2 4+2\ln e-3+0=1$.

19.**解**:(1)$f(x)=\log_2\left(\frac{1}{x+a}+1\right)$

$=\log_2\frac{x+a+1}{x+a}$,

则 $\frac{x+a+1}{x+a}>0\Rightarrow$ 定义域 $A=\{x|x<-a-1$ 或 $x>-a\}$,因为 $f(x)$ 是奇函数,故任意的 $x\in A$,$f(-x)=-f(x)$,

即 $\log_2\frac{-x+a+1}{-x+a}=-\log_2\frac{x+a+1}{x+a}=\log_2\frac{x+a}{x+a+1}$.

所以 $\frac{-x+a+1}{-x+a}=\frac{x+a}{x+a+1}\Leftrightarrow(1+a)^2-x^2=a^2-x^2\Leftrightarrow a=-\frac{1}{2}$.

(2)$f(2^x+1)>\log_2(m-2^x)$

$\Rightarrow\log_2\left(\frac{1}{2^x+\frac{1}{2}}+1\right)>\log_2(m-2^x)$

$\Rightarrow m<2^x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^x+\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}$.

令 $u=2^x+\frac{1}{2}$,$x\in(-\infty,0)$,

所以 $u\in\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$,$g(u)=u+\frac{1}{u}+\frac{1}{2}$.

由对勾函数性质,知 $u=1$ 时,$g(u)$ 取得最小值.$g(1)=\frac{5}{2}$,所以 $m<\frac{5}{2}$.又由 $m-2^x>0$,得 $m>2^x$,故 $m\geqslant 1$,所以 $1\leqslant m<\frac{5}{2}$.故实数 m 的取值范围是 $\left[1,\frac{5}{2}\right)$.

20.**解**:(1)因为 $\begin{cases}k^2+k-1=1,\\(2-k)(1+k)>0,\end{cases}$

所以 $k=1$,所以 $f(x)=x^2$.

(2)易知 $g(x)=-mx^2+(2m-1)x+1$,

对称轴为 $x=\frac{2m-1}{-2(-m)}=1-\frac{1}{2m}$.

①若 $0<1-\frac{1}{2m}<1$,即 $m>\frac{1}{2}$,

则 $g\left(1-\frac{1}{2m}\right)=\frac{4(-m)\cdot 1-(2m-1)^2}{4(-m)}=5$,

所以 $m=\frac{5\pm 2\sqrt{6}}{2}$,又 $m=\frac{5-2\sqrt{6}}{2}<\frac{1}{2}$(舍去),所以 $m=\frac{5+2\sqrt{6}}{2}$;

②若 $1-\frac{1}{2m}\leqslant 0$,即 $0<m\leqslant\frac{1}{2}$,

则 $g(0)=1\neq 5$,不符合题意.

所以 $m=\frac{5+2\sqrt{6}}{2}$.

21.**解**:(1)令 $t=2^x\in[2,4]$,则 $y=f(x)=at^2-2at+1-b(t\in[2,4])$,图象的对称轴 $t=1$,$a>0$,

所以 $t=2$ 时,$y_{min}=4a-4a+1-b=1$;$t=4$ 时,$y_{max}=16a-8a+1-b=9$,解得 $a=1$,$b=0$.

(2)由题知,$4^x-2\cdot 2^x+1-k\cdot 4^x\geqslant 0$ 在 $x\in[-1,1]$ 上有解.设 $t=2^x$,因为 $x\in[-1,1]$,

所以 $t\in\left[\frac{1}{2},2\right]$,所以 $k\leqslant\frac{t^2-2t+1}{t^2}=1-\frac{2}{t}+\frac{1}{t^2}$,

再令 $\frac{1}{t}=m$,则 $m\in\left[\frac{1}{2},2\right]$,

所以 $k\leqslant m^2-2m+1=(m-1)^2$,

令 $h(m)=m^2-2m+1=(m-1)^2$,又 $m\in\left[\frac{1}{2},2\right]$,所以 $[h(m)]_{max}=h(2)=1$,所以 $k\leqslant 1$.故实数 k 的取值范围为 $(-\infty,1]$.

22.**解**:(1)因为 $x\in[-1,1]$,

所以 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x\in\left[\frac{1}{3},3\right]$,

$y=[f(x)]^2-2af(x)+3=\left[\left(\frac{1}{3}\right)^x\right]^2-2a\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x+3=\left[\left(\frac{1}{3}\right)^x-a\right]^2+3-a^2$.

由一元二次函数的性质分三种情况:

若 $a<\frac{1}{3}$,则当 $\left(\frac{1}{3}\right)^x=\frac{1}{3}$,即 $x=1$ 时,$y_{min}=g(a)=\frac{28}{9}-\frac{2a}{3}$;

若 $\frac{1}{3}\leqslant a\leqslant 3$,则当 $\left(\frac{1}{3}\right)^x=a$,即 $x=-\log_3 a$ 时,$y_{min}=g(a)=3-a^2$;

若 $a>3$,则当 $\left(\frac{1}{3}\right)^x=3$,即 $x=-1$ 时,$y_{min}=g(a)=12-6a$.

所以 $g(a)=\begin{cases}\frac{28}{9}-\frac{2a}{3},a<\frac{1}{3},\\3-a^2,\frac{1}{3}\leqslant a\leqslant 3,\\12-6a,a>3.\end{cases}$

(2)假设存在满足题意的 m,n,

因为 $m>n>3$,且 $g(a)=12-6a$ 在区间 $(3,+\infty)$ 内是减函数,

$g(a)$ 的定义域为 $[n,m]$,值域为 $[n^2,m^2]$,

所以 $\begin{cases}12-6m=n^2,\\12-6n=m^2.\end{cases}$

两式相减,得 $6(m-n)=(m+n)(m-n)$,因为 $m>n>3$,所以 $m+n=6$,但这与 $m>n>3$ 矛盾,所以满足题意的 m,n 不存在.

第 7 期

第3~4版同步周测参考答案

一、选择题

1~6.BCBBCB　7~12.CDBADB

二、填空题

13.$x=\frac{3}{2}$　14.$[2,3]$　15.2

16.1011

三、解答题

17.**解**:(1)由题意,

知 $\begin{cases}2(m+1)\neq 0,\\(4m)^2-4\times 2(m+1)(2m-1)>0,\end{cases}$

解得 $m<1$ 且 $m\neq -1$,

即当 $m<1$ 且 $m\neq -1$ 时,

函数 $f(x)$ 有两个零点.

(2)根据二次函数图象的性质可得

$\begin{cases}2(m+1)>0,\\f(0)<0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2(m+1)<0,\\f(0)>0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}2(m+1)>0,\\2m-1<0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2(m+1)<0,\\2m-1>0,\end{cases}$

解得 $-1<m<\frac{1}{2}$,

故实数 m 的取值范围为 $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$.

18.**证明**:(1)因为对于任意 $x\in\mathbf{R}$,恒有 $g(x)\leqslant f(x)$,即 $x^2+(b-2)x+c-b\geqslant 0$ 恒成立,

所以 $\Delta=(b-2)^2-4(c-b)\leqslant 0$,化简得 $c\geqslant\frac{b^2}{4}+1$.于是 $c\geqslant 1$.

而 $c^2-b^2\geqslant\left(\frac{b^2}{4}+1\right)^2-b^2=\left(\frac{b^2}{4}-1\right)^2\geqslant 0$,所以 $c^2\geqslant b^2$,故 $c\geqslant|b|$.

(2)由题意 $h(x)=(x+c)^2-f(x)=(2c-b)x+c(c-1)$,

由(1)知 $2c-b=c+(c-b)>0$,

$c(c-1)\geqslant 0$,

于是当 $x\in(0,+\infty)$ 时,$h(x)>0$,故函数 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内没有零点.

19.**解**:(1)当 $a=-1$ 时,$y=f(x)=(2^x)^2-2\cdot 2^x+1$,$x\in[-1,2]$,

令 $t=2^x$,则 $y=t^2-2t+1\left(\frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 4\right)$,

所以函数 $f(x)$ 的值域为 $[0,9]$.

(2)方程 $f(x)=0$ 有解,即 $(2^x)^2+2a\cdot 2^x+1=0$ 有解,

令 $t=2^x$,则方程 $t^2+2at+1=0$ 在 $t\in(0,+\infty)$ 有解,即 $-2a=\frac{t^2+1}{t}=t+\frac{1}{t}$ 在 $t\in(0,+\infty)$ 有解,

由对勾函数的性质知,当 $t\in(0,+\infty)$ 时,$t+\frac{1}{t}\geqslant 2$,所以 $-2a\geqslant 2$,故 $a\leqslant -1$.

所以 a 的取值范围为 $(-\infty,-1]$.

20.**解**:(1)当 $a=3$ 时,

$f(x)=\begin{cases}x^2-x,x\geqslant 3,\\5x-x^2,x<3,\end{cases}$

当 $m=6$ 或 $\frac{25}{4}$ 时,方程有两个解;当 $m<6$ 或 $m>\frac{25}{4}$ 时,方程有一个解;当 $6<m<\frac{25}{4}$ 时,方程有三个解.

(2)由题意知 $f(x)<g(x)$ 恒成立,即 $x|x-a|<1$ 在 $x\in[1,2]$ 上恒成立,即 $|x-a|<\frac{1}{x}$ 在 $x\in[1,2]$ 上恒成立,即 $x-\frac{1}{x}<a<x+\frac{1}{x}$ 在 $x\in[1,2]$ 上恒成立,所以 $\frac{3}{2}<a<2$.所以实数 a 的取值范围为 $\left(\frac{3}{2},2\right)$.

(3)$f(x)=\begin{cases}x^2+(2-a)x,x\geqslant a,\\-x^2+(a+2)x,x<a,\end{cases}$

①若 $\frac{a-2}{2}\leqslant a$ 且 $\frac{a+2}{2}\geqslant a$,即 $-2\leqslant a\leqslant 2$,$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 单调递增,满足题意;

②若 $\frac{a-2}{2}>a$ 且 $\frac{a+2}{2}\geqslant a$,即 $a<-2$,$f(x)$ 在 $(-\infty,a)$ 和 $\left(\frac{a-2}{2},+\infty\right)$ 单调递增,

因为 $f(x)$ 在 $(-4,2)$ 上单调递增,

所以 $a\geqslant 2$ 或 $\frac{a-2}{2}\leqslant -4$,所以 $a\leqslant -6$;

③若 $\frac{a-2}{2}>a$ 且 $\frac{a+2}{2}<a$,即 $a<-2$ 且 $a>2$,舍去;

④若 $\frac{a-2}{2}<a$,且 $\frac{a+2}{2}<a$,即 $a>2$,$f(x)$ 在 $\left(-\infty,\frac{a+2}{2}\right)$ 和 $(a,+\infty)$ 上单调递增,

因为 $f(x)$ 在 $(-4,2)$ 上单调递增,

所以 $\frac{a+2}{2}\geqslant 2$ 或 $a\leqslant -4$,所以 $a>2$.

综上,$a\leqslant -6$ 或 $a\geqslant -2$.

所以实数 a 的取值范围为 $(-\infty,-6]\cup[-2,+\infty)$.

21.**解**:由 $\frac{x-1}{x+1}>0$,解得 $x<-1$ 或 $x>1$.

(1)由于 $f(x)=\log_2\frac{x-1}{x+1}=\log_2\left(1-\frac{2}{x+1}\right)$,而 $y=1-\frac{2}{x+1}$ 在 $(1,+\infty)$ 上递增,根据复合函数单调性可知,$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上递增.当 $a=1$ 时,$g(x)=3x$ 在 $(1,+\infty)$ 上递增,所以 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上递增.由于 $h(1.1)=3.3-\log_2 21<0$,$h(2)=6-\log_2 3>0$,$h(1.1)\cdot h(2)<0$,所以 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上有 1 个零点.

(2)$f(x)=\log_2(g(x))$,即 $\log_2\frac{x-1}{x+1}=\log_2(3ax+1-a)$,即 $\frac{x-1}{x+1}=3ax+1-a$,化简得 $-\frac{2}{a}=(3x-1)(x+1)(x<-1$ 或 $x>1)$,画出 $y=(3x-1)(x+1)(x<-1$ 或 $x>1)$ 的图象,要使 $-\frac{2}{a}=(3x-1)(x+1)$ 有两个解,则需 $-\frac{2}{a}>4$,解得 $-\frac{1}{2}<a<0$.

所以实数 a 的取值范围是 $\left(-\frac{1}{2},0\right)$.

22.**解**:(1)$f(x)=\log_4(4^x+1)-\frac{1}{2}x$,故 $h(x)=\log_4(4^x+1)>\log_4[t\cdot(2^x+1)]$ 恒成立.

故 $4^x+1>t\cdot(2^x+1)>0$ 恒成立.

所以 $t>0$.

令 $m=2^x>0$,则 $m^2+1>t(m+1)$ 恒成立,即 $m^2-tm+1-t>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立.

①当 $\Delta=(-t)^2-4(1-t)<0$,即 $0<t<2\sqrt{2}-2$ 时,显然成立.

②当 $\Delta=(-t)^2-4(1-t)\geqslant 0$ 时,数形结合可知对称轴 $m=\frac{t}{2}>0$,不符合题意.

故实数 t 的取值范围是 $(0,2\sqrt{2}-2)$.

(2)函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象有且只有一个公共点,即方程 $f(x)=g(x)$ 只有一个解.由已知得 $\log_4(4^x+1)-\frac{1}{2}x=\log_4\left(a\cdot 2^x-\frac{4}{3}a\right)$,

所以 $\log_4\frac{4^x+1}{2^x}=\log_4\left(a\cdot 2^x-\frac{4}{3}a\right)$,

等价于 $\begin{cases}a\cdot 2^x-\frac{4}{3}a>0,\\\frac{4^x+1}{2^x}=a\cdot 2^x-\frac{4}{3}a.\end{cases}$

设 $t=2^x>0$,则 $\frac{t^2+1}{t}=a\cdot t-\frac{4}{3}a$,

即 $(a-1)\cdot t^2-\frac{4}{3}at-1=0$ 有且只有一个正解.

若 $a-1>0$,设 $F(t)=(a-1)t^2-\frac{4}{3}at-1$,因为 $F(0)=-1<0$,所以恰好有一正解,所以 $a>1$ 满足题意.

若 $a-1=0$,即 $a=1$,则 $F(t)=-\frac{4}{3}t-1$,由 $F(t)=0$,得 $t=-\frac{3}{4}<0$ 不满足题意.

若 $a-1<0$,即 $a<1$,由 $\Delta=\left(-\frac{4}{3}a\right)^2-4(a-1)\cdot(-1)=0$,得 $a=-3$ 或 $a=\frac{3}{4}$,

当 $a=-3$ 时,$t=\frac{1}{2}$ 满足题意;

当 $a=\frac{3}{4}$ 时,$t=-2$(舍去).

综上,实数 a 的取值范围是 $\{a|a>1$ 或 $a=-3\}$.