第 28 期

第 2~3 版专题检测参考答案

一、选择题

1~6.BDBBDB　　7~12.AADBAD

二、填空题

13.$\frac{1}{6}$　　14.$\sqrt{7}\pi$

15.$\frac{\pi}{96-\pi}$　　16.①②④⑤

三、解答题

17.**证明**:(1)连接 A_1C,交 AC_1 于 N,连接 DN,因为四边形 ACC_1A_1 是平行四边形,所以 N 是 A_1C 的中点,又 D 是 BC 的中点,所以 $DN/\!/A_1B$,又 $A_1B\not\subset$平面 AC_1D,$DN\subset$平面 AC_1D,所以 $A_1B/\!/$平面 AC_1D.

(2)因为 $BB_1\perp$平面 ABC,$AD\subset$平面 ABC,所以 $BB_1\perp AD$,因为 $\triangle ABC$ 是等边三角形,D 是 BC 的中点,所以 $AD\perp BC$,又 $BB_1\cap BC=B$,所以 $AD\perp$平面 BCC_1B_1,又 $CM\subset$平面 BCC_1B_1,所以 $AD\perp CM$,又 $CM\perp AC_1$,$AC_1\cap AD=A$,所以 $CM\perp$平面 ADC_1,又 $C_1D\subset$平面 ADC_1,所以 $CM\perp C_1D$.

18.**证明**:(1)因为 $CD=\sqrt{3}$,$PD=2$,$PC=\sqrt{7}$,所以 $CD^2+PD^2=PC^2$,所以 $PD\perp DC$.因为 $PD\perp BC$,$DC\cap BC=C$,所以 $PD\perp$平面 $ABCD$.

(2)因为 E 为棱 AB 的中点,所以 $AE=\frac{1}{2}AB$.因为 $AB=2CD$,所以 $AE=CD$,因为 $CD/\!/AB$,所以 $AE/\!/CD$,所以四边形 $AECD$ 为平行四边形,所以 $CE/\!/AD$,所以 $CE/\!/$平面 PAD.因为 E,F 分别为棱 AB,PB 的中点,所以 $EF/\!/PA$,所以 $EF/\!/$平面 PAD.因为 $CE\cap EF=E$,$CE\subset$平面 CEF,$EF\subset$平面 CEF,所以平面 $PAD/\!/$平面 CEF.

19.(1)**证明**:因为平面 $ABCD\perp$平面 ABE,平面 $ABCD\cap$平面 $ABE=AB$,$BC\perp AB$,$BC\subset$平面 $ABCD$,所以 $BC\perp$平面 ABE.

因为 $AE\subset$平面 ABE,所以 $BC\perp AE$.因为点 E 在以 AB 为直径的半圆上,所以 $AE\perp BE$.

因为 $BE\cap BC=B$,$BC,BE\subset$平面 BCE,

所以 $AE\perp$平面 BCE.

因为 $CE\subset$平面 BCE,所以 $AE\perp CE$.

(2)①**证明**:由题意知,平面 $ABE\cap$平面 $CED=EF$.因为 $AB/\!/CD$,$AB\not\subset$平面 CED,$CD\subset$平面 CED,所以 $AB/\!/$平面 CED.

因为 $AB\subset$平面 ABE,平面 $ABE\cap$平面 $CED=EF$,所以 $AB/\!/EF$.

②**解**:如图,取 AB 中点 O,EF 的中点 O',连接 OF,OO'.

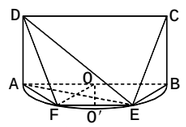
在 $\mathrm{Rt}\triangle OO'F$ 中,$OF=1$,$O'F=\frac{1}{2}$,

所以 $OO'=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因为 $BC\perp$平面 ABE,$AD/\!/BC$,

所以 $AD\perp$平面 ABE,

所以 $V_{E-ADF}=V_{D-AEF}=\frac{1}{3}S_{\triangle AEF}\cdot AD=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}EF\cdot OO'\cdot AD=\frac{\sqrt{3}}{12}$.



(第 19 题图)

20.(1)**证明**:因为 $MA\perp$平面 $ABCD$,$PD/\!/MA$,所以 $PD\perp$平面 $ABCD$.

又因为 $BC\subset$平面 $ABCD$,所以 $PD\perp BC$.因为四边形 $ABCD$ 为正方形,所以 $BC\perp DC$.又因为 $PD\cap DC=D$,所以 $BC\perp$平面 PDC.

在 $\triangle PBC$ 中,因为 G,F 分别为 PB,PC 的中点,所以 $GF/\!/BC$.所以 $GF\perp$平面 PDC.

又因为 $GF\subset$平面 EFG,

所以平面 $EFG\perp$平面 PDC.

(2)**解**:因为 $PD\perp$平面 $ABCD$,四边形 $ABCD$ 为正方形,不妨设 $MA=1$,则 $PD=AD=2$,所以 $V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}\cdot PD=\frac{1}{3}\times4\times2=\frac{8}{3}$.

因为 $MA\perp$平面 $ABCD$,$AB\subset$平面 $ABCD$,所以 $MA\perp AB$.又因为四边形 $ABCD$ 为正方形,所以 $AD\perp AB$.又因为 $AD\cap MA=A$,所以 $AB\perp$平面 $MADP$.

因为 $MA/\!/PD$,所以 $S_{\triangle AMP}=\frac{1}{2}AM\cdot AD=1$,所以 $V_{P-MAB}=V_{B-PAM}=\frac{1}{3}S_{\triangle PAM}\cdot AB=\frac{1}{3}\times1\times2=\frac{2}{3}$.所以 $V_{P-MAB}:V_{P-ABCD}=1:4$.

21.(1)**证明**:由题设知,平面 $CMD\perp$平面 $ABCD$,交线为 CD.

因为 $BC\perp CD$,$BC\subset$平面 $ABCD$,

所以 $BC\perp$平面 CMD,故 $BC\perp DM$.

因为 M 为$\overset{\frown}{CD}$上异于 C,D 的点,

且 DC 为直径,所以 $DM\perp CM$.

又 $BC\cap CM=C$,所以 $DM\perp$平面 BMC.

而 $DM\subset$平面 AMD,

所以平面 $AMD\perp$平面 BMC.

(2)**解**:当 P 为 AM 的中点时,$MC/\!/$平面 PBD.

证明如下:如图,连接 AC 交 BD 于 O.

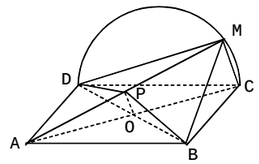
因为 $ABCD$ 为矩形,所以 O 为 AC 中点.

连接 OP,因为 P 为 AM 中点,

所以 $MC/\!/OP$.

又 $MC\not\subset$平面 PBD,$OP\subset$平面 PBD,

所以 $MC/\!/$平面 PBD.



(第 21 题图)

22.(1)**证明**:因为侧棱 $DD_1\perp$底面 $ABCD$,$AB\subset$底面 $ABCD$,

所以 $DD_1\perp AB$.在梯形 $ABCD$ 中,

因为 $AD=2$,$BC=DC=1$,$AD\perp DC$,

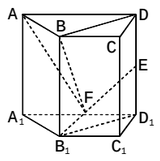
所以 $AB=BD=\sqrt{2}$,

所以 $AB^2+BD^2=AD^2$,所以 $BD\perp AB$.

又 $BD\cap DD_1=D$,

所以 $AB\perp$平面 BDD_1B_1,

又 $B_1E\subset$平面 BDD_1B_1,所以 $B_1E\perp AB$.



(第 22 题图)

(2)**解**:如图,连接 BF,由(1)知,直线 AF 在平面 BDD_1B_1 内的射影为直线 BF,

所以 $\angle AFB$ 是直线 AF 与平面 BDD_1B_1 所成的角.

在矩形 BDD_1B_1 中,$B_1E=\sqrt{3}$,

在 $\mathrm{Rt}\triangle B_1D_1E$ 中,$\cos\angle B_1ED_1=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

故在 $\triangle BB_1F$ 中,

$BF=\sqrt{BB_1^2+\left(\frac{B_1E}{3}\right)^2-2BB_1\cdot\frac{B_1E}{3}\cdot\cos\angle BB_1E}$

$=\sqrt{4+\frac{1}{3}-2\times2\times\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}}=\sqrt{3}$.

所以在 $\mathrm{Rt}\triangle ABF$ 中,

$AF=\sqrt{AB^2+BF^2}=\sqrt{5}$,

所以直线 AF 与平面 BDD_1B_1 所成角的正弦值为 $\sin\angle AFB=\frac{AB}{AF}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$.

第25期

第 2~3 版专题检测参考答案

一、选择题

1~6.BCCDDD　　7~12.DDDCDA

二、填空题

13.$-\frac{4}{5}$　　14.$-\frac{1}{7}$

15.$\left[2,\frac{8}{3}\right)$　　16.③④⑤

三、解答题

17.**解**:(1)

$f(\alpha)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+3\sin(-\pi-\alpha)}{2\cos\left(\frac{11\pi}{2}-\alpha\right)-\cos(5\pi-\alpha)}$

$=\frac{\cos\alpha+3\sin\alpha}{-2\sin\alpha+\cos\alpha}$.

(2)因为 $\tan\alpha=3$,所以 $f(\alpha)=\frac{\cos\alpha+3\sin\alpha}{-2\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{1+3\tan\alpha}{-2\tan\alpha+1}=\frac{10}{-5}=-2$.

18.**解**:$f(x)=\sin^2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\sin\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1-\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)}{2}+2\sin\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+2\cos\left(4x-\frac{2\pi}{3}\right)=4\cos^2\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{2}\cdot\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{3}{2}$.

(1)$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=4\cos^2\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{6}-\frac{3}{2}=\frac{6-\sqrt{3}}{4}$.

(2)设 $t=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$,因为 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,$2x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$,所以 $t\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$,则原函数化为 $g(t)=4t^2-\frac{1}{2}t-\frac{3}{2}$,$t\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$,所以 $g(t)\in\left[-\frac{97}{64},2\right]$,即 $f(x)\in\left[-\frac{97}{64},2\right]$.

19.**解**:(1)过点 O 作 $OE\perp AB$ 于点 E,则 $OE=10$,设 $\angle AOE=\alpha$,则 $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$,

所以 $\angle BOE=\frac{3\pi}{4}-\alpha$,

所以 $AB=AE+BE$

$=10\tan\alpha+10\tan\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)$

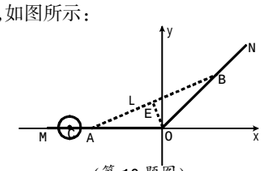
$=\frac{5\sqrt{2}}{\cos\alpha\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)}$.

令 $f(\alpha)=\cos\alpha\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)$

$=\frac{1}{2}\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{2}}{4}$.

所以当 $\alpha=\frac{3\pi}{8}$ 时,$f(\alpha)$ 取得最大值 $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}$,所以 AB 取得最小值为 $20(\sqrt{2}+1)$km.

(2)以 O 为原点建立平面直角坐标系,如图所示:



(第 19 题图)

则圆 C 的方程为 $(x+30)^2+y^2=25$,设直线 AB 的方程为 $y=kx+t(k>0,t>0)$,

所以 $\frac{|t|}{\sqrt{1+k^2}}=10$,且 $\frac{|-30k+t|}{\sqrt{1+k^2}}>5$,

解得 $t<20k$ 或 $t>60k$(舍去),

所以 $OA=\frac{t}{k}<20$,

又当 $AB/\!/ON$ 时,$OA\to10\sqrt{2}$,

所以 $10\sqrt{2}<OA<20$.

综上,当 $10\sqrt{2}<OA<20$ 时,即设计出入口 A 与市中心 O 的距离在 $10\sqrt{2}$ km 到 20km 之间时,才能使高架道路 L 及其延伸段不经过保护区(不包括临界状态).

20.**解**:(1)$f(x)=4\cos x\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x\right)-\sqrt{3}+1=\sin2x+\sqrt{3}\cos2x+1=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+1$,

所以 $f(x)$ 的最小正周期为 π.由 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,得 $-\frac{5\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{12}+k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{5\pi}{12}+k\pi,\frac{\pi}{12}+k\pi\right]$,$k\in\mathbf{Z}$.

(2)因为 $x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$,

所以 $2x+\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$,

所以 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的取值范围是 $\left[-\frac{1}{2},1\right]$,

所以 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+1$ 的取值范围是 $[0,3]$,所以 $k\in[0,3]$.

21.**解**:(1)因为 $T=\pi$,所以 $T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$,

所以 $\omega=2$.因为 $f\left(\frac{\pi}{8}+x\right)=f\left(\frac{\pi}{8}-x\right)$,

所以函数 $f(x)$ 图象的一条对称轴为 $x=\frac{\pi}{8}$,

所以 $2\times\frac{\pi}{8}+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi$,又 $-\pi<\varphi\leqslant0$,

所以 $\varphi=-\frac{3\pi}{4}$,

所以 $f(x)=3\sin\left(2x-\frac{3\pi}{4}\right)$,

由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant2x-\frac{3\pi}{4}\leqslant2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,

得 $k\pi+\frac{\pi}{8}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{5\pi}{8}(k\in\mathbf{Z})$,

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[k\pi+\frac{\pi}{8},k\pi+\frac{5\pi}{8}\right](k\in\mathbf{Z})$.

(2)由于 $\varphi=0$,$f(x)=3\sin\omega x$,

$f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ 上的最小值为 -3,

所以 $\omega x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,

即 $x=\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{\omega}(k\in\mathbf{Z})$,

$-\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{\omega}\leqslant\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$,

所以 $\begin{cases}\omega\geqslant2-8k,\\\omega\geqslant8k-2,\end{cases}$ 由 $k=0$,可得 $\omega\geqslant2$,所以 ω 的最小值为 2.

22.**解**:(1)将函数 $y=\sin x$ 的图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍(纵坐标不变),可得 $y=\sin2x$ 的图象;

再将所得的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后得到函数 $f(x)=\sin2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象,

所以函数 $f(x)$ 的解析式为

$f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

(2)对任意的 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{12}\right]$,

则 $2x+\frac{\pi}{3}\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,

所以 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\in[0,1]$,

此时 $[f(x)]^2-mf(x)-1\leqslant0$ 恒成立.

令 $t=f(x)\in[0,1]$,

则 $g(t)=t^2-mt-1\leqslant0$ 恒成立,所以有 $g(0)=-1\leqslant0$,且 $g(1)=-m\leqslant0$,即 $m\geqslant0$.

所以 m 的取值范围是 $[0,+\infty)$.

(3)因为 $F(x)=f(x)-a$ 在 $[0,n\pi]$ 上恰有 2019 个零点,

所以 $f(x)$ 的图象和直线 $y=a$ 在 $[0,n\pi]$ 上恰有 2019 个交点.

在 $[0,\pi]$ 上,$2x+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{7\pi}{3}\right]$.

①当 $a>1$,或 $a<-1$ 时,$f(x)$ 的图象和直线 $y=a$ 在 $[0,n\pi]$ 上无交点;

②当 $a=1$,或 $a=-1$ 时,$f(x)$ 的图象和直线 $y=a$ 在 $[0,\pi]$ 仅有一个交点,

此时,$f(x)$ 的图象和直线 $y=a$ 在 $[0,n\pi]$ 上恰有 2019 个交点,则 $n=2019$;

③当 $-1<a<\frac{\sqrt{3}}{2}$,或 $\frac{\sqrt{3}}{2}<a<1$ 时,$f(x)$ 的图象和直线 $y=a$ 在 $[0,\pi]$ 上恰有 2 个交点,

$f(x)$ 的图象和直线 $y=a$ 在 $[0,n\pi]$ 上有偶数个交点,不会有 2019 个交点;

④当 $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时,$f(x)$ 的图象和直线 $y=a$ 在 $[0,\pi]$ 上恰有 3 个交点,

此时,$n=1009$,才能使 $f(x)$ 的图象和直线 $y=a$ 在 $[0,n\pi]$ 上有 2019 个交点.

综上可得,当 $a=1$,或 $a=-1$ 时,$n=2019$;当 $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时,此时,$n=1009$.

第 26 期

第 2~3 版专题检测参考答案

一、选择题

1~6.DBCADD　　7~12.BAACBA

二、填空题

13.$\left(\frac{1}{2},1\right]$

14.±2

15.$[-2,0)\cup[1,+\infty)$

16.$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$

三、解答题

17.**解**:(1)由题意可得,$f(-1)=-f(1)$,

所以$\frac{1-\frac{1}{2}}{1+m}=-\frac{1-2}{4+m}$,解得 $m=2$.

(2)由(1)可得,$f(x)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{1+2^x}$,

易知$f(x)$在 **R** 上单调递减,

因为$f(x)+f(1+x)>0$,

所以$f(x)>-f(1+x)=f(-1-x)$,

所以 $x<-1-x$,解得 $x<-\frac{1}{2}$.

所以原不等式的解集为$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$.

18.**解**:令 x-3=u,则 x=u+3,于是 $f(u)=\log_a\frac{3+u}{3-u}(a>0,a\neq1,-3<u<3)$,所以 $f(x)=\log_a\frac{3+x}{3-x}(a>0,a\neq1,-3<x<3)$.

(1)因为 $f(-x)+f(x)=\log_a\frac{3-x}{3+x}+\log_a\frac{3+x}{3-x}=\log_a1=0$,所以 $f(-x)=-f(x)$,又定义域(-3,3)关于原点对称,所以 f(x)是奇函数.

(2)令 $t=\frac{3+x}{3-x}=-1-\frac{6}{x-3}$,则 t 在(-3,3)上是增函数.当 0<a<1 时,函数 $y=\log_at$ 是减函数,所以 $f(x)=\log_a\frac{3+x}{3-x}(0<a<1)$在(-3,3)上是减函数,即函数 f(x)的单调递减区间是(-3,3),无单调递增区间.

19.**解**:(1)H(x)的定义域 $x\in(0,+\infty)$,因为 $a=1$,所以 $H(x)=f(x)-g(x)=\ln x+x-x^2$,所以 $H'(x)=\frac{1}{x}+1-2x=\frac{-(2x+1)(x-1)}{x}$,由 $H'(x)>0$ 解得 $0<x<1$;由 $H'(x)<0$,解得 $x>1$,所以 $H(x)$单调递增区间为(0,1),单调递减区间为$(1,+\infty)$.

(2)因为 $H(x)=\ln x+x-ax^2$,

所以 $H'(x)=\frac{1}{x}+1-2ax(x>0)$,

因为 $H(x)$在$(0,+\infty)$上不单调,

所以 $H'(x)=0$ 在$(0,+\infty)$上必有解.

由 $H'(x)=0$,得$\frac{1}{x}+1-2ax=0$,

所以 $2a=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$,

因为 $x>0$,所以 $2a>0$,即 $a>0$.

所以实数 a 的取值范围是$(0,+\infty)$.

20.(1)**解**:$f'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x=e^x(\sin x+\cos x)=\sqrt{2}e^x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

令 $f'(x)=0$,得 $x=k\pi+\frac{3\pi}{4}$,$k\in\mathbf{Z}$.

又 $x\in(0,\pi)$,故 $x=\frac{3\pi}{4}$.

令 $f'(x)>0$,得 $0<x<\frac{3\pi}{4}$,

令 $f'(x)<0$,得$\frac{3\pi}{4}<x<\pi$,

所以$f(x)$在$\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$单调递增,

在$\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$单调递减,

故$f(x)$极大值为$f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}$,

无极小值.

(2)**证明**:当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$时,$\cos x<0$,

$-\frac{1}{1+x}<0$,于是 $g'(x)=\cos x-\frac{1}{1+x}<0$,

g(x)单调递减,其中 $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-\ln\left(1+\frac{\pi}{2}\right)>1-\ln e=0$,$g(\pi)=-\ln(1+\pi)<-\ln3<0$.由函数零点存在性定理可知,g(x)在$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$上有且只有一个零点 x_1.当 $x\in[\pi,+\infty)$时,$g(x)=\sin x-\ln(1+x)<1-\ln(1+\pi)<1-\ln3<0$,因此,函数 g(x)在$[\pi,+\infty)$上无零点.

综上,g(x)有且仅有 1 个零点.

21.**解**:(1)由题意可得 $v_0=0$,$w=3$(km/s),$m=25$(t),且 $v=v_0+w\cdot\ln\left(1+\frac{M}{m}\right)$,所以 $v=3\ln\left(1+\frac{M}{25}\right)$.

当 v 达到第一宇宙速度 7.9(km/s)时,有 $7.9=3\ln\left(1+\frac{M}{25}\right)$,所以 $M=25e^{\frac{7.9}{3}}-25\approx323.0$(t);

当 v 达到第二宇宙速度 11.2(km/s)时,有 $11.2=3\ln\left(1+\frac{M}{25}\right)$,所以 $M=25e^{\frac{112}{3}}-25\approx1020.5$(t);

当 v 达到第三宇宙速度 16.7(km/s)时,有 $16.7=3\ln\left(1+\frac{M}{25}\right)$,所以 $M=25e^{\frac{16.7}{3}}-25\approx6514.0$(t).

(2)因为希望 v 达到 16.7(km/s),但火箭起飞质量最大值为 2000(t),$v=v_0+w\cdot\ln\left(1+\frac{M}{m}\right)=w\cdot\ln\left(\frac{m+M}{m}\right)$,

所以 $w\cdot\ln\left(\frac{m+M}{m}\right)=16.7(m+M\leqslant2000;m=25)$,所以$\frac{16.7}{w}+\ln m=\ln(m+M)\leqslant\ln2000$,

由$\frac{16.7}{w}+\ln25\leqslant\ln2000$,得 $w\geqslant3.8$,

所以 w 的最小值为 3.8(km/s).

比较(1)中当 v 达到第三宇宙速度 16.7(km/s)时,$M\approx6514.0$(t),火箭起飞质量为 $M+m\approx6539$(t),此时 $w=3$(km/s),v 达到 16.7(km/s),但火箭起飞质量最大值为 2000(t),w 的最小值为 3.7(km/s),由以上说明实际意义为:不是火箭的推进剂质量越大,火箭达到的速度越大,当减少推进剂质量,增大火箭发动机喷流相对火箭的速度,同样可以达到想要的速度.

22.**解**:(1)当 $a=1$ 时,$f(x)=(x^2+1)\cdot e^x-(x+1)$.

$f'(x)=(x+1)^2e^x-1$,$f''(x)=(x+1)(x+3)e^x$.

由 $f''(x)>0$,得 x<-3,或 x>-1;

由 $f''(x)<0$,得-3<x<-1.

所以函数 $f'(x)$在$(-\infty,-3)$,$(-1,+\infty)$单调递增,在$(-3,-1)$单调递减.

$f'(-3)=\frac{4}{e^3}-1<0$,$f'(0)=0$,

所以 $x\in(-\infty,0)$ 时,$f'(x)<0$;$x\in(0,+\infty)$时,$f'(x)>0$,所以函数 $f(x)$在$(-\infty,0)$单调递减,在$(0,+\infty)$单调递增,$f(x)$的最小值为 $f(0)=0$.

(2)$f'(x)=(x^2+2x+a)e^x-a$,

$f''(x)=(x^2+4x+2+a)e^x(x\geqslant0)$.

函数 $y=x^2+4x+2+a$ 在$[0,+\infty)$的最小值为 $2+a$,又关注到 $f'(0)=0$.

①当 $2+a\geqslant0$,即 $a\geqslant-2$ 时,$f''(x)\geqslant0$,$f'(x)$单调递增,得 $f'(x)\geqslant f'(0)=0$,

所以函数 $f(x)$单调递增,而 $f(0)=0$,

此时,$f(x)\geqslant0$ 在 $x\geqslant0$ 时恒成立,

即 $a\geqslant-2$ 符合题意;

②当 $2+a<0$,即 $a<-2$ 时,必存在 x_0,使得 $x\in(0,x_0)$时,$f''(x)<0$.

所以 $x\in(0,x_0)$时,$f'(x)<f'(0)=0$,则 $f(x)$在$(0,x_0)$单调递减,所以 $x\in(0,x_0)$时,$f(x)<f(0)=0$,不符合题意.

综上,实数 a 的取值范围为$[-2,+\infty)$.

第 27 期

第 2~3 版专题检测参考答案

一、选择题

1~6.ACBDCD　　7~12.ABCDBC

二、填空题

13.1　　14.3

15.$\frac{\pi}{2}$　　16.$1+\frac{1}{2}\ln2$

三、解答题

17.**解**:(1)因为 $f'(x)=3x^2+2mx+n$,且函数 $f(x)$有两个极值点-1 和 3,所以 $f'(-1)=3-2m+n=0$,$f'(3)=27+6m+n=0$.解得 $m=-3$,$n=-9$.

(2)由(1)得 $f(x)=x^3-3x^2-9x+10$,$f'(x)=3x^2-6x-9$,所以 $f(1)=-1$,$f'(1)=-12$,所以点 P 为(1,-1),所以切线 l 的方程为 $y=-12x+11$,所以点 A,B 坐标分别为$\left(\frac{11}{12},0\right)$,(0,11),故得 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\times11\times\frac{11}{12}=\frac{121}{24}$.

18.**解**:(1)$f'(x)=6x^2+2mx=2x(3x+m)$.

当 $m<0$ 时,由 $f'(x)>0$,得 $x>-\frac{m}{3}$,或 $x<0$;由 $f'(x)<0$,得 $0<x<-\frac{m}{3}$,此时 $f(x)$在$(-\infty,0)$,$\left(-\frac{m}{3},+\infty\right)$上单调递增,在$\left(0,-\frac{m}{3}\right)$上单调递减;

当 $m=0$ 时,$f'(x)\geqslant0$,$f(x)$在 **R** 上单调递增;

当 $m>0$ 时,由 $f'(x)>0$,得 $x<-\frac{m}{3}$,或 $x>0$;由 $f'(x)<0$,得$-\frac{m}{3}<x<0$,

此时 $f(x)$在$\left(-\infty,-\frac{m}{3}\right)$,$(0,+\infty)$上单调递增,在$\left(-\frac{m}{3},0\right)$上单调递减.

(2)由(1)可知,$m<0$ 时,$f(x)$在$\left[0,-\frac{m}{3}\right]$上单调递减,在$\left[-\frac{m}{3},-\frac{m}{2}\right]$上单调递增,

所以$[f(x)]_{\min}=f\left(-\frac{m}{3}\right)=\frac{m^3}{27}+m+1$.

又 $f(0)=m+1$,$f\left(-\frac{m}{2}\right)=m+1$,

所以$[f(x)]_{\max}=m+1$.

故 $m+1-\left(\frac{m^3}{27}+m+1\right)=-\frac{m^3}{27}=1$,

则 $m=-3$.

19.(1)**解**:$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,$f'(x)=ae^x-\frac{1}{x}$.

由题设知,$f'(2)=0$,所以 $a=\frac{1}{2e^2}$.

从而 $f(x)=\frac{1}{2e^2}e^x-\ln x-1$,

$f'(x)=\frac{1}{2e^2}e^x-\frac{1}{x}$.

当 $0<x<2$ 时,$f'(x)<0$;

当 $x>2$ 时,$f'(x)>0$.

所以 $f(x)$在(0,2)单调递减,在$(2,+\infty)$单调递增.

(2)**证明**:当 $a\geqslant\frac{1}{e}$时,

$f(x)\geqslant\frac{e^x}{e}-\ln x-1$.

设 $g(x)=\frac{e^x}{e}-\ln x-1$,

则 $g'(x)=\frac{e^x}{e}-\frac{1}{x}$.

当 $0<x<1$ 时,$g'(x)<0$;

当 $x>1$ 时,$g'(x)>0$.

所以 $x=1$ 是 $g(x)$的极小值点,也是最小值点.

故当 $x>0$ 时,$g(x)\geqslant g(1)=0$.

因此,当 $a\geqslant\frac{1}{e}$时,$f(x)\geqslant0$.

20.**解**:(1)当 $a=0$ 时,$f(x)=e^x(2x-1)$,$f'(x)=e^x\cdot(2x+1)$.

当 $x>-\frac{1}{2}$时,$f'(x)>0$,函数 $f(x)$单调递增,且 $x>\frac{1}{2}$时,$f(x)>0$;

当 $x<-\frac{1}{2}$时,$f'(x)<0$,函数 $f(x)$单调递减,且此时 $f(x)<0$,所以 $f(x)$只有一个零点 $x=\frac{1}{2}$.

(2)观察发现 $f(0)<0$,下证除整数 0 外再无其他整数使得 f(x)<0.

$f'(x)=e^x\cdot(2x+1)-a$.

①当 $x>0$ 时,因为 $e^x>1$,$2x+1>1$,所以 $e^x\cdot(2x+1)>1$,因为 $a<1$,所以 $f'(x)=e^x\cdot(2x+1)-a>0$,所以函数 $f(x)$单调递增,且 x 趋于$+\infty$ 时函数值显然很大很大;但要保证只有唯一整数 0 满足题意,需要 $f(1)>0$,因为 $f(1)>0$ 恒成立,所以 $a<1$.

②当 $x<0$ 时,要保证只有唯一整数 0 满足题意,首先需要 $f(-1)\geqslant0$,得到 $a\geqslant\frac{3}{2e}$;

当 $x<-1$ 时,因为 $e^x<\frac{1}{e}$,$2x+1<-1$,所以 $e^x\cdot(2x+1)<-\frac{1}{e}$,因为 $a>\frac{3}{2e}$,

所以 $f'(x)=e^x\cdot(2x+1)-a<0$,所以函数 f(x)在 $x<-1$ 单调递减,且 $f(-1)>0$.

综上所述,$f(x)<0$ 的整数解有且唯一时,a 的取值范围是$\left[\frac{3}{2e},1\right)$.

21.**解**:(1)当 $a=3$ 时,$f(x)=x^2-x-3\ln x(x>0)$,$f'(x)=2x-1-\frac{3}{x}=\frac{(2x-3)(x+1)}{x}$,

所以 $f(x)$在$\left[1,\frac{3}{2}\right]$上单调递减,在$\left(\frac{3}{2},2\right]$上单调递增.所以当 $x\in[1,2]$时,$[f(x)]_{\min}=f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{4}-3\ln\frac{3}{2}$,$f(1)=0$,$f(2)=2-3\ln2$,所以$[f(x)]_{\max}=f(1)=0$.

(2)$f'(x)=2x-1-\frac{a}{x}$.若 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,即 $f'(x)\geqslant0$ 在$(0,+\infty)$上恒成立,则 $a\leqslant2x^2-x$ 在$(0,+\infty)$上恒成立.令 $g(x)=2x^2-x$,则 $g'(x)=4x-1$,当 $0<x<\frac{1}{4}$时,$g'(x)<0$;当 $x>\frac{1}{4}$时,$g'(x)>0$.所以$[g(x)]_{\min}=g\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{8}$,所以 $a\leqslant-\frac{1}{8}$,即 a 的取值范围是$\left(-\infty,-\frac{1}{8}\right]$.

22.(1)**证明**:设 $g(x)=f'(x)$,则 $g(x)=\frac{1}{2}-3\sin x-x\cos x$,$g'(x)=x\sin x-4\cos x$,

令 $h(x)=g'(x)=x\sin x-4\cos x$,

则 $h'(x)=5\sin x+x\cos x$,

因为当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时,$h'(x)>0$,则 $g'(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上为增函数,且 $g'(0)=-4<0$,$g'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}>0$,所以存在 $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,使得 $g'(x_0)=0$,当 $x\in(0,x_0)$时,$g'(x)<0$;当 $x\in\left(x_0,\frac{\pi}{2}\right)$时,$g'(x)>0$,即 $g(x)$在$(0,x_0)$上单调递减,在$\left(x_0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增,又因为 $g(0)=\frac{1}{2}>0$,$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{5}{2}<0$,所以 $g(x)$在区间$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上存在唯一零点,即 $f'(x)$在区间$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上存在唯一零点.

(2)**解**:当 $x=0$ 时,$f(0)=2\geqslant a\times0$.当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$时,$f(x)\geqslant ax$,$a\leqslant\frac{2\cos x}{x}-\sin x+\frac{1}{2}$.设 $p(x)=\frac{2\cos x}{x}-\sin x+\frac{1}{2}$,$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$,则 $p'(x)=\frac{-2x\sin x-2\cos x-x^2\cos x}{x^2}$,$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$,所以 $p'(x)<0$,所以 $p(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$上单调递减,$[p(x)]_{\min}=p\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{2}$,所以 $a\leqslant-\frac{1}{2}$.

综上,实数 a 的取值范围为$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$.