第 40 期
第 1~2 版
专题五　解析几何参考答案

1.(1)抛物线方程为 $y^2=4x$，

$P(3,\pm2\sqrt{3})$.

(2)证明略.

2.(1)$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$.

(2)$(9,9+6\sqrt{2})$.

3.(1)$x^2=y$.

(2)①证明略.

②直线 AB 恒过定点,定点为$\left(\frac{1}{2},2\right)$.

4.(1)$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.(2)证明略.

5.(1)$c=1$.

(2)椭圆 C 上存在 P,使线段 BD 和线段 OP 相互平分,其坐标为$\left(-1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,或$\left(-1,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

6.(1)$x^2=4y$.

(2)$3\sqrt{3}$.

7.**解**:(1)由题意可设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,

则$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$(其中 $c^2=a^2-b^2,c>0$),

且$\frac{2}{a^2}+\frac{1}{2b^2}=1$,故 $a=2,b=1$,

所以椭圆的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)由题意可知,直线 l 的斜率存在且不为 0.故可设直线 $l:y=kx+m(m\neq0)$.

设 $P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$,由$\begin{cases}y=kx+m,\\x^2+4y^2=4,\end{cases}$

消去 y 得$(1+4k^2)x^2+8kmx+4(m^2-1)=0$,

则 $\Delta=64k^2m^2-16(1+4k^2)(m^2-1)=16(4k^2-m^2+1)>0$,

且 $x_1+x_2=-\frac{8km}{1+4k^2}$,$x_1x_2=\frac{4(m^2-1)}{1+4k^2}$,

故 $y_1y_2=(kx_1+m)(kx_2+m)=k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2$.

因为直线 OP、PQ、OQ 的斜率依次成等比数列,

所以$\frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_2}{x_2}=\frac{k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2}{x_1x_2}=k^2$,

即$-\frac{8k^2m^2}{1+4k^2}+m^2=0$.

又 $m\neq0$,所以 $k^2=\frac{1}{4}$,即 $k=\pm\frac{1}{2}$.

由于直线 OP、OQ 的斜率存在,

且 $\Delta>0$,得 $0<m^2<2$,且 $m^2\neq1$.

设 d 为点 O 到直线 l 的距离,

则 $d=\frac{|2m|}{\sqrt{5}}$,

$|PQ|=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}=\sqrt{5(2-m^2)}$,

所以△OPQ 的面积 $S=\frac{1}{2}|PQ|d=\sqrt{m^2(2-m^2)}<\frac{m^2+2-m^2}{2}=1(m^2\neq1)$,

故△OPQ 面积的取值范围为$(0,1)$.

第 3 版
专题六　函数与导数参考答案

1.(1)函数 $f(x)$ 的单调递增区间为$(1,+\infty)$,单调递减区间为$(0,1)$.

(2)a 的取值范围为$[1,e]$,两曲线没有交点.

2.(1)$(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$.(2)证明略.

3.(1)$f(x)$在$(-\infty,1)$,$(2,+\infty)$上单调递减,在$(1,2)$上单调递增.

(2)证明略.

4.(1)证明略.(2)3.

5.(1)函数 $f(x)$在$(0,1)$上单调递增,在$(1,+\infty)$上单调递减.

(2)$(-\infty,0]$.

6.**解**:(1)设过点 $P(0,-1)$的直线与曲线 $f(x)$相切于点$(x_0,\ln x_0)$.因为 $f(x)=\ln x$,则 $f'(x)=\frac{1}{x}$,所以在$(x_0,\ln x_0)$处切线斜率为 $f'(x_0)=\frac{1}{x_0}$,则在$(x_0,\ln x_0)$处切线方程为 $y-\ln x_0=\frac{1}{x_0}(x-x_0)$.将 $P(0,-1)$代入切线方程,得 $\ln x_0=0$,所以 $x_0=1$,所以切线方程为 $y=x-1$.

(2)假设存在 $k\neq1$ 的正实数,使得只有唯一的正数 a,当 $x>\frac{1}{a}$时,不等式 $f(x)g\left(x-\frac{1}{a}\right)\leqslant kx$ 恒成立,即$\frac{a^2x}{ax-1}\ln x\leqslant kx$ 恒成立.因为 $x>\frac{1}{a}$,所以 $\ln x\leqslant\frac{k(ax-1)}{a^2}$,即 $\ln x-\frac{k(ax-1)}{a^2}\leqslant0$.令 $m(x)=\ln x-\frac{k(ax-1)}{a^2}=\ln x-\frac{k}{a}x+\frac{k}{a^2}\left(x>\frac{1}{a}\right)$,则 $m'(x)=\frac{1}{x}-\frac{k}{a}$,令 $m'(x_1)=0$,解得 $x_1=\frac{a}{k}$.

①当$\frac{a}{k}>\frac{1}{a}$,即 $0<k<a^2$ 时,$x\in\left(\frac{1}{a},x_1\right)$时,$m'(x)>0$,则 $m(x)$在$\left(\frac{1}{a},x_1\right)$上为增函数,$x\in(x_1,+\infty)$时,$m'(x)<0$,则 $m(x)$在$(x_1,+\infty)$上为减函数,则$[m(x)]_{max}=m(x_1)=-1+\frac{k}{a^2}+\ln\frac{a}{k}\leqslant0$,即$\frac{k}{a^2}+\ln\frac{a}{k}\leqslant1$.

令 $h(a)=\frac{k}{a^2}+\ln\frac{a}{k}(a>\sqrt{k})$,则 $h'(a)=\frac{1}{a}-\frac{2k}{a^3}=\frac{a^2-2k}{a^3}$,令 $h'(a_0)=0$,得 $a_0=\sqrt{2k}(a>\sqrt{k})$,$a\in(\sqrt{k},a_0)$时,$h'(a)<0$,则 $h(a)$在区间$(\sqrt{k},a_0)$上为减函数,$a\in(a_0,+\infty)$时,$h'(a)>0$,则 $h(a)$在区间$(a_0,+\infty)$上为增函数,因此存在唯一的正数 $a>\sqrt{k}$,使得 $h(a)\leqslant1$,故只能$[h(a)]_{min}=1$,所以$[h(a)]_{min}=h(a_0)=\frac{1}{2}+\ln\sqrt{\frac{2}{k}}=1$,所以 $k=\frac{2}{e}$,此时 a 只有唯一的值$\frac{2\sqrt{e}}{e}$.

②当$\frac{a}{k}\leqslant\frac{1}{a}$,即 $k\geqslant a^2$ 时,$m'(x)<0$,所以 $m(x)$在$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$上为减函数,所以 $x\to\frac{1}{a}$时,$m(x)\to\ln\frac{1}{a}\leqslant0$,即 $a\geqslant1$,故 $k>1$,所以满足 $1\leqslant a\leqslant\sqrt{k}$ 的 a 不唯一.

综上,存在实数 $k=\frac{2}{e}$,a 只有唯一值$\frac{2\sqrt{e}}{e}$,当 $x>\frac{1}{a}$时,恒有原式成立.

第 4 版
专题七　选修 4 系列参考答案

1.(1)$[1,+\infty)$;(2)$[3,+\infty)$.

2.(1)曲线 C 的参数方程为$\begin{cases}x=3\cos\alpha,\\y=\sqrt{3}\sin\alpha,\end{cases}$($\alpha$ 为参数),直线 l 的直角坐标方程为 $x-y+4=0$.

(2)$2\sqrt{2}-\sqrt{6}$.

3.(1)$(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$.

(2)证明略.

4.(1)曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho^2\cos^2\theta+2\rho^2=6$,曲线 C_2 的直角方程为 $x-y+\sqrt{2}=0$.

(2)$\left(\frac{1}{3},\frac{3}{2}\right)$.

5.(1)$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$.(2)$(0,5]$.

6.**解**:(1)$\begin{cases}x=3\cos\alpha,\\y=\sin\alpha,\end{cases}$消去参数 α,得$\frac{x^2}{9}+y^2=1$,即 C 的普通方程为$\frac{x^2}{9}+y^2=1$.

由 $\rho\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$,得 $\rho\sin\theta-\rho\cos\theta=2$,(*)

将$\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\y=\rho\sin\theta,\end{cases}$代入(*),化简得 $y=x+2$,

所以直线 l 的倾斜角为$\frac{\pi}{4}$.

(2)由(1),知点 $P(0,2)$在直线 l 上,可设直线 l 的参数方程为$\begin{cases}x=t\cos\frac{\pi}{4},\\y=2+t\sin\frac{\pi}{4}\end{cases}$($t$ 为参数),即$\begin{cases}x=\frac{\sqrt{2}}{2}t,\\y=2+\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$($t$ 为参数),代入$\frac{x^2}{9}+y^2=1$ 并化简,得 $5t^2+18\sqrt{2}t+27=0$,设 A,B 两点对应的参数分别为 t_1,t_2,则 $t_1+t_2=-\frac{18\sqrt{2}}{5}<0$,$t_1t_2=\frac{27}{5}>0$,所以$t_1<0$,$t_2<0$,所以$|PA|+|PB|=|t_1|+|t_2|=-(t_1+t_2)=\frac{18\sqrt{2}}{5}$.

第 37 期
第 1 版
专题七　不等式
参考答案

1~5.CADAD　6~10.CADCB

11~15.CCBAC　16~20.DABBB

21~25.ACCBD

26.C

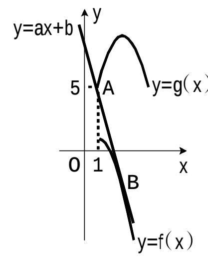
提示:因为 $2^a=3^b=6$,所以 $a=\log_26=1+\log_23$,$b=\log_36=1+\log_32$,所以 $a+b=2+\log_23+\log_32>4$,$ab=2+\log_23+\log_32>4$,故 A,B 正确;$(a-1)^2+(b-1)^2=(\log_23)^2+(\log_32)^2>2\log_23\cdot\log_32=2$,故 C 错误;因为 $a^2+b^2=2+2(\log_23+\log_32)+(\log_23)^2+(\log_32)^2>2+4\sqrt{\log_23\cdot\log_32}+2\log_23\cdot\log_32=8$,故 D 正确,故选 C.

27.C

提示:将圆的一般方程 $x^2+y^2+2x+4y+1=0$,化为标准方程得$(x+1)^2+(y+2)^2=4$,结合直线 $2ax+by+2=0(a>0,b>0)$被圆 $x^2+y^2+2x+4y+1=0$ 截得弦长为 4,可得直线 $2ax+by+2=0(a>0,b>0)$过圆的圆心$(-1,-2)$,即$-2a-2b+2=0$,则 $a+b=1(a>0,b>0)$,则$\frac{4}{a}+\frac{1}{b}=(a+b)\cdot\left(\frac{4}{a}+\frac{1}{b}\right)=5+\frac{4b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant5+2\sqrt{\frac{4b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=9$,当且仅当$\frac{4b}{a}=\frac{a}{b}$,即 $a=\frac{2}{3}$,$b=\frac{1}{3}$时取等号,故选 C.

28.A

提示:当 $x\in[1,5]$时,$2x\leqslant x^2+ax+b\leqslant6x$ 恒成立可得$-x^2+2x\leqslant ax+b\leqslant-x^2+6x$.令 $f(x)=-x^2+2x(1\leqslant x\leqslant5)$,$g(x)=-x^2+6x(1\leqslant x\leqslant5)$,可得 $f(x)$,$g(x)$图象如下图所示.要使 b 最大,则 $y=ax+b$ 必过 $A(1,5)$,且与 $y=f(x)$相切于点 B,则此时 $b=5-a$,即直线方程为 $y=ax+5-a$,联立$\begin{cases}y=ax+5-a,\\y=-x^2+2x,\end{cases}$得 $x^2+(a-2)x+5-a=0$,所以 $\Delta=(a-2)^2-4(5-a)=0$,解得 $a^2=16$.由图象可知 $a<0$,所以 $a=-4$,所以 $b_{max}=5-(-4)=9$,故选 A.



(第 28 题图)

第 2 版
专题八　直线和圆、圆锥曲线
参考答案

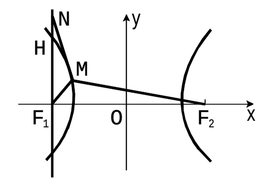
1~5.ADABA　6~10.DCCDB

11~15.CBBBD　16~20.CAACA

21~25.ABBCA

26.C

提示:由已知可得$|MF_2|-|MF_1|=2a$,若$|MF_2|+|MN|>4b$,即$|MF_1|+|MN|+2a>4b$.如图所示,当点 M 位于 H 点时,$|MF_1|+|MN|$最小,故$\frac{3b^2}{2a}+2a>4b$,即 $3b^2+4a^2>8ab$,所以 $3b^2-8ab+4a^2>0$,所以$(2a-b)(2a-3b)>0$,所以 $2a>3b$ 或 $2a<b$,所以 $4a^2>9b^2$ 或 $4a^2<b^2$,所以 $9c^2<13a^2$ 或 $c^2>5a^2$,所以 $1<\frac{c}{a}<\frac{\sqrt{13}}{3}$,或$\frac{c}{a}>\sqrt{5}$,所以双曲线 C 的离心率的取值范围为$\left(1,\frac{\sqrt{13}}{3}\right)\cup(\sqrt{5},+\infty)$,故选 C.



(第 26 题图)

第 3 版
专题九　概率与统计
参考答案

1~5.ABCBA　6~10.ABCAC

11~15.CCBBB　16~20.CCBCB

21.D

提示:由题意,可得法官甲民事庭维持原判的案件率为 $x_1=\frac{29}{32}\approx0.906$,行政庭维持原判的案件率 $x_2=\frac{100}{118}\approx0.847$,总体上维持原判的案件率为 $x=\frac{129}{150}=0.86$;法官乙民事庭维持原判的案件率为 $y_1=\frac{90}{100}=0.9$,行政庭维持原判的案件率为 $y_2=\frac{20}{25}=0.8$,总体上维持原判的案件率为 $y=\frac{110}{125}=0.88$.所以 $x_1>y_1$,$x_2>y_2$,$x<y$,故选 D.

第 4 版
专题十　算法初步、推理与证明、复数
参考答案

1~5.ACDCD　6~10.CDBDD

11~15.CADBB　16~20.BAADD

21.C

提示:记三角形数构成的数列为$\{a_n\}$,则 $a_1=1$,$a_2=3=1+2$,$a_3=6=1+2+3$,$a_4=10=1+2+3+4$,…,易得通项公式为 $a_n=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$;同理可得正方形数构成的数列$\{b_n\}$的通项公式为 $b_n=n^2$.将四个选项中的数字分别代入上述两个通项公式,使得 n 都为正整数的只有 $1225=35^2=\frac{49\times50}{2}$,故选 C.

22.B

提示:若甲阅读了语文老师推荐的文章,则甲、乙、丙、丁说的都不对,不满足题意;若乙阅读了语文老师推荐的文章,则甲、乙说的都不对,丙、丁都正确,满足题意;若丙阅读了语文老师推荐的文章,则甲、乙、丙说的都对,丁说的不对,不满足题意;若丁阅读了语文老师推荐的文章,则甲说的对,乙、丙、丁说的都不对,不满足题意.故选 B.

⑩

第 38 期

第 2 版

专题一　函数与导数参考答案

1.$\left(-\frac{1}{3},1\right)$　2.-1

3.3　4.1

5.$(-1,1)$　6.$(1,+\infty)$

7.$(-2,1)$　8.$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

9.$\frac{4}{3}+\log_2 3$　10.$(-1,2)$

11.0　12.$\frac{\sqrt{5}}{5}$

13.$\frac{3\sqrt{3}}{2}$　14.$\left(1,\frac{3}{2}\right)$

15.e^2　16.$\left(-\infty,\frac{3}{2}\right]$

17.$\left[-2e^{-\frac{3}{2}},3e\right]$

18.$\left(-\frac{1}{e^2},0\right)$

专题二　立体几何、空间向量参考答案

1.③④　2.$\frac{1}{3}$

3.$\frac{\pi}{4}$　4.$\frac{\pi}{4}$

5.①④　6.$\sqrt{3}$

7.1　8.45°

9.$\frac{14+4\sqrt{2}}{3}$

10.$\frac{32}{3}\pi$

第 3 版

专题三　三角函数、平面向量、解三角形参考答案

1.$\frac{2019}{2020}$　2.$\frac{20}{13}$

3.$\frac{\pi}{2}$　4.$\frac{3}{5}$

5.$\frac{3\pi}{4}$　6.$\frac{5}{2}$

7.$\left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$　8.$\frac{2\pi}{3}$

9.$\frac{17\sqrt{2}}{50}$　10.$\frac{\sqrt{21}}{14}$

11.$-\frac{3}{2}$　12.$\frac{2}{3}$

13.$\frac{4+3\sqrt{3}}{5}$　14.$\left[-3,\frac{3}{2}\right]$

15.$\sqrt{2}+1$　16.$\frac{1}{2}$

17.$\frac{5\sqrt{3}}{2}+3$

提示：由正弦定理，可得 $\sqrt{3}\cdot(\sin A\cos C+\sin C\cos A)=2\sin B\sin B$，即 $\sqrt{3}\sin B=2\sin^2 B$，所以 $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$B=\frac{\pi}{3}$.又 $\angle CAB=\frac{\pi}{3}$，所以 $\triangle ABC$ 为等边三角形.在 $\triangle ADC$ 中，由余弦定理，得 $AC^2=10-6\cos D$，故四边形 $ABCD$ 的面积为 $S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ADC}=\frac{\sqrt{3}}{4}AC^2+\frac{3}{2}\sin D=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(10-6\cos D)+\frac{3}{2}\sin D=\frac{5\sqrt{3}}{2}+3\sin\left(D-\frac{\pi}{3}\right)$，所以当 $D-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，$D=\frac{5\pi}{6}$ 时，四边形 $ABCD$ 面积最大，最大值为 $\frac{5\sqrt{3}}{2}+3$.

专题四　数列和不等式参考答案

1.9　2.15

3.-3 或 2　4.$n+2^{2n+1}-2$

5.2　6.$-\frac{2}{5}$

7.$\frac{9}{4}$　8.2^{n+1}

9.-3　10.$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$

11.2　12.$4\sqrt{2}$

13.$(-\infty,-3]\cup\left[\frac{5}{2},+\infty\right)$

14.$(n-1)2^{n+1}+2$　15.$2^{n+1}-2$

16.$\frac{7\sqrt{3}}{3}$

17.8

提示：因为 $S_{n+1}-2(2a_n+1)=0$ $(n\in\mathbf{N}_+)$，所以 $S_{n+1}=4a_n+2$，所以 $S_2=4a_1+2$，所以 $a_2=3a_1+2=8$. 因为 $a_{n+2}=S_{n+2}-S_{n+1}=4a_{n+1}-4a_n$，所以 $a_{n+2}-2a_{n+1}=2(a_{n+1}-2a_n)$，所以数列 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ 是以 $a_2-2a_1=4$ 为首项，公比为 2 的等比数列，所以 $a_{n+1}-2a_n=4\times2^{n-1}=2^{n+1}$，即 $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{a_n}{2^n}=1$，所以数列 $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$ 是以 1 为首项，1 为公差的等差数列，所以 $\frac{a_n}{2^n}=1+(n-1)=n$，即 $a_n=n\cdot2^n$，所以 $f(n)=\frac{a_n}{2^{n-1}}(-2n+31)-1=-4n^2+62n-1$.因为对称轴 $n=\frac{62}{8}=7.75$，所以当 $n=8$ 时，$f(n)$ 取得最大值.

第 4 版

专题五　直线和圆、圆锥曲线参考答案

1.$y=-\frac{1}{8}$　2.2

3.4　4.-1

5.$\frac{6\sqrt{5}}{5}$　6.$y=\pm x$

7.1 或 -5

8.$(-\infty,-2]\cup\left[\frac{2}{3},+\infty\right)$

9.$[6,+\infty)$　10.8

11.$[0,3]$　12.$\frac{\sqrt{3}}{2}$

13.$\sqrt{33}$　14.$\frac{3}{4}$

15.$\frac{\sqrt{13}}{2}$　16.$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$

17.$(1,1+\sqrt{3}]$

提示：由 $(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OF_2})\cdot\overrightarrow{F_2P}=0$，得 $(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OF_2})\cdot(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OF_2})=0$，即为 $\overrightarrow{OP}^2=\overrightarrow{OF_2}^2$，可得 $|OP|=c$，所以 $\angle F_1PF_2=90°$.

设 $|PF_1|=m$，$|PF_2|=n$，可得 $m-n=2a$，且 $m^2+n^2=4c^2$，令 $m=kn$，所以 $n=\frac{2a}{k-1}$，$m=\frac{2ka}{k-1}$.在 $\triangle PF_1F_2$ 中，由勾股定理，得 $|PF_1|^2+|PF_2|^2=4c^2$，所以 $\left(\frac{2ka}{k-1}\right)^2+\left(\frac{2a}{k-1}\right)^2=4c^2$，所以 $\left(\frac{k}{k-1}\right)^2+\left(\frac{1}{k-1}\right)^2=e^2$. 又 $k\geqslant\sqrt{3}$，所以 $e^2=\frac{k^2+1}{(k-1)^2}=1+\frac{2k}{(k-1)^2}=1+\frac{2}{k-2+\frac{1}{k}}\leqslant1+\frac{2}{\sqrt{3}-2+\frac{1}{\sqrt{3}}}=4+2\sqrt{3}$，所以 $1<e\leqslant1+\sqrt{3}$.

专题六　概率与统计参考答案

1.808　2.0.0284

3.50　76.4　4.$\frac{2}{5}$

5.$\frac{4}{5}$　6.$\frac{1}{4}$

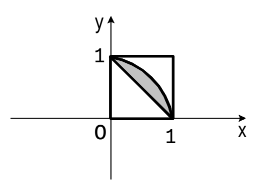
7.$\frac{3}{5}$　8.$\frac{5}{12}$

9.4　10.$\frac{23}{7}$

11.$1-\frac{\sqrt{3}\pi}{6}$

12.$\frac{78}{25}$

提示：由题意知，$x,y,1$ 能够成钝角三角形三边的情况为 $\begin{cases}x+y>1,\\x^2+y^2<1,\end{cases}$ 如图阴影部分所示，其面积为 $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$，记“$x,y,1$ 能够成钝角三角形”为事件 A，故 $P(A)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\approx0.28$，所以 $\pi\approx\frac{78}{25}$.



（第 12 题图）

第 39 期

第 1 版

专题一　三角与向量参考答案

1.(1)$B=\frac{2\pi}{3}$.(2)$2\sqrt{11}+6$.

2.(1)$B=\frac{\pi}{6}$.(2)$\frac{\sqrt{39}-\sqrt{3}}{6}$.

3.(1)$\left[-\frac{\pi}{8}+k\pi,\frac{3\pi}{8}+k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

(2)$[-1,1]$.

4.(1)$B=\frac{\pi}{3}$.(2)$a=4$，$c=6$.

5.(1)$\frac{1}{2}$.

(2)$\sqrt{2}+2\sqrt{6}$.

6.(1)$a=1$，$c=\frac{1}{4}$；或 $a=\frac{1}{4}$，$c=1$.

(2)$\left(\frac{\sqrt{6}}{2},\sqrt{2}\right)$.

第 2 版

专题二　数列参考答案

1.(1)$a_n=2n-1$，$b_n=3\cdot2^{n-1}$.
(2)$T_n=n^2+3(2^n-1)$.

2.(1)证明略，$a_n=\frac{n}{2^n}$.

(2)$T_n=\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$.

3.(1)证明略.(2)$T_n=(n-1)\cdot2^{n+1}+2$.

4.**解**：(1)设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，因为 $a_4,3a_3,a_5$ 成等差数列，所以 $a_4+a_5=6a_3$，即 $a_3q+a_3q^2=6a_3$，所以 $q^2+q-6=0$，所以 $q=2$ 或 $q=-3$.

又 $a_4=2a_2+4$，所以 $a_1q(q^2-2)=4$.
因为 $a_1>0$，所以 $q=2$，$a_1=1$，
所以 $a_n=2^{n-1}$.

(2)因为 $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=2^n-1$，$10a_n=\lambda S_n+2\lambda$，所以 $\lambda=\frac{10a_n}{S_n+2}=\frac{5\times2^n}{2^n+1}=5-\frac{5}{2^n+1}$.因为 λ 为整数，所以 $n=2$ 时 $\lambda=4$，所以存在 $n=2$ 时 $\lambda=4$ 满足条件.

5.**解**：(1)设等差数列 $\{\log_2(a_n-1)\}$ 的公差为 d，则 $2d=\log_2(a_3-1)-\log_2(a_1-1)=\log_2 8-\log_2 2=2$，解得 $d=1$.

因为 $\log_2(a_1-1)=\log_2 2=1$，
所以 $\log_2(a_n-1)=1+(n-1)\times1=n$，
所以 $a_n-1=2^n$，
所以 $a_n=2^n+1$ $(n\in\mathbf{N}_+)$.

(2)因为 $b_n=\frac{2}{a_n-1}=\frac{2}{2^n}=\frac{1}{2^{n-1}}$，

所以 $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^{n-1}}}=\frac{2^{n-1}}{2^n}=\frac{1}{2}$，

且 $b_1=1$，所以数列 $\{b_n\}$ 是以 1 为首项，以 $\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列，

则 $S_n=\frac{1\times\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}=2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$.

由于数列 $\{S_n\}$ 单调递增，$S_1=1$，所以 $1\leqslant S_n<2$.因为对任意 $n\in\mathbf{N}_+$，总有 $S_n<\frac{m-4}{3}$，

所以 $\frac{m-4}{3}\geqslant2$，解得 $m\geqslant10$，

因此，实数 m 的取值范围是 $[10,+\infty)$.

第 3 版

专题三　概率与统计参考答案

1.(1)有 99.5% 的把握认为使用该产品与性别有关.

(2)X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{5}$

$E(X)=\frac{4}{3}$.

2.(1)$\hat{y}=11+\frac{100}{x}$.

(2)用反比例函数模型拟合效果更好，当产量为 10 千件时，每件产品的非原料成本为 21 元.

(3)企业要想获得更高利润，产品单价应选择 90 元.理由略.

3.(1)20.

(2)0.3.

(3)会选择 B 餐厅用餐.理由略.

4.(1)**解**：$\bar{x}=0.002\times50\times205+0.004\times50\times255+0.009\times50\times305+0.004\times50\times355+0.001\times50\times405=300$(千米).

(2)**解**：因为 X 服从正态分布 $N(300,50^2)$，

所以 $P(250<X\leqslant400)\approx0.9544-\frac{0.9544-0.6826}{2}=0.8185$.

(3)**证明**：遥控车开始在第 0 格为必然事件，$P_0=1$，第一次掷硬币出现正面，遥控车移到第 1 格，其概率为 $\frac{1}{2}$，即 $P_1=\frac{1}{2}$，遥控车移到第 n $(2\leqslant n\leqslant19)$ 格的情况是下列两种，而且也只有两种.

①遥控车先到第 $n-2$ 格，又掷出反面，其概率为 $\frac{1}{2}P_{n-2}$；

②遥控车先到第 $n-1$ 格，又掷出正面，其概率为 $\frac{1}{2}P_{n-1}$，所以 $P_n=\frac{1}{2}P_{n-2}+\frac{1}{2}P_{n-1}$，所以 $P_n-P_{n-1}=-\frac{1}{2}(P_{n-1}-P_{n-2})$，所以当 $1\leqslant n\leqslant19$ 时，数列 $\{P_n-P_{n-1}\}$ 是公比为 $-\frac{1}{2}$ 的等比数列，所以 $P_1-1=-\frac{1}{2}$，$P_2-P_1=\left(-\frac{1}{2}\right)^2$，$P_3-P_2=\left(-\frac{1}{2}\right)^3$，$\cdots P_n-P_{n-1}=\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

上式相加，得 $P_n-1=-\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)^n=-\frac{1}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]$，所以 $P_n=\frac{2}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$ $(n=0,1,2,\cdots,19)$，所以获胜的概率 $P_{19}=\frac{2}{3}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\right]$，失败的概率 $P_{20}=\frac{1}{2}P_{18}=\frac{1}{3}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^{19}\right]$.设参与游戏一次的顾客获得优惠券金额为 X 万元，$X=3$ 或 0，所以 X 的期望 $E(X)=3\times\frac{2}{3}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\right]+0\times\frac{1}{3}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^{19}\right]=2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\right]$，所以参与游戏一次的顾客获得优惠券金额的期望值为 $2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\right]$ 万元.

第 4 版

专题四　立体几何参考答案

1.(1)证明略.(2)$\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2.(1)证明略.(2)$\frac{\sqrt{6}}{4}$.

3.(1)证明略.(2)$\left[\frac{\sqrt{7}}{7},\frac{1}{2}\right]$.

4.(1) 当 Q 是 C_1C 中点时，直线 D_1Q，DC，AP 交于一点.理由略.

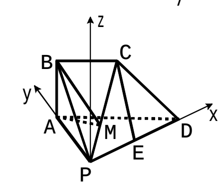
(2)存在点 Q 满足题意，且点 Q 为 CC_1 的中点.

5.(1)证明略.

(2)**解**：以 P 为坐标原点建立如图所示的空间直角坐标系，则 $P(0,0,0)$，$B(0,1,1)$，$C\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},1\right)$，$E\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0,0\right)$.设 $M\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a,\frac{1}{2}a,a\right)$ $(0\leqslant a\leqslant1)$，则 $\overrightarrow{BM}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a,\frac{1}{2}a-1,a-1\right)$，$\overrightarrow{CE}=\left(0,-\frac{1}{2},-1\right)$，所以 $|\cos\langle\overrightarrow{BM},\overrightarrow{CE}\rangle|=\left|\frac{\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{CE}}{|\overrightarrow{BM}||\overrightarrow{CE}|}\right|=\left|\frac{\frac{3}{2}-\frac{5}{4}a}{\sqrt{2a^2-3a+2}\times\frac{\sqrt{5}}{2}}\right|=\frac{\sqrt{10}}{5}$，得 $a=\frac{2}{3}$，所以 $\overrightarrow{BM}=\left(\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$，且 $\overrightarrow{AB}=(0,0,1)$.

设平面 ABM 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BM}=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\sqrt{3}x-2y-z=0,\\z=0,\end{cases}$

令 $x=2$，则 $\boldsymbol{n}=(2,\sqrt{3},0)$.取平面 PAB 的法向量 $\boldsymbol{m}=(1,0,0)$，则 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{2}{\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$，故二面角 $M-AB-P$ 的余弦值为 $\frac{2\sqrt{7}}{7}$.



（第 5 题图）