$\dfrac{\frac{n}{2}+1}{n+1}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2n+2}$.显然 ξ 服从两点分布,则 $E(\xi)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2n+2}$,

$D(\xi)=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2n+2}\right)\left[1-\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2n+2}\right)\right]=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{(2n+2)^2}$.

从而可知随着 n 的增大,$E(\xi)$减小,$D(\xi)$增大.

二、填空题

13.9

14.4.5

提示:由样本(4,3)处的残差为 −0.15,得 $3-(0.7\times4+a)=-0.15$,解得 $a=0.35$.

所以回归方程为$\hat{y}=0.7x+0.35$.又$\bar{x}=4.5$,$\bar{y}=\dfrac{1}{4}(2.5+3+4+m)=\dfrac{1}{4}(9.5+m)$,

代入回归方程,得$\dfrac{1}{4}(9.5+m)=0.7\times4.5+0.35$,解得 $m=4.5$.

15.4

提示:依题意,这个 n 人团队不能解决项目 M 的概率为$(1-0.5)^n=0.5^n$,则 $P_2=1-0.5^n$.由 $P_2\geqslant P_1$,得 $1-0.5^n\geqslant0.9$,解得 $n\geqslant4$.故 n 的最小值是 4.

16.$\dfrac{1}{n+1}\left[\left(\dfrac{4}{3}\right)^{n+1}-1\right]$

提示:由 $kC_{n+1}^{k}=(n+1)C_n^{k-1}$,

得$\dfrac{1}{k}C_n^{k-1}=\dfrac{1}{n+1}C_{n+1}^{k}$,

故$\dfrac{1}{k}C_n^{k-1}\left(\dfrac{1}{3}\right)^k=\dfrac{1}{n+1}C_{n+1}^{k}\left(\dfrac{1}{3}\right)^k$.

所以 $C_n^0\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}C_n^1\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{1}{3}C_n^2\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^3+\cdots+\dfrac{1}{n+1}C_n^n\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}$

$=\dfrac{1}{n+1}C_{n+1}^1\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^1+\dfrac{1}{n+1}C_{n+1}^2\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{1}{n+1}C_{n+1}^3\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^3+\cdots+\dfrac{1}{n+1}C_{n+1}^{n+1}\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}$

$=\dfrac{1}{n+1}\left[\left(1+\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}-1\right]$

$=\dfrac{1}{n+1}\left[\left(\dfrac{4}{3}\right)^{n+1}-1\right]$.

三、解答题

17.**解:**(1)由题意得 X 服从二项分布 $B(4,0.9)$.因为 4 个投保人中,活过 65 岁的人数为 X,则未活过 65 岁的人数为 $4-X$,所以 $Y=10(4-X)+4X=40-6X$.

(2)由 $Y=40-6X\geqslant22$,解得 $X\leqslant3$.所以 $P(Y\geqslant22)=P(X\leqslant3)=1-P(X=4)=1-0.9^4=0.3439\approx0.344$.

18.**解:**(1)列联表如下:

	主食蔬菜	主食肉类	总计
不超过 45 岁	4	8	12
45 岁以上	16	2	18
总计	20	10	30

根据表中数据计算得

$k=\dfrac{30\times(4\times2-16\times8)^2}{20\times10\times12\times18}=10>6.635$,

所以有 99%的把握认为老师的饮食习惯与年龄有关.

(2)$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{C_2^1}{C_{18}^1}=\dfrac{1}{9}$,

$P(B|\bar{A})=\dfrac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})}=\dfrac{C_8^1}{C_{12}^1}=\dfrac{2}{3}$.

19.**解:**(1)不同的选法种数为 $C_6^1\times C_{14}^2=546$.

(2)5 名学生分成三组,一组 1 人,另两组都是 2 人,有$\dfrac{C_5^1C_4^2C_2^2}{A_2^2}=15$ 种分法,再将 3 组分到 3 个班,故不同的选法种数为 $15A_3^3=90$.

(3)先选 2 名学生排在两端,剩下的学生与老师全排列,有 $A_5^2A_6^6$种排法,又老师的全排列有 A_3^3种排法,故不同的站法种数为$\dfrac{A_5^2A_6^6}{A_3^3}=2400$.

20.(1)**解:**当 $m=2$ 时,$f(7,y)=(1+2y)^7$,故展开式中二项式系数最大的项分别是第 4 项和第 5 项,

即 $T_4=C_7^3(2y)^3=280y^3$,$T_5=C_7^4(2y)^4=560y^4$.

(2)**解:**由 $f(2n,y)=(1+my)^{2n}$,$f(n,y)=(1+my)^n$,得 $2^{2n}-2^n=992$,

即$(2^n-32)(2^n+31)=0$,解得 $n=5$.

所以 $f(n,y)=f(5,y)=(1+my)^5=a_0+a_1y+\cdots+a_5y^5$,故 $a_2=C_5^2m^2=40$,结合 $m>0$,解得 $m=2$.

所以 $\sum\limits_{i=1}^{5}a_i=(1+2)^5-1=3^5-1=242$.

(3)**证明:**由 $f(n,1)=m^nf\left(n,\dfrac{1}{t}\right)$,得

$(1+m)^n=m^n\left(1+\dfrac{m}{t}\right)^n=\left(m+\dfrac{m^2}{t}\right)^n$,

则 $1+m=m+\dfrac{m^2}{t}$,所以 $m=\sqrt{t}$.

又$f\left(2017,\dfrac{1}{1000\sqrt{t}}\right)$

$=\left(1+\dfrac{m}{1000\sqrt{t}}\right)^{2017}$

$=\left(1+\dfrac{1}{1000}\right)^{2017}>1+C_{2017}^1\dfrac{1}{1000}+C_{2017}^2\times\left(\dfrac{1}{1000}\right)^2+C_{2017}^3\left(\dfrac{1}{1000}\right)^3>1+2+2+1=6$,

而$f\left(-2017,\dfrac{1}{t}\right)=\left(1+\dfrac{m}{t}\right)^{-2017}$

$=\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)^{-2017}<1$,

所以$f\left(2017,\dfrac{1}{1000\sqrt{t}}\right)>6f\left(-2017,\dfrac{1}{t}\right)$.

21.**解:**(1)由表中数据计算得 $\mu=35\times0.025+45\times0.15+55\times0.2+65\times0.25+75\times0.225+85\times0.1+95\times0.05=65$.所以 $P(36<Z\leqslant79.5)=P(65-2\sqrt{210}<Z\leqslant65+\sqrt{210})=\dfrac{1}{2}\times0.9544+\dfrac{1}{2}\times0.6826=0.8185$.

(2)根据题意可知 X 的所有可能值为 20,40,60,80,且 $P(Z<\mu)=P(Z\geqslant\mu)=\dfrac{1}{2}$,所以 $P(X=20)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$,

$P(X=40)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{7}{18}$,

$P(X=60)=2\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{9}$,$P(X=80)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{18}$.

所以 X 的分布列为

X	20	40	60	80
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{18}$

数学期望 $E(X)=20\times\dfrac{1}{3}+40\times\dfrac{7}{18}+60\times\dfrac{2}{9}+80\times\dfrac{1}{18}=40$.

22.**解:**(1)根据散点图可以判断 $y=c_1e^{c_2x}$适宜作为鸟的时段产卵数 y 关于鸟舍控制温度 x 的回归方程.

(2)由 $k=\ln y$,$y=c_1e^{c_2x}\Rightarrow\ln y=\ln c_1+c_2x$,知 k 关于 x 的线性回归方程可设为 $k=c+dx$(其中 $c=\ln c_1$,$d=c_2$).

计算得

$\hat{d}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})(k_i-\bar{k})}{\sum\limits_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})^2}$

$=\dfrac{35.00}{140.00}=0.25$,

$\hat{c}=\bar{k}-\hat{d}\bar{x}=3.60-0.25\times27.40=-3.25$,

所以 $c_2=\hat{d}=0.25$,$c_1=e^{\hat{c}}=e^{-3.25}=0.04$.因此 y 关于 x 的回归方程为$\hat{y}=0.04e^{0.25x}$.

(3)由(2)知,当 $x=28$ 时,$\hat{y}=0.04e^{0.25\times28}=0.04e^7=0.04\times1096.63=43.8652\approx43.87$,

$z=e^{-2.5}\times43.8652-0.01\times28+10=0.08\times43.8652-0.28+10\approx13.23$.

所以当 $x=28$℃时,鸟的时段产卵数的预报值为 43.87 枚,时段投入保护性成本的预报值为 13.23 万元.

2019-2020 学年

数学·人教 A(选修 2-3)答案页第 3 期

学习周报® ③

第 9~12 期

第 9~10 版综合测试(一)参考答案

一、选择题

1.B

提示:每层都有 2 种走法,故从 1 层到 4 层共有不同的走法 $2\times2\times2=2^3$ 种.

2.D

提示:先分组再排列,得不同的安排方式共有 $C_4^2\times A_3^3=36$ 种.

3.D

提示:$T_2=C_6^1x^5\left(-\dfrac{2}{x}\right)=-12x^4$.

4.B

提示:$T_{r+1}=C_n^r(\sqrt{x})^{n-r}\left(\dfrac{2}{x}\right)^r=2^rC_n^r\cdot x^{\frac{n-3r}{2}}$.令$\begin{cases}n-3r=0,\\2^rC_n^r=60,\end{cases}$解得 $n=6$.故选 B.

5.C

提示:如图所示,对于空格 A,B,需要在 1,2,3,4 四个数字中任选 2 个;对于空格 C,D,需要在 6,7,8,9 四个数字中任选 2 个,则不同的填法种数为 $A_4^2\times A_4^2=144$.

	A	
B	5	D
	C	

(第 5 题图)

6.B

提示:设“第一次掷出 3 点”为事件 A,“两次掷出的点数之和不小于 8”为事件 B,则 $P(A)=\dfrac{1}{6}$,$P(AB)=\dfrac{1\times2}{6\times6}=\dfrac{1}{18}$,所以 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{6}}=\dfrac{1}{3}$.

7.A

提示:甲每天出次品的均值为 $E(X_甲)=0\times0.7+1\times0.1+2\times0.1+3\times0.1=0.6$,乙每天出次品的均值为 $E(X_乙)=0\times0.5+1\times0.3+2\times0.2+3\times0=0.7$,甲出次品的均值比乙小,所以甲的产品质量比乙的产品质量好一些.故选 A.

8.C

提示:依题意,$a+c=2b$ 且 $a+b+c=1$,可得 $b=\dfrac{1}{3}$,$a=\dfrac{2}{3}-c$.所以 $E(X)=na+(n+1)\cdot b+(n+2)c=n+2c+\dfrac{1}{3}$,$D(X)=\left(2c+\dfrac{1}{3}\right)^2a+\left(2c-\dfrac{2}{3}\right)^2b+\left(2c-\dfrac{5}{3}\right)^2c=-4c^2+\dfrac{8}{3}c+\dfrac{2}{9}=-4\left(c-\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{2}{3}\left(0\leqslant c\leqslant\dfrac{2}{3}\right)$.

所以 $D(X)$与 n 无关,且当 $c=\dfrac{1}{3}$时,取得最大值$\dfrac{2}{3}$.

9.B

提示:判断错一个信号有 2 种情况,包括 3 次都错,以及 3 次中有 2 次错,则判断错一个信号的概率为$\dfrac{1}{10}\times\dfrac{1}{10}\times\dfrac{1}{10}+C_3^2\left(\dfrac{1}{10}\right)^2\times\dfrac{9}{10}=\dfrac{7}{250}$.

10.A

提示:R^2 越大,意味着残差平方和越小,模型的拟合效果越好.由②的拟合效果好,可知②的 R^2 较大,残差平方和较小,故 B,C 正确.残差图中的残差点比较均匀地落在水平的带状区域内,说明选用的模型比较合适,这样的带状区域的宽度越窄,说明模型拟合精度越高,由此可知 D 正确.故选 A.

11.B

12.C

提示:p 是真命题,q,s,r 都是假命题,从而可知①真,②假,③假,④真.所以所有真命题的序号是①④.

二、填空题

13.0.005

提示:计算得

$k=\dfrac{500\times(30\times160-270\times40)^2}{70\times430\times300\times200}$

$\approx9.967>7.879$.因此,在犯错误的概率不超过 0.005 的前提下认为“科类与数学成绩是否优秀有关系”,即:如果判断“科类与数学成绩是否优秀无关系”,那么这种判断正确的概率不超过 0.005.

14.100

提示:因为 $X\sim N(12,25)$,所以 $D(X)=25$.所以 $D(Y)=D(2X+5)=2^2D(X)=4\times25=100$.

15.-32

提示:令 $x=1$,得 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{11}=-64$; ①

令 $x=-1$,得 $a_0-a_1+a_2-\cdots-a_{11}=0$. ②

①+②并整理,得 $a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{10}=-32$.

16.$[1,+\infty)$

提示:令 $z=\log_2y$,则 $z=\log_2x^{\log_2x}=(\log_2x)^2$.因为 $x>0$,所以$(\log_2x)^2\geqslant0$,即 $z\geqslant0$.所以 $\log_2y\geqslant0$,解得 $y\geqslant1$.

故所求函数的值域是$[1,+\infty)$.

三、解答题

17.**解:**(1)先将五名学生“捆绑”在一起看作一个,与五位老师排列有 A_6^6种排法,五名学生再内部全排列有 A_5^5种排法,故共有 $A_6^6\times A_5^5=86400$ 种排法.

(2)先将五位老师全排列有 A_5^5种排法,再将五名学生排在五位老师产生的六个空档上有 A_6^5种排法,故共有 $A_5^5\times A_6^5=86400$ 种排法.

18.**解:**(1)$T_{r+1}=C_{12}^rx^{\frac{12-r}{2}}\left(-\dfrac{2}{x}\right)^r=(-2)^r\cdot C_{12}^rx^{6-\frac{3}{2}r}$.令 $6-\dfrac{3}{2}r=3$,解得 $r=2$.

所以展开式中含 x^3 项的系数为$(-2)^2\times C_{12}^2=264$.

(2)由题意,得 $C_{12}^{3k-1}=C_{12}^{k+1}$,所以 $3k-1=k+1$ 或 $3k-1+k+1=12$,解得 $k=1$ 或 $k=3$.

19.**解:**(1)记 M 为事件“接受甲种心理暗示的志愿者中包含 A_1 但不包含 B_1”,则 $P(M)=\dfrac{C_8^4}{C_{10}^5}=\dfrac{5}{18}$.

(2)由题意知 X 可取的值为 0,1,2,3,4,则$P(X=0)=\dfrac{C_6^5}{C_{10}^5}=\dfrac{1}{42}$,$P(X=1)=\dfrac{C_6^4C_4^1}{C_{10}^5}=\dfrac{5}{21}$,$P(X=2)=\dfrac{C_6^3C_4^2}{C_{10}^5}=\dfrac{10}{21}$,$P(X=3)=\dfrac{C_6^2C_4^3}{C_{10}^5}=\dfrac{5}{21}$,$P(X=4)=\dfrac{C_6^1C_4^4}{C_{10}^5}=\dfrac{1}{42}$.所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{42}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{1}{42}$

X 的数学期望 $E(X)=0\times\dfrac{1}{42}+1\times\dfrac{5}{21}+2\times\dfrac{10}{21}+3\times\dfrac{5}{21}+4\times\dfrac{1}{42}=2$.

20.**解:**(1)由题设,被调查的男性公务员人数为 $100\times\dfrac{3}{5}=60$,

其中有意愿生二胎的人数为 $60\times\dfrac{5}{6}=50$,

没有意愿生二胎的人数为 $60-50=10$;

被调查的女性公务员人数为 $100-60=40$,

其中表示有意愿生二胎的人数为 $40\times\dfrac{3}{8}=15$,

没有意愿生二胎的人数为 $40-15=25$.

由此得 2×2 列联表如下:

	男性公务员	女性公务员	合计
生二胎	50	15	65
不生二胎	10	25	35
合计	60	40	100

③(2)由列联表中的数据,计算得 $k=\frac{100\times(50\times25-10\times15)^2}{60\times40\times65\times35}\approx 22.161>10.828$.

因此,在犯错误的概率不超过0.001的前提下认为生二胎与性别有关.

21.解:(1)由表中数据计算得 $\bar{t}=3$, $\bar{y}=40$, $\sum_{i=1}^{5}(t_i-\bar{t})(y_i-\bar{y})=57$, $\sum_{i=1}^{5}(t_i-\bar{t})^2=10$,

所以 $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{5}(t_i-\bar{t})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{5}(t_i-\bar{t})^2}=\frac{57}{10}=5.7$, $\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{t}=40-3\times5.7=22.9$.

故 y 关于 t 的线性回归方程是 $\hat{y}=5.7t+22.9$.

(2)由(1)知,当 $t=6$ 时,$\hat{y}=57.1$,故该大学 2020 年的录取平均分为 $520+57.1=577.1$ 分.

因为 $569<\mu-\sigma=577.1-5=572.1$,所以李华被录取的概率 $P<\frac{1}{2}[1-P(\mu-\sigma<X\leqslant\mu+\sigma)]=\frac{1}{2}\times(1-0.6826)=0.1587<0.6$.故建议李华第一志愿谨慎报考该大学.

22.解:(1)从全校学生中随机抽取 100 人,A,B 都不使用的有 5 人,仅使用 A 的有 30 人,仅使用 B 的有 25 人,则 A,B 都使用的人数为 $100-5-30-25=40$. 所以从全校学生中随机抽取 1 人,估计该学生上个月 A,B 两种支付方式都使用的概率 $P=\frac{40}{100}=0.4$.

(2)X 的可能取值为 0,1,2,且 $P(X=0)=\frac{18}{30}\times\frac{10}{25}=\frac{6}{25}$,$P(X=1)=\frac{18}{30}\times\frac{15}{25}+\frac{12}{30}\times\frac{10}{25}=\frac{13}{25}$,$P(X=2)=\frac{12}{30}\times\frac{15}{25}=\frac{6}{25}$,所以$X$的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{6}{25}$	$\frac{13}{25}$	$\frac{6}{25}$

数学期望 $E(X)=0\times\frac{6}{25}+1\times\frac{13}{25}+2\times\frac{6}{25}=1$.

(3)样本仅使用A的学生有30人,其中有3人月支付金额大于2000元,随机抽查3人,发现他们本月支付金额大于2000元的概率为 $\frac{C_3^3}{C_{30}^3}=\frac{1}{4060}$,虽然概率较小,但仍然可能发生,故不能认为样本仅使用A的学生中本月支付金额大于2000元的人数有变化.

第 11~12 版综合测试(二)参考答案

一、选择题

1.C 2.B 3.B

4.A

提示:由表中数据,计算得 $k\approx0.3367<0.455$,所以认为机动车驾驶技术与性别有关的可靠性不足 50%.

5.C

提示:购买方式可以分为三类:

①买 1 本有 3 种方式;

②买 2 本有 3 种方式;

③买 3 本有 1 种方式.

所以共有 3+3+1=7 种.

6.A

提示:令x=1,得$P=4^n$.

又$S=2^n$,所以$4^n+2^n=272$,

解得n=4.

7.C

提示:先安排程序 A,然后把 B和 C 看作一个元素同除 A 外的 3 个元素进行全排列,最后 B 与 C 进行全排列,故不同的编排方法共有 $2\times A_4^4\times A_2^2=96$ 种.

8.C 9.B

10.D

提示:X 的所有可能取值为 0,1,3,且 $P(X=0)=\frac{2}{A_3^3}=\frac{1}{3}$,$P(X=1)=\frac{3}{A_3^3}=\frac{1}{2}$,$P(X=3)=\frac{1}{A_3^3}=\frac{1}{6}$,则 $E(X)=0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{6}=1$,$D(X)=(0-1)^2\times\frac{1}{3}+(1-1)^2\times\frac{1}{2}+(3-1)^2\times\frac{1}{6}=1$.

11.D

12.C

二、填空题

13.0.3

提示:当 $x=1$ 时,$\hat{y}=1.8$,所以该回归模型在 A 处的残差为 $2.1-1.8=0.3$.

14.28

15.660

16.②④

提示:易知 A_1,A_2,A_3 是两两互斥事件,而 $P(B)=P(A_1B)+P(A_2B)+P(A_3B)=\frac{5}{10}\times\frac{5}{11}+\frac{2}{10}\times\frac{4}{11}+\frac{3}{10}\times\frac{4}{11}=\frac{9}{22}$,所以④正确,①③⑤错误;从甲中取出一个红球给乙,则 B 中红球共计 5 个,$P(B|A_1)=\frac{5}{11}$,所以②正确.

三、解答题

17.解:每个电阻都有断路与通路两种状态,将图中从上到下的 3 条支线路分别记为支线 a,b,c,则支线 a,b中至少有 1 个电阻断路的情况都有 $2^2-1=3$ 种;支线 c 中至少有 1 个电阻断路的情况有 $2^3-1=7$ 种.每条支线至少有 1 个电阻断路,灯就不亮,因此灯不亮的情况共有 3×3×7=63 种.

18.解:设某一项为第 $r+1$ 项.

依题意,有 $\begin{cases}C_n^r2^r=2C_n^{r-1}2^{r-1},\\ C_n^r2^r=\frac{5}{6}C_n^{r+1}2^{r+1},\end{cases}$

解得 $n=7$.

故中间项为

$T_4=280x^{\frac{3}{2}}$,$T_5=560x^2$.

19.解:(1)甲、乙所付费用可以为 100 元、200 元、300 元.

甲、乙两人所付费用都是 100 元的概率为 $P_1=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$;

都是 200 元的概率为 $P_2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$;

都是 300 元的概率为 $P_3=\left(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{36}$.

故甲、乙两人所付费用相等的概率为 $P=P_1+P_2+P_3=\frac{13}{36}$.

(2)随机变量ξ的取值可以为200,300,400,500,600.

$P(\xi=200)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$;

$P(\xi=300)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{13}{36}$;

$P(\xi=400)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{3}+\left(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{11}{36}$;

$P(\xi=500)=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{3}=\frac{5}{36}$;

$P(\xi=600)=\left(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{36}$.

故ξ的分布列为

ξ	200	300	400	500	600
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{13}{36}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{36}$

数学期望为

$E(\xi)=200\times\frac{1}{6}+300\times\frac{13}{36}+400\times\frac{11}{36}+500\times\frac{5}{36}+600\times\frac{1}{36}=350$.

20.解:(1)考生甲通过的概率 $P=1-\frac{C_4^1C_2^2}{C_6^3}=\frac{4}{5}$.

(2)设考生甲正确完成的题数为 X,则 X 的可能取值为 1,2,3,

且 $P(X=1)=\frac{C_4^1C_2^2}{C_6^3}=\frac{1}{5}$,$P(X=2)=\frac{C_4^2C_2^1}{C_6^3}=\frac{3}{5}$,$P(X=3)=\frac{C_4^3C_2^0}{C_6^3}=\frac{1}{5}$.所以 X 的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

数学期望 $E(X)=1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{3}{5}+3\times\frac{1}{5}=2$.

设考生乙正确完成的题数为 Y,则 $Y\sim B\left(3,\frac{2}{3}\right)$,

所以 $P(Y=k)=C_3^k\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(1-\frac{2}{3}\right)^{3-k}$ $(k=0,1,2,3)$.所以 Y 的分布列为

Y	0	1	2	3
P	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

数学期望 $E(Y)=3\times\frac{2}{3}=2$.

(3)结合(2)可知,$E(X)=E(Y)$,且 $D(X)=(1-2)^2\times\frac{1}{5}+(2-2)^2\times\frac{3}{5}+(3-2)^2\times\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$,$D(Y)=3\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$,即 $D(X)<D(Y)$,所以甲、乙两考生的实验操作平均水平相当,但甲较稳定.

21.解:(1)由表中信息可知,该公司今年选择促销方案 1 较为有利.

(2)①对于回归模型 $\hat{y}=-1200\ln x+5000$,相关指数 $R_1^2=1-\frac{49428.74}{124650}\approx0.6035$;

对于回归模型 $\hat{y}=-27x+1700$,$R_2^2=1-\frac{11512.43}{124650}\approx0.9076$;

对于回归模型 $\hat{y}=-\frac{1}{3}x^2+1200$,$R_3^2=1-\frac{175.26}{124650}\approx0.9986$.

因为 $R_3^2>R_2^2>R_1^2$,所以选择回归模型 $\hat{y}=-\frac{1}{3}x^2+1200$ 进行拟合最为合适.

②由(1)及①可知,年利润 $z=\left(-\frac{1}{3}x^2+1200\right)(x-15)$,其中 $x>0$,

则 $z'=-(x+30)(x-40)$.

当 $0<x<40$ 时,$z'>0$,z 单调递增;当 $x>40$ 时,$z'<0$,z 单调递减.

故当售价 x 定为 40 元时,年利润 z 可以达到最大.

22.(1)解:设事件 A_i 表示编号为 i 的抽屉里放的是黑球,则 $p=P(A_2)=P(A_2|A_1)P(A_1)+P(A_2|\bar{A}_1)P(\bar{A}_1)=\frac{n-1}{m+n-1}\cdot\frac{n}{m+n}+\frac{n}{m+n-1}\cdot\frac{m}{m+n}=\frac{n}{m+n}$.

(2)**证明**:因为 X 的所有可能取值为 $\frac{1}{n},\frac{1}{n+1},\cdots,\frac{1}{m+n}$,且 $P\left(X=\frac{1}{k}\right)=\frac{C_{k-1}^{n-1}}{C_{n+m}^n}$,$k=n,n+1,n+2,\cdots,n+m$,

所以 $E(X)=\sum_{k=n}^{n+m}\left(\frac{1}{k}\cdot\frac{C_{k-1}^{n-1}}{C_{n+m}^n}\right)=\frac{1}{C_{n+m}^n}\cdot\sum_{k=n}^{n+m}\frac{C_{k-1}^{n-1}}{k}<\frac{1}{C_{n+m}^n}\cdot\sum_{k=n}^{n+m}\frac{C_{k-1}^{n-1}}{k-1}=\frac{1}{C_{n+m}^n}\cdot\sum_{k=n}^{n+m}\left[\frac{1}{k-1}\cdot\frac{(k-1)!}{(n-1)!(k-n)!}\right]=\frac{1}{C_{n+m}^n}\sum_{k=n}^{n+m}\frac{(k-2)!}{(n-1)!(k-n)!}=\frac{1}{C_{n+m}^n}\sum_{k=n}^{n+m}\frac{C_{k-2}^{n-2}}{n-1}=\frac{1}{C_{n+m}^n\cdot(n-1)}(C_{n-2}^{n-2}+C_{n-1}^{n-2}+\cdots+C_{n+m-2}^{n-2})=\frac{1}{C_{n+m}^n\cdot(n-1)}(C_{n-1}^{n-1}+C_{n-1}^{n-2}+\cdots+C_{n+m-2}^{n-2})=\frac{1}{C_{n+m}^n\cdot(n-1)}(C_n^{n-1}+C_n^{n-2}+\cdots+C_{n+m-2}^{n-2})=\cdots=\frac{1}{C_{n+m}^n\cdot(n-1)}(C_{n+m-2}^{n-1}+C_{n+m-2}^{n-2})=\frac{C_{m+n-1}^{n-1}}{C_{n+m}^n\cdot(n-1)}=\frac{n}{(m+n)(n-1)}$,即 $E(X)<\frac{n}{(m+n)(n-1)}$.

第 13~14 版综合测试(三)参考答案

一、选择题

1.B

2.A

提示:由题设知,样本点的残差为 0,故残差平方和为 0,所以 $R^2=1$.

3.D

提示:根据题意,补全列联表如下:

	专业 A	专业 B	合计
女生	12	4	16
男生	38	46	84
合计	50	50	100

计算得 $k=\frac{100\times(12\times46-4\times38)^2}{16\times84\times50\times50}\approx4.762>3.841$,所以在犯错误的概率不超过 0.05 的前提下认为工科院校中性别与专业有关.

4.D

提示:由已知,得 $\frac{1}{3a}+\frac{2}{3a}+\frac{3}{3a}=1$,解得 $a=2$.所以 $P(X\leqslant2)=1-P(X=3)=1-\frac{3}{3\times2}=\frac{1}{2}$.

5.A

提示:由题设,知 $\xi\sim B\left(5,\frac{1}{3}\right)$,所以 $D(\xi)=5\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{10}{9}$.所以 $D(3\xi)=9D(\xi)=9\times\frac{10}{9}=10$.

6.A

提示:设这批白炽灯的寿命为 X,则 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,且 $\mu=1000$,$\sigma=20$.

所以 $P(980<X<1040)=P(\mu-\sigma<X<\mu+2\sigma)=\frac{1}{2}\times(0.6826+0.9544)=0.8185$.故选 A.

7.C

提示:$(x^2-3x+2)^4=(x-1)^4(x-2)^4$,而 a_7 是展开式中 x^7 的系数,所以 $a_7=C_4^1\times(-1)\times C_4^0+C_4^0\times C_4^1\times(-2)=-12$.

8.B

提示:第一位置有 5 种排法,不妨设排金,则第二位置只能排土或水,若排土,则往后依次排火——木——水;若排水,则往后依次排木——火——土,有 2 种排法.故不同的排列方法种数为 5×2=10.

9.C

提示:$A_2^2A_5^5+A_2^2C_4^1A_4^4=240+192=432$.

10.C

提示:将 a_1 连同其右边的 2 个空位捆绑,a_2 连同其右边的 3 个空位捆绑,a_3 连同其右边的 4 个空位捆绑分别看作一个元素,四元数组(a_1,a_2,a_3,a_4)的个数相当于从 11 个元素中选取 4 个,故这样的四元数组(a_1,a_2,a_3,a_4)的个数是 C_{11}^4.

11.B

提示:因为乙只带了现金,所以结账方式一定有现金.

①当结账方式不含支付宝时,甲有 2 种选法,若甲选择现金,则丙、丁 2 人有 $A_2^2=2$ 种选法;若甲选择微信,则丙、丁可以都选银联卡,或一人选银联卡另一人选微信或现金,故有 $1+C_2^1C_2^1=5$ 种选法.

故共有 2+5=7 种选法.

②当结账方式不含微信时,与①同理,共有 7 种选法.

③当结账方式不含银联卡时,若甲、丙、丁中有人使用现金,则有 $C_3^1A_2^2=6$ 种选法;若甲、丙、丁都没有使用现金,则有 $C_3^1A_2^2=6$ 种选法.故共有 6+6=12 种选法.

综上可知,结账方式的不同情况有 7+7+12=26 种.

12.C

提示:依题意,从乙盒子里随机取出 n 个球,含有红球个数 X 服从 $N=6$,$M=3$,$n=n$ 的超几何分布,从而可知 $E(X)=\frac{3n}{6}=\frac{n}{2}$.故从甲盒中取一球,相当于从含有 $\frac{n}{2}+1$ 个红球的 $n+1$ 个球中取一球,记取到红球的个数为 ξ,则 $P(\xi=1)=$