

一、选择题

- 1.C
- 2.D
- 3.C

提示:结构图除了可以表示结构设置的层次之外,还可以表示事物的分类;而流程图表示的是时间先后顺序.

- 4.A
- 5.A

提示:题中结构图表达的是从属关系.

- 6.A

提示:由组织结构图,可知科研处由业务副校长直接领导.

- 7.B

提示:结构图可以表示结构设置的层次.

- 8.B

提示:由流程图可知加工零件有三道工序:粗加工、返修加工和精加工,每道工序完成都要对产品进行检验,粗加工的合格品进入精加工,不合格品进入返修加工;返修加工的合格品进入精加工,不合格品作为废品处理;精加工的合格品为成品,不合格品为废品.由上可知一件成品至少要经过粗加工、检验、精加工、最后检验四道程序.

- 9.B

提示:由流程图知 $f(x)$ 为有零点的奇函数, A, C 中函数 $f(x)$ 无零点; D 中函数 $f(x)$ 为偶函数; B 中函数 $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1}-x)$ 满足 $f(0)=0$, 且 $f(-x) = \ln(\sqrt{x^2+1}+x) = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} = -\ln(\sqrt{x^2+1}-x) = -f(x)$, 故选 B.

- 10.C

提示:要清楚数据拟合的基本过程.

- 11.A

- 12.A

提示:一台机器安排生产: $C \rightarrow B \rightarrow G$, 需要的工时数为 $4+2+5=11$;

另一台机器安排生产: $A \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F$, 需要的工时数为 $3+2+2+1=8$.

所以完成该产品的最短加工时间是 11 小时.

二、填空题

13. 结构图

提示:直线与圆有三种位置关系:相交,相切,相离.这三种关系之间是并列关系,都从属于直线与圆的位置关系,故宜用结构图表示.

14. 副班长, 5, 副班长

提示:由题中结构图,可知“班长”的“下位”是“副班长”;“副班长”的“下位”为“生活委员”“学习委员”“文娱委员”“体育委员”“纪律委员”,共 5 个;“学习委员”的“上位”是“副班长”.

$$15. y = \begin{cases} 1(x > 0), \\ 0(x = 0), \\ -1(x < 0) \end{cases}$$

16. (1) 3^{m-1} ; (2) 3

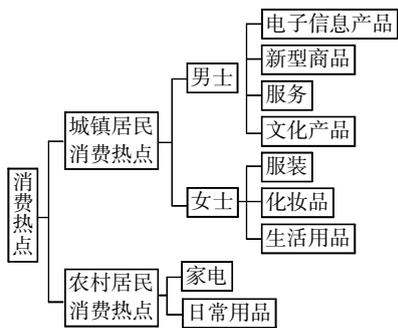
提示:(1)由③知 $f(m, 1) = 3f(m-1, 1) = 3^2f(m-2, 1) = \dots = 3^{m-1}f(1, 1) = 3^{m-1}$.

(2)由②知 $f(m, n) = f(m, n-1) + 3 = f(m, n-2) + 3 \times 2 = \dots = f(m, 1) + 3(n-1) = 3^{m-1} + 3(n-1)$,

令 $30 = 3^{m-1} + 3(n-1)$, 结合 m, n 为正整数解得 $\begin{cases} m=2, \\ n=10, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m=3, \\ n=8, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m=4, \\ n=2. \end{cases}$ 所以满足 $f(m, n) = 30$ 的平面上的点 (m, n) 有 3 个.

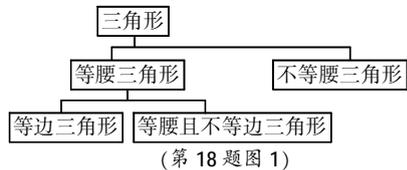
三、解答题

17. 解:消费热点的结构图如下:



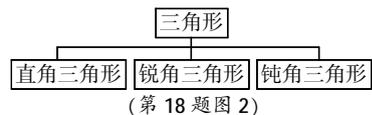
(第 17 题图)

18. 解:(1)按边分类:



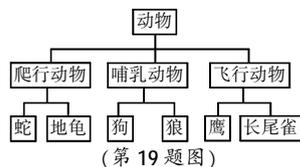
(第 18 题图 1)

(2)按角分类:



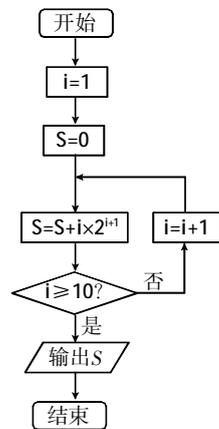
(第 18 题图 2)

19. 解:结构图为:



(第 19 题图)

20. 解:程序框图如图:



(第 20 题图)

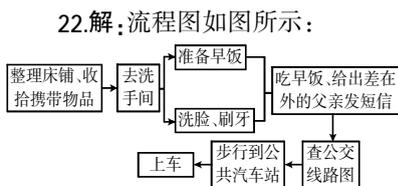
21. 解:若将打印出来的数列的前 5 项依次记为 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 ,

则 $a_1=1, a_2=a_1+3=1+3=4, a_3=a_2+3=4+3=7, a_4=a_3+3=7+3=10, a_5=a_4+3=10+3=13$.

于是得到数列的递推公式 $\begin{cases} a_1=1, \\ a_{n+1}=a_n+3(n \in \mathbb{N}_+). \end{cases}$

因为 $a_{n+1}-a_n=3(n \in \mathbb{N}_+)$, 所以这个数列是等差数列.

22. 解:流程图如图所示:



(第 22 题图)

所用时间为 $8+2+15+10+5+10=50$ (分钟), 正好赶上公共汽车.(答案不唯一)

第 5 期 第 2-3 版章节测试参考答案

一、选择题

- 1.D 2.D 3.C 4.B 5.C

- 6.A

提示:由题意知, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为减函数, 在 A, B, C, D 四项中, 由基本初等函数性质知, A 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数, 故选 A.

- 7.D

提示:由已知等式, 得 $\frac{\tan \frac{\pi}{5} + \frac{b}{a}}{1 - \frac{b}{a} \tan \frac{\pi}{5}} =$

$\tan \frac{8\pi}{15}$, 设 $\tan \theta = \frac{b}{a}$, 则有 $\tan(\frac{\pi}{5} + \theta) = \tan \frac{8\pi}{15}$, 所以 $\frac{\pi}{5} + \theta = k\pi + \frac{8\pi}{15} (k \in \mathbb{Z})$, 得 $\theta = k\pi + \frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$. 所以 $\tan \theta = \tan(k\pi + \frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$, 即 $\frac{b}{a} = \sqrt{3}$.

- 8.C

提示:垂直于同一个平面的两条直线平行.

- 9.C

提示:假设 $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}$ 的值均大于 1, 由 $a > 0, b > 0, c > 0$, 得 $a > b, b > c, c > a$, 显然矛盾, 所以 $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}$ 的值至少有一个不大于 1.

- 10.C

提示:因为 $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3})$, $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4})$, $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{5})$,

依此类推可得: $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \frac{1}{90} + \frac{1}{110} + \frac{1}{132} + \frac{1}{156} = \frac{1}{2} + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{5}) + (\frac{1}{5} - \frac{1}{6}) + (\frac{1}{6} - \frac{1}{7}) + (\frac{1}{7} - \frac{1}{8}) + (\frac{1}{8} - \frac{1}{9}) + (\frac{1}{9} - \frac{1}{10}) + (\frac{1}{10} - \frac{1}{11}) + (\frac{1}{11} - \frac{1}{12}) + (\frac{1}{12} - \frac{1}{13})$, 所以 $\frac{1}{m} = \frac{1}{13}$, $\frac{1}{n} = \frac{1}{20}$, $m=13, n=20$, 即 $1 \leq x \leq 13, 1 \leq y \leq 20$. 又 $\frac{x+y+2}{x+1} = 1 + \frac{y+1}{x+1}$, 把 $\frac{y+1}{x+1}$ 看成点 (x, y) , $(-1, -1)$ 连线的斜率, 结合 $m \leq n, m, n \in \mathbb{N}_+$, 在满足条件的点中, $(13, 1), (-1, -1)$ 连线的斜率最小, 为

$\frac{1+1}{13+1} = \frac{1}{7}$, 故 $\frac{x+y+2}{x+1}$ 最小值为 $\frac{8}{7}$. 故选 C.

- 11.A

提示:由已知, 得 $\begin{cases} N+40M=40K, \\ N+15M=15K \times 2, \end{cases}$ 解得 $M=0.4K, N=24K$. 设需要同时开放 x 个窗口才能满足要求, 则 $N+8M \leq 8Kx$, 即 $24K+8 \times 0.4K \leq 8Kx$, 解得 $x \geq 3.4$. 故至少需要同时开放 4 个窗口.

- 12.B

提示:由题设知, A, B 都不是来自 2 班, 所以 C 来自 2 班. 又 B 的成绩比来自 2 班的同学 C 高, C 的成绩比来自 3 班的同学高, 所以 B 只能来自 1 班, 而 A 来自 3 班, 故选 B.

二、填空题

13. 同角的补角相等

14. $(-\infty, 1]$

提示:由已知, 得 $A = \{x | x < 1 \text{ 或 } x \geq 2\}, B = \{x | x < a\}$. 因为 p 是 q 的必要不充分条件, 所以 $B \subseteq A$, 可得 $a \leq 1$. 故实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 1]$.

15. $\frac{a^3}{8}$ 16. $\frac{x}{(2^n-1)x+2^n}$

三、解答题

17. 解: $f(a)+f(c) > 2f(b)$. 证明如下: 因为 a, b, c 是互不相等的正数, 所以 $a+c > 2\sqrt{ac}$. 因为 $b^2=ac$, 所以 $ac+2(a+c) > b^2+4b$. 即 $ac+2(a+c)+4 > b^2+4b+4$. 从而 $(a+2)(c+2) > (b+2)^2$. 因为 $f(x) = \log_2 x$ 是增函数, 所以 $\log_2[(a+2)(c+2)] > \log_2(b+2)^2$. 即 $\log_2(a+2) + \log_2(c+2) > 2\log_2(b+2)$. 故 $f(a)+f(c) > 2f(b)$.

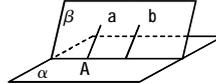
18. 解: 根据类比猜想得出 $S_{AA_1C_1C}^2 = S_{ABBA_1}^2 + S_{BCC_1B_1}^2 - 2S_{ABBA_1} \cdot S_{BCC_1B_1} \cdot \cos \theta$, 其中 θ 为侧面 ABB_1A_1 与 BCC_1B_1 所成的二面角的平面角.

证明如下: 作斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的直截面 DEF, D, E, F 分别在棱 AA_1, CC_1, BB_1 上, 则 $\angle DFE$ 为平面 ABB_1A_1 与平面 BCC_1B_1 所成的角, 设为 θ . 在 $\triangle DEF$ 中有余弦定理: $DE^2 = DF^2 + EF^2 - 2DF \cdot EF \cos \theta$, 得 $DE^2 \cdot AA_1^2 = DF^2 \cdot AA_1^2 + EF^2 \cdot AA_1^2 - 2DF \cdot AA_1 \cdot EF \cdot AA_1 \cos \theta$, 即 $S_{AA_1C_1C}^2 = S_{ABBA_1}^2 + S_{BCC_1B_1}^2 - 2S_{ABBA_1} \cdot S_{BCC_1B_1} \cdot \cos \theta$.

19. 证明: 要证原式, 只要证 $\frac{a+b+c}{a+b} + \frac{a+b+c}{b+c} = 3$, 即证 $\frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c} = 1$,

即只要证 $\frac{bc+c^2+a^2+ab}{ab+b^2+ac+bc} = 1$. 易知 $A+C=2B$, 则 $B=60^\circ, b^2=a^2+c^2-ac$, 所以 $\frac{bc+c^2+a^2+ab}{ab+b^2+ac+bc} = \frac{bc+c^2+a^2+ab}{ab+a^2+c^2-ac+ac+bc} = \frac{bc+c^2+a^2+ab}{ab+a^2+c^2+bc} = 1$.

所以原等式成立. 20. 证明: 原命题可用数学语言表述为: 已知 $a \parallel b$, 直线 $a \cap$ 平面 $\alpha = A$, 如图所示, 则直线 b 和平面 α 相交.



(第 20 题图)

假设 b 与平面 α 不相交, 则 $b \subset \alpha$, 或 $b \parallel \alpha$. (1) 若 $b \subset \alpha$, 因为 $a \parallel b, a \cap \alpha = A$, 所以 $a \parallel \alpha$, 这与 $a \cap \alpha = A$ 相矛盾. (2) 若 $b \parallel \alpha$, 因为 $a \parallel b$, 所以 $a \parallel \alpha$, 而 A 来自 3 班, 故选 B.

设 $\alpha \cap \beta = c$, 因为 $b \parallel \alpha$, 所以 $b \parallel c$. 又 $a \parallel b$, 所以 $a \parallel c$, 且 $a \cap c = A$. 故 $a \parallel \alpha$, 这与 $a \cap \alpha = A$ 矛盾. 根据(1)(2), 可知假设不成立. 故直线 b 与平面 α 相交, 原命题得证.

21. 解: $\triangle ABC$ 是锐角三角形. 因为 $c^n = a^n + b^n (n > 2)$, 所以 $c > a, c > b$. 由 c 是 $\triangle ABC$ 的最大边, 所以要证 $\triangle ABC$ 是锐角三角形, 只需证角 C 为锐角, 即证 $\cos C > 0$.

因为 $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$, 所以要证 $\cos C > 0$, 只要证 $a^2+b^2 > c^2$. ① 注意到条件: $a^n+b^n=c^n$, 于是将①等价变形为: $(a^2+b^2)c^{n-2} > c^n$. ② 因为 $c > a, c > b, n > 2$, 所以 $c^{n-2} > a^{n-2}, c^{n-2} > b^{n-2}$, 即 $c^{n-2} \cdot a^{n-2} > 0, c^{n-2} \cdot b^{n-2} > 0$, 从而 $(a^2+b^2)c^{n-2} - c^n = (a^2+b^2)c^{n-2} - a^n - b^n = a^2(c^{n-2} - a^{n-2}) + b^2(c^{n-2} - b^{n-2}) > 0$, 这说明②式成立, 从而①式也成立. 故 $\cos C > 0, C$ 是锐角, 所以 $\triangle ABC$ 为锐角三角形.

22. (1) 解: 由于 $[(x-1)+(y+1)+(z+1)]^2 = (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 + 2[(x-1)(y+1) + (y+1)(z+1) + (z+1)(x-1)] \leq 3[(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2]$, 因为 $x+y+z=1$,

所以 $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 \geq \frac{4}{3}$, 当且仅当 $x = \frac{5}{3}, y = -\frac{1}{3}, z = -\frac{1}{3}$ 时, 等号成立. 所以 $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2$ 的最小值为 $\frac{4}{3}$.

(2) 证明: 由于 $[(x-2)+(y-1)+(z-a)]^2 = (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-a)^2 + 2[(x-2)(y-1) + (y-1)(z-a) + (z-a)(x-2)] \leq 3[(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-a)^2]$, 因为 $x+y+z=1$, 所以 $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-a)^2 \geq \frac{(2+a)^2}{3}$, 当且仅当 $x = \frac{4-a}{3}, y = \frac{1-a}{3}, z = \frac{2a-2}{3}$ 时, 等号成立. 因此 $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-a)^2$ 的最小值为 $\frac{(2+a)^2}{3}$. 由题设知 $\frac{(2+a)^2}{3} \geq \frac{1}{3}$, 解得 $a \leq -3$ 或 $a \geq -1$.

一、选择题

- 1.D
提示: $i^{2019} = (i^4)^{504} \cdot i^3 = -i$.
2.B
提示: $2i - \sqrt{5}$ 的虚部是 2 , $\sqrt{5}i - 2$ 的实部是 -2 , 所以新复数是 $2-2i$.
3.C 4.C 5.B 6.D 7.B 8.B
9.B
提示: 设 $z_1 = a+bi, z_2 = c+di (a, b, c, d \in \mathbf{R})$, 则 $z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = (a+bi)(c-di) + (a-bi)(c+di) = (2ac+2bd) \in \mathbf{R}$.

- 10.C
提示: 设 $z = x+yi (x, y \in \mathbf{R})$.
由已知, 得 $x^2+y^2+i(2y) \leq 0$,
即 $x^2+y^2-2y \leq 0$, 即 $x^2+(y-1)^2 \leq 1$.
故选 C.
11.C
提示: $z^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, z^3 = -1, z^4 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, z^5 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, z^6 = 1$, 所以原式 = $(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) + (-1 + \sqrt{3}i) + (-3) + (-2 - 2\sqrt{3}i) + (\frac{5}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}i) + 6 = 3 - 3\sqrt{3}i = 6(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) = 6z$.

- 12.A
提示: 设 $z = a+bi (a, b \in \mathbf{R})$,
所以 $|2z+1| = \sqrt{(2a+1)^2 + 4b^2}$,
 $|z-i| = \sqrt{a^2 + (b-1)^2}$,
所以 $\sqrt{(2a+1)^2 + 4b^2} = \sqrt{a^2 + (b-1)^2}$,
整理得 $a^2 + b^2 + \frac{4}{3}a + \frac{2}{3}b = 0$,
所以 z 对应的点的轨迹是圆.
故选 A.

- 二、填空题
13. $\sqrt{13}$
14. 5, 2
15. 1
提示: 复数 z_1 和 z_2 在复平面内对应的点 A 的坐标为 $(1, 1)$, B 的坐标为 $(-1, 1)$,
所以 $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1$.
16.-1
提示: 因为 $x + \frac{1}{x} = -1$, 所以 $x^2 + x + 1 = 0$.
所以 $x = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$, 所以 $x^3 = 1$.
因为 $2020 = 3 \times 673 + 1$, 所以 $x^{2020} = x$,
所以 $x^{2020} + \frac{1}{x^{2020}} = x + \frac{1}{x} = -1$.

三、解答题

17. 解: (1) $\frac{1-\sqrt{3}i}{(\sqrt{3}+i)^2} = \frac{1-\sqrt{3}i}{2+2\sqrt{3}i} = \frac{(1-\sqrt{3}i)^2}{2(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)} = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$.
(2) $\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^3(4+5i)}{(5-4i)(1-i)} = \frac{2\sqrt{2}(1+i)^2(1+i)(4+5i)}{(5-4i)(1-i)} = \frac{2\sqrt{2} \cdot 2i \cdot 2i(4+5i)(5+4i)}{(5-4i)(5+4i)(1-i)(1+i)} = \frac{-8\sqrt{2} \times 41i}{41 \times 2} = -4\sqrt{2}i$.

18. 解: 复数 $z = (2+i)m^2 - 3(i+1)m - 2(1-i) = (2m^2 - 3m - 2) + (m^2 - 3m + 2)i$.
(1) 若 z 是虚数, 则 $m^2 - 3m + 2 \neq 0$, 解得 $m \neq 1$ 或 $m \neq 2$.
(2) 若 $z < 0$, 则 $m^2 - 3m + 2 = 0$ 且 $2m^2 - 3m - 2 < 0$, 解得 $m = 1$.
(3) 若 z 所对应的点在第三象限, 则 $2m^2 - 3m - 2 < 0$ 且 $m^2 - 3m + 2 < 0$, 解得 $m \in (1, 2)$.

19. 解: (1) 因为 $z = \cos A + i \sin A$, 所以 $z+1 = 1 + \cos A + i \sin A$.
所以 $|z+1| = \sqrt{(1+\cos A)^2 + \sin^2 A} = \sqrt{2+2\cos A}$.
因为 $|z+1| = 1$. 所以 $2+2\cos A = 1$. 所以 $\cos A = -\frac{1}{2}$. 又 $0 < A < 180^\circ$, 所以 $A = 120^\circ$.

- 所以 $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
所以复数 $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
(2) 由正弦定理, 得 $a = 2R \cdot \sin A, b = 2R \cdot \sin B, c = 2R \cdot \sin C$ (其中 R 为 $\triangle ABC$ 外接圆的半径),
所以原式 = $\frac{\sin B - \sin C}{\sin A \cdot \cos(60^\circ + C)}$.
因为 $B = 180^\circ - A - C = 60^\circ - C$,
所以原式 = $\frac{\sin(60^\circ - C) - \sin C}{\sin 120^\circ \cdot \cos(60^\circ + C)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cos C - \frac{3}{2} \sin C}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos(60^\circ + C)} = \frac{\cos C - \sqrt{3} \sin C}{\cos(60^\circ + C)} = \frac{2 \cos(60^\circ + C)}{\cos(60^\circ + C)} = 2$,
即 $\frac{b-c}{a \cos(60^\circ + C)}$ 的值为 2.

20. 解: 因为 $(x+\sqrt{3}i)^3 = \log_{\sqrt{2}} \frac{1}{2^4} = -8$,
所以 $(\frac{x+\sqrt{3}i}{-2})^3 = 1$,

- 所以 $\frac{x+\sqrt{3}i}{-2} = 1$ 或 $\frac{x+\sqrt{3}i}{-2} = \omega$ 或 $\frac{x+\sqrt{3}i}{-2} = \bar{\omega}$ (其中 $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$).
若 $x+\sqrt{3}i = -2$, 则 $x \notin \mathbf{R}$.
若 $x+\sqrt{3}i = -2\omega = 1 - \sqrt{3}i$, 则 $x \in \mathbf{R}$.
若 $x+\sqrt{3}i = -2\bar{\omega} = 1 + \sqrt{3}i$, 则 $x = 1$.
综上可知, 存在满足题意的实数 x 且 $x = 1$.

21. 解: 依题意得 $z_1 + z_2$ 为实数, 因为 $z_1 + z_2 = \frac{3}{a+5} + \frac{2}{1-a} + [(a^2-10) + (2a-5)]i$,
所以 $\begin{cases} a^2+2a-15=0, \\ a+5 \neq 0, \end{cases}$ 所以 $a = 3$.
此时 $z_1 = \frac{3}{8} - i, z_2 = -1 + i$,
即 $\overrightarrow{OZ_1} = (\frac{3}{8}, -1), \overrightarrow{OZ_2} = (-1, 1)$.
所以 $\overrightarrow{OZ_1} \cdot \overrightarrow{OZ_2} = \frac{3}{8} \times (-1) + (-1) \times 1 = -\frac{11}{8}$.

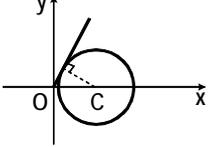
22. 解: (1) 由 $z_1 = z_2$, 得 $m = \sin \alpha$ 且 $m - \cos \alpha = 1$,
所以 $\sin \alpha - \cos \alpha = 1$,
即 $\sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
因为 $\alpha \in [0, 2\pi)$,
所以 $\alpha - \frac{\pi}{4} \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4})$.
所以 $\alpha - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ 或 $\alpha - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$,
解得 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 或 $\alpha = \pi$.

- (2) ① 若 $\alpha = \frac{\pi}{2}$, 则 $t = i, f(t) = 1 + i + i^2 + \dots + i^{n-1} = \frac{1-i^n}{1-i}$.
故当 $n = 4k (k \in \mathbf{N}_+)$ 时, $f(t) = \frac{1-1}{1-i} = 0$;
当 $n = 4k+1 (k \in \mathbf{N}_+)$ 时, $f(t) = \frac{1-i}{1-i} = 1$;
当 $n = 4k+2 (k \in \mathbf{N}_+)$ 时, $f(t) = \frac{1-i^2}{1-i} = \frac{2}{1-i} = 1+i$;
当 $n = 4k+3 (k \in \mathbf{N}_+)$ 时, $f(t) = \frac{1-i^3}{1-i} = \frac{1+i}{1-i} = i$.
② 若 $\alpha = \pi$, 则 $t = -1, f(t) = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n-1}$.
故当 $n = 2k (k \in \mathbf{N}_+)$ 时, $f(t) = 0$; 当 $n = 2k+1 (k \in \mathbf{N}_+)$ 时, $f(t) = 1$.

第 7 期
第 2~3 版章节测试参考答案

- 一、选择题
1.D 2.C 3.C
4.B
提示: $z = \frac{2}{1-i} = \frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)} = 1+i$, 故 z 的共轭复数是 $1-i$.
5.A
提示: 由 $\frac{1-i}{1+i} = -i$, 得 $\overrightarrow{OA} = (0, -1), \overrightarrow{OB} = (1, -\sqrt{3})$.
所以 $|\overrightarrow{OA}| = 1, |\overrightarrow{OB}| = 2, \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \sqrt{3}$.
所以 $\cos \angle AOB = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
又 $0 \leq \theta \leq \pi$, 所以 $\theta = \frac{\pi}{6}$.
6.A 7.C
8.D

- 提示: 因为 $|(x-2)+yi| = \sqrt{3}$, 所以 $(x-2)^2 + y^2 = 3$, 所以点 (x, y) 在以 $C(2, 0)$ 为圆心, 以 $\sqrt{3}$ 为半径的圆上, 如图, 由平面几何知识知 $-\sqrt{3} \leq \frac{y}{x} \leq \sqrt{3}$.



(第 8 题图)

- 9.C
提示: $\frac{a}{b} = \frac{3+2i}{4+xi} = \frac{(3+2i)(4-xi)}{16+x^2} = \frac{12+2x}{16+x^2} + \frac{8-3x}{16+x^2} \cdot i \in \mathbf{R}$,
所以 $\frac{8-3x}{16+x^2} = 0$, 所以 $x = \frac{8}{3}$.
10.B
提示: $z \cdot \bar{z} = \frac{|z| \cdot |\bar{z}|}{2} = \frac{2\sqrt{a^2+b^2}}{2} = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{(a+b)^2 - 2ab}$, 又因为 $ab \leq (\frac{a+b}{2})^2 = \frac{9}{4}$, 所以 $-ab \geq -\frac{9}{4}, z \cdot \bar{z} \geq \sqrt{9 - 2 \cdot \frac{9}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

- 11.C
提示: 由题意知, $z = x+yi$, 所以 $z-i = x+(y-1)i$.
因为 $|z-i| = 1$, 所以 $\sqrt{x^2 + (y-1)^2} = 1$, 所以 $x^2 + (y-1)^2 = 1$, 故选 C.
12.D
提示: 由条件知 $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, 若 $z \in \mathbf{R}$, 则 $a^2 - a - 2 = 0$, 所以 $a = -1$ 或 2 , 所以 $p_1 = \frac{2}{5}$;
若 $z = 0$, 则 $\begin{cases} a^2-1=0, \\ a^2-a-2=0, \end{cases}$ 所以 $a = -1$, 所以 $p_3 = \frac{1}{5}$;
若 z 为虚数, 则 $a^2 - a - 2 \neq 0$,

- 所以 $a \neq -1$ 且 $a \neq 2$, 所以 $p_2 = \frac{3}{5}$;
若 z 为纯虚数, 则 $\begin{cases} a^2-1=0, \\ a^2-a-2 \neq 0, \end{cases}$ 所以 $a = 1$, 所以 $p_4 = \frac{1}{5}$.
所以 $p_3 = p_4 < p_1 < p_2$.

- 二、填空题
13. 2 14. $\frac{9}{2}$
15. 0
提示: 设 $z = m+ni (m, n \in \mathbf{R})$, 则 $\bar{z} = m-ni$. 所以 $b = z \cdot \bar{z} = m^2 + n^2$,
 $a = \frac{z^2 - \bar{z}^2}{2i} = \frac{4mni}{2i} = 2mn$.
故 $a - b = 2mn - (m^2 + n^2) = -(m-n)^2 \leq 0$, 即 $a - b$ 的最大值是 0.
16. ①②

- 提示: 当 z 为纯虚数时, z 与 \bar{z} 对应的点均在虚轴上, 故 P_1, O, P_2 三点共线, ① 正确; 显然 ③ 错误; 当 $z = 0$ 时, $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}$ 对应的复数均为 0, 此时有 $\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OP_2}$, 故 ② 正确, ④ 错误.

- 三、解答题
17. 解: $z = \frac{(1+i)^2 + 3(1-i)}{2+i} = \frac{2i + 3(1-i)}{2+i} = \frac{3-i}{2+i} = \frac{(3-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = 1-i$,
将 $z = 1-i$ 代入 $z^2 + az + b = 1+i$, 得 $(1-i)^2 + a(1-i) + b = 1+i$,
即 $(a+b) - (a+2)i = 1+i$,
所以 $\begin{cases} a+b=1, \\ -(a+2)=1. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=-3, \\ b=4. \end{cases}$

18. 解: 设原方程的一个实根为 $t = t_0$, 则有 $(t_0^2 + 2t_0 + 2xy) + (t_0 + x - y)i = 0$.
根据复数相等的充要条件有 $\begin{cases} t_0^2 + 2t_0 + 2xy = 0, & \text{①} \\ t_0 + x - y = 0, & \text{②} \end{cases}$
把 ② 代入 ① 中消去 t_0 , 得 $(y-x)^2 + 2(y-x) + 2xy = 0$,
即 $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$.
故所求点的轨迹方程为 $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$.

19. 解: (1) 设 $z = x+yi (x, y \in \mathbf{R} \text{ 且 } y \neq 0)$.
由 $|2z+5| = |z+10|$,
得 $(2x+5)^2 + (2y)^2 = (x+10)^2 + y^2$.
化简得 $x^2 + y^2 = 25$. 所以 $|z| = 5$.
(2) 若存在实数 m , 使得 $\frac{z}{m} + \frac{m}{z}$ 为实数, 则 $\frac{y}{m} - \frac{my}{x^2+y^2} = 0$.
又 $y \neq 0$, 且 $x^2 + y^2 = 25$,
所以 $\frac{1}{m} - \frac{m}{25} = 0$, 解得 $m = \pm 5$.
所以存在 $m = \pm 5$ 满足要求.
(3) $(1-2i)z = (1-2i)(x+yi) = (x+2y) + (y-2x)i$.

- 依题意, 得 $x+2y = y-2x$, 即 $y = -3x$.
代入 $x^2 + y^2 = 25$,
解得 $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{10}}{2}, \\ y = -\frac{3\sqrt{10}}{2}, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = -\frac{\sqrt{10}}{2}, \\ y = \frac{3\sqrt{10}}{2}. \end{cases}$

- 所以 $z = \frac{\sqrt{10}}{2} - \frac{3\sqrt{10}}{2}i$,
或 $z = -\frac{\sqrt{10}}{2} + \frac{3\sqrt{10}}{2}i$.
20. 解: (1) 由 $w-4 = (3-2w)i$, 得 $w(1+2i) = 4+3i$, 所以 $w = \frac{4+3i}{1+2i} = \frac{(4+3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{10-5i}{5} = 2-i$.

- (2) 满足不等式 $1 \leq |z-w| \leq 2$ 的点 Z 构成的图形为圆环, 其中大圆以 $(2, -1)$ 为圆心, 2 为半径, 小圆以 $(2, -1)$ 为圆心, 1 为半径, 所以圆环的面积 $S = \pi \times 2^2 - \pi \times 1^2 = 3\pi$.
21. (1) 解: 设 $z_1 = a+bi (a, b \in \mathbf{R} \text{ 且 } b \neq 0)$, 则 $z_2 = z_1 + \frac{1}{z_1} = a+bi + \frac{1}{a+bi} = (a + \frac{a}{a^2+b^2}) + (b - \frac{b}{a^2+b^2})i$.
因为 z_2 是实数, $b \neq 0$, 于是有 $a^2 + b^2 = 1$, 即 $|z_1| = 1$, 还可得 $z_2 = 2a$.
由 $-1 \leq z_2 \leq 1$, 得 $-1 \leq 2a \leq 1$, 解得 $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$, 即 z_1 的实部的取值范围是 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

- (2) 证明: $\omega = \frac{1-z_1}{1+z_1} = \frac{1-a-bi}{1+a+bi} = \frac{1-a^2-b^2-2bi}{(1+a)^2+b^2} = -\frac{b}{a+1}i$.
因为 $a \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $b \neq 0$, 所以 ω 为纯虚数.

22. 解: (1) 由 z_1, z_2, m 是实数, 得 $\alpha + \beta = -z_1, \alpha\beta = z_2 + m$.
故 $|\alpha - \beta| = 2\sqrt{7} \Rightarrow (\alpha - \beta)^2 = 28 \Rightarrow (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 28 \Rightarrow z_1^2 - 4z_2 - 4m = 28 \Rightarrow 16 - 4m = 28$, 解得 $m = -3$.
(2) 由 z_1, z_2, m 是复数, 得 $|\alpha - \beta| = 2\sqrt{7} \Rightarrow |\alpha - \beta|^2 = 28 \Rightarrow |(\alpha - \beta)^2| = 28 \Rightarrow |(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta| = 28 \Rightarrow |z_1^2 - 4z_2 - 4m| = 28$.
设 $m = a+bi (a, b \in \mathbf{R})$, 则 $z_1^2 - 4z_2 - 4m = 16 + 20i - 4(a+bi) = (16-4a) + (20-4b)i = 4[(4-a) + (5-b)i]$.
所以 $|4[(4-a) + (5-b)i]| = 28 \Rightarrow |(4-a) + (5-b)i| = 7 \Rightarrow (a-4)^2 + (b-5)^2 = 7^2$.
故复数 m 表示的点 $M(a, b)$ 在圆 $(a-4)^2 + (b-5)^2 = 7^2$ 上, 可知点 M 与原点的距离的最大值为 $7 + \sqrt{41}$, 最小值为 $7 - \sqrt{41}$, 所以 $|m|$ 的最大值为 $7 + \sqrt{41}$, 最小值为 $7 - \sqrt{41}$.