以上给出了4种理由，考生答出其中任意一种或其他合理理由均可得分.

(2)由茎叶图知$m=\frac{79+81}{2}=80$.

列联表如下：

	超过 m	不超过 m
第一种生产方式	15	5
第二种生产方式	5	15

(3)由列联表,得$\chi^2=\frac{40\times(15\times15-5\times5)^2}{20\times20\times20\times20}=10>6.635$,所以有99%的把握认为两种生产方式的效率有差异.

22.**证明**:(1)$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,

$f'(x)=\frac{x-1}{x}+\ln x-1=\ln x-\frac{1}{x}$.因为$y=\ln x$单调递增,$y=\frac{1}{x}$单调递减,所以$f'(x)$单调递增.又$f'(1)=-1<0$,$f'(2)=\ln2-\frac{1}{2}=\frac{\ln4-1}{2}>0$,故存在唯一$x_0\in(1,2)$,使得$f'(x_0)=0$.又当$x<x_0$时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减;当$x>x_0$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增,因此,$f(x)$存在唯一的极值点.

(2)由(1)知$f(x_0)<f(1)=-2$,又$f(e^2)=e^2-3>0$,所以$f(x)=0$在$(x_0,+\infty)$内存在唯一根$x=\alpha$.由$\alpha>x_0>1$,得$\frac{1}{\alpha}<1<x_0$.又$f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\ln\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}-1=\frac{f(\alpha)}{\alpha}=0$,故$\frac{1}{\alpha}$是$f(x)=0$在$(0,x_0)$的唯一根.综上,$f(x)=0$有且仅有两个实根,且两个实根互为倒数.

第 12 期

第 2~3 版综合测试(二)参考答案

一、选择题

1.D 2.C 3.B

4.A

提示:当$b>0$时,两变量正相关,此时$r>0$;当$b<0$时,两变量负相关,此时$r<0$,所以选 A.

5.A

提示:依题意$3-4i=\lambda(-1+2i)+\mu(1-i)=\mu-\lambda+(2\lambda-\mu)i$,

所以$\begin{cases}\mu-\lambda=3,\\2\lambda-\mu=-4,\end{cases}$所以$\begin{cases}\lambda=-1,\\\mu=2,\end{cases}$

所以$\lambda+\mu=1$.

6.D 7.A

8.D

提示:②中$|z|^2\in\mathbf{R}$,但z^2不一定是实数.③中复数集不能比较大小,不能用b^2-4ac来确定根的个数.

9.A

提示:由定义知$\begin{vmatrix}1&-1\\z&zi\end{vmatrix}=zi+z$,得$zi+z=4+2i$,即$z=\frac{4+2i}{1+i}=3-i$.

10.B

提示:依题意得,$\bar{x}=\frac{1}{5}\times(10+20+30+40+50)=30$.由于直线$y=0.67x+54.9$必过点$(\bar{x},\bar{y})$,

于是有$\bar{y}=0.67\times30+54.9=75$,因此表中的模糊数据是$75\times5-(62+75+81+89)=68$.

11.D

12.C

提示:$a_1=4=3^0+3^1$,$a_2=10=3^0+3^2$,
$a_3=12=3^1+3^2$,$a_4=28=3^0+3^3$,
$a_5=30=3^1+3^3$,$a_6=36=3^2+3^3$.

利用归纳推理即可得:$s+1$代表列数,t表示行数,当$t=19$时,最后一项为第$1+2+\cdots+19=190$项,当$t=20$时,最后一项为第$1+2+\cdots+20=210$项,所以a_{191}为第20行第一个数,所以$a_{200}=3^9+3^{20}$.

二、填空题

13.$\frac{\sqrt2}{2}$

提示:$\sqrt2\otimes2=\frac{2-1}{\sqrt2}=\frac{\sqrt2}{2}$.

14.三

15.6

16.$\frac{3}{2}+\sqrt2$

提示:由已知,得$a+b=1$.故$\frac{1}{2a}+\frac{1}{b}=\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{b}\right)(a+b)=\frac{3}{2}+\frac{b}{2a}+\frac{a}{b}\geqslant\frac{3}{2}+\frac{2}{\sqrt2}=\frac{3}{2}+\sqrt2$.

三、解答题

17.**证明**:因为$x\geqslant1$,$y\geqslant1$,所以$x+y+\frac{1}{xy}\leqslant\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+xy\Leftrightarrow xy(x+y)+1\leqslant y+x+(xy)^2$.

将上式中的右式减左式,得

$[y+x+(xy)^2]-[xy(x+y)+1]=[(xy)^2-1]-[xy(x+y)-(x+y)]=(xy+1)(xy-1)-(x+y)(xy-1)=(xy-1)(xy-x-y+1)=(xy-1)\cdot(x-1)(y-1)$.

因为$x\geqslant1$,$y\geqslant1$,所以$(xy-1)(x-1)(y-1)\geqslant0$,从而所要证明的不等式成立.

18.**解**:$z_2=\frac{15-5i}{(2+i)^2}=\frac{15-5i}{3+4i}$

$=\frac{5(3-i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}=\frac{5-15i}{5}=1-3i$.

(1)$z_1+\bar{z}_2=(2-3i)+(1+3i)=3$.

(2)$z_1\cdot z_2=(2-3i)(1-3i)=2-9-9i=-7-9i$.

(3)$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2-3i}{1-3i}=\frac{(2-3i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)}$

$=\frac{2+9+3i}{10}=\frac{11}{10}+\frac{3}{10}i$.

19.**解**:(1)因为$z=\frac{(1-i)^2+3(1+i)}{2-i}=\frac{-2i+3+3i}{2-i}=\frac{3+i}{2-i}=\frac{(3+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{5+5i}{5}=1+i$,

所以若复数z_1与z在复平面上所对应的点关于虚轴对称,则它们实部互为相反数,虚部相等,所以$z_1=-1+i$.

(2)因为复数$z_2=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$满足$z^2+az+b=1-i$,

所以$(1+i)^2+a(1+i)+b=1-i$,

整理,得$a+b+(2+a)i=1-i$,

所以$\begin{cases}a+b=1,\\2+a=-1,\end{cases}$解得$a=-3$,$b=4$.

所以复数$z_2=-3+4i$,

所以z_2的共轭复数为$-3-4i$.

20.**解**:(1)由调查数据,男顾客中对该商场服务满意的比率为$\frac{40}{50}=0.8$,因此男顾客对该商场服务满意的概率的估计值为0.8;女顾客中对该商场服务满意的比率为$\frac{30}{50}=0.6$,因此女顾客对该商场服务满意的概率的估计值为0.6.

(2)$\chi^2=\frac{100\times(40\times20-30\times10)^2}{50\times50\times70\times30}\approx4.762$.由于$4.762>3.841$,故有95%的把握认为男、女顾客对该商场服务的评价有差异.

21.(1)**证明**:依题意,$a_n=\sqrt{n^2+1}$,$b_n=n$,$c_n=\sqrt{n^2+1}-n$.

假设$\{c_n\}$是等差数列,则$2c_2=c_1+c_3$,所以$2(\sqrt5-2)=\sqrt2-1+\sqrt{10}-3$.

所以$2\sqrt5=\sqrt2+\sqrt{10}$,产生矛盾,

所以$\{c_n\}$不是等差数列.

假设$\{c_n\}$是等比数列,则$c_2^2=c_1c_3$,即$(\sqrt5-2)^2=(\sqrt2-1)(\sqrt{10}-3)$.

有$6=6\sqrt5-3\sqrt2-\sqrt{10}$,产生矛盾,

所以$\{c_n\}$也不是等比数列.

(2)**解**:因为$c_{n+1}=\sqrt{(n+1)^2+1}-(n+1)>0$,$c_n=\sqrt{n^2+1}-n>0$,

所以$\frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{\sqrt{(n+1)^2+1}-(n+1)}{\sqrt{n^2+1}-n}$

$=\frac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt{(n+1)^2+1}+(n+1)}$,

因为$0<\sqrt{n^2+1}<\sqrt{(n+1)^2+1}$,

又$0<n<n+1$,

所以$\sqrt{n^2+1}+n<\sqrt{(n+1)^2+1}+n+1$,

所以$0<\frac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt{(n+1)^2+1}+(n+1)}<1$,

所以$0<\frac{c_{n+1}}{c_n}<1$,即$c_{n+1}<c_n$.

22.**解**:(1)根据散点图可以判断$y=c_1e^{c_2x}$适宜作为鸟的时段产卵数y关于鸟舍控制温度x的回归方程.

(2)由$k=\ln y$,$y=c_1e^{c_2x}\Rightarrow\ln y=\ln c_1+c_2x$,知$k$关于$x$的线性回归方程可设为$k=c+dx$(其中$c=\ln c_1$,$d=c_2$).

计算得

$$d=\frac{\sum\limits_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})(k_i-\bar{k})}{\sum\limits_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})^2}$$

$=\frac{35.00}{140.00}=0.25$,

$c=\bar{k}-d\bar{x}=3.60-0.25\times27.40=-3.25$,

所以$c_2=d=0.25$,$c_1=e^c=e^{-3.25}=0.04$.因此y关于x的回归方程为$y=0.04e^{0.25x}$.

(3)由(2)知,当$x=28$时,$y=0.04e^{0.25\times28}=0.04e^7=0.04\times1096.63=43.8652\approx43.87$,

$z=e^{-2.5}\times43.8652-0.01\times28+10=0.08\times43.8652-0.28+10\approx13.23$.

所以当$x=28$℃时,鸟的时段产卵数的预报值为43.87枚,时段投入保护性成本的预报值为13.23万元.

第 9 期

第 3~4 版同步周测参考答案

一、选择题

1.C

提示:$3-3i$是虚数,$1+i^2=0$是实数,$i^3=-i$是纯虚数,$\frac{1}{i^4}=1$是实数.故选 C.

2.C

提示:由题设,得$a=2$,$2-b=3$,即$b=-1$.故选 C.

3.C 4.C 5.B 6.D 7.B 8.B

9.B

提示:设$z_1=a+bi$,$z_2=c+di(a,b,c,d\in\mathbf{R})$,则$z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2=(a+bi)(c-di)+(a-bi)(c+di)=(2ac+2bd)\in\mathbf{R}$.

10.C

提示:设$z=x+yi(x,y\in\mathbf{R})$.

由已知,得$x^2+y^2+i(2yi)\leqslant0$,

即$x^2+y^2-2y\leqslant0$,即$x^2+(y-1)^2\leqslant1$.

故选 C.

11.C

提示:$z^2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt3}{2}i$,$z^3=-1$,$z^4=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt3}{2}i$,$z^5=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt3}{2}i$,$z^6=1$,所以原式$=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt3}{2}i\right)+(-1+\sqrt3i)+(-3)+(-2-2\sqrt3i)+\left(\frac{5}{2}-\frac{5\sqrt3}{2}i\right)+6=3-3\sqrt3i=6\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt3}{2}i\right)=6\bar{z}$.

12.A

提示:设$z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$,

所以$|2z+1|=\sqrt{(2a+1)^2+4b^2}$,

$|z-i|=\sqrt{a^2+(b-1)^2}$,

所以$\sqrt{(2a+1)^2+4b^2}=\sqrt{a^2+(b-1)^2}$,

整理得$a^2+b^2+\frac{4}{3}a+\frac{2}{3}b=0$,

所以z对应的点的轨迹是圆.

故选 A.

二、填空题

13.$\sqrt{13}$

14.5,2

15.1

提示:复数z_1和z_2在复平面内对应的点A的坐标为$(1,1)$,B的坐标为$(-1,1)$,所以$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\times2\times1=1$.

16.-1

提示:因为$x+\frac{1}{x}=-1$,所以$x^2+x+1=0$.

所以$x=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt3}{2}i$,所以$x^3=1$.

因为$2020=3\times673+1$,所以$x^{2020}=x$,

所以$x^{2020}+\frac{1}{x^{2020}}=x+\frac{1}{x}=-1$.

三、解答题

17.**解**:(1)$\frac{1-\sqrt3i}{(\sqrt3+i)^2}=\frac{1-\sqrt3i}{2+2\sqrt3i}$

$=\frac{(1-\sqrt3i)^2}{2(1+\sqrt3i)(1-\sqrt3i)}$

$=-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt3}{4}i$.

(2)$\frac{(\sqrt2+\sqrt2i)^3(4+5i)}{(5-4i)(1-i)}$

$=\frac{2\sqrt2(1+i)^2(1+i)(4+5i)}{(5-4i)(1-i)}$

$=\frac{2\sqrt2\cdot2i\cdot2i(4+5i)(5+4i)}{(5-4i)(5+4i)(1-i)(1+i)}$

$=\frac{-8\sqrt2\times41i}{41\times2}=-4\sqrt2i$.

18.**解**:复数$z=(2+i)m^2-3(i+1)m-2(1-i)=(2m^2-3m-2)+(m^2-3m+2)i$.

(1)若z是虚数,则$m^2-3m+2\neq0$,

解得$m\neq1$或$m\neq2$.

(2)若$z<0$,则$m^2-3m+2=0$且$2m^2-3m-2<0$,解得$m=1$.

(3)若z所对应的点在第三象限,

则$2m^2-3m-2<0$且$m^2-3m+2<0$,

解得$m\in(1,2)$.

19.**解**:(1)因为$z=\cos A+i\sin A$,所以$z+1=1+\cos A+i\sin A$.

所以$|z+1|=\sqrt{(1+\cos A)^2+\sin^2A}=\sqrt{2+2\cos A}$.

因为$|z+1|=1$.所以$2+2\cos A=1$.所以$\cos A=-\frac{1}{2}$.又$0<A<180°$,所以$A=120°$.

所以$\sin A=\frac{\sqrt3}{2}$.

所以复数$z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt3}{2}i$.

(2)由正弦定理,得$a=2R\cdot\sin A$,$b=2R\cdot\sin B$,$c=2R\cdot\sin C$(其中R为$\triangle ABC$外接圆的半径),

所以原式$=\frac{\sin B-\sin C}{\sin A\cdot\cos(60°+C)}$.

因为$B=180°-A-C=60°-C$,

所以原式$=\frac{\sin(60°-C)-\sin C}{\sin120°\cdot\cos(60°+C)}=\frac{\frac{\sqrt3}{2}\cos C-\frac{3}{2}\sin C}{\frac{\sqrt3}{2}\cdot\cos(60°+C)}=\frac{\cos C-\sqrt3\sin C}{\cos(60°+C)}=\frac{2\cos(60°+C)}{\cos(60°+C)}=2$,

即$\frac{b-c}{a\cos(60°+C)}$的值为 2.

20.**解**:因为$(x+\sqrt3i)^3=\log_{\sqrt2}\frac{1}{2^4}=-8$,

所以$\left(\frac{x+\sqrt3i}{-2}\right)^3=1$,

所以$\frac{x+\sqrt3i}{-2}=1$或$\frac{x+\sqrt3i}{-2}=\omega$或$\frac{x+\sqrt3i}{-2}=\bar{\omega}\left(其中\ \omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt3}{2}i\right)$.

若$x+\sqrt3i=-2$,则$x\notin\mathbf{R}$.

若$x+\sqrt3i=-2\omega=1-\sqrt3i$,则$x\notin\mathbf{R}$.

若$x+\sqrt3i=-2\bar{\omega}=1+\sqrt3i$,则$x=1$.

综上可知,存在满足题意的实数x且$x=1$.

21.**解**:依题意得z_1+z_2为实数,因为$z_1+z_2=\frac{3}{a+5}+\frac{2}{1-a}+[(a^2-10)+(2a-5)]i$,

所以$\begin{cases}a^2+2a-15=0,\\a+5\neq0,\\1-a\neq0.\end{cases}$ 所以$a=3$.

此时$z_1=\frac{3}{8}-i$,$z_2=-1+i$,

即$\overrightarrow{OZ_1}=\left(\frac{3}{8},-1\right)$,$\overrightarrow{OZ_2}=(-1,1)$.

所以$\overrightarrow{OZ_1}\cdot\overrightarrow{OZ_2}=\frac{3}{8}\times(-1)+(-1)\times1=-\frac{11}{8}$.

22.**解**:(1)由$z_1=z_2$,

得$m=\sin\alpha$且$m-\cos\alpha=1$,

所以$\sin\alpha-\cos\alpha=1$,

即$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt2}{2}$.

因为$\alpha\in[0,2\pi)$,

所以$\alpha-\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right)$.

所以$\alpha-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$或$\alpha-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$,

解得$\alpha=\frac{\pi}{2}$或$\alpha=\pi$.

(2)①若$\alpha=\frac{\pi}{2}$,则$t=i$,$f(t)=1+i+i^2+\cdots+i^{n-1}=\frac{1-i^n}{1-i}$.

故当$n=4k(k\in\mathbf{N}_+)$时,$f(t)=\frac{1-1}{1-i}=0$;

当$n=4k+1(k\in\mathbf{N}_+)$时,$f(t)=\frac{1-i}{1-i}=1$;

当$n=4k+2(k\in\mathbf{N}_+)$时,$f(t)=\frac{1-i^2}{1-i}=\frac{2}{1-i}=1+i$;

当$n=4k+3(k\in\mathbf{N}_+)$时,$f(t)=\frac{1-i^3}{1-i}=\frac{1+i}{1-i}=i$.

②若$\alpha=\pi$,则$t=-1$,$f(t)=1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n-1}$.

故当$n=2k(k\in\mathbf{N}_+)$时,$f(t)=0$;当$n=2k+1(k\in\mathbf{N}_+)$时,$f(t)=1$.

第10期
第2~3版章节测试参考答案

一、选择题

1.B

提示：由已知，得 $z=1-(3-4i)=-2+4i$.故 z 的虚部是4.

2.D

提示：由 $(1+2i)i=a+bi$，得 $-2+i=a+bi$，所以 $a=-2$，$b=1$.故 $a+b=-1$.

3.C

4.B

提示：$z=\frac{2}{1-i}=\frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)}=1+i$，故 z 的共轭复数是 $1-i$.

5.A

提示：由 $\frac{1-i}{1+i}=-i$，得 $\overrightarrow{OA}=(0,-1)$，$\overrightarrow{OB}=(1,-\sqrt{3})$.

所以 $|\overrightarrow{OA}|=1$，$|\overrightarrow{OB}|=2$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\sqrt{3}$.

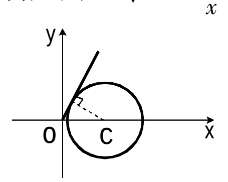
所以 $\cos\angle AOB=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

又 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$，所以 $\theta=\frac{\pi}{6}$.

6.A 7.C

8.D

提示：因为 $|(x-2)+yi|=\sqrt{3}$，所以 $(x-2)^2+y^2=3$，所以点 (x,y) 在以 $C(2,0)$ 为圆心，以 $\sqrt{3}$ 为半径的圆上，如图，由平面几何知识知 $-\sqrt{3}\leqslant\frac{y}{x}\leqslant\sqrt{3}$.



(第8题图)

9.C

提示：$\frac{a}{b}=\frac{3+2i}{4+xi}=\frac{(3+2i)(4-xi)}{16+x^2}=\frac{12+2x}{16+x^2}+\frac{8-3x}{16+x^2}\cdot i\in\mathbf{R}$，

所以 $\frac{8-3x}{16+x^2}=0$，所以 $x=\frac{8}{3}$.

10.B

提示：$z*\bar{z}=\frac{|z|+|\bar{z}|}{2}=\frac{2\sqrt{a^2+b^2}}{2}=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(a+b)^2-2ab}$，又因为 $ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$，所以 $-ab\geqslant-\frac{9}{4}$，$z*\bar{z}\geqslant\sqrt{9-2\times\frac{9}{4}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

11.C

提示：由题意知，$z=x+yi$，所以 $z-i=x+(y-1)i$.

因为 $|z-i|=1$，所以 $\sqrt{x^2+(y-1)^2}=1$，所以 $x^2+(y-1)^2=1$，故选C.

12.D

提示：由条件知 $A=\{-2,-1,0,1,2\}$，

若 $z\in\mathbf{R}$，则 $a^2-a-2=0$，所以 $a=-1$ 或2，所以 $p_1=\frac{2}{5}$；

若 $z=0$，则 $\begin{cases}a^2-1=0,\\a^2-a-2=0,\end{cases}$ 所以 $a=-1$，所以 $p_3=\frac{1}{5}$；

若 z 为虚数，则 $a^2-a-2\neq0$，所以 $a\neq-1$ 且 $a\neq2$，所以 $p_2=\frac{3}{5}$；

若 z 为纯虚数，则 $\begin{cases}a^2-1=0,\\a^2-a-2\neq0,\end{cases}$ 所以 $a=1$，所以 $p_4=\frac{1}{5}$.

所以 $p_3=p_4<p_1<p_2$.

二、填空题

13.2 14. $\frac{9}{2}$

15.0

提示：设 $z=m+ni(m,n\in\mathbf{R})$，则 $\bar{z}=m-ni$.所以 $b=z\cdot\bar{z}=m^2+n^2$，

$a=\frac{z^2-\bar{z}^2}{2i}=\frac{4mni}{2i}=2mn$.

故 $a-b=2mn-(m^2+n^2)=-(m-n)^2\leqslant0$，即 $a-b$ 的最大值是0.

16.6

提示：由 $|z+1+i|=1$，知复数 z 在复平面内表示的点的轨迹是以 $C(-1,-1)$ 为圆心，半径为1的圆，而 $|z-3+4i|$ 的几何意义是圆 C 上的点与点 $P(3,-4)$ 的距离，由平面几何知识可知其最大值为 $|PC|+1=\sqrt{(3+1)^2+(-4+1)^2}+1=6$.

三、解答题

17.**解**：$z=\frac{(1+i)^2+3(1-i)}{2+i}=\frac{2i+3(1-i)}{2+i}=\frac{3-i}{2+i}=\frac{(3-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=1-i$，

将 $z=1-i$ 代入 $z^2+az+b=1+i$，得 $(1-i)^2+a(1-i)+b=1+i$，

即 $(a+b)-(a+2)i=1+i$，

所以 $\begin{cases}a+b=1,\\-(a+2)=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-3,\\b=4.\end{cases}$

18.**解**：设原方程的一个实根为 $t=t_0$，则有 $(t_0^2+2t_0+2xy)+(t_0+x-y)i=0$.

根据复数相等的充要条件有

$\begin{cases}t_0^2+2t_0+2xy=0,&①\\t_0+x-y=0,&②\end{cases}$

把②代入①中消去 t_0，得 $(y-x)^2+2(y-x)+2xy=0$，

即 $(x-1)^2+(y+1)^2=2$.

故所求点的轨迹方程为 $(x-1)^2+(y+1)^2=2$.

19.**解**：(1)设 $z=x+yi(x,y\in\mathbf{R}$ 且 $y\neq0)$.

由 $|2z+5|=|z+10|$，

得 $(2x+5)^2+(2y)^2=(x+10)^2+y^2$.

化简得 $x^2+y^2=25$.所以 $|z|=5$.

(2)若存在实数 m，使得 $\frac{z}{m}+\frac{m}{z}=\frac{x+yi}{m}+\frac{m}{x+yi}=\left(\frac{x}{m}+\frac{mx}{x^2+y^2}\right)+\left(\frac{y}{m}-\frac{my}{x^2+y^2}\right)i$ 为实数，则 $\frac{y}{m}-\frac{my}{x^2+y^2}=0$.

又 $y\neq0$，且 $x^2+y^2=25$，

所以 $\frac{1}{m}-\frac{m}{25}=0$，解得 $m=\pm5$.

所以存在 $m=\pm5$ 满足要求.

(3) $(1-2i)z=(1-2i)(x+yi)=(x+2y)+(y-2x)i$.

依题意，得 $x+2y=y-2x$，即 $y=-3x$.

代入 $x^2+y^2=25$，

解得 $\begin{cases}x=\frac{\sqrt{10}}{2},\\y=-\frac{3\sqrt{10}}{2},\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-\frac{\sqrt{10}}{2},\\y=\frac{3\sqrt{10}}{2}.\end{cases}$

所以 $z=\frac{\sqrt{10}}{2}-\frac{3\sqrt{10}}{2}i$，

或 $z=-\frac{\sqrt{10}}{2}+\frac{3\sqrt{10}}{2}i$.

20.**解**：(1)由 $w-4=(3-2w)i$，得 $w(1+2i)=4+3i$，所以 $w=\frac{4+3i}{1+2i}=\frac{(4+3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{10-5i}{5}=2-i$.

(2)满足不等式 $1\leqslant|z-w|\leqslant2$ 的点 Z 构成的图形为圆环，其中大圆以 $(2,-1)$ 为圆心，2为半径，小圆以 $(2,-1)$ 为圆心，1为半径，所以圆环的面积 $S=\pi\times2^2-\pi\times1^2=3\pi$.

21.(1)**解**：设 $z_1=a+bi(a,b\in\mathbf{R}$ 且 $b\neq0)$，则 $z_2=z_1+\frac{1}{z_1}=a+bi+\frac{1}{a+bi}=\left(a+\frac{a}{a^2+b^2}\right)+\left(b-\frac{b}{a^2+b^2}\right)i$.

因为 z_2 是实数，$b\neq0$，于是有 $a^2+b^2=1$，即 $|z_1|=1$，还可得 $z_2=2a$.

由 $-1\leqslant z_2\leqslant1$，得 $-1\leqslant2a\leqslant1$，解得 $-\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$，即 z_1 的实部的取值范围是 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

(2)**证明**：$\omega=\frac{1-z_1}{1+z_1}=\frac{1-a-bi}{1+a+bi}=\frac{1-a^2-b^2-2bi}{(1+a)^2+b^2}=-\frac{b}{a+1}i$.

因为 $a\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$，$b\neq0$，所以 ω 为纯虚数.

22.**解**：(1)由 z_1,z_2,m 是实数，得 $\alpha+\beta=-z_1$，$\alpha\beta=z_2+m$.

故 $|\alpha-\beta|=2\sqrt{7}\Rightarrow(\alpha-\beta)^2=28\Rightarrow(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=28\Rightarrow z_1^2-4z_2-4m=28\Rightarrow16-4m=28$，解得 $m=-3$.

(2)由 z_1,z_2,m 是复数，得 $|\alpha-\beta|=2\sqrt{7}\Rightarrow|\alpha-\beta|^2=28\Rightarrow|(\alpha-\beta)^2|=28\Rightarrow|(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta|=28\Rightarrow|z_1^2-4z_2-4m|=28$.

设 $m=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，则 $z_1^2-4z_2-4m=16+20i-4(a+bi)=(16-4a)+(20-4b)i=4[(4-a)+(5-b)i]$.

所以 $|4[(4-a)+(5-b)i]|=28\Rightarrow|(4-a)+(5-b)i|=7\Rightarrow(a-4)^2+(b-5)^2=7^2$.

故复数 m 表示的点 $M(a,b)$ 在圆 $(a-4)^2+(b-5)^2=7^2$ 上，可知点 M 与原点的距离的最大值为 $7+\sqrt{41}$，最小值为 $7-\sqrt{41}$，所以 $|m|$ 的最大值为 $7+\sqrt{41}$，最小值为 $7-\sqrt{41}$.

第11期
第2~3版综合测试(一)参考答案

一、选择题

1.A 2.B 3.A

4.C

提示：由题设，得 $\sin\theta-\frac{3}{5}=0$ 且 $\cos\theta-\frac{4}{5}\neq0$，又 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，所以 $\sin\theta=\frac{3}{5}$，$\cos\theta=-\frac{4}{5}$.所以 $\tan(\theta-\pi)=\tan\theta=-\frac{3}{4}$.

5.B

提示：两个变量之间的相关系数 r 的绝对值越接近于1，表明两个变量的线性相关性越强，结合选项可知选B.

6.B

提示：根据 $|ad-bc|$ 的值越大，两变量有关系的可能性就越大，可知选B.

7.A

提示：设甲、乙投篮一次投中分别为事件 A，B，则 $P(A)=P(B)=0.7$，$P(\bar{A})=P(\bar{B})=1-0.7=0.3$.

恰有一人投中分：甲投中乙投不中和甲投不中乙投中两种情况，

故 $P=P(A)P(\bar{B})+P(\bar{A})P(B)=0.7\times0.3+0.7\times0.3=0.42$.

8.C 9.D

10.A

提示：分别将 $2+ai$，$b+i$ 代入方程得：

$\begin{cases}(2+ai)^2+p(2+ai)+q=0,&①\\(b+i)^2+p(b+i)+q=0,&②\end{cases}$

对①②整理，由复数相等的充要条件得：

$\begin{cases}2p+q-a^2+4=0,\\(p+4)a=0,\\pb+q+b^2-1=0,\\p+2b=0.\end{cases}$

解得 $p=-4$，$q=5$.

11.D

提示：$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，当 $x>3$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(3,+\infty)$ 上是减函数.因为 $b>a>3$，所以 $b>\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}>a>3$，所以 $f(b)<f\left(\frac{a+b}{2}\right)<f(\sqrt{ab})<f(a)$.故选D.

12.B

二、填空题

13. $\frac{a+bi}{b-ai}=i(a,b\in\mathbf{R})$

14.3

提示：由 $(1+i)^{2n}=-2^n\cdot i$，得 $(2i)^n=2^n\cdot i^n=-2^n\cdot i$，所以 $i^n=-i$，即 $n=4k+3$，$k\in\mathbf{N}$，所以最小的正整数为3.

15. $a>4$

提示：因为 $f(x)=\left(1-\frac{a}{x}\right)e^x(x>0)$，所以 $f'(x)=\left(\frac{a}{x^2}-\frac{a}{x}+1\right)e^x$.因为函数 $f(x)$ 既有极大值又有极小值，所以 $f'(x)=\left(\frac{a}{x^2}-\frac{a}{x}+1\right)e^x=0$ 有2个不等实数根，所以 $x^2-ax+a=0$ 有2个不等的正实数根，所以 $\Delta=a^2-4a>0$ 且 $a>0$，所以 $a>4$.

16. a=a×b

提示：由图知，a=3151，b=1.105，n=2008，当满足 a>8000 时，跳出循环，输出年份 n；当不满足 a>8000 时，执行语句 n=n+1，根据已知，a=2008年的生产总值，b=1+增长率，故执行的语句应为 a=a×b.

三、解答题

17.**解**：(1)当点 M 在虚轴上时，有 $m^2+m-12=0$，解得 $m=-4$，或 $m=3$.

(2)当点 M 位于第四象限时，有 $\begin{cases}m^2+m-12>0,\\m^2-8m+15<0,\end{cases}$ 解得 $3<m<5$.

所以实数 m 的取值范围是 $(3,5)$.

18.**解**：(1)设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，则 $\bar{z}=a-bi$，所以 $z+\bar{z}=2a=6$，解得 $a=3$.

又 $|z|=\sqrt{9+b^2}=5$，所以 $b=\pm4$，所以复数 z 的值为 $3\pm4i$.

(2)由(1)可知 $z=3\pm4i$.当 $z=3+4i$ 时，$\frac{z}{1-i}=\frac{3+4i}{1-i}=\frac{(3+4i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{-1+7i}{2}$，故其实部为 $-\frac{1}{2}$；当 $z=3-4i$ 时，$\frac{z}{1-i}=\frac{3-4i}{1-i}=\frac{(3-4i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{7-i}{2}$，故其实部为 $\frac{7}{2}$.

综上，复数 $\frac{z}{1-i}$ 的实部为 $-\frac{1}{2}$ 或 $\frac{7}{2}$.

19.(1)**解**：由 $9^x>5^x+4^x$，两边同除以 9^x，可得 $1>\left(\frac{5}{9}\right)^x+\left(\frac{4}{9}\right)^x$.

由于 $0<\frac{4}{9}<\frac{5}{9}<1$，显然函数 $f(x)=\left(\frac{5}{9}\right)^x+\left(\frac{4}{9}\right)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上为单调递减函数，

而 $f(1)=\frac{4}{9}+\frac{5}{9}=1$，

故当 $x>1$ 时，有 $f(x)=\left(\frac{5}{9}\right)^x+\left(\frac{4}{9}\right)^x<f(1)=1$，所以原不等式的解集为 $\{x|x>1\}$.

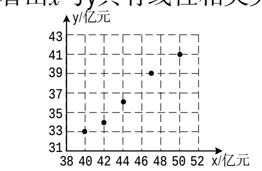
(2)**证明**：将方程 $5^x+12^x=13^x$ 两边同除以 13^x，可得 $\left(\frac{5}{13}\right)^x+\left(\frac{12}{13}\right)^x=1$.

由于 $0<\frac{5}{13}<\frac{12}{13}<1$，显然函数 $g(x)=\left(\frac{5}{13}\right)^x+\left(\frac{12}{13}\right)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上为单调递减函数，而 $g(2)=\left(\frac{5}{13}\right)^2+\left(\frac{12}{13}\right)^2=1$，

故当 $x>2$ 时，$g(x)=\left(\frac{5}{13}\right)^x+\left(\frac{12}{13}\right)^x<g(2)=1$；当 $x<2$ 时，$g(x)=\left(\frac{5}{13}\right)^x+\left(\frac{12}{13}\right)^x>g(2)=1$.

由此可得，当且仅当 $x=2$ 时 $g(x)=1$，即方程 $5^x+12^x=13^x$ 有唯一解 $x=2$.

20.**解**：(1)作散点图(如下图)，从图中可看出 x 与y具有线性相关关系.



(第20题图)

(2)由题中数据，计算得

$\sum_{i=1}^{5}x_i^2=10009$，$\sum_{i=1}^{5}y_i^2=6743$，$\sum_{i=1}^{5}x_iy_i=8215$，$\bar{x}=44.6$，$\bar{y}=36.6$.

进而求得

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{5}x_iy_i-5\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{5}x_i^2-5\bar{x}^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{5}y_i^2-5\bar{y}^2}}\approx0.9954.$$

$|r|$ 较接近于1，因此x与y之间具有线性相关关系.

(3)由公式，得y关于 x 的回归方程为 $y=0.842x-0.943$.

当 $x=52$ 时，$y=42.841$.

所以估计购买商品支出为42.841亿元.

21.**解**：(1)第二种生产方式的效率更高.

理由如下：

(i)由茎叶图可知：用第一种生产方式的工人中，有75%的工人完成生产任务所需时间至少80分钟，用第二种生产方式的工人中，有75%的工人完成生产任务所需时间至多79分钟，因此第二种生产方式的效率更高.

(ii)由茎叶图可知：用第一种生产方式的工人完成生产任务所需时间的中位数为85.5分钟，用第二种生产方式的工人完成生产任务所需时间的中位数为73.5分钟，因此第二种生产方式的效率更高.

(iii)由茎叶图可知：用第一种生产方式的工人完成生产任务平均所需时间高于80分钟；用第二种生产方式的工人完成生产任务平均所需时间低于80分钟，因此第二种生产方式的效率更高.

(iv)由茎叶图可知：用第一种生产方式的工人完成生产任务所需时间分布在茎8上的最多，关于茎8大致呈对称分布；用第二种生产方式的工人完成生产任务所需时间分布在茎7上的最多，关于茎7大致呈对称分布，又用两种生产方式的工人完成生产任务所需时间分布的区间相同，故可以认为用第二种生产方式完成生产任务所需的时间比用第一种生产方式完成生产任务所需的时间更少，因此第二种生产方式的效率更高.