第 8 期
第 2~3 版章节测试参考答案

一、选择题

1.D　2.C　3.C

4.B

提示：$z=\frac{2}{1-i}=\frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)}=1+i$，故 z 的共轭复数是 $1-i$.

5.A

提示：由 $\frac{1-i}{1+i}=-i$，得 $\overrightarrow{OA}=(0,-1)$，$\overrightarrow{OB}=(1,-\sqrt{3})$.

所以 $|\overrightarrow{OA}|=1$，$|\overrightarrow{OB}|=2$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\sqrt{3}$.

所以 $\cos\angle AOB=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

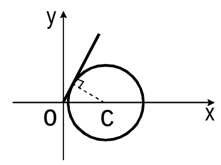
又 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$，所以 $\theta=\frac{\pi}{6}$.

6.A

7.C

8.D

提示：因为 $|(x-2)+yi|=\sqrt{3}$，所以 $(x-2)^2+y^2=3$，所以点 (x,y) 在以 $C(2,0)$ 为圆心，以 $\sqrt{3}$ 为半径的圆上，如图，由平面几何知识知 $-\sqrt{3}\leqslant\frac{y}{x}\leqslant\sqrt{3}$.



（第 8 题图）

9.C

提示：$\frac{a}{b}=\frac{3+2i}{4+xi}=\frac{(3+2i)(4-xi)}{16+x^2}=\frac{12+2x}{16+x^2}+\frac{8-3x}{16+x^2}\cdot i\in\mathbf{R}$，

所以 $\frac{8-3x}{16+x^2}=0$，所以 $x=\frac{8}{3}$.

10.B

提示：$z*\bar{z}=\frac{|z|+|\bar{z}|}{2}=\frac{2\sqrt{a^2+b^2}}{2}=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(a+b)^2-2ab}$，又因为 $ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$，所以 $-ab\geqslant-\frac{9}{4}$，$z*\bar{z}\geqslant\sqrt{9-2\times\frac{9}{4}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

11.C

提示：由题意知，$z=x+yi$，所以 $z-i=x+(y-1)i$.

因为 $|z-i|=1$，所以 $\sqrt{x^2+(y-1)^2}=1$，所以 $x^2+(y-1)^2=1$，故选 C.

12.D

提示：由条件知 $A=\{-2,-1,0,1,2\}$，

若 $z\in\mathbf{R}$，则 $a^2-a-2=0$，所以 $a=-1$ 或 2，所以 $p_1=\frac{2}{5}$；

若 $z=0$，则 $\begin{cases}a^2-1=0,\\a^2-a-2=0,\end{cases}$ 所以 $a=-1$，所以 $p_3=\frac{1}{5}$；

若 z 为虚数，则 $a^2-a-2\neq0$，所以 $a\neq-1$ 且 $a\neq2$，所以 $p_2=\frac{3}{5}$；

若 z 为纯虚数，则 $\begin{cases}a^2-1=0,\\a^2-a-2\neq0,\end{cases}$ 所以 $a=1$，所以 $p_4=\frac{1}{5}$.

所以 $p_3=p_4<p_1<p_2$.

二、填空题

13.2　14.$\frac{9}{2}$

15.0

提示：设 $z=m+ni(m,n\in\mathbf{R})$，

则 $\bar{z}=m-ni$.所以 $b=z\cdot\bar{z}=m^2+n^2$，

$a=\frac{z^2-\bar{z}^2}{2i}=\frac{4mni}{2i}=2mn$.

故 $a-b=2mn-(m^2+n^2)=-(m-n)^2\leqslant0$，即 $a-b$ 的最大值是 0.

16.①②

提示：当 z 为纯虚数时，z 与 $\bar{z}$ 对应的点均在虚轴上，故 P_1,O,P_2 三点共线，①正确；显然③错误；当 $z=0$ 时，$\overrightarrow{OP_1}$，$\overrightarrow{OP_2}$ 对应的复数均为 0，此时有 $\overrightarrow{OP_1}=\overrightarrow{OP_2}$，故②正确，④错误.

三、解答题

17.**解**：$z=\frac{(1+i)^2+3(1-i)}{2+i}=\frac{2i+3(1-i)}{2+i}=\frac{3-i}{2+i}=\frac{(3-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=1-i$，

将 $z=1-i$ 代入 $z^2+az+b=1+i$，得 $(1-i)^2+a(1-i)+b=1+i$，

即 $(a+b)-(a+2)i=1+i$，

所以 $\begin{cases}a+b=1,\\-(a+2)=1.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-3,\\b=4.\end{cases}$

18.**解**：设原方程的一个实根为 $t=t_0$，则有 $(t_0^2+2t_0+2xy)+(t_0+x-y)i=0$.

根据复数相等的充要条件有

$\begin{cases}t_0^2+2t_0+2xy=0, & ①\\t_0+x-y=0, & ②\end{cases}$

把②代入①中消去 t_0，得 $(y-x)^2+2(y-x)+2xy=0$，

即 $(x-1)^2+(y+1)^2=2$.

故所求点的轨迹方程为 $(x-1)^2+(y+1)^2=2$.

19.**解**：(1)设 $z=x+yi(x,y\in\mathbf{R}$ 且 $y\neq0)$.

由 $|2z+5|=|z+10|$，

得 $(2x+5)^2+(2y)^2=(x+10)^2+y^2$.

化简得 $x^2+y^2=25$.所以 $|z|=5$.

(2)若存在实数 m，使得 $\frac{z}{m}+\frac{m}{z}=\frac{x+yi}{m}+\frac{m}{x+yi}=\left(\frac{x}{m}+\frac{mx}{x^2+y^2}\right)+\left(\frac{y}{m}-\frac{my}{x^2+y^2}\right)i$ 为实数，则 $\frac{y}{m}-\frac{my}{x^2+y^2}=0$.

又 $y\neq0$，且 $x^2+y^2=25$，

所以 $\frac{1}{m}-\frac{m}{25}=0$，解得 $m=\pm5$.

所以存在 $m=\pm5$ 满足要求.

(3) $(1-2i)z=(1-2i)(x+yi)=(x+2y)+(y-2x)i$.

依题意，得 $x+2y=y-2x$，即 $y=-3x$.

代入 $x^2+y^2=25$，

解得 $\begin{cases}x=\frac{\sqrt{10}}{2},\\y=-\frac{3\sqrt{10}}{2},\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-\frac{\sqrt{10}}{2},\\y=\frac{3\sqrt{10}}{2}.\end{cases}$

所以 $z=\frac{\sqrt{10}}{2}-\frac{3\sqrt{10}}{2}i$，

或 $z=-\frac{\sqrt{10}}{2}+\frac{3\sqrt{10}}{2}i$.

20.**解**：因为 $z=\frac{(-1+3i)(1-i)-(1+3i)}{i}=\frac{1+i}{i}=1-i$，所以 $|z|=\sqrt{2}$.又 $\left|\frac{\omega}{z}\right|=\frac{|\omega|}{|z|}\leqslant\sqrt{2}$，所以 $|\omega|\leqslant2$.

而 $\omega=z+ai=(1-i)+ai=1+(a-1)i$，$a\in\mathbf{R}$，

则 $\sqrt{1^2+(a-1)^2}\leqslant2\Rightarrow(a-1)^2\leqslant3$，

所以 $-\sqrt{3}\leqslant a-1\leqslant\sqrt{3}$，$1-\sqrt{3}\leqslant a\leqslant1+\sqrt{3}$.

即 a 的取值范围为 $[1-\sqrt{3},1+\sqrt{3}]$.

21.(1)**解**：设 $z_1=a+bi(a,b\in\mathbf{R}$ 且 $b\neq0)$，则 $z_2=z_1+\frac{1}{z_1}=a+bi+\frac{1}{a+bi}=\left(a+\frac{a}{a^2+b^2}\right)+\left(b-\frac{b}{a^2+b^2}\right)i$.

因为 z_2 是实数，$b\neq0$，于是有 $a^2+b^2=1$，即 $|z_1|=1$，还可得 $z_2=2a$.

由 $-1\leqslant z_2\leqslant1$，得 $-1\leqslant2a\leqslant1$，解得 $-\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$，即 z_1 的实部的取值范围是 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

(2)**证明**：$\omega=\frac{1-z_1}{1+z_1}=\frac{1-a-bi}{1+a+bi}=\frac{1-a^2-b^2-2bi}{(1+a)^2+b^2}=-\frac{b}{a+1}i$.

因为 $a\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$，$b\neq0$，所以 ω 为纯虚数.

22.(1)**证明**：当 $n=1$ 时，左边 $=z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$，右边 $=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$，左边 = 右边，等式成立.

假设当 $n=k$ 时等式成立，

即 $z^k=[r(\cos\alpha+i\sin\alpha)]^k=r^k(\cos k\alpha+i\sin k\alpha)$，

则当 $n=k+1$ 时，

$z^{k+1}=[r(\cos\alpha+i\sin\alpha)]^{k+1}$

$=[r(\cos\alpha+i\sin\alpha)]^kr(\cos\alpha+i\sin\alpha)$

$=r^k(\cos k\alpha+i\sin k\alpha)r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$

$=r^{k+1}[(\cos k\alpha\cos\alpha-\sin k\alpha\sin\alpha)+i(\sin k\alpha\cos\alpha+\cos k\alpha\sin\alpha)]$

$=r^{k+1}[\cos(k+1)\alpha+i\sin(k+1)\alpha]$，

即当 $n=k+1$ 时，等式也成立.

综上，$z^n=r^n(\cos n\alpha+i\sin n\alpha)$，$n\in\mathbf{N}_+$.

(2)**解**：因为 $z_1=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{20}=\left[\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2\right]^{10}=(-1)^{10}=1$，且 $\frac{z_{n+1}}{z_n}=\frac{1}{2}(\cos\alpha+i\sin\alpha)$（$\alpha$ 为实常数），所以 $\{z_n\}$ 是首项为 1，公比为 $\frac{1}{2}(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ 的等比数列.

所以 $z_n=\left[\frac{1}{2}(\cos\alpha+i\sin\alpha)\right]^{n-1}$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}[\cos(n-1)\alpha+i\sin(n-1)\alpha]$.

第 5 期
第 3~4 版同步周测参考答案

一、选择题

1.D

提示：若 $|a|=|b|$，则 $a=b$，显然 a、b 异号不成立；

若 $|a|>|b|$，则 $a>b$，利用 $a=-3$，$b=1$，满足条件，不满足结果，B 不正确；

若 $a=0<b=5$，则 $|a|>|b|$ 不成立，C 不正确；

若 $|a|=|b|$，则 $a=\pm b$，成立.故选 D.

2.A

3.B

4.D

5.A

6.C

7.B

8.B

9.C

提示：假设 $c/\!/b$，而由 $c/\!/a$，可得 $a/\!/b$，这与 a,b 异面矛盾，故 c 与 b 不可能是平行直线.故选 C.

10.B

提示：分 $\triangle ABC$ 的直线只能过一个顶点且与对边相交，如直线 AD（点 D 在 BC 上），则 $\angle ADB+\angle ADC=180°$，若 $\angle ADB$ 为钝角，则 $\angle ADC$ 为锐角.而 $\angle ADC>\angle BAD$，$\angle ADC>\angle ABD$，$\triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 不可能相似，与已知不符，只有当 $\angle ADB=\angle ADC=\angle BAC=90°$ 时，才符合题意.

11.C

提示：由于 a，b，c 不全相等，则 $a-b$，$b-c$，$c-a$ 中至少有一个不为 0，故①正确；②显然成立；令 $a=2$，$b=3$，$c=5$，满足 $a\neq c$，$b\neq c$，$a\neq b$，故③错.

12.A

二、填空题

13.当 $n=2$ 时，$2^2\geqslant2\times2$，命题成立

14.④

提示：因为 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$，所以 $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}$，所以 $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$，所以四边形 ABCD 为平行四边形.

15.$AC\perp BD$

提示：从结论出发，找一个使 $A_1C\perp B_1D_1$ 成立的充分条件.因而可以是：$AC\perp BD$ 或四边形 ABCD 为正方形.

16.$\left[-2,\frac{3}{2}\right)$

提示：当 n 为偶数时，$a<2-\frac{1}{n}$，而 $2-\frac{1}{n}\geqslant2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，所以 $a<\frac{3}{2}$，

当 n 为奇数时，$a>-2-\frac{1}{n}$，而 $-2-\frac{1}{n}<-2$，所以 $a\geqslant-2$.

综上可得，$-2\leqslant a<\frac{3}{2}$.

三、解答题

17.**证明**：由题意得 $\overrightarrow{AB}=(-4,4)$，$\overrightarrow{AC}=(5,5)$，要证明 $\triangle ABC$ 是直角三角形，只需证明 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$，也就是证明 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，由于 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(-4,4)\cdot(5,5)=0$，故原命题成立.

18.**证明**：假设 $\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$ 成立，则 $\frac{2}{b}=\frac{a+c}{ac}=\frac{2b}{ac}$，所以 $b^2=ac$.

又因为 $b=\frac{a+c}{2}$，所以 $\left(\frac{a+c}{2}\right)^2=ac$，即 $a^2+c^2=2ac$，即 $(a-c)^2=0$，

所以 $a=c$，这与 a,b,c 两两不相等矛盾，

所以 $\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$ 不成立.

19.**证明**：(1)当 $n=1$ 时，$x+\frac{1}{x}\geqslant2$ 成立.

当 $n=2$ 时，$x^2+1+1+\frac{1}{x^2}\geqslant2+2>2+1$ 成立.

(2)假设当 $n=k$ 时，$x^k+x^{k-2}+\cdots+\frac{1}{x^{k-2}}+\frac{1}{x^k}\geqslant k+1$ 成立，

那么，当 $n=k+2$ 时，$x^{k+2}+x^k+\cdots+\frac{1}{x^k}+\frac{1}{x^{k+2}}\geqslant k+1+\left(x^{k+2}+\frac{1}{x^{k+2}}\right)\geqslant k+1+2=(k+2)+1$.

这表明，当 $n=k+2$ 时命题也成立.

根据(1)和(2)，可知原不等式成立.

20.(1)**解**：因为 $S_n,S_{n+1},2S_1$ 成等差数列，

所以 $S_{n+1}=\frac{S_n+2S_1}{2}$.

又 $a_1=1$，

所以 $S_1=a_1=1$，

$S_2=\frac{S_1+2S_1}{2}=\frac{3}{2}=\frac{2^2-1}{2^1}$，

$S_3=\frac{S_2+2S_1}{2}=\frac{7}{4}=\frac{2^3-1}{2^2}$，

$S_4=\frac{S_3+2S_1}{2}=\frac{15}{8}=\frac{2^4-1}{2^3}$，

猜想 $S_n=\frac{2^n-1}{2^{n-1}}(n\in\mathbf{N}_+)$.

(2)**证明**：①当 $n=1$ 时，左边 $=a_1=1$，右边 $=\frac{2^1-1}{2^{1-1}}=1$，

所以左边 = 右边，猜想成立.

②假设当 $n=k$ 时，猜想成立，即

$S_k=\frac{2^k-1}{2^{k-1}}$，

那么，当 $n=k+1$ 时，

$S_{k+1}=\frac{S_k+2S_1}{2}=\frac{\frac{2^k-1}{2^{k-1}}+2\times1}{2}$

$=\frac{2^k-1+2^k}{2^k}=\frac{2^{k+1}-1}{2^{(k+1)-1}}$，

所以当 $n=k+1$ 时猜想也成立.

根据①②，可知猜想对任何 $n\in\mathbf{N}_+$ 都成立.

21.**解**：假设三个方程均无实根，

则 $\begin{cases}\Delta_1=16a^2-4(-4a+3)<0,\\\Delta_2=(a-1)^2-4a^2<0,\\\Delta_3=4a^2-4(-2a)<0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}-\frac{3}{2}<a<\frac{1}{2},\\a<-1\text{或}a>\frac{1}{3},\\-2<a<0,\end{cases}$ 即 $-\frac{3}{2}<a<-1$，

所以当 $a\geqslant-1$ 或 $a\leqslant-\frac{3}{2}$ 时，三个方程至少有一个方程有实根.

所以实数 a 的取值范围是 $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right]\cup[-1,+\infty)$.

22.(1)**证明**：当 $a+b\geqslant0$ 时，$a\geqslant-b$ 且 $b\geqslant-a$.

因为 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，

所以 $f(a)\geqslant f(-b)$，$f(b)\geqslant f(-a)$，

所以 $f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$.

(2)**解**：(1)中命题的逆命题为“如果 $f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$，那么 $a+b\geqslant0$”，此命题成立.

用反证法证明如下：

假设 $a+b<0$，则 $a<-b$，

所以 $f(a)<f(-b)$.

同理可得 $f(b)<f(-a)$.

所以 $f(a)+f(b)<f(-a)+f(-b)$，这与 $f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$ 矛盾，

故假设不成立，

所以 $a+b\geqslant0$ 成立，即(1)中命题的逆命题成立.

第 6 期

第 2~3 版章节测试参考答案

一、选择题

1.D　2.D　3.C　4.B　5.C

6.B

提示：据已知可转化为 $\frac{1\times\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}>\frac{127}{64}$，整理得 $2^n>128$，解得 $n>7$，故初始值为 $n=8$.

7.D

提示：由已知等式，得 $\frac{\tan\frac{\pi}{5}+\frac{b}{a}}{1-\frac{b}{a}\tan\frac{\pi}{5}}=\tan\frac{8\pi}{15}$，设 $\tan\theta=\frac{b}{a}$，则有 $\tan\left(\frac{\pi}{5}+\theta\right)=\tan\frac{8\pi}{15}$，所以 $\frac{\pi}{5}+\theta=k\pi+\frac{8\pi}{15}(k\in\mathbf{Z})$，得 $\theta=k\pi+\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$ 所以 $\tan\theta=\tan\left(k\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$，即 $\frac{b}{a}=\sqrt{3}$.

8.C

提示：垂直于同一个平面的两条直线平行.

9.C

提示：假设 $\frac{a}{b},\frac{b}{c},\frac{c}{a}$ 的值均大于 1，由 $a>0,b>0,c>0$，得 $a>b,b>c,c>a$，显然矛盾，所以 $\frac{a}{b},\frac{b}{c},\frac{c}{a}$ 的值至少有一个不大于 1.

10.C

提示：因为 $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$，$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$，$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)$，

依此类推可得：$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}+\frac{1}{110}+\frac{1}{132}+\frac{1}{156}=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{13}\right)$，所以 $\frac{1}{m}=\frac{1}{13}$，$\frac{1}{n}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{1}{20}$，$m=13,n=20$，即 $1\leqslant x\leqslant 13$，$1\leqslant y\leqslant 20$. 又 $\frac{x+y+2}{x+1}=1+\frac{y+1}{x+1}$，把 $\frac{y+1}{x+1}$ 看成点 (x,y)，$(-1,-1)$ 连线的斜率，结合 $m\leqslant n,m,n\in\mathbf{N}_+$，在满足条件的点中，$(13,1)$，$(-1,-1)$ 连线的斜率最小，为 $\frac{1+1}{13+1}=\frac{1}{7}$，故 $\frac{x+y+2}{x+1}$ 最小值为 $\frac{8}{7}$.故选 C.

11.A

提示：当 $n=k$ 时式子为 $4^{2k-1}+3^{k+1}$，则 $n=k+1$ 时，式子为 $4^{2k+1}+3^{k+2}=4^2\times4^{2k-1}+3\times3^{k+1}=16\times(4^{2k-1}+3^{k+1})-13\times3^{k+1}$，显然 A 正确，故选 A.

12.B

提示：由数据可知，进入立定跳远决赛的 8 人为 1~8 号，所以进入 30 秒跳绳决赛的 6 人从 1~8 号里产生. 数据排序后可知 3 号，6 号，7 号必定进入 30 秒跳绳决赛，则得分为 $63,a,60,63,a-1$ 的 5 人中有 3 人进入 30 秒跳绳决赛.若 1 号，5 号学生未进入 30 秒跳绳决赛，则 4 号学生就会进入决赛，与事实矛盾，所以 1 号，5 号学生必进入 30 秒跳绳决赛.故选 B.

二、填空题

13.同角的补角相等

14.$(k+1)^2+k^2$

15.$\frac{a^3}{8}$　16.$\frac{x}{(2^n-1)x+2^n}$

三、解答题

17.**解**：$f(a)+f(c)>2f(b)$.

证明如下：因为 a,b,c 是互不相等的正数，所以 $a+c>2\sqrt{ac}$.

因为 $b^2=ac$，

所以 $ac+2(a+c)>b^2+4b$.

即 $ac+2(a+c)+4>b^2+4b+4$.

从而 $(a+2)(c+2)>(b+2)^2$.

因为 $f(x)=\log_2x$ 是增函数，

所以 $\log_2[(a+2)(c+2)]>\log_2(b+2)^2$.

即 $\log_2(a+2)+\log_2(c+2)>2\log_2(b+2)$.

故 $f(a)+f(c)>2f(b)$.

18.**解**：根据类比猜想得出 $S^2_{AA_1C_1C}=S^2_{ABB_1A_1}+S^2_{BCC_1B_1}-2S_{ABB_1A_1}\cdot S_{BCC_1B_1}\cdot\cos\theta$，其中 θ 为侧面 ABB_1A_1 与 BCC_1B_1 所成的二面角的平面角.

证明如下：作斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的直截面 DEF，D,E,F 分别在棱 AA_1,CC_1,BB_1 上，则 $\angle DFE$ 为平面 ABB_1A_1 与平面 BCC_1B_1 所成的角，设为 θ. 在 $\triangle DEF$ 中有余弦定理：$DE^2=DF^2+EF^2-2DF\cdot EF\cos\theta$，

等式左右两边同乘以 AA_1^2，得

$DE^2\cdot AA_1^2=DF^2\cdot AA_1^2+EF^2\cdot AA_1^2-2DF\cdot AA_1\cdot EF\cdot AA_1\cos\theta$，

即 $S^2_{AA_1C_1C}=S^2_{ABB_1A_1}+S^2_{BCC_1B_1}-2S_{ABB_1A_1}\cdot S_{BCC_1B_1}\cdot\cos\theta$.

19.**证明**：要证原式，只要证 $\frac{a+b+c}{a+b}+\frac{a+b+c}{b+c}=3$，即证 $\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}=1$，

即只要证 $\frac{bc+c^2+a^2+ab}{ab+b^2+ac+bc}=1$.

易知 $A+C=2B$，则 $B=60°$，$b^2=a^2+c^2-ac$，

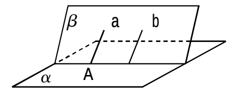
所以 $\frac{bc+c^2+a^2+ab}{ab+b^2+ac+bc}$

$=\frac{bc+c^2+a^2+ab}{ab+a^2+c^2-ac+ac+bc}$

$=\frac{bc+c^2+a^2+ab}{ab+a^2+c^2+bc}=1$.

所以原等式成立.

20.**证明**：原命题可用数学语言表述为：已知 $a/\!/b$，直线 $a\cap$ 平面 $\alpha=A$，如图所示，则直线 b 和平面 α 相交.



（第20题图）

假设 b 与平面 α 不相交，

则 $b\subset\alpha$，或 $b/\!/\alpha$.

(1)若 $b\subset\alpha$，因为 $a/\!/b$，$a\not\subset\alpha$，

所以 $a/\!/\alpha$，这与 $a\cap\alpha=A$ 相矛盾.

(2)若 $b/\!/\alpha$，因为 $a/\!/b$，所以 a 和 b 可确定一个平面 β，显然平面 α 与平面 β 相交.

设 $\alpha\cap\beta=c$，因为 $b/\!/\alpha$，所以 $b/\!/c$.

又 $a/\!/b$，所以 $a/\!/c$，且 $a\not\subset\alpha$，$c\subset\alpha$.

故 $a/\!/\alpha$，这与 $a\cap\alpha=A$ 矛盾.

根据(1)(2)，可知假设不成立.故直线 b 与平面 α 相交，原命题得证.

21.**解**：由 $x_1=\frac{1}{2}$ 及 $x_{n+1}=\frac{1}{1+x_n}$，得 $x_2=\frac{2}{3}$，$x_4=\frac{5}{8}$，$x_6=\frac{13}{21}$，由 $x_2>x_4>x_6$ 猜想：数列 $\{x_{2n}\}$ 是递减数列.

下面用数学归纳法证明：

(1)当 $n=1$ 时，已证命题成立.

(2)假设当 $n=k$ 时命题成立，

即 $x_{2k}>x_{2k+2}$，那么 $x_{2k+2}-x_{2k+4}=\frac{1}{1+x_{2k+1}}-\frac{1}{1+x_{2k+3}}=\frac{x_{2k+3}-x_{2k+1}}{(1+x_{2k+1})(1+x_{2k+3})}$

$=\frac{\frac{1}{1+x_{2k+2}}-\frac{1}{1+x_{2k}}}{(1+x_{2k+1})(1+x_{2k+3})}$

$=\frac{x_{2k}-x_{2k+2}}{(1+x_{2k})(1+x_{2k+1})(1+x_{2k+2})(1+x_{2k+3})}>0$，

即 $x_{2(k+1)}>x_{2(k+1)+2}$，

也就是说，当 $n=k+1$ 时命题也成立.结合(1)和(2)知命题成立.

22.(1)**解**：由于 $[(x-1)+(y+1)+(z+1)]^2$

$=(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2+2[(x-1)\cdot(y+1)+(y+1)(z+1)+(z+1)(x-1)]$

$\leqslant3[(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2]$，

因为 $x+y+z=1$，

所以 $(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2\geqslant\frac{4}{3}$，

当且仅当 $x=\frac{5}{3}$，$y=-\frac{1}{3}$，$z=-\frac{1}{3}$ 时，等号成立. 所以 $(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2$ 的最小值为 $\frac{4}{3}$.

(2)**证明**：由于 $[(x-2)+(y-1)+(z-a)]^2=(x-2)^2+(y-1)^2+(z-a)^2+2[(x-2)\cdot(y-1)+(y-1)(z-a)+(z-a)(x-2)]$

$\leqslant3[(x-2)^2+(y-1)^2+(z-a)^2]$，

因为 $x+y+z=1$，所以 $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-a)^2\geqslant\frac{(2+a)^2}{3}$，当且仅当 $x=\frac{4-a}{3}$，$y=\frac{1-a}{3}$，$z=\frac{2a-2}{3}$ 时，等号成立. 因此 $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-a)^2$ 的最小值为 $\frac{(2+a)^2}{3}$.由题设知 $\frac{(2+a)^2}{3}\geqslant\frac{1}{3}$，解得 $a\leqslant-3$ 或 $a\geqslant-1$.

第 7 期

第 3~4 版章节测试参考答案

一、选择题

1.D　2.C　3.C　4.C　5.B

6.D　7.B　8.B

9.B

提示：设 $z_1=a+bi$，$z_2=c+di(a,b,c,d\in\mathbf{R})$，则 $z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2=(a+bi)(c-di)+(a-bi)(c+di)=(2ac+2bd)\in\mathbf{R}$.

10.C

提示：设 $z=x+yi(x,y\in\mathbf{R})$.

由已知，得 $x^2+y^2+i(2yi)\leqslant0$，

即 $x^2+y^2-2y\leqslant0$，即 $x^2+(y-1)^2\leqslant1$.

故选 C.

11.C

提示：$z^2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，$z^3=-1$，$z^4=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$，$z^5=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$，$z^6=1$，所以原式 $=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+(-1+\sqrt{3}i)+(-3)+(-2-2\sqrt{3}i)+\left(\frac{5}{2}-\frac{5\sqrt{3}}{2}i\right)+6=3-3\sqrt{3}i=6\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=6\bar{z}$.

12.A

提示：设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，

所以 $|2z+1|=\sqrt{(2a+1)^2+4b^2}$，

$|z-i|=\sqrt{a^2+(b-1)^2}$，

所以 $\sqrt{(2a+1)^2+4b^2}=\sqrt{a^2+(b-1)^2}$，

整理得 $a^2+b^2+\frac{4}{3}a+\frac{2}{3}b=0$，

所以 z 对应的点的轨迹是圆.

故选 A.

二、填空题

13.$\sqrt{13}$

14.5，2

15.1

提示：复数 z_1 和 z_2 在复平面内对应的点 A 的坐标为 $(1,1)$，B 的坐标为 $(-1,1)$，所以 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\times2\times1=1$.

16.-1

提示：因为 $x+\frac{1}{x}=-1$，所以 $x^2+x+1=0$.

所以 $x=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$，所以 $x^3=1$.

因为 $2020=3\times673+1$，所以 $x^{2020}=x$，

所以 $x^{2020}+\frac{1}{x^{2020}}=x+\frac{1}{x}=-1$.

三、解答题

17.**解**：(1)$\frac{1-\sqrt{3}i}{(\sqrt{3}+i)^2}=\frac{1-\sqrt{3}i}{2+2\sqrt{3}i}$

$=\frac{(1-\sqrt{3}i)^2}{2(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)}$

$=-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i$.

(2)$\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^3(4+5i)}{(5-4i)(1-i)}$

$=\frac{2\sqrt{2}(1+i)^2(1+i)(4+5i)}{(5-4i)(1-i)}$

$=\frac{2\sqrt{2}\cdot2i\cdot2i(4+5i)(5+4i)}{(5-4i)(5+4i)(1-i)(1+i)}$

$=\frac{-8\sqrt{2}\times41i}{41\times2}=-4\sqrt{2}i$.

18.**解**：复数 $z=(2+i)m^2-3(i+1)m-2(1-i)=(2m^2-3m-2)+(m^2-3m+2)i$.

(1)若 z 是虚数，则 $m^2-3m+2\neq0$，

解得 $m\neq1$ 或 $m\neq2$.

(2)若 $z<0$，则 $m^2-3m+2=0$ 且 $2m^2-3m-2<0$，解得 $m=1$.

(3)若 z 所对应的点在第三象限，

则 $2m^2-3m-2<0$ 且 $m^2-3m+2<0$，

解得 $m\in(1,2)$.

19.**解**：(1)因为 $z=\cos A+i\sin A$，所以 $z+1=1+\cos A+i\sin A$.

所以 $|z+1|=\sqrt{(1+\cos A)^2+\sin^2A}=\sqrt{2+2\cos A}$.

因为 $|z+1|=1$.所以 $2+2\cos A=1$.所以 $\cos A=-\frac{1}{2}$.又 $0<A<180°$，所以 $A=120°$.

所以 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

所以复数 $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

(2)由正弦定理，得 $a=2R\cdot\sin A$，$b=2R\cdot\sin B$，$c=2R\cdot\sin C$(其中 R 为 $\triangle ABC$ 外接圆的半径)，

所以原式 $=\frac{\sin B-\sin C}{\sin A\cdot\cos(60°+C)}$.

因为 $B=180°-A-C=60°-C$，

所以原式 $=\frac{\sin(60°-C)-\sin C}{\sin120°\cdot\cos(60°+C)}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C-\frac{3}{2}\sin C}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos(60°+C)}=\frac{\cos C-\sqrt{3}\sin C}{\cos(60°+C)}=\frac{2\cos(60°+C)}{\cos(60°+C)}=2$，

即 $\frac{b-c}{a\cos(60°+C)}$ 的值为 2.

20.**解**：因为 $(x+\sqrt{3}i)^3=\log_{\sqrt{2}}\frac{1}{2^4}=-8$，

所以 $\left(\frac{x+\sqrt{3}i}{-2}\right)^3=1$，

所以 $\frac{x+\sqrt{3}i}{-2}=1$ 或 $\frac{x+\sqrt{3}i}{-2}=\omega$ 或 $\frac{x+\sqrt{3}i}{-2}=\bar{\omega}$（其中 $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$）.

若 $x+\sqrt{3}i=-2$，则 $x\notin\mathbf{R}$.

若 $x+\sqrt{3}i=-2\omega=1-\sqrt{3}i$，则 $x\notin\mathbf{R}$.

若 $x+\sqrt{3}i=-2\bar{\omega}=1+\sqrt{3}i$，则 $x=1$.

综上可知，存在满足题意的实数 x 且 $x=1$.

21.**解**：依题意得 z_1+z_2 为实数，因为 $z_1+z_2=\frac{3}{a+5}+\frac{2}{1-a}+[(a^2-10)+(2a-5)]i$，

所以 $\begin{cases}a^2+2a-15=0,\\a+5\neq0,\\1-a\neq0.\end{cases}$　所以 $a=3$.

此时 $z_1=\frac{3}{8}-i$，$z_2=-1+i$，

即 $\overrightarrow{OZ_1}=\left(\frac{3}{8},-1\right)$，$\overrightarrow{OZ_2}=(-1,1)$.

所以 $\overrightarrow{OZ_1}\cdot\overrightarrow{OZ_2}=\frac{3}{8}\times(-1)+(-1)\times1=-\frac{11}{8}$.

22.**解**：(1)由 $z_1=z_2$，

得 $m=\sin\alpha$ 且 $m-\cos\alpha=1$，

所以 $\sin\alpha-\cos\alpha=1$，

即 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

因为 $\alpha\in[0,2\pi)$，

所以 $\alpha-\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right)$.

所以 $\alpha-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$ 或 $\alpha-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$，

解得 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 或 $\alpha=\pi$.

(2)①若 $\alpha=\frac{\pi}{2}$，则 $t=i$，$f(t)=1+i+i^2+\cdots+i^{n-1}=\frac{1-i^n}{1-i}$.

故当 $n=4k(k\in\mathbf{N}_+)$ 时，$f(t)=\frac{1-1}{1-i}=0$；

当 $n=4k+1(k\in\mathbf{N}_+)$ 时，$f(t)=\frac{1-i}{1-i}=1$；

当 $n=4k+2(k\in\mathbf{N}_+)$ 时，$f(t)=\frac{1-i^2}{1-i}=\frac{2}{1-i}=1+i$；

当 $n=4k+3(k\in\mathbf{N}_+)$ 时，$f(t)=\frac{1-i^3}{1-i}=\frac{1+i}{1-i}=i$.

②若 $\alpha=\pi$，则 $t=-1$，$f(t)=1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n-1}$.

故当 $n=2k(k\in\mathbf{N}_+)$ 时，$f(t)=0$；当 $n=2k+1(k\in\mathbf{N}_+)$ 时，$f(t)=1$.