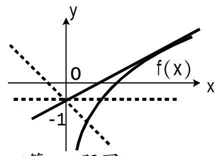
概率 $P=\frac{S_2}{S}=\frac{1}{8}-\frac{1}{18\pi}$.

12.A

提示: 因为 $z=(1+i)(m-i)=(m+1)+(m-1)i$ 在复平面内对应的点位于实轴上，所以 $m-1=0$，解得 $m=1$.所以 $f(x)=\ln x+x$，定义域为 $(0,+\infty)$.所以 $f'(x)=\frac{1}{x}+1>0$，且 $f'(x)$ 单调递减.所以 $f(x)$ 单调递增且增加的越来越慢，由此作出 $f(x)$ 的大致图象如图所示.

直线 $l:y=2kx-1$ 过定点 $(0,-1)$，当直线 l 与曲线 $f(x)$ 相切时，设切点为 $(x_0,\ln x_0+x_0)$，则切线方程为 $y-(\ln x_0+x_0)=\left(\frac{1}{x_0}+1\right)(x-x_0)$.把 $(0,-1)$ 代入，可得 $x_0=1$，则 $2k=\frac{1}{x_0}+1=2$，解得 $k=1$.又 $f'(x)=\frac{1}{x}+1>1(x>0)$，由图可知，当 $2k\in(-\infty,1]$，即 $k\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$ 时，曲线 $f(x)$ 与直线 l 有且只有一个公共点.综上可得，实数 k 的取值范围为 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]\cup\{1\}$.



(第 12 题图)

二、填空题

13.$A>B>C$　　14.三

15.$a_{n+1}-a_n=5\cdot 2^{n-2}$

16.5

提示: 设 $z=x+yi,x,y\in\mathbf{R}$.由 $|z-2|=|\text{Re}z+2|$，得 $\sqrt{(x-2)^2+y^2}=|x+2|$，化简，得 z 在复平面内对应的点的轨迹是抛物线 $y^2=8x$. 而 $|z-3-2i|+|z-2|$ 可表示抛物线上的点 P 到定点 $Q(3,2)$ 与焦点 $F(2,0)$ 的距离之和，过点 Q 作准线 $l:x=-2$ 的垂线，垂足为 H，由平面几何知识可得 $|z-3-2i|+|z-2|$ 的最小值为 $|QH|=5$.

三、解答题

17.**解:** 设 $z=x+yi,x,y\in\mathbf{R}$，代入原方程，得 $x^2+y^2+2xi=\frac{3-i}{2+i}=1-i$，

所以 $\begin{cases}x^2+y^2=1,\\2x=-1,\end{cases}$ 解得 $x=-\frac{1}{2},y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

所以 $z=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

18.(1)**解:** 原方程可化为 $x^2-x\tan\theta-2-(x+1)i=0$，若该方程有实数根，则有 $\begin{cases}x^2-x\tan\theta-2=0,\\x+1=0.\end{cases}$

解得 $x=-1,\tan\theta=1$.

所以锐角 $\theta=\frac{\pi}{4}$，实数根是 $x=-1$.

(2)**证明:** 假设方程有纯虚数根，设其为 $bi(b\in\mathbf{R}$ 且 $b\neq0)$，将 $x=bi$ 代入原方程并化简，得 $b^2-b+2+i(b\tan\theta+1)=0$，所以 $b^2-b+2=0$，解得 $b=\frac{1\pm\sqrt{7}i}{2}\notin\mathbf{R}$，与假设矛盾.所以原方程无纯虚数根.

19.**解:** (1)已知 $n\in\mathbf{N}_+$，则 $\sqrt{n}-\sqrt{n-1}>\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.

(2)该命题是真命题.证明如下:

要证 $\sqrt{n}-\sqrt{n-1}>\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$，可证 $2\sqrt{n}>\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}$，即证 $4n>2n+2\sqrt{(n-1)(n+1)}$，即证 $n>\sqrt{(n-1)(n+1)}$，即证 $n^2>(n-1)(n+1)$，即证 $n^2>n^2-1$，即证 $0>-1$.上式显然成立，故原命题是真命题.

20.(1)**解:** $f'(x)=\frac{3}{4}x^2-2x+1$.令 $f'(x)=1$，解得 $x=0$，或 $x=\frac{8}{3}$.又 $f(0)=0,f\left(\frac{8}{3}\right)=\frac{8}{27}$，所以切线方程为 $y=x$ 和 $y-\frac{8}{27}=x-\frac{8}{3}$，即 $y=x$ 和 $y=x-\frac{64}{27}$.

(2)**证明:** 令 $g(x)=f(x)-x=\frac{1}{4}x^3-x^2$，$x\in[-2,4]$，则 $g'(x)=\frac{3}{4}x^2-2x=\frac{3}{4}x\left(x-\frac{8}{3}\right)$.

令 $g'(x)=0$，解得 $x=0$，或 $x=\frac{8}{3}$.列表:

x	$(-2,0)$	0	$\left(0,\frac{8}{3}\right)$	$\frac{8}{3}$	$\left(\frac{8}{3},4\right)$
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	↗	极大值 0	↘	极小值 $-\frac{64}{27}$	↗

又 $g(-2)=-6,g(4)=0$，所以 $g(x)$ 在 $[-2,4]$ 上的最大值为 0，最小值为 -6，即 $-6\leqslant g(x)\leqslant0$，即 $-6\leqslant f(x)-x\leqslant0$，所以 $x-6\leqslant f(x)\leqslant x$.

(3)**解:** 由(2)可得，$F(x)=|f(x)-(x+a)|=|f(x)-x-a|=|g(x)-a|$，且在 $[-2,4]$ 上，$-6\leqslant g(x)\leqslant0$.

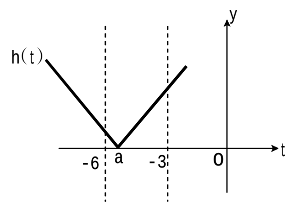
令 $t=g(x),h(t)=|t-a|$，则问题转化为当 $t\in[-6,0]$ 时，$h(t)$ 的最大值 $M(a)$ 的问题.

画出 $h(t)$ 的图象如图所示.

①当 $a\leqslant-3$ 时，$M(a)=h(0)=|a|=-a\geqslant3$，当 $a=-3$ 时，$M(a)$ 取得最小值 3;

②当 $a>-3$ 时，$M(a)=h(-6)=|-6-a|=|6+a|=6+a$，当 $a=-3$ 时，$M(a)$ 取得最小值 3.

综上可知，当 $M(a)$ 最小时，a 的值为 -3.



(第 20 题图)

21.(1)**解:** 由题设，得

$\begin{cases}f(1)=a+b+c+1=2,\\f(2)=8a+4b+2c+1=4,\\f(3)=27a+9b+3c+1=8,\end{cases}$

解得 $a=\frac{1}{6},b=0,c=\frac{5}{6}$.

(2)**证明:** 用数学归纳法证明空间内 n 个平面最多可将空间分成 $f(n)=\frac{1}{6}n^3+\frac{5}{6}n+1$ 个部分，$n\in\mathbf{N}_+$，证明如下:

①当 $n=1$ 时，由(1)可知结论显然成立.

②假设当 $n=k$ 时结论成立，即空间内 k 个平面最多可将空间分成 $f(k)=\frac{1}{6}k^3+\frac{5}{6}k+1$ 个部分，

那么当 $n=k+1$ 时，在 k 个平面的基础上再添上第 $k+1$ 个平面，它与前 k 个平面都相交，可得到互不平行且不共点的 k 条交线，且其中任何 3 条直线不共点，这 k 条交线可以把第 $k+1$ 个平面划分成 $\frac{1}{2}k^2+\frac{1}{2}k+1$ 个部分，每个部分把它所在的原有空间区域划分成两个区域，因此，空间区域的总数增加了 $\frac{1}{2}k^2+\frac{1}{2}k+1$ 个，所以 $f(k+1)=f(k)+\frac{1}{2}k^2+\frac{1}{2}k+1=\frac{1}{6}k^3+\frac{5}{6}k+1+\frac{1}{2}k^2+\frac{1}{2}k+1=\frac{1}{6}(k+1)^3+\frac{5}{6}(k+1)+1$，即 $n=k+1$ 时，结论也成立.

根据①②可知，原结论成立.

22.(1)**解:** $f(x)$ 的定义域为 $(0,1)\cup(1,+\infty)$.因为 $f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{2}{(x-1)^2}>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,1),(1,+\infty)$ 上单调递增.因为 $f(e)=1-\frac{e+1}{e-1}<0,f(e^2)=2-\frac{e^2+1}{e^2-1}=\frac{e^2-3}{e^2-1}>0$，所以 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 有唯一零点 x_1，即 $f(x_1)=0$.又 $0<\frac{1}{x_1}<1,f\left(\frac{1}{x_1}\right)=-\ln x_1+\frac{x_1+1}{x_1-1}=-f(x_1)=0$，故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 有唯一零点 $\frac{1}{x_1}$.综上，$f(x)$ 有且仅有两个零点.

(2)**证明:** 因为 $\frac{1}{x_0}=e^{-\ln x_0}$，故点 $B\left(-\ln x_0,\frac{1}{x_0}\right)$ 在曲线 $y=e^x$ 上.由题设知 $f(x_0)=0$，即 $\ln x_0=\frac{x_0+1}{x_0-1}$，故直线 AB 的斜率 $k=\frac{\frac{1}{x_0}-\ln x_0}{-\ln x_0-x_0}=\frac{\frac{1}{x_0}-\frac{x_0+1}{x_0-1}}{-\frac{x_0+1}{x_0-1}-x_0}=\frac{1}{x_0}$.曲线 $y=e^x$ 在点 $B\left(-\ln x_0,\frac{1}{x_0}\right)$ 处切线的斜率是 $\frac{1}{x_0}$，曲线 $y=\ln x$ 在点 $A(x_0,\ln x_0)$ 处切线的斜率也是 $\frac{1}{x_0}$，所以曲线 $y=\ln x$ 在点 $A(x_0,\ln x_0)$ 处的切线也是曲线 $y=e^x$ 的切线.

第 9~12 期

第 9~10 版综合测试(一)参考答案

一、选择题

1.A　2.B　3.A

4.C

提示: 由题设，得 $\sin\theta-\frac{3}{5}=0$ 且 $\cos\theta-\frac{4}{5}\neq0$，又 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，所以 $\sin\theta=\frac{3}{5}$，$\cos\theta=-\frac{4}{5}$.所以 $\tan(\theta-\pi)=\tan\theta=-\frac{3}{4}$.

5.B

提示: $f'(x)=-a\cos\pi x$.

又 $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)=2$，

所以 $-a\cos\pi=2$，解得 $a=2$.

6.A

提示: $f'(x)=6x^2-12x=6x(x-2)$，易知 $f(x)$ 在 $(-2,0)$ 上单调递增，在 $(0,2)$ 上单调递减.所以 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上的最大值是 $f(0)=m=3$.所以 $f(-2)=-37,f(2)=-5$.所以最小值是 -37.

7.A

8.B

提示: 易得甲产品的利润与投入资金满足 $y=\frac{1}{4}x$，乙产品的利润与投入资金满足 $y=\frac{5}{4}\sqrt{x}$.设乙产品的投入资金为 x 万元，则甲产品的投入资金为 $(10-x)$ 万元，其中 $0\leqslant x\leqslant10$，则可获得的利润 $y=\frac{1}{4}(10-x)+\frac{5}{4}\sqrt{x}$.从而 $y'=-\frac{1}{4}+\frac{5}{8\sqrt{x}}$.令 $y'=0$，解得 $x=\frac{25}{4}$.此时函数 y 取得最大值，为 $\frac{65}{16}$ 万元.

9.D

10.A

提示: 分别将 $2+ai,b+i$ 代入方程得:

$\begin{cases}(2+ai)^2+p(2+ai)+q=0, & ①\\(b+i)^2+p(b+i)+q=0, & ②\end{cases}$

对①②整理，由复数相等的充要条件得:

$\begin{cases}2p+q-a^2+4=0,\\(p+4)a=0,\\pb+q+b^2-1=0,\\p+2b=0.\end{cases}$

解得 $p=-4,q=5$.

11.D

提示: $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$.当 $x>3$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(3,+\infty)$ 上是减函数.因为 $b>a>3$，所以 $b>\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}>a>3$，所以 $f(b)<f\left(\frac{a+b}{2}\right)<f(\sqrt{ab})<f(a)$.故选D.

12.B

二、填空题

13.$\frac{a+bi}{b-ai}=i(a,b\in\mathbf{R})$

14.3

提示: 由 $(1+i)^{2n}=-2^n\cdot i$，得 $(2i)^n=2^n\cdot i^n=-2^n\cdot i$，所以 $i^n=-i$，即 $n=4k+3,k\in\mathbf{N}$，所以最小的正整数为 3.

15.$a>4$

提示: 因为 $f(x)=\left(1-\frac{a}{x}\right)e^x(x>0)$，所以 $f'(x)=\left(\frac{a}{x^2}-\frac{a}{x}+1\right)e^x$.因为函数 $f(x)$ 既有极大值又有极小值，所以 $f'(x)=\left(\frac{a}{x^2}-\frac{a}{x}+1\right)e^x=0$ 有 2 个不等实数根，所以 $x^2-ax+a=0$ 有 2 个不等的正实数根，所以 $\Delta=a^2-4a>0$ 且 $a>0$，所以 $a>4$.

16.-3

提示: 由题意可知，$f'(x)=3x^2+2ax+b,f'(0)=0$，所以 $b=0$，所以 $f(x)=x^2(x+a)$，有 $\frac{27}{4}=\int_0^{-a}[0-(x^3+ax^2)]dx=-\left(\frac{x^4}{4}+\frac{ax^3}{3}\right)\Big|_0^{-a}=\frac{a^4}{12}$，所以 $a=\pm3$.又 $-a>0\Rightarrow a<0$，得 $a=-3$.

三、解答题

17.**解:** (1)当点 M 在虚轴上时，有 $m^2+m-12=0$，解得 $m=-4$，或 $m=3$.

(2)当点 M 位于第四象限时，有 $\begin{cases}m^2+m-12>0,\\m^2-8m+15<0,\end{cases}$ 解得 $3<m<5$.

所以实数 m 的取值范围是 $(3,5)$.

18.**解:** (1)设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，则 $\bar{z}=a-bi$，所以 $z+\bar{z}=2a=6$，解得 $a=3$.

又 $|z|=\sqrt{9+b^2}=5$，所以 $b=\pm4$，所以复数 z 的虚部为 ±4.

(2)由(1)可知 $z=3\pm4i$.当 $z=3+4i$ 时，$\frac{z}{1-i}=\frac{3+4i}{1-i}=\frac{(3+4i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{-1+7i}{2}$，故其实部为 $-\frac{1}{2}$；当 $z=3-4i$ 时，$\frac{z}{1-i}=\frac{3-4i}{1-i}=\frac{(3-4i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{7-i}{2}$，故其实部为 $\frac{7}{2}$.

综上，复数 $\frac{z}{1-i}$ 的实部为 $-\frac{1}{2}$ 或 $\frac{7}{2}$.

19.(1)**解:** 由 $9^x>5^x+4^x$，两边同除以 9^x，可得 $1>\left(\frac{5}{9}\right)^x+\left(\frac{4}{9}\right)^x$.

由于 $0<\frac{4}{9}<\frac{5}{9}<1$，显然函数 $f(x)=\left(\frac{5}{9}\right)^x+\left(\frac{4}{9}\right)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上为单调递减函数，

而 $f(1)=\frac{4}{9}+\frac{5}{9}=1$，

故当 $x>1$ 时，有 $f(x)=\left(\frac{5}{9}\right)^x+\left(\frac{4}{9}\right)^x<f(1)=1$，所以原不等式的解集为 $\{x|x>1\}$.

(2)**证明:** 将方程 $5^x+12^x=13^x$ 两边同除以 13^x，可得 $\left(\frac{5}{13}\right)^x+\left(\frac{12}{13}\right)^x=1$.

由于 $0<\frac{5}{13}<\frac{12}{13}<1$，显然函数 $g(x)=\left(\frac{5}{13}\right)^x+\left(\frac{12}{13}\right)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上为单调递减函数，而 $g(2)=\left(\frac{5}{13}\right)^2+\left(\frac{12}{13}\right)^2=1$，

故当 $x>2$ 时，$g(x)=\left(\frac{5}{13}\right)^x+\left(\frac{12}{13}\right)^x<g(2)=1$；当 $x<2$ 时，$g(x)=\left(\frac{5}{13}\right)^x+\left(\frac{12}{13}\right)^x>g(2)=1$.

由此可得，当且仅当 $x=2$ 时 $g(x)=1$，即方程 $5^x+12^x=13^x$ 有唯一解 $x=2$.

20.**解:** (1)当 $m=3$ 时，$f(x)=\frac{3}{x}+\ln x$，$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x-3}{x^2}$.令 $f'(x)=0$，解得 $x=3$.当 $0<x<3$ 时，$f'(x)<0,f(x)$ 是减函数；当 $x>3$ 时，$f'(x)>0,f(x)$ 是增函数.所以 $f(x)$ 有极小值，为 $f(3)=1+\ln3$，没有极大值.

(2)$g'(x)=3x^2+2x-1=(3x-1)(x+1)$.

当 $x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 是增函数，$[g(x)]_{max}=g(2)=10$.若对于任意 $s,t\in\left[\frac{1}{2},2\right]$，都有 $f(s)\geqslant\frac{1}{10}g(t)$ 恒成立，则对于任意 $x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$，$f(x)=\frac{m}{x}+\ln x\geqslant1$ 恒成立，即对于任意 $x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$，$m\geqslant x-x\ln x$ 恒成立.令 $h(x)=x-x\ln x$，则 $h'(x)=1-\ln x-1=-\ln x$.当 $0<x<1$ 时，$h'(x)>0,h(x)$ 是增函数；当 $x>1$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 是减函数.所以当 $x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$ 时，$h(x)$ 的最大值为 $h(1)=1$.所以 $m\geqslant1$，即实数 m 的取值范围是 $[1,+\infty)$.

21.(1)**解:** 由 $6S_n=(2n+5)a_n-3n$，

当 $n=1$ 时，有 $6a_1=(2+5)a_1-3$，解得 $a_1=3$；

当 $n=2$ 时，有 $6(a_1+a_2)=(2\times2+5)a_2-3\times2$，解得 $a_2=8$；

当 $n=3$ 时，有 $6(a_1+a_2+a_3)=(2\times3+5)a_3-3\times3$，解得 $a_3=15$；

当 $n=4$ 时，有 $6(a_1+a_2+a_3+a_4)=(2\times4+5)a_4-3\times4$，解得 $a_4=24$.

(2)**解:** 由(1)可知，$a_1=1\times3,a_2=2\times4,a_3=3\times5,a_4=4\times6$，猜想 $a_n=n(n+2)(n\in\mathbf{N}_+)$，证明如下:

①当 $n=1$ 时，$a_1=3=1\times3$，猜想成立.

②假设当 $n=k(k\geqslant2)$ 时，猜想成立，即 $a_k=k(k+2)$，那么当 $n=k+1$ 时，

③ $a_{k+1}=S_{k+1}-S_k=\frac{1}{6}[(2k+7)a_{k+1}-3(k+1)]-\frac{1}{6}[(2k+5)a_k-3k]$

$=\frac{1}{6}(2k+7)a_{k+1}-\frac{1}{6}(2k+5)a_k-\frac{1}{2}$，

化简，得 $(2k+1)a_{k+1}=(2k+5)a_k+3=(2k+5)k(k+2)+3=2k^3+9k^2+10k+3=(2k^3+8k^2+6k)+(k^2+4k+3)=(2k+1)(k+1)(k+3)$，

所以 $a_{k+1}=(k+1)(k+3)$，

即当 $n=k+1$ 时猜想也成立.

由①②可知，$a_n=n(n+2)(n\in\mathbf{N}_+)$.

22.**证明**：(1)$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{x-1}{x}+\ln x-1=\ln x-\frac{1}{x}$. 因为 $y=\ln x$ 单调递增，$y=\frac{1}{x}$单调递减，所以$f'(x)$单调递增. 又$f'(1)=-1<0$，$f'(2)=\ln2-\frac{1}{2}=\frac{\ln4-1}{2}>0$，故存在唯一 $x_0\in(1,2)$，使得$f'(x_0)=0$.又当 $x<x_0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；当 $x>x_0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，因此，$f(x)$存在唯一的极值点.

(2)由(1)知$f(x_0)<f(1)=-2$，又$f(e^2)=e^2-3>0$，所以$f(x)=0$在$(x_0,+\infty)$内存在唯一根 $x=\alpha$.由 $\alpha>x_0>1$，得$\frac{1}{\alpha}<1<x_0$.又$f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\ln\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}-1=\frac{f(\alpha)}{\alpha}=0$，故$\frac{1}{\alpha}$是$f(x)=0$在$(0,x_0)$的唯一根.综上，$f(x)=0$有且仅有两个实根，且两个实根互为倒数.

第11~12版综合测试(二)参考答案

一、选择题

1.C 2.C 3.C 4.B 5.C 6.A

7.D

提示：当 $m=0$ 时，C 符合题意. 当 $m\neq0$ 时，$f'(x)=3mx^2-2x-2m$，$\Delta=4+24m^2>0$，设 $3mx^2-2x-2m=0$ 的两根为 x_1,x_2，则 $x_1x_2=-\frac{2}{3}<0$，故两个极值点 x_1,x_2 异号，则 A,B 符合题意，D 不符合题意.故选D.

8.B

提示：$\cos0.2=1-\frac{0.2^2}{2!}=1-0.02=0.98$.

9.B

提示：若存在实数 m，使直线 l 是曲线 $y=f(x)$的切线，因为$f'(x)=2\sin x\cos x+2a=\sin2x+2a$，所以方程 $\sin2x+2a=-1$ 有解，所以$-1\leqslant a\leqslant0$，故所求 a 的取值范围是$(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$.

10.A

提示：由已知条件，得 $a^3-2a>m+a$，故 $m<a^3-3a$ 在 $a\in[0,+\infty)$上恒成立.令$f(a)=a^3-3a(a\geqslant0)$，则$f'(a)=3a^2-3=3(a+1)(a-1)$，可知$f(a)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，故$[f(a)]_{\min}=f(1)=-2$.所以 m 的取值范围为$(-\infty,-2)$.

11.C

提示：计算得$f(1)=36$，$f(2)=3\times36$，$f(3)=10\times36$，$f(4)=34\times36$，由此猜想 $m=36$，用数学归纳法可得证.故选 C.

12.B

提示：依题意，记 $g(x)=xf(x)$，则 $g'(x)=xf'(x)+f(x)$，$g(0)=0$.当 $x>0$ 时，$g'(x)=x\left[f'(x)+\frac{f(x)}{x}\right]>0$，$g(x)$是增函数，$g(x)>0$；当 $x<0$ 时，$g'(x)=x\left[f'(x)+\frac{f(x)}{x}\right]<0$，$g(x)$是减函数，$g(x)>0$.在同一坐标系内画出函数 $y=g(x)$与 $y=-\frac{1}{x}$ 的大致图象，结合图象可知，它们共有 1 个公共点，因此函数 $F(x)=xf(x)+\frac{1}{x}$ 的零点个数是 1，选 B.

二、填空题

13.$\frac{8}{3}+\pi$

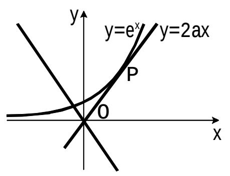
14.$[\sqrt{2}-1,\sqrt{2}+1]$

提示：因为$\overrightarrow{OZ_1}\cdot\overrightarrow{OZ_2}=0$，所以$\overrightarrow{OZ_1}\perp\overrightarrow{OZ_2}$.又$|z_1|=|z_2|=1$，即$|\overrightarrow{OZ_1}|=|\overrightarrow{OZ_2}|=1$，由平行四边形法则易得$|\overrightarrow{OZ_1}+\overrightarrow{OZ_2}|=\sqrt{2}$. 设 z_3 对应的向量为$\overrightarrow{OZ_3}$，则$|\overrightarrow{OZ_1}+\overrightarrow{OZ_2}|-|\overrightarrow{OZ_3}|\leqslant|\overrightarrow{OZ_1}+\overrightarrow{OZ_2}-\overrightarrow{OZ_3}|\leqslant|\overrightarrow{OZ_1}+\overrightarrow{OZ_2}|+|\overrightarrow{OZ_3}|$，即$\sqrt{2}-1\leqslant|z_1+z_2-z_3|\leqslant\sqrt{2}+1$. 故$|z_1+z_2-z_3|$的取值范围是$[\sqrt{2}-1,\sqrt{2}+1]$.

15.6

16.$(-\infty,0)\cup\left(\frac{e}{2},+\infty\right)$

提示：$f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$，$f'(x)=e^x-2ax$.由题意得，$f'(x)$不恒大于 0 也不恒小于 0，且关于 x 的方程 $e^x-2ax=0$ 有实根. 在同一平面直角坐标系中作出 $y=e^x$ 和 $y=2ax$ 的图象，如图所示. 当直线 $y=2ax$ 与曲线 $y=e^x$ 相切时，设切点为 $P(x_0,y_0)$，则$\begin{cases}2a=e^{x_0},\\y_0=e^{x_0},\\y_0=2ax_0,\end{cases}$解得 $a=\frac{e}{2}$.由图可知 $a\in(-\infty,0)\cup\left(\frac{e}{2},+\infty\right)$.



(第 16 题图)

三、解答题

17.**解**：$z_2=\frac{15-5i}{(2+i)^2}=\frac{15-5i}{3+4i}=\frac{5(3-i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}=\frac{5-15i}{5}=1-3i$.

(1)$z_1+\overline{z}_2=(2-3i)+(1+3i)=3$.

(2)$z_1\cdot z_2=(2-3i)(1-3i)=2-9-9i=-7-9i$.

(3)$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2-3i}{1-3i}=\frac{(2-3i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)}=\frac{2+9+3i}{10}=\frac{11}{10}+\frac{3}{10}i$.

18.**解**：(1)设 $z_1=x+yi$，$x,y\in\mathbf{R}$，由 $z_1\cdot\overline{z_1}+3(z_1+\overline{z_1})+5=0$，得 $x^2+y^2+6x+5=0$，整理得$(x+3)^2+y^2=4$，所以点 P 的轨迹方程为$(x+3)^2+y^2=4$.

(2)设 $z_2=x+yi$，$x,y\in\mathbf{R}$，$\frac{z_2+3}{z_2-3}=\frac{x+3+yi}{x-3+yi}=\frac{x^2+y^2-9-6yi}{(x-3)^2+y^2}$，因为$\frac{z_2+3}{z_2-3}$为纯虚数，所以 $x^2+y^2=9$ 且 $y\neq0$，所以点 Q 的轨迹方程为 $x^2+y^2=9(y\neq0)$.

19.**证明**：若已知数列$\{a_n\}$的首项 $a_1=1$，当 $n\geqslant2$ 时，$\frac{a_n}{a_{n-1}}=2$，则通项 $a_n=2^{n-1}$，前 n 项和 $S_n=\frac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$.

从而可知，要证 $S_n\geqslant2^n-1$，可以先证 $a_n\geqslant2^{n-1}$，只需证$\frac{a_n}{a_{n-1}}\geqslant2(n\geqslant2)$.

因为当 $x\geqslant0$ 时，$f(x)=x^3+1\geqslant1$，所以由 $a_1=1$，可得 $a_n=f(a_{n-1})\geqslant1$.

所以 $a_n=a_{n-1}^3+1\geqslant a_{n-1}^2+1\geqslant2a_{n-1}$，故$\frac{a_n}{a_{n-1}}\geqslant2$.得证.

20.**解**：(1)若 $m=1$，则 $f(x)=e^x-x^2$，$f'(x)=e^x-2x$.所以 $f'(0)=1$.又 $f(0)=1$，故所求切线方程为 $y-1=x$，即 $x-y+1=0$.

(2)由$f(x)\geqslant x(4-me^x)$，得 $me^x(x+1)\geqslant x^2+4x$，则问题转化为当 $x\geqslant0$ 时，$m\geqslant\frac{x^2+4x}{e^x(x+1)}$恒成立. 令 $g(x)=\frac{x^2+4x}{e^x(x+1)}(x\geqslant0)$，则 $g'(x)=\frac{-(x+2)(x^2+2x-2)}{(x+1)^2e^x}$. 令 $g'(x)=0$，结合 $x\geqslant0$，得 $x=\sqrt{3}-1$.当$x\in(0,\sqrt{3}-1)$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增；当 $x\in(\sqrt{3}-1,+\infty)$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减. 所以$[g(x)]_{\max}=g(\sqrt{3}-1)=2e^{1-\sqrt{3}}$.所以 $m\geqslant2e^{1-\sqrt{3}}$，即实数 m 的取值范围为$[2e^{1-\sqrt{3}},+\infty)$.

21.(1)**证明**：依题意，$a_n=\sqrt{n^2+1}$，$b_n=n$，$c_n=\sqrt{n^2+1}-n$.

假设$\{c_n\}$是等差数列，则 $2c_2=c_1+c_3$，

所以 $2(\sqrt{5}-2)=\sqrt{2}-1+\sqrt{10}-3$.

所以$2\sqrt{5}=\sqrt{2}+\sqrt{10}$，产生矛盾，

所以$\{c_n\}$不是等差数列.

假设$\{c_n\}$是等比数列，则 $c_2^2=c_1c_3$，即$(\sqrt{5}-2)^2=(\sqrt{2}-1)(\sqrt{10}-3)$.

有 $6=6\sqrt{5}-3\sqrt{2}-\sqrt{10}$，产生矛盾，所以$\{c_n\}$也不是等比数列.

(2)**解**：因为 $c_{n+1}=\sqrt{(n+1)^2+1}-(n+1)>0$，$c_n=\sqrt{n^2+1}-n>0$，

所以$\frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{\sqrt{(n+1)^2+1}-(n+1)}{\sqrt{n^2+1}-n}=\frac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt{(n+1)^2+1}+(n+1)}$.

因为 $0<\sqrt{n^2+1}<\sqrt{(n+1)^2+1}$，

又 $0<n<n+1$，

所以$\sqrt{n^2+1}+n<\sqrt{(n+1)^2+1}+n+1$，

所以 $0<\frac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt{(n+1)^2+1}+(n+1)}<1$，

所以 $0<\frac{c_{n+1}}{c_n}<1$，即 $c_{n+1}<c_n$.

22.(1)**解**：$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=-\frac{1}{x^2}-1+\frac{a}{x}=-\frac{x^2-ax+1}{x^2}$.

令 $g(x)=x^2-ax+1$，显然当 $a\leqslant0$ 时，$g(x)>0$，则$f'(x)<0$恒成立，此时函数$f(x)$在$(0,+\infty)$单调递减；

当 $a>0$ 时，令 $g(x)=0$，则 $\Delta=a^2-4$.

(i)若 $0<a\leqslant2$ 时，$\Delta\leqslant0$，即 $g(x)\geqslant0$，

所以$f'(x)\leqslant0$，此时 $f(x)$在$(0,+\infty)$单调递减.

(ii)若 $a>2$，令 $g(x)=0$，得

$x=\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}$，或 $x=\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$.

当 $x\in\left(0,\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)\cup\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2},+\infty\right)$时，$f'(x)<0$；

当 $x\in\left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$时，$f'(x)>0$.

所以 $f(x)$ 在$\left(0,\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$，$\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2},+\infty\right)$单调递减，在$\left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$单调递增.

综上，当 $a\leqslant2$ 时，$f(x)$在$(0,+\infty)$单调递减；当 $a>2$ 时，$f(x)$在$\left(0,\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$，$\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2},+\infty\right)$单调递减，在$\left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$单调递增.

(2)**证明**：由(1)知，$f(x)$存在两个极值点当且仅当 $a>2$.

因为$f(x)$的两个极值点 x_1,x_2 满足 $x^2-ax+1=0$，所以 $x_1x_2=1$，不妨设 $x_1<x_2$，则 $x_2>1$.

因为$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=-\frac{1}{x_1x_2}-1+a\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}=-2+a\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}=-2+a\frac{-2\ln x_2}{\frac{1}{x_2}-x_2}$，

所以$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<a-2$ 等价于$\frac{1}{x_2}-x_2+2\ln x_2<0$.

设函数 $h(x)=\frac{1}{x}-x+2\ln x$，

由(1)知，$h(x)$在$(0,+\infty)$单调递减，

又 $h(1)=0$，

从而当 $x\in(1,+\infty)$时，$h(x)<0$.

所以$\frac{1}{x_2}-x_2+2\ln x_2<0$，

即$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<a-2$.

第13~14版综合测试(三)参考答案

一、选择题

1.D

2.B

提示：由 $z_1=1+i$，可知 $z_2=1-i$.所以$\frac{z_1}{z_2-i}=\frac{1+i}{1-2i}=\frac{(1+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i$.

3.A

提示：$\frac{a-2i}{1+i}=\frac{(a-2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{(a-2)+(-a-2)i}{2}=\frac{a-2}{2}-\frac{a+2}{2}i$.若$\frac{a-2i}{1+i}$为纯虚数，则$\frac{a-2}{2}=0$ 且$-\frac{a+2}{2}\neq0$，解得 $a=2$.所以$|3-ai|=|3-2i|=\sqrt{13}$.

4.C

提示：记 $11^n\times248$ 的十位数为 a_n，则 $a_0=4$，$a_1=2$，$a_2=0$，$a_3=8$，$a_4=6$，$a_5=4$，$a_6=2$，…，归纳得出$\{a_n\}$的周期为 5，则 $a_{99}=a_4=6$.

5.B

6.C

提示：因为 $a>b>c$，所以 $a-b>0$，$b-c>0$，$a-c>0$. 又$\frac{a-c}{a-b}+\frac{a-c}{b-c}=\frac{a-b+b-c}{a-b}+\frac{a-b+b-c}{b-c}=2+\frac{b-c}{a-b}+\frac{a-b}{b-c}\geqslant2+2=4$，而 $k\leqslant\frac{a-c}{a-b}+\frac{a-c}{b-c}$，所以 $k\leqslant4$.故最大的正整数 k 等于 4.

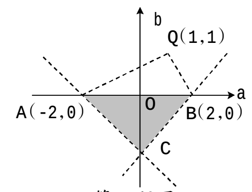
7.D

8.A

提示：由题设，易得$f'(x)=e^{x-2}(ax+a-1)$，则曲线$f(x)$在点$(2,2a-1)$处的切线斜率为$f'(2)=3a-1$.又$f(2)=2a-1$，切线过点$(3,3)$，所以$\frac{(2a-1)-3}{2-3}=3a-1$，解得 $a=1$.所以$f'(x)=xe^{x-2}$.令$f'(x)>0$，解得 $x>0$.所以$f(x)$的单调递增区间为$(0,+\infty)$.

9.A

提示：由题设，得$f'(x)=x^2+ax+2b=0$ 的两个根为 x_1,x_2，且 x_1,x_2 分别在区间$(-2,0)$与$(0,2)$内，所以$\begin{cases}f'(-2)>0,\\f'(0)<0,\\f'(2)>0,\end{cases}$即$\begin{cases}2-a+b>0,\\b<0,\\2+a+b>0.\end{cases}$画出可行域如图中阴影部分所示.设 $Q(1,1)$，$\triangle ABC$ 内部的点为 $P(a,b)$，由 $k_{AQ}=\frac{1}{3}$，$k_{BQ}=-1$，可得$\frac{b-1}{a-1}$的取值范围为$(-\infty,-1)\cup\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$.



(第 9 题图)

10.C

提示：设$f(x)=\frac{x}{\sin x}$，$x\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$，

则$f'(x)=\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^2x}$.

设 $g(x)=\sin x-x\cos x$，$x\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$，则 $g'(x)=\cos x-(\cos x-x\sin x)=x\sin x>0$，所以 $g(x)$单调递增，$g(x)>g\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{6}\times\frac{\sqrt{3}}{2}>0$，所以$f'(x)>0$.所以$f(x)$在$\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$上单调递增.所以$f\left(\frac{\pi}{6}\right)<f(x)<f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$，即$\frac{\pi}{3}<f(x)<\frac{5\pi}{3}$.所以 $n-m$ 的最小值为$\frac{5\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}$.

11.C

提示：由$\sqrt{1-x^2}+x^{\frac{4}{5}}=-\sqrt{1-x^2}+x^{\frac{2}{7}}$，解得 $x=\pm1$.当 $x>0$ 时，“心形”图案在 y轴右侧的面积$S_1=\int_0^1[\sqrt{1-x^2}+x^{\frac{4}{5}}-(-\sqrt{1-x^2}+x^{\frac{2}{7}})]dx=\int_0^1(2\sqrt{1-x^2}+x^{\frac{4}{5}}-x^{\frac{2}{7}})dx=2\times\frac{\pi}{4}+\left(\frac{5}{9}x^{\frac{9}{5}}-\frac{7}{9}x^{\frac{9}{7}}\right)\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}-\frac{2}{9}$，故“心形”图案的面积 $S_2=2S_1=\pi-\frac{4}{9}$. 又靶子的面积 $S=8\pi$，故此箭恰好命中“心形”图案的