第 4 期

第 3~4 版同步周测参考答案

一、选择题

1.C

2.B

提示:四面体的各面均为三角形.

3.B

提示:该数列可写为$\frac{7}{9}\times(10-1)$,$\frac{7}{9}\times(100-1)$,$\frac{7}{9}\times(1000-1)$,…,从而通项公式 $a_n=\frac{7}{9}(10^n-1)$.

4.D

提示:A 为类比推理,B 为归纳推理,C 为类比推理,D 为演绎推理.

5.A

提示:菱形的对角线不一定相等,所以大前提错误.

6.B

7.B

提示:通过前三种化合物归纳出化合物的分子式为 C_nH_{2n+2},故后一种化合物的分子式为 C_4H_{10}.故选 B.

8.C

提示:通过计算,得 $a_2=1$,$a_3=\frac{4}{3}$,$a_4=2$,$a_5=0$.依此类推,知$\{a_n\}$是周期为 4 的数列,因此 a_{100} 的值为 2.故选 C.

9.D

提示:自然数 n^2 的分拆中最大的数是 $2n-1$,故 289 的分拆中最大的数是 $2\times17-1=33$,所以中位数是$\frac{1}{2}\times(1+33)=17$.

10.B

提示:①②的结论错误,③的结论正确.

11.B

提示:令 $A=A_1+A_2+\cdots+A_n$,其中$\frac{1}{n+1}<A_1<\frac{1}{n}$,$\frac{1}{n+2}<A_2<\frac{1}{n+1}$,…,$\frac{1}{2n}<A_n<\frac{1}{2n-1}$,

则 $A_1=\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx=\ln x\,|_n^{n+1}=\ln(n+1)-\ln n$,同理可得 $A_2=\ln(n+2)-\ln(n+1)$,…,$A_n=\ln(2n)-\ln(2n-1)$.

所以 $A=[\ln(n+1)-\ln n]+[\ln(n+2)-\ln(n+1)]+\cdots+[\ln(2n)-\ln(2n-1)]=\ln(2n)-\ln n=\ln2$.

12.A

二、填空题

13.②

14.$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<\frac{2n-1}{n}$($n\geqslant2$,$n\in N_+$)

15.6

提示:由题意知,因为$\sqrt{8^2+15^2}=17$,此直角三角形的三边分别为 8,15,17,由该直角三角形内切圆的半径 $r=\frac{8+15-17}{2}=3$,得该圆直径的最大值为 6 步.

16.$\frac{x_1}{a^2}\cdot x+\frac{y_1}{b^2}\cdot y=1$

提示:当椭圆的离心率 e 趋近于 0 时,椭圆趋近于圆,此时 a,b 都趋近于圆的半径 r,由切线方程 $x_0\cdot x+y_0\cdot y=r^2$ 变形得$\frac{x_0}{r^2}\cdot x+\frac{y_0}{r^2}\cdot y=1$,则过椭圆上一点 P$(x_1,y_1)$的椭圆的切线方程为$\frac{x_1}{a^2}\cdot x+\frac{y_1}{b^2}\cdot y=1$.

三、解答题

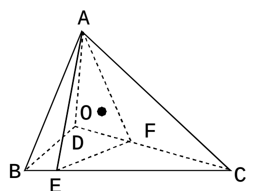
17.**解**:(1)补充表格如下:

	交点数	边数	区域数
(A)	4	5	2
(B)	5	8	4
(C)	8	12	5
(D)	10	15	6

(2)观察表格,若记一个平面图形的交点数、边数、区域数分别为 E、F、G,

猜想 E、F、G 之间的数量关系为 E+G-F=1.

18.**解**:如图,截面 AEF 经过四面体 ABCD 的内切球(与四个面都相切的球)的球心 O,且与 BC,DC 分别交于 E,F,若截面将四面体分为体积相等的两部分,则四棱锥 A-BEFD 与三棱锥 A-EFC 的表面积相等.



(第 18 题图)

19.**解**:$x+y=(x+y)\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}\right)=a+b+\frac{ay}{x}+\frac{bx}{y}\geqslant a+b+2\sqrt{ab}=18$.

又 $a+b=10$, ①

所以 $ab=16$. ②

由①②及 $a>b$,

解得 $a=8$,$b=2$.

20.**证明**:一般地,如果对于函数 $f(x)$的定义域内任意一个 x,都有 $f(-x)=-f(x)$,那么函数 $f(x)$就叫做奇函数,(大前提)

而 $f(-x)=\frac{2^{-x}-1}{2^{-x}+1}=-\frac{2^x-1}{2^x+1}=-f(x)$,(小前提)

所以 $f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}$是奇函数.(结论)

21.**解**:(1)选择②式,计算如下:

$\sin^215°+\cos^215°-\sin 15°\cos 15°=1-\frac{1}{2}\sin30°=\frac{3}{4}$.

(2)三角恒等式:$\sin^2\alpha+\cos^2(30°-\alpha)-\sin\alpha\cos(30°-\alpha)=\frac{3}{4}$.

证明如下:

$\sin^2\alpha+\cos^2(30°-\alpha)-\sin\alpha\cos(30°-\alpha)$

$=\frac{1-\cos2\alpha}{2}+\frac{1+\cos(60°-2\alpha)}{2}-\sin\alpha\cdot(\cos30°\cos\alpha+\sin30°\sin\alpha)$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos2\alpha+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\cos60°\cos2\alpha+\sin60°\sin2\alpha)-\frac{\sqrt3}{2}\sin\alpha\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin^2\alpha$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos2\alpha+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cos2\alpha+\frac{\sqrt3}{4}\cdot\sin2\alpha-\frac{\sqrt3}{4}\sin2\alpha-\frac{1}{4}(1-\cos2\alpha)$

$=1-\frac{1}{4}\cos2\alpha-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cos2\alpha=\frac{3}{4}$.

22.(1)**解**:因为 $2=1+1$,$4=2+2$,$6=2+4$,所以数集$\{1,2,4,6\}$具有性质 P.

因为不存在 $a_i,a_j\in\{1,3,4,7\}$,使得 $3=a_i+a_j$,所以数集$\{1,3,4,7\}$不具有性质 P.

(2)**证明**:因为数集 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$具有性质 P,

所以 $\exists i,j(1\leqslant i\leqslant j\leqslant n)$,使得 $a_4=a_i+a_j$.

又因为 $1=a_1<a_2<\cdots<a_n$,$n\geqslant4$,所以 $a_i,a_j\leqslant a_3$.所以 $a_4=a_i+a_j\leqslant2a_3$.

同理可得 $a_3\leqslant2a_2$,$a_2\leqslant2a_1$.

将以上各不等式相加,得 $a_2+a_3+a_4\leqslant2(a_1+a_2+a_3)$,所以 $a_4\leqslant2a_1+a_2+a_3$.

(3)**解**:由(2)可知 $a_2\leqslant2a_1$,$a_3\leqslant2a_2$,…,

因为 $a_1=1$,所以 $a_2\leqslant2$,$a_3\leqslant2^2$,…,$a_n\leqslant2^{n-1}$.若 $a_n=72$,则 $2^{n-1}\geqslant72$.

又 $2^6<72<2^7$,所以 $n-1>6$,得 $n>7$.

故 n 的最小值为 8.

第 1 期

第 3~4 版同步周测参考答案

一、选择题

1.A 2.B

3.B

提示:由定义知,函数在点 $x=x_0$处的导数只与 x_0有关.

4.D

提示:$\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(a+2\Delta x)-f(a)}{3\Delta x}=\frac{2}{3}\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(a+2\Delta x)-f(a)}{2\Delta x}=\frac{2}{3}f'(a)=1$,

则 $f'(a)=\frac{3}{2}$.

5.B

提示:割线的斜率 $k=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x+1}=\frac{2}{3}$.

6.D

7.A

提示:$s'=2\sin t+2t\cos t+1$,故选A.

8.B

9.D

提示:不妨设 $f(x)=ke^{2x}$,k 为常数,则 $f'(x)=2ke^{2x}=2f(x)$,满足 $f'(x)-2f(x)=0$,此时有无数个 $f(x)$.故选D.

10.A

提示:设 $A(2,f(2))$,$B(4,f(4))$.由图象知,$f(x)$的图象在点 A,B处的切线斜率 k_A,k_B与割线 AB的斜率 k_{AB}满足 $k_A<k_{AB}<k_B$,所以 $f'(2)<\frac{f(4)-f(2)}{4-2}<f'(4)$,即 $2f'(2)<f(4)-f(2)<2f'(4)$.

11.C

提示:画出各曲线,可知①④不存在自公切线;曲线②的一条自公切线为 $y=5$;曲线③的一条自公切线为 $y=-\frac{1}{4}$.

12.B

提示:由题意,$y=2^x$和 $y=3^x$在 x_0处的导数相同,即 $2^{x_0}\ln2=3^{x_0}\ln3$.所以 $x_0=\log_{\frac{2}{3}}(\log_23)$.

二、填空题

13. 在第 3min 附近红茶温度大约以 4°C/min 的速率下降

14.$-\frac{3}{16}$

提示:设 $f(x)=x^{-3}$.由已知条件,得 $f'(2)=M$.又 $f'(x)=-3x^{-4}$,则 $f'(2)=-\frac{3}{16}$.故 $M=-\frac{3}{16}$.

15.4

提示:由 $y=x+\frac{4}{x}(x>0)$,得 $y'=1-\frac{4}{x^2}$.

设平行于直线 $x+y=0$ 的直线与曲线 $y=x+\frac{4}{x}(x>0)$切于点$\left(x_0,x_0+\frac{4}{x_0}\right)$,

由 $1-\frac{4}{x_0^2}=-1(x_0>0)$,解得 $x_0=\sqrt2$.

所以点 $P(\sqrt2,3\sqrt2)$到直线 $x+y=0$的距离最小,最小值为$\frac{|\sqrt2+3\sqrt2|}{\sqrt2}=4$.

16.$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$

提示:$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$.由题设,可得 $f'(x)=\frac{a}{x}+2(x+1)\geqslant4$在$(0,+\infty)$上恒成立,所以 $a\geqslant-2x^2+2x$在$(0,+\infty)$上恒成立. 因为 $-2x^2+2x=-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{2}$,所以 $a\geqslant\frac{1}{2}$.

三、解答题

17.**解**:(1)$y'=(2x^2+3)'(3x-1)+(2x^2+3)(3x-1)'=4x(3x-1)+3(2x^2+3)=18x^2-4x+9$.

(2)$y'=\frac{(2x+1)'}{2\sqrt{2x+1}}=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$.

(3)因为 $y=x-\sin\sqrt{x}\cos\sqrt{x}=x-\frac{1}{2}\cdot\sin2\sqrt{x}$,所以 $y'=1-\frac{1}{2}\cos2\sqrt{x}\cdot(2\sqrt{x})'=1-\frac{\cos2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$.

18.**解**:(1)因为 $\Delta s=s(3)-s(2)=(3\times3^2+2\times3+1)-(3\times2^2+2\times2+1)=17$,

所以 $\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{17}{3-2}=17$(m/s),即从 t=2 到 t=3 时,s 关于 t 的平均变化率为 17,即此段时间内该质点的平均速度为 17m/s.

(2)因为 $s'(t)=6t+2$,

所以 $s'(2)=6\times2+2=14$(m/s).

故当 t=2 时该质点的瞬时速度为 14m/s.

(3)设该质点的速度为 v m/s,

则 $v(t)=s'(t)=6t+2$,

所以 $v'(t)=6$,所以 $v'(2)=6$(m/s²).

故当 t=2 时该质点的加速度为 6m/s².

19.**解**:$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$,$g'(x)=\frac{a}{x}(x>0)$.

由已知,得$\begin{cases}\sqrt{x}=a\ln x,\\ \frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{a}{x},\end{cases}$

解得 $a=\frac{e}{2}$,$x=e^2$.

所以两条曲线的交点坐标为(e^2,e),

切线的斜率 $k=f'(e^2)=\frac{1}{2e}$,

所以切线的方程为 $y-e=\frac{1}{2e}(x-e^2)$,

即 $\frac{x}{2e}-y+\frac{e}{2}=0$.

20.**解**:(1)函数是一条直线,其斜率是一个大于零的常数,故导函数的大致图象如图1.

(2)$f'(x)>0$,并且随着 x的增加,$f'(x)$的值逐渐减少,故导函数的大致图象如图2.

(3)当 $x<0$时,$f'(x)>0$;当 $x>0$时,$f'(x)<0$,并且随着 x的增加,$f'(x)$的值逐渐减少,故导函数的大致图象如图3.

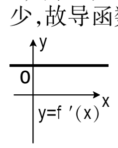


图 1

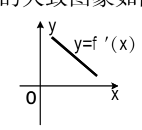


图 2

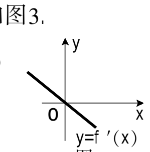


图 3

21.(1)**解**:$f'(x)=x^2-4x+3=(x-2)^2-1\geqslant-1$,故切线斜率的取值范围为$[-1,+\infty)$.

(2)**解**:结合(1)可知,

$f'(x)\geqslant-1$且$-\frac{1}{f'(x)}\geqslant-1$,

即 $-1\leqslant f'(x)<0$或 $f'(x)\geqslant1$,

解得 $x\leqslant2-\sqrt2$,或 $1<x<3$,或 $x\geqslant2+\sqrt2$.

故切点横坐标的取值范围为$(-\infty,2-\sqrt2]\cup(1,3)\cup[2+\sqrt2,+\infty)$.

(3)**证明**:假设存在切线 l与曲线 C同时切于不同的两点 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$x_1\neq x_2$,

则在点 A处的切线方程是

$y-\left(\frac{1}{3}x_1^3-2x_1^2+3x_1\right)=(x_1^2-4x_1+3)(x-x_1)$,

即 $y=(x_1^2-4x_1+3)x+\left(-\frac{2}{3}x_1^3+2x_1^2\right)$;

同理,在点 B处的切线方程是

$y=(x_2^2-4x_2+3)x+\left(-\frac{2}{3}x_2^3+2x_2^2\right)$.

由于两切线是同一直线,

则有 $x_1^2-4x_1+3=x_2^2-4x_2+3$

且 $-\frac{2}{3}x_1^3+2x_1^2=-\frac{2}{3}x_2^3+2x_2^2$,

化简得 $x_1+x_2=4$

且 $(x_1+x_2)^2-3(x_1+x_2)-x_1x_2=0$.

解得 $x_1=2$,$x_2=2$.

这与 $x_1\neq x_2$矛盾,所以不存在与曲线 C同时切于两个不同点的直线.

22.**解**:(1)由题意知,C在点 M处的切线的斜率 $k=2$.

因为 $y'=2x+4$,所以 $2x_0+4=2$,

解得 $x_0=-1$.

所以 $y_0=\frac{1}{2}$.所以 $M\left(-1,\frac{1}{2}\right)$.

(2)设 $M(x_0,y_0)$为 C上一点.

①若 $x_0=-2$,则 C上点 $M\left(-2,-\frac{1}{2}\right)$处的切线斜率 $k=0$,过点 M的法线方程为 $x=-2$,此法线过点 $P(-2,a)$.

②若 $x_0\neq-2$,则过点 $M(x_0,y_0)$的法线方程为 $y-y_0=-\frac{1}{2x_0+4}(x-x_0)$. ①

若法线过点 $P(-2,a)$,则 $a-y_0=-\frac{1}{2x_0+4}\cdot(-2-x_0)$,即$(x_0+2)^2=a$. ②

若 $a>0$,则 $x_0=-2\pm\sqrt{a}$,从而 $y_0=\frac{2a-1}{2}$,代入①中,化简,得 $x+2\sqrt{a}y+2-2a\sqrt{a}=0$或 $x-2\sqrt{a}y+2+2a\sqrt{a}=0$;

若 $a=0$,与 $x_0\neq-2$矛盾,舍去;

若 $a<0$,则②式无解,舍去.

综上,当 $a>0$时,在 C上存在三个点$\left(-2+\sqrt{a},\frac{2a-1}{2}\right)$,$\left(-2-\sqrt{a},\frac{2a-1}{2}\right)$及$\left(-2,-\frac{1}{2}\right)$满足要求,其方程分别为 $x+2\sqrt{a}y+2-2a\sqrt{a}=0$,$x-2\sqrt{a}y+2+2a\sqrt{a}=0$,$x=-2$;当 $a\leqslant0$时,在 C上存在一个点$\left(-2,-\frac{1}{2}\right)$满足要求,其方程为 $x=-2$.

第 2 期

第 3~4 版同步周测参考答案

一、选择题

1~6.CCDCBC

7~12.AAAACD

二、填空题

13.$(-\infty,2)$

14.3

提示：由题设条件得 $f'(1)=0$ 且 $f(1)=1$，代入解得 $a=2$，$b=1$. 所以 $a+b=3$.

15.$(-\infty,-3)\cup(6,+\infty)$

提示：$f'(x)=3x^2+2ax+(a+6)$. 因为 $f(x)$ 有极大值和极小值，所以 $f'(x)=0$ 有两个不相等的实根，所以 $\Delta=4a^2-4\times3\times(a+6)>0$，解得 $a<-3$，或 $a>6$.

16.1

提示：由题意，得 $a<e^x-\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立. 令 $f(x)=e^x-\ln x$，则 $f'(x)=e^x-\frac{1}{x}$. 再令 $g(x)=f'(x)$，则 $g'(x)=e^x+\frac{1}{x^2}>0$，故 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数. 因为 $f'\left(\frac{1}{2}\right)=e^{\frac{1}{2}}-2<0$，$f'(1)=e-1>0$，所以存在 x_0，使得 $f'(x_0)=0$，即 $e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$. 所以 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增. 故 $[f(x)]_{\min}=f(x_0)=e^{x_0}-\ln x_0=e^{x_0}+\ln e^{x_0}=x_0+\frac{1}{x_0}\geqslant2$. 所以 $a<2$. 所以整数 a 的最大值为 1.

三、解答题

17.**解**：函数 y 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

由题意，得 $y'=e^x-1$，令 $y'=0$，解得 $x=0$.

因为在 $(-\infty,0)$ 内，$y'<0$，

所以函数 y 在 $(-\infty,0]$ 上单调递减；

因为在 $(0,+\infty)$ 内，$y'>0$，

所以函数 y 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增.

18.**解**：(1)$f'(x)=x^2-m^2$. 由已知得 $f'(1)=1-m^2=0(m>0)$，解得 $m=1$.

所以 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x$.

(2)令 $f'(x)=0$，得 $x=\pm m$. 当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,-m)$	$-m$	$(-m,m)$	m	$(m,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以 $f(-m)=-\frac{m^3}{3}+m^3\geqslant\frac{2}{3}$，解得 $m\geqslant1$. 故实数 m 的取值范围为 $[1,+\infty)$.

19.**解**：(1)$f'(x)=e^{\sqrt{3}x}\cdot\sqrt{3}(\sin x-1)+e^{\sqrt{3}x}\cos x=e^{\sqrt{3}x}(\sqrt{3}\sin x+\cos x-\sqrt{3})$. 所以 $f'(0)=1-\sqrt{3}$. 又 $f(0)=-1$，所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(0,f(0))$ 处切线的方程为 $y+1=(1-\sqrt{3})x$，即 $(1-\sqrt{3})x-y-1=0$.

(2)令 $f'(x)=0$，可得 $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，结合 $x\in[0,\pi]$，解得 $x=\frac{\pi}{6}$，或 $x=\frac{\pi}{2}$.

因为 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}e^{\frac{\sqrt{3}\pi}{6}}$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$，$f(0)=-1$，$f(\pi)=-e^{\sqrt{3}\pi}$，所以最小值为 $-e^{\sqrt{3}\pi}$，最大值为 0.

所以 $f(x)$ 在区间 $[0,\pi]$ 上的值域为 $[-e^{\sqrt{3}\pi},0]$.

20.**解**：(1)设需新建 n 个桥墩，

则 $(n+1)x=m$，即 $n=\frac{m}{x}-1$，

所以 $y=f(x)$

$=256n+(n+1)(2+\sqrt{x})x$

$=256\left(\frac{m}{x}-1\right)+\frac{m}{x}(2+\sqrt{x})x$

$=\frac{256m}{x}+m\sqrt{x}+2m-256$.

(2)由(1)，知

$f'(x)=-\frac{256m}{x^2}+\frac{1}{2}mx^{-\frac{1}{2}}$

$=\frac{m}{2x^2}(x^{\frac{3}{2}}-512)$.

令 $f'(x)=0$，得 $x=64$.

当 $0<x<64$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 为减函数；当 $64<x<640$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 为增函数. 所以 $f(x)$ 在 $x=64$ 处取得最小值，此时 $n=\frac{m}{x}-1=\frac{640}{64}-1=9$. 故需新建 9 个桥墩才能使 y 最小.

21.(1)**解**：$f'(x)=x-\frac{a}{x}=\frac{x^2-a}{x}(x>0)$，

当 $a\leqslant0$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$；

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)>0$，得 $x>\sqrt{a}$，

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(\sqrt{a},+\infty)$，单调递减区间为 $(0,\sqrt{a})$.

(2)**证明**：设 $F(x)=\frac{2}{3}x^3-\left(\frac{1}{2}x^2+\ln x\right)$，

故 $F'(x)=2x^2-x-\frac{1}{x}=\frac{(x-1)(2x^2+x+1)}{x}$.

因为 $x>1$，所以 $F'(x)>0$.

所以 $F(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上为增函数.

所以 $F(x)>F(1)=\frac{1}{6}>0$.

所以当 $x>1$ 时，$\frac{1}{2}x^2+\ln x<\frac{2}{3}x^3$.

22.(1)**证明**：设 $g(x)=f'(x)$，

则 $g(x)=\cos x+x\sin x-1$，$g'(x)=x\cos x$.

当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$g'(x)>0$；当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 单调递增，在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 单调递减.

又 $g(0)=0$，$g\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$，$g(\pi)=-2$，故 $g(x)$ 在 $(0,\pi)$ 有唯一零点. 所以 $f'(x)$ 在 $(0,\pi)$ 存在唯一零点.

(2)**解**：由题设知 $f(\pi)\geqslant a\pi$，$f(\pi)=0$，可得 $a\leqslant0$.

由(1)知，$f'(x)$ 在 $(0,\pi)$ 只有一个零点，设为 x_0，且当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(x_0,\pi)$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 单调递增，在 (x_0,π) 单调递减.

又 $f(0)=0$，$f(\pi)=0$，

所以当 $x\in[0,\pi]$ 时，$f(x)\geqslant0$.

又当 $a\leqslant0$，$x\in[0,\pi]$ 时，$ax\leqslant0$，故 $f(x)\geqslant ax$.

因此，a 的取值范围是 $(-\infty,0]$.

第 3 期

第 3~4 版章节测试参考答案

一、选择题

1.A 2.B 3.A 4.A 5.C 6.D 7.B 8.A 9.D

10.C

提示：由题意，$A=1$，$\frac{T}{2}=\frac{2\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\pi$，所以 $T=2\pi$，$\omega=\frac{2\pi}{2\pi}=1$，所以 $f(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$，故当 $x=\frac{\pi}{6}$ 时，$f(x)=0$.

所以阴影面积为 $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left[-\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right]dx=\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$. 故选 C.

11.B

12.B

提示：由题意，知 $xe^x+x^2+2x=-a$ 恰有两个不同的实数解.

设 $f(x)=xe^x+x^2+2x$，

则 $f'(x)=e^x+xe^x+2x+2=(x+1)(e^x+2)$.

当 $x<-1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

当 $x>-1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

故 $f(x)$ 的最小值为 $f(-1)=-\frac{1}{e}-1$.

所以 $-a>-\frac{1}{e}-1$，解得 $a<\frac{1}{e}+1$.

故选 B.

二、填空题

13.152m

14.-2

15.$\frac{4}{3}$

提示：设圆锥的高为 h，底面半径为 r，

则 $1^2=(h-1)^2+r^2$，即 $r^2=2h-h^2$.

所以圆锥的体积

$V(h)=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{2}{3}\pi h^2-\frac{\pi}{3}h^3$.

令 $V'(h)=\frac{4}{3}\pi h-\pi h^2=0$，

解得 $h=\frac{4}{3}$ 或 $h=0$(舍去).

易知当 $h=\frac{4}{3}$ 时，$V(h)$ 取得极大值也是最大值，故当圆锥的体积最大时，圆锥的高为 $\frac{4}{3}$.

16.(3)(4)

提示：令 $F(x)=f(x)-g(x)$，则 $F'(x)=f'(x)-g'(x)>0$，所以 $F(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增. 又 $a<x<b$，所以 $F(a)<F(x)<F(b)$，即 $f(a)-g(a)<f(x)-g(x)<f(b)-g(b)$. 从而可知(3)(4)正确.

三、解答题

17.**解**：(1)化简，得 $f(x)=\frac{2e^x}{1-x}$.

因为 $f'(x)=\left(\frac{2e^x}{1-x}\right)'$

$=\frac{(2e^x)'(1-x)-2e^x(1-x)'}{(1-x)^2}$

$=\frac{2e^x(2-x)}{(1-x)^2}$，所以 $f'(2)=0$.

(2)因为 $f'(x)=\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)'-x'+(\ln x)'$

$=-\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}-1+\frac{1}{x}$，所以 $f'(1)=-\frac{3}{2}$.

18.**解**：(1)$f'(x)=3x^2-3$.

因为 P 为切点，

所以直线 l 的斜率 $k_1=f'(1)=0$，

所以直线 l 的方程为 $y=-2$.

(2)设切点坐标为 $(x_0,x_0^3-3x_0)(x_0\neq1)$，

则直线 l 的斜率 $k_2=f'(x_0)=3x_0^2-3$，

所以直线 l 的方程为

$y-(x_0^3-3x_0)=(3x_0^2-3)(x-x_0)$.

又直线 l 过点 $P(1,-2)$，

所以 $-2-(x_0^3-3x_0)=(3x_0^2-3)(1-x_0)$，

解得 $x_0=1$(舍去)或 $x_0=-\frac{1}{2}$.

故所求直线 l 的斜率 $k_2=3x_0^2-3=-\frac{9}{4}$，

所以直线 l 的方程为

$y-(-2)=-\frac{9}{4}(x-1)$，

即 $9x+4y-1=0$.

19.**解**：(1)$f'(x)=e^x-2$.

令 $f'(x)>0$，解得 $x>\ln2$；

令 $f'(x)<0$，解得 $x<\ln2$.

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln2)$ 上单调递减，在 $(\ln2,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $f(x)$ 有极小值 $f(\ln2)=2-\ln4$，无极大值.

(2)令 $g(x)=f(x)-x^2-(a-2)x-1=e^x-x^2-ax-1$，

则 $g'(x)=e^x-2x-a=f(x)-a$.

结合(1)可得

$[g'(x)]_{\min}=[f(x)]_{\min}-a=2-\ln4-a$.

因为 $a<2-\ln4$，所以 $g'(x)>0$.

所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $g(x)>g(0)=0$，

即 $f(x)>x^2+(a-2)x+1$.

20.**解**：(1)设 $f(x)=kx+b(k\neq0)$.

由 $f(x)=x\int_0^2 f(t)dt+1$，

得 $kx+b=x\int_0^2(kt+b)dt+1=x\cdot\left(\frac{kt^2}{2}+bt\right)\Big|_0^2+1=x(2k+2b)+1$，所以 $\begin{cases}2k+2b=k,\\1=b,\end{cases}$ 解得 $k=-2$，$b=1$.

所以 $f(x)=-2x+1$.

(2)$g(x)=xf(x)=-2x^2+x$.

由 $\begin{cases}y=-2x^2+x,\\y=-3,\end{cases}$ 得 $x=\frac{3}{2}$ 或 $x=-1$.

结合图形可知曲线 $y=g(x)$ 与直线 $y=-3$ 所围成区域的面积 $S=\int_{-1}^{\frac{3}{2}}(-2x^2+x+3)dx=\left(-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+3x\right)\Big|_{-1}^{\frac{3}{2}}=\frac{125}{24}$.

21.**解**：(1)种花区的造价为 $\frac{3a}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$，种草区的造价为 $2a\left(\frac{\theta}{2}-\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta\right)$，

故总造价

$f(\theta)=a\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\theta}{2}-\sin\theta\cos\theta\right)$，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$.

(2)$f'(\theta)$

$=a\left[-\frac{1}{2}-(\cos\theta\cos\theta-\sin\theta\sin\theta)\right]$

$=a\left(-\frac{1}{2}-\cos2\theta\right)\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$.

令 $f'(\theta)=0$，解得 $\theta=\frac{\pi}{3}$.

当 θ 变化时，$f'(\theta)$，$f(\theta)$ 的变化情况如下表：

θ	$\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$	$\frac{\pi}{3}$	$\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$
$f'(\theta)$	−	0	+
$f(\theta)$	↘	极小值	↗

故当 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 时，总造价最小，最小值为 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=a\left(\frac{7}{12}\pi-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

22.(1)**解**：由已知，$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，且 $f'(x)=\frac{1}{x}-[ae^x+a(x-1)e^x]=\frac{1-ax^2e^x}{x}$.

因此当 $a\leqslant0$ 时，$1-ax^2e^x>0$，从而 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递增.

(2)**证明**：①由(1)知 $f'(x)=\frac{1-ax^2e^x}{x}$.

令 $g(x)=1-ax^2e^x$，由 $0<a<\frac{1}{e}$，可知 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递减，又 $g(1)=1-ae>0$，且 $g\left(\ln\frac{1}{a}\right)=1-a\left(\ln\frac{1}{a}\right)^2\cdot\frac{1}{a}=1-\left(\ln\frac{1}{a}\right)^2<0$，故 $g(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内有唯一解，不妨设为 x_0，则 $1<x_0<\ln\frac{1}{a}$. 当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)=\frac{g(x)}{x}>\frac{g(x_0)}{x}=0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 内单调递增；当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)=\frac{g(x)}{x}<\frac{g(x_0)}{x}=0$，所以 $f(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 内单调递减，因此 x_0 是 $f(x)$ 的唯一极值点.

令 $h(x)=\ln x-x+1$，则当 $x>1$ 时，$h'(x)=\frac{1-x}{x}<0$，故 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 内单调递减，从而当 $x>1$ 时，$h(x)<h(1)=0$，所以 $\ln x<x-1$，从而 $f\left(\ln\frac{1}{a}\right)=\ln\left(\ln\frac{1}{a}\right)-a\cdot\left(\ln\frac{1}{a}-1\right)e^{\ln\frac{1}{a}}=\ln\left(\ln\frac{1}{a}\right)-\left(\ln\frac{1}{a}-1\right)=h\left(\ln\frac{1}{a}\right)<0$. 又因为 $f(x_0)>f(1)=0$，所以 $f(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 内有唯一零点. 又 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 内有唯一零点 1，从而 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 恰有两个零点.

②由题意，$\begin{cases}f'(x_0)=0,\\f(x_1)=0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}ax_0^2e^{x_0}=1,\\\ln x_1=a(x_1-1)e^{x_1},\end{cases}$ 从而 $\ln x_1=\frac{x_1-1}{x_0^2}\cdot e^{x_1-x_0}$，即 $e^{x_1-x_0}=\frac{x_0^2\ln x_1}{x_1-1}$.

因为当 $x>1$ 时，$\ln x<x-1$，

又 $x_1>x_0>1$，故 $e^{x_1-x_0}<\frac{x_0^2(x_1-1)}{x_1-1}=x_0^2$，两边取对数，得 $x_1-x_0<2\ln x_0<2(x_0-1)$，整理得 $3x_0-x_1>2$.