第4期

第2~3版章节测试参考答案

一、选择题

1.C　2.B　3.C　4.A

5.A

6.B

提示：平移后所得图像对应的函数解析式为 $y=3\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=3\sin\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)$.

由 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x-\frac{2\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$,

得 $\frac{\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{7\pi}{12}+k\pi,k\in Z$.

故新函数在区间 $\left[\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12}\right]$ 上单调递增.

7.C

8.D

提示：画出 y=tanx 与 y=sinx 的图像(图略)可知选 D.

9.B

提示：由 $f\left(\frac{8\pi}{3}\right)=f\left(\frac{14\pi}{3}\right)$，知 f(x)图像的一条对称轴是直线 $x=\frac{11\pi}{3}$.

又 f(x)在 $\left(\frac{8\pi}{3},\frac{14\pi}{3}\right)$ 内有最大值但没有最小值，

故 $f\left(\frac{11\pi}{3}\right)=2$ 且 $\frac{14\pi}{3}-\frac{8\pi}{3}<\frac{2\pi}{\omega}$，

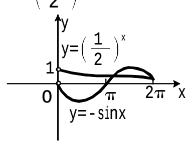
解得 $\omega=\frac{6k}{11}-\frac{1}{22}(k\in Z)$ 且 $0<\omega<1$.

故 $\omega=\frac{1}{2}$，$f(x)=2\cos\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)$.从而可判断②④是真命题.

10.B

提示：原方程可化为 $-\sin x=\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

在同一平面直角坐标系内分别作出函数 $y=-\sin x$ 和 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在$(0,2\pi]$内的图像如下.



(第10题图)

由图像知，在一个周期内它们有2个交点，因此在 $(0,100\pi)$ 内交点个数是 $2\times\frac{100\pi}{2\pi}=100$.故原方程在$(0,100\pi)$内实数解的个数是100.

11.A

12.D

提示：由图像可知，当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)>0$，$\sin x>0$，$f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin x>0$；当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 时，$f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)<0$，$\sin x>0$，$f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin x<0$，故选 D.

二、填空题

13.$\frac{3}{2}$，48

14.$\left\{-\frac{19\pi}{6},-\frac{7\pi}{6},\frac{5\pi}{6},\frac{17\pi}{6}\right\}$

15.$\frac{2}{3}$

提示：由题中条件，得 $\omega\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}=2k\pi,k\in Z$，解得 $\omega=8k+\frac{2}{3},k\in Z$.又 $\omega>0$，故 ω 的最小值为 $\frac{2}{3}$.

16.$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

提示：设 $P(x,y)$.由 $\cos x=\tan x$，得 $\cos^2x=\sin x$，即 $\sin^2x+\sin x-1=0$. 结合 $\sin x>0$，解得 $\sin x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 故线段 P_1P_2 的长等于 $\sin x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

三、解答题

17.**解**：由 $3\sin(\alpha-\pi)=\cos(2\pi-\alpha)$，

得 $-3\sin\alpha=\cos\alpha$，

则 $\dfrac{\sin(\pi-\alpha)+5\sin\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)}{3\cos(\pi+\alpha)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}$

$=\dfrac{\sin\alpha+5\cos\alpha}{-3\cos\alpha+\sin\alpha}=\dfrac{\sin\alpha-15\sin\alpha}{9\sin\alpha+\sin\alpha}$

$=-\frac{7}{5}$.

18.**解**：(1)因为角 θ 的终边在直线 $y=\sqrt{2}x$ 上，所以其终边在第一或第三象限.

若终边在第一象限，

则其必过点 $P(1,\sqrt{2})$，

此时 $x=1,y=\sqrt{2},r=\sqrt{3}$，

所以 $\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{\sqrt{3}}{3}$；

若终边在第三象限，

则其必过点 $Q(-1,-\sqrt{2})$，

此时 $x=-1,y=-\sqrt{2},r=\sqrt{3}$，

所以 $\cos\theta=\frac{x}{r}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

综上，$\cos\theta=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(2)由已知，得 $\tan\theta=\frac{y}{x}=\sqrt{2}$.

所以原式 $=\dfrac{\frac{\cos\theta}{\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{\cos\theta}{\cos\theta}-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}=\dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$

$=-3-2\sqrt{2}$.

19.**解**：(1)最小正周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，

所以 $\omega=2$.

因为 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)=-\sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

又 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<0$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{3}$.

(2)由(1)得 $f(x)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

令 $2k\pi-\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi,k\in Z$，

得 f(x)的单调递增区间为

$\left[k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{6}\right],k\in Z$.

(3)当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$2x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$，

所以 f(x)的值域为 $\left[-\frac{1}{2},1\right]$.

20.**解**：(1)因为相邻对称中心的距离为 $\frac{\pi}{4}$，

所以最小正周期 $T=2\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$.

故 $\omega=\frac{\pi}{T}=2$.

因为 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=0$，

所以 $\varphi=k\pi-\frac{\pi}{3},k\in Z$.

又 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<0$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{3}$.

所以 $f(x)=\tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

由 $k\pi-\frac{\pi}{2}<2x-\frac{\pi}{3}<k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z$，

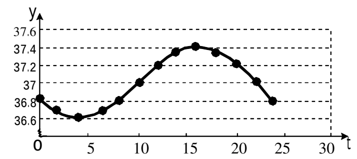
得 f(x)的单调递增区间为

$\left(\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12},\frac{k\pi}{2}+\frac{5\pi}{12}\right),k\in Z$.

(2)由 $-1\leqslant f(x)\leqslant\sqrt{3}$，可得 $k\pi-\frac{\pi}{4}\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant k\pi+\frac{\pi}{3},k\in Z$，

求得原不等式的解集为 $\left[\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{24},\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right],k\in Z$.

21.**解**：(1)以时间 t 为横轴，体温 y 为纵轴，根据数据作出散点图，并用曲线拟合如下：



(第21题图)

(2)设 y 与 t 的函数关系为

$y=A\sin(\omega t+\varphi)+c$，

则 $c=\frac{1}{2}\times(37.4+36.6)=37$，$A=\frac{1}{2}\times(37.4-36.6)=0.4$，$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{12}$.

由 $0.4\sin\left(\frac{\pi}{12}\times16+\varphi\right)+37=37.4$，

得 $\sin\left(\frac{4\pi}{3}+\varphi\right)=1$.取 $\varphi=-\frac{5\pi}{6}$，

故 $y=0.4\sin\left(\frac{\pi}{12}t-\frac{5\pi}{6}\right)+37$.

(3)将 $t=1$ 代入(2)中函数关系式，得 $y\approx36.72$. 所以该病人的体温比此时的正常体温高 $38.2-36.72\approx1.48$℃.

22.**解**：(1)由图可知，A=1，$\frac{1}{2}T=\frac{\pi}{\omega}=\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\omega=2$，所以 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$.

将点 $\left(\frac{\pi}{3},0\right)$ 代入，得 $2\times\frac{\pi}{3}+\varphi=k\pi,k\in Z$.

结合 $|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}$，得 $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

所以 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

(2)因为 $f(x)$ 的周期为 π，

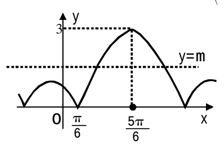
所以 $f(x)$ 在$[0,2\pi]$内恰有2个周期.

当 $0<a<\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时，方程 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=a$ 在$[0,2\pi]$内有4个实根，设为 x_1,x_2,x_3,x_4，结合图像知 $x_1+x_2=\frac{7\pi}{6}$，$x_3+x_4=\frac{19\pi}{6}$，故所有实数根之和为 $\frac{13\pi}{3}$.

当 $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时，方程 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=a$ 在$[0,2\pi]$内有5个实根，为 $0,\frac{\pi}{6},\pi,\frac{7\pi}{6},2\pi$，故所有实数根之和为 $\frac{13\pi}{3}$.

综上，所有实数根之和为 $\frac{13\pi}{3}$.

(3)由条件，得 $g(x)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+1$，故 $y=|g(x)|$ 的图像如图所示.要使方程 $|g(kx)|=m$ 在 $\left[0,\frac{5\pi}{6}\right]$ 上至多有一个解，则需 $y=|g(x)|$ 的图像伸长为原来5倍以上，所以 $0<k\leqslant\frac{1}{5}$.故正数 k 的取值范围为 $\left(0,\frac{1}{5}\right]$.



(第22题图)

2019-2020学年

数学·北师大(必修4)答案页第1期

学习周报①

第1期

第3~4版同步周测参考答案

一、选择题

1.B

2.D

提示：$\frac{2}{3}\times(-2\pi)=-\frac{4\pi}{3}$.

3.C

4.C

提示：$\alpha=54°=\frac{3}{10}\pi$，所以 $l=\alpha r=\frac{3}{10}\pi\times20=6\pi$(cm)，所以周长为 $l+2r=(40+6\pi)$cm.

5.C　6.D

7.C

提示：由 $\cos\theta\leqslant0,\sin\theta>0$，得 $\frac{\pi}{2}\leqslant\theta<\pi$.

从而有 $3a-9\leqslant0$ 且 $a+2>0$，

解得 $-2<a\leqslant3$.

8.A

9.B

提示：$f\left(-\frac{15\pi}{4}\right)=f\left(-\frac{15\pi}{4}+3\times\frac{3\pi}{2}\right)=f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\sin\frac{3\pi}{4}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

10.A

提示：当 x 是第一象限角时，y=2；当 x 是第二象限角时，y=0；当 x 是第三象限角时，y=-2；当 x 是第四象限角时，y=0.

11.C

12.C

提示：讨论 k 分别取 -1，0 时有交集，得

①当 k=-1 时，

$A\cap B=\left\{x\left|-\frac{2\pi}{3}\leqslant x\leqslant0\right.\right\}\cap\{x|-2\leqslant x\leqslant2\}=\{x|-2\leqslant x\leqslant0\}$；

②当 k=0 时，$A\cap B=\left\{x\left|\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant\pi\right.\right\}\cap\{x|-2\leqslant x\leqslant2\}=\left\{x\left|\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant2\right.\right\}$，二者的并集即为所求.

二、填空题

13.$\left\{\theta\left|k\pi\leqslant\theta\leqslant k\pi+\frac{\pi}{3},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$

14.5π

提示：$S_{扇环}=S_{扇形ADE}-S_{扇形ABC}=\frac{1}{2}\times7^2\times\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\times3^2\times\frac{\pi}{4}=5\pi$.

15.$-\frac{1}{3}$

提示：$\sin\left(\frac{7\pi}{4}+\alpha\right)$

$=\sin\left[2\pi-\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right]$

$=-\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=-\frac{1}{3}$.

16.2

提示：由 $f(2020)=a\cos(1010\pi+\alpha)+b\sin(1010\pi+\beta)+3=4$，

得 $a\cos\alpha+b\sin\beta=1$.

故 $f(2022)=a\cos(1011\pi+\alpha)+b\cdot\sin(1011\pi+\beta)+3=-a\cos\alpha-b\sin\beta+3=2$.

三、解答题

17.**解**：原式 $=\dfrac{(-\sin\alpha)(-\cos\alpha)(-\sin\alpha)}{\sin(\pi-\alpha)[-\sin(\pi+\alpha)]\sin\left[4\pi+\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right]}$

$=\dfrac{-\sin^2\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha[-(-\sin\alpha)]\cos\alpha}$

$=\dfrac{-\sin^2\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha\cos\alpha}=-1$.

18.**解**：因为 $\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}>0$，$\cos\alpha<0$，所以 α 是第二象限角.在 y=kx 上取第二象限的点 P(-1,-k)(k<0)，

所以 $\frac{-k}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$，解得 k=-2.

19.**解**：$\cos(105°-\alpha)$

$=\cos[180°-(75°+\alpha)]$

$=-\cos(75°+\alpha)=-\frac{1}{3}$，

$\sin(\alpha-195°)=\sin(\alpha-15°-180°)$

$=-\sin(\alpha-15°)$

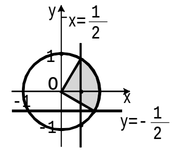
$=-\cos[90°-(\alpha-15°)]$

$=-\cos(105°-\alpha)=\frac{1}{3}$.

所以 $\cos(105°-\alpha)+\sin(\alpha-195°)$

$=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=0$.

20.**解**：如图，在单位圆中作直线 $y=-\frac{1}{2}$ 与 $x=\frac{1}{2}$，则角 α 的终边落在阴影部分内.



(第20题图)

故满足条件的角 α 的集合为

$\left\{\alpha\left|2k\pi-\frac{\pi}{6}\leqslant\alpha\leqslant2k\pi+\frac{\pi}{3},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$.

21.**解**：由题意，得点 P 每秒转过 θ，则有 $\pi+2k\pi<2\theta<\frac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

因为 $0<\theta<\pi$，所以 $\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3\pi}{4}$.

又 $14\theta=2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，得 $\theta=\frac{k\pi}{7},k\in\mathbf{Z}$.

故 $\frac{\pi}{2}<\frac{k\pi}{7}<\frac{3\pi}{4},k\in\mathbf{Z}$，

解得 $3.5<k<5.25,k\in\mathbf{Z}$，

所以 $k=4$ 或 5.

所以 $\theta=\frac{4\pi}{7}$ 或 $\frac{5\pi}{7}$.

22.(1)**证明**：$f(0)=\sin\theta,f(1)=\cos\theta$.

因为 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)>0$ 恒成立，

所以 $f(0)>0,f(1)>0$，即 $\sin\theta>0,\cos\theta>0$.

(2)**解**：将 $f(x)$ 进行化简，得 $f(x)=(1+\cos\theta+\sin\theta)x^2-(1+2\sin\theta)x+\sin\theta$，从而可知 $y=f(x)$ 的图像是一条开口向上的抛物线，且对称轴为 $x_0=\frac{1+2\sin\theta}{2(1+\cos\theta+\sin\theta)}=\frac{1+2\sin\theta}{(1+2\sin\theta)+(1+2\cos\theta)}$.

结合(1)可知 $0<x_0<1$.于是 $f(x)>0$ 在$[0,1]$上恒成立当且仅当 $\Delta=(1+2\sin\theta)^2-4\sin\theta(1+\cos\theta+\sin\theta)<0$，

即 $1-4\sin\theta\cos\theta<0$，

即 $1-2\sin2\theta<0$，即 $\sin2\theta>\frac{1}{2}$.

由三角函数线，可得 $2k\pi+\frac{\pi}{6}<2\theta<2k\pi+\frac{5\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$，故 $k\pi+\frac{\pi}{12}<\theta<k\pi+\frac{5\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$.

结合 $\sin\theta>0,\cos\theta>0$，得 θ 的取值范围是 $\left(2k\pi+\frac{\pi}{12},2k\pi+\frac{5\pi}{12}\right)(k\in\mathbf{Z})$.

① 第 2 期

第 3~4 版同步周测参考答案

一、选择题

1.C　2.C　3.A

4.D

提示：先化简解析式，再通过图像判断.

5.B

提示：由 $-\cos x\geqslant 0$，得 $\cos x\leqslant 0$. 又 $x\in(0,2\pi)$，所以 $x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$.

6.A

7.D

提示：当 $x=\frac{\pi}{3},-\frac{5\pi}{3},\frac{7\pi}{3},\frac{2\pi}{3}$ 时，$y=0,0,0,\frac{\sqrt{3}}{3}$.故选 D.

8.D

提示：利用三角函数的单调性，可知 D 正确.

9.C

提示：根据对称性，所围成封闭图形的面积等于矩形 ABCD 的面积，所以封闭图形的面积 $S=\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)\times 2=\frac{4\pi}{3}$.

10.C

提示：由已知，得 $\tan\alpha=-2$.

在角 α 的终边上取一点 $(-1,2)$，计算得 $\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}=-\frac{5}{2}$；

在角 α 的终边上取一点 $(1,-2)$，计算得 $\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}=-\frac{5}{2}$.

故 $\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}=-\frac{5}{2}$.

11.B

提示：因为 $f(0)=\sin\varphi=\frac{1}{2}$，

所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$.

因为 $f(x)=-f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$，

所以 $\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$

$=-\sin\left[\omega\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{6}\right]$，

所以 $\omega\cdot\frac{\pi}{2}=\pi$，得 $\omega=2$.

所以 $g(x)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$. 当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$2x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$，所以当 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$ 时，$g(x)$ 取得最大值 $\sqrt{3}$.

12.D

二、填空题

13.$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

14.(1)<；(2)>

15.$\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$

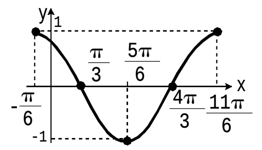
16.②④

三、解答题

17.**解：**列表：

$x+\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$
y	1	0	-1	0	1

描点并将它们用光滑的曲线连接起来，如图所示.



(第 17 题图)

18.**解：**(1)由题意，得

$$\begin{cases}2x-\frac{\pi}{4}\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z},\\ 1+\tan\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\neq 0,\end{cases}$$

故函数的定义域为

$\left\{x\middle|x\neq\frac{k\pi}{2}\text{且}x\neq\frac{k\pi}{2}+\frac{3\pi}{8},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

(2)由题意，得 $-1<\tan 2x\leqslant\sqrt{3}$，

所以 $k\pi-\frac{\pi}{4}<2x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{3},k\in\mathbf{Z}$，

故函数的定义域为

$\left\{x\middle|\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8}<x\leqslant\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

19.**解：**(1) 由 α 是第二象限角，且 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，知角 α 终边上必有一点 $(x,3)$，且 $x<0$，$r=\sqrt{x^2+3^2}=5$，解得 $x=-4$.

所以 $\tan\alpha=\frac{3}{x}=-\frac{3}{4}$.

(2)原式

$$=\frac{(-\sin\alpha)(-\cos\alpha)\left[-\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right]}{\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\sin\alpha}$$

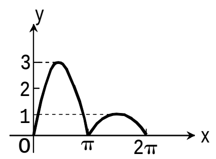
$=-\cos\alpha$.

由(1)知 $\cos\alpha=\frac{x}{r}=-\frac{4}{5}$，

所以原式 $=\frac{4}{5}$.

20.**解：**$f(x)=\begin{cases}3\sin x,0\leqslant x\leqslant\pi,\\ -\sin x,\pi<x\leqslant 2\pi,\end{cases}$

其图像如图所示.



(第 20 题图)

观察图像可得，当 $1<k<3$ 时，$f(x)$ 的图像与直线 $y=k$ 有两个交点，所以实数 k 的取值范围是 (1,3).

21.**解：**因为 $f(x)=-\sin^2x+\sin x+a$

$=-\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)^2+a+\frac{1}{4}$，

所以当 $\sin x=-1$ 时，$[f(x)]_{min}=a-2$；

当 $\sin x=\frac{1}{2}$ 时，$[f(x)]_{max}=a+\frac{1}{4}$.

由题意，知 $\begin{cases}a-2\geqslant 1,\\ a+\frac{1}{4}\leqslant\frac{17}{4},\end{cases}$

解得 $3\leqslant a\leqslant 4$.

所以实数 a 的取值范围是 $[3,4]$.

22.**解：**(1)因为 $f(x)$ 的图像上两个对称中心间的最短距离为 $\frac{\pi}{2}$，所以其周期 $T=\pi$.

又 $T=\frac{2\pi}{\omega}$，所以 $\omega=2$.

因为 $f(0)=2\cos 2\varphi=-2$，

所以 $\cos 2\varphi=-1$.

又 $0<\varphi<\pi$，所以 $0<2\varphi<2\pi$，

所以 $2\varphi=\pi$，$\varphi=\frac{\pi}{2}$.

所以 $f(x)=2\cos(2x+\pi)=-2\cos 2x$.

(2)由条件，得 $T=2\times\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{\omega}$，所以 $\omega=2$，$f(x)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

令 $2k\pi-\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

得 $f(x)$ 的单调递增区间为

$\left[k\pi-\frac{2\pi}{3},k\pi-\frac{\pi}{6}\right],k\in\mathbf{Z}$.

(3)若 $x\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$，

则 $x+\frac{\pi}{2}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$.

由 $\omega>0$，$f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$ 上是减函数，

得 $\frac{\pi\omega}{6}\geqslant 2k\pi$ 且 $\frac{7\pi\omega}{6}\leqslant 2k\pi+\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $12k\leqslant\omega\leqslant\frac{12k+6}{7},k\in\mathbf{Z}$.

从而有 $12k\leqslant\frac{12k+6}{7},k\in\mathbf{Z}$，

结合 $\omega>0$，解得 $k=0$.

故 ω 的取值范围是 $\left(0,\frac{6}{7}\right]$.

第 3 期

第 3~4 版同步周测参考答案

一、选择题

1.C　2.C　3.B　4.D　5.C　6.B　7.C　8.D

9.D

提示：由 $f(x)\in[-1,3]$，得 $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\in\left[-\frac{1}{3},1\right]$.又函数 $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，结合余弦函数的图像可知，$b-a<T=\pi$，故选 D.

10.A

提示：由图知，当点 $P(x_0,y_0)$ 位于曲线最高点时，$\triangle MPN$ 的面积最大，此时 $\triangle MPN$ 为等腰直角三角形，且 $y_0=2$.

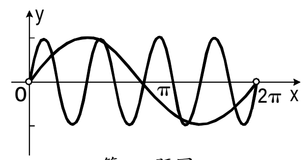
设线段 MN 的中点为 Q，则 $|PQ|=\frac{1}{2}\cdot|MN|$，即 $y_0=\frac{1}{2}\cdot\frac{T}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{2\omega}$，故 $\omega=\frac{\pi}{4}$.

11.B

提示：对 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f(x_1)\leqslant f(x)\leqslant f(x_2)$ 成立等价于 $f(x_1)$ 为函数 $f(x)$ 的最小值，且 $f(x_2)$ 为函数 $f(x)$ 的最大值，$|x_1-x_2|$ 的最小值就是 $\frac{1}{2}$ 个周期.由于周期 $T=4$，故 $|x_1-x_2|$ 的最小值是 $\frac{T}{2}=2$.

12.C

提示：分别画出 $y=\sin 4x$，$y=\sin x$ 在 $(0,2\pi)$ 内的图像，如图所示.易知选 C.



(第 12 题图)

二、填空题

13.80

提示：最小正周期 $T=\frac{2\pi}{160\pi}=\frac{1}{80}$，则此人每分钟心跳次数为 $f=\frac{1}{T}=80$.

14.向左平移 $\frac{3\pi}{8}$ 个单位长度

提示：因为 $y=3\cos\left(2x-\frac{7\pi}{4}\right)=3\sin\left(2x-\frac{7\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)=3\sin\left(2x-\frac{5\pi}{4}\right)=3\sin\left[2\left(x+\frac{3\pi}{8}\right)\right]$，所以可将 C_0 向左平移 $\frac{3\pi}{8}$ 个单位长度得到 C.

又 $y=3\cos\left(2x-\frac{7\pi}{4}\right)=3\sin\left(2x-\frac{5\pi}{4}\right)=3\sin\left[2\left(x-\frac{5\pi}{8}\right)\right]$，所以可将 C_0 向右平移 $\frac{5\pi}{8}$ 个单位长度得到 C.经比较可知，第一种变换符合条件.

15.-2

16.$-\frac{3\pi}{4}$

三、解答题

17.**解：**(1)$T=\frac{2\pi}{1}=2\pi$.

(2)$g(x)=3\cos\left(x-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)=3\cos x$.

因为 $g(-x)=3\cos(-x)=3\cos x=g(x)$，

所以 $g(x)$ 是偶函数.

18.**解：**(1)由已知得 $\pi=\frac{2\pi}{\omega}$，解得 $\omega=2$.

将点 $\left(\frac{\pi}{4},\sqrt{2}\right)$ 代入解析式，得 $\sqrt{2}=2\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)$，所以 $\cos\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}$，由 $0<\varphi<\pi$，可知 $\varphi=\frac{\pi}{4}$，于是 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$.

令 $2x+\frac{\pi}{4}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，所以 $x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8}(k\in\mathbf{Z})$，于是函数 $f(x)$ 图像的对称中心为 $\left(\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8},0\right)(k\in\mathbf{Z})$.

(2)令 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，所以 $-\frac{3\pi}{8}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{8}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，于是函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{3\pi}{8}+k\pi,\frac{\pi}{8}+k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$.

19.**解：**(1)由 $T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，得 $\omega=2$.

由最小值是 -3，得 $A=3$.

由 $f(0)=\frac{3}{2}$，得 $\sin\varphi=\frac{1}{2}$.

又 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$.

故解析式为 $f(x)=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

(2)把 $f(x)$ 的图像上所有点向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度，得到 $y=3\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{12}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=3\sin 2x$ 的图像；再把所得图像上所有点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍，纵坐标缩短为原来的 $\frac{1}{3}$ 倍，即可得到 $y=\sin 4x$ 的图像.

20.**解：**(1)从图中可以看出，$A=300$.

又因为 $\frac{1}{2}T=\frac{1}{180}-\left(-\frac{1}{900}\right)=\frac{1}{150}$，

所以 $T=\frac{1}{75}$，得 $\frac{2\pi}{\omega}=\frac{1}{75}$，

所以 $\omega=150\pi$.

将五点中第一点的 $t=-\frac{1}{900}$ 代入 $\omega t+\varphi$，有 $150\pi\times\left(-\frac{1}{900}\right)+\varphi=0$，解得 $\varphi=\frac{\pi}{6}$.

综上可知，函数解析式为

$I=300\sin\left(150\pi t+\frac{\pi}{6}\right)$.

(2)由题意，可知 $T\leqslant\frac{1}{150}$，

所以 $\frac{2\pi}{\omega}\leqslant\frac{1}{150}$，

所以 $\omega\geqslant 300\pi\approx 942.5$.

所以 ω 的最小正整数值为 943.

21.**解：**(1)依题意可知 h 的最大值为 6，最小值为 -2，设 $h=A\sin(\omega t+\varphi)+B(A>0,\omega>0)$，则有 $A+B=6$ 且 $-A+B=-2$，解得 $A=4,B=2$.

又 $T=\frac{60}{4}=15$，故 $\omega=\frac{2\pi}{15}$.

因为 $t=0$ 时，$h=0$，所以 $\sin\varphi=-\frac{1}{2}$，

所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$.

故解析式为 $h=4\sin\left(\frac{2\pi}{15}t-\frac{\pi}{6}\right)+2$.

(2)令 $\sin\left(\frac{2\pi}{15}t-\frac{\pi}{6}\right)=1$，解得 $t=5$.

故点 P 第一次到达最高点要 5 s.

(3)令 $h=4\sin\left(\frac{2\pi}{15}t-\frac{\pi}{6}\right)+2\geqslant 2+2\sqrt{3}$，

得 $\sin\left(\frac{2\pi}{15}t-\frac{\pi}{6}\right)\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$，

则 $2k\pi+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{2\pi}{15}t-\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{2\pi}{3},k\in\mathbf{Z}$，

解得 $15k+\frac{15}{4}\leqslant t\leqslant 15k+\frac{25}{4},k\in\mathbf{Z}$.

因为 $\frac{25}{4}-\frac{15}{4}=2.5$，所以在点 P 每转动一圈过程中，有 2.5 s 点 P 距水面的高度不小于 $(2+2\sqrt{3})$m.

22. **解：**(1) 由条件，得 $\omega\cdot\frac{2\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}$，故 $\omega\leqslant\frac{3}{4}$.又 $\omega>0$，

所以 ω 的取值范围是 $\left(0,\frac{3}{4}\right]$.

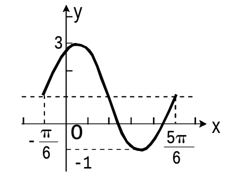
(2)①$g(x)=2\sin 2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+1$

$=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+1$.

列表：

$2x+\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{6}$
y	1	3	1	-1	1

作图：



(第 22 题图)

②由于 $g(x)$ 的周期为 π，故其在 $[a,a+10\pi]$ 上共有 10 个周期，

因此最多有 21 个零点，最少有 20 个零点，即零点个数的所有可能值为 21,20.