第8期
第3~4版同步周测参考答案

一、选择题

1.A 2.C 3.D 4.B 5.C 6.A

7.A

8.B

提示：$\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$

$=\tan\left[(\alpha+\beta)-\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\frac{3}{22}$.

9.C

提示：原式

$=\frac{\tan60°(1-\tan10·\tan50°)-\tan60°}{\tan10°·\tan50°}$

$=-\sqrt{3}$.

10.C

提示：由已知,得

$\sin\alpha\cos\frac{\pi}{3}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{3}+\sin\alpha=-\frac{4\sqrt3}{5}$,

即$\frac32\sin\alpha+\frac{\sqrt3}{2}\cos\alpha=-\frac{4\sqrt3}{5}$,

即$\frac{\sqrt3}{2}\sin\alpha+\frac12\cos\alpha=-\frac45$,

所以$\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac45$.

故$\cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)=-\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\frac45$.

11.D

提示：由已知条件,得

$\sin(A-B)=1-2\cos A\sin B$,

所以 $\sin A\cos B-\cos A\sin B=1-2\cos A\sin B$,

即$\sin A\cos B+\cos A\sin B=1$,

即$\sin(A+B)=1$.

所以$A+B=90°$.

故$\triangle ABC$是直角三角形.

12.C

提示：由两角和的余弦公式可知①正确；令$\alpha=\frac{\pi}{2}$,$\beta=0$,可知②正确；对于③,公式成立还需保证$\alpha+\beta\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$及$\tan\alpha\tan\beta\neq1$,故③错误；由两角差的正弦公式可知④错误.故假命题是③④.

二、填空题

13.$\frac{\sqrt3}{2}$

14.sin2-cos2

提示：原式

$=\sqrt{\sin^2 2+\cos^2 2-2\sin2\cos2}$

$=\sqrt{(\sin2-\cos2)^2}$

$=|\sin2-\cos2|$

$=\sin2-\cos2$.

15.2

16.65°

三、解答题

17.解：(1)原式

$=\frac{\sin(30°+17°)-\sin17°\cos30°}{\cos17°}$

$=\frac{\sin30°\cos17°}{\cos17°}$

$=\sin30°$

$=\frac12$.

(2)因为 $\tan60°=\tan(25°+35°)=\frac{\tan25°+\tan35°}{1-\tan25°\tan35°}=\sqrt3$,

所以$\tan25°+\tan35°=\sqrt3(1-\tan25°\tan35°)$,

所以原式$=\sqrt3(1-\tan25°\tan35°)+\sqrt3\tan25°\tan35°=\sqrt3$.

18.解：(1)由于$\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$,故$\frac{\pi}{4}<\beta-\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}$.

由$\cos\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac13$,得$\sin\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2\sqrt2}{3}$.所以$\tan\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sin\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)}=2\sqrt2$.

所以$\tan\beta=\tan\left[\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{4}\right]=\frac{\tan\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{2\sqrt2+1}{1-2\sqrt2}$

$=-\frac{9+4\sqrt2}{7}$.

(2)由于$0<\alpha<\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$,故$\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\frac{3\pi}{2}$.

由$\sin(\alpha+\beta)=\frac45$,可得$\cos(\alpha+\beta)=-\frac35$.

所以$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left[(\alpha+\beta)-\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\cos(\alpha+\beta)\cos\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)+\sin(\alpha+\beta)\sin\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac35\times\frac13+\frac45\times\frac{2\sqrt2}{3}=\frac{8\sqrt2-3}{15}$.

19.解：(1)由$\sin A+\cos A=\frac15$,

两边平方,得$1+2\sin A·\cos A=\frac{1}{25}$,

故$\sin A·\cos A=-\frac{12}{25}$.

(2)$(\sin A-\cos A)^2=1-2\sin A·\cos A=\frac{49}{25}$.

因为在△ABC中,0°<A<180°,

所以$\sin A>0$,

又$\sin A\cos A<0$,故$\cos A<0$,

所以$\sin A-\cos A>0$,则$\sin A-\cos A=\frac75$.

与已知条件联立,可得$\sin A=\frac45$,$\cos A=-\frac35$,所以$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=-\frac43$.

20.解：(1)$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac15$,①

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac35$,②

由①②,解得

$\cos\alpha\cos\beta=\frac25$,$\sin\alpha\sin\beta=\frac15$.

所以$\tan\alpha\tan\beta=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac12$.

(2)由$\alpha+\beta\in(0,\pi)$,$\cos(\alpha+\beta)=\frac15$,

得$\sin(\alpha+\beta)=\frac{2\sqrt6}{5}$.

由$\alpha-\beta\in\left(-\frac{3\pi}{2},0\right)$,$\cos(\alpha-\beta)=\frac35$,

得$\sin(\alpha-\beta)=-\frac45$.

所以$\cos2\beta=\cos[(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)]=\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\frac15\times\frac35+\frac{2\sqrt6}{5}\times\left(-\frac45\right)=\frac{3-8\sqrt6}{25}$.

21.解：(1)$\tan B=\tan(\angle AMC-\angle BAM)=\frac{\tan\angle AMC-\tan\angle BAM}{1+\tan\angle AMC\tan\angle BAM}=-1$.

又$0<B<\pi$,所以$B=\frac{3\pi}{4}$.

(2)因为$\alpha+\beta=B$,

所以$\beta=B-\alpha=\frac{3\pi}{4}-\alpha$.

所以$\sqrt2\sin\alpha-\sin\beta=\sqrt2\sin\alpha-\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{\sqrt2}{2}\sin\alpha-\frac{\sqrt2}{2}\cos\alpha=\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$.

因为$0<\alpha<\frac{3\pi}{4}$,

所以$-\frac{\pi}{4}<\alpha-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}$.

所以$-\frac{\sqrt2}{2}<\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)<1$.

所以$\sqrt2\sin\alpha-\sin\beta$的取值范围是$\left(-\frac{\sqrt2}{2},1\right)$.

22.(1)证明：因为$\boldsymbol a$与$\boldsymbol b$共线,所以$\sin\frac{\pi x}{2}\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi x}{2}=0$,

即$\sin\left(\frac{\pi x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=0$.

(2)解：由$\frac{\pi x}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf Z)$,得对称轴方程是$x=\frac53+2k(k\in\mathbf Z)$.

(3)解：由$f\left(\frac{4A}{\pi}\right)=f\left(\frac{4B}{\pi}\right)=\frac12$,得$\sin\left(2A-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(2B-\frac{\pi}{3}\right)=\frac12$.

因为$0<A<B<\pi$,

所以$-\frac{\pi}{3}<2A-\frac{\pi}{3}<2B-\frac{\pi}{3}<\frac{5\pi}{3}$.

所以$2A-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$,$2B-\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}$.

解得$A=\frac{\pi}{4}$,$B=\frac{7\pi}{12}$,所以$C=\frac{\pi}{6}$.

所以$\frac{\sin B}{\sin C}=\frac{\sin\frac{7\pi}{12}}{\sin\frac{\pi}{6}}=2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)$

$=2\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$=\frac{\sqrt6+\sqrt2}{2}$.

第5期
第3~4版同步周测参考答案

一、选择题

1.A 2.C 3.D 4.C

5.A

提示：由减法的三角形法则易求得.

6.A

提示：$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=2e_1+4e_2=2\overrightarrow{AB}$,则$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BD}$共线.又两向量有公共点B,故$A,B,D$三点共线.

7.C

8.A

提示：由$\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{CB}$求得点$C$的坐标为(3,3),代入直线方程$y=\frac12ax$,解得$a=2$.故选A.

9.B

提示：因为$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}$,$\overrightarrow{DA}=-e_2$,$\overrightarrow{AE}=\frac12e_1+\frac{\sqrt3}{2}e_2$,所以$\overrightarrow{DE}=\frac12e_1-\frac{2-\sqrt3}{2}e_2$.

10.A

提示：不妨设$\overrightarrow{OA}=a$,$\overrightarrow{OB}=b$.由于$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP}=-a+2t\overrightarrow{PA}+tb$,即$\overrightarrow{AP}=\frac{-a+tb}{1+2t}$,而$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=-a+b$,故有$\begin{cases}\frac{1}{1+2t}=\lambda,\\ \frac{t}{1+2t}=\lambda,\end{cases}$解得$t=1$,$\lambda=\frac13$.

11.C

提示：根据题意,向量$\boldsymbol a,\boldsymbol b$是不共线的向量,所以$1·(3m-2)-2·m\neq0$,解得$m\neq2$.

12.C

提示：由$2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=0$,得$\overrightarrow{AG}=\frac12(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$,所以$G$是$BC$的中点.结合G是△ABC的外心,易知BC=2,△ABC是直角三角形,且∠BAC=90°.又∠BOC=90°,所以点A,O均在以BC为直径的圆上.当$|\overrightarrow{OA}|$最大时,OA为直径,故$|\overrightarrow{OA}|$的最大值为2.

二、填空题

13.$\frac13$

14.7

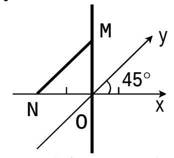
提示：向右平移$\overrightarrow{AB}$,有3个位置可以平移,有3×2=6个向量,加上向量$\overrightarrow{BA}$,共7个.

15.b_6

提示：因为$\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_7}=0$,所以$a_2+a_5+b_2+b_5+b_7=\overrightarrow{A_2A_3}+\overrightarrow{A_5A_6}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_5}+\overrightarrow{OA_7}=(\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{A_2A_3})+(\overrightarrow{OA_5}+\overrightarrow{A_5A_6})+\overrightarrow{OA_7}=\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_6}+\overrightarrow{OA_7}=\overrightarrow{OA_6}=b_6$.

16.$2\sqrt2$

提示：易知MN∥y轴,∠MNO=45°,∠MON=90°(如图).在△MON中,$\cos45°=-\frac{x_0}{y_0}$,所以$y_0=2\sqrt2$.

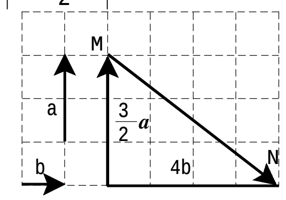


(第16题图)

三、解答题

17.解：(1)化简得$\boldsymbol m=\boldsymbol a$,$\boldsymbol n=-13\boldsymbol a$,故$\boldsymbol n=-13\boldsymbol m$,所以向量$\boldsymbol m,\boldsymbol n$平行.

(2)向量$4\boldsymbol b-\frac32\boldsymbol a$即下图中的向量$\overrightarrow{MN}$,且$\left|4\boldsymbol b-\frac32\boldsymbol a\right|=5$.



(第17题图)

18.解：(1)$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}-\frac12\overrightarrow{AB}=e_2-\frac12e_1$,$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AN}=-\frac14\overrightarrow{AB}-\left(\overrightarrow{AC}-\frac12\overrightarrow{AB}\right)+\frac12\overrightarrow{AB}=\frac34\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\frac34e_1-e_2$.

(2)若ke_1+e_2与$2e_1+ke_2$同向共线,则存在$\lambda>0$,使得$ke_1+e_2=\lambda(2e_1+ke_2)$,所以$\begin{cases}k=2\lambda,\\1=k\lambda,\\ \lambda>0,\end{cases}$解得$k=\sqrt2$.

19.解：(1)$3\boldsymbol a+\boldsymbol b-2\boldsymbol c=3(3,2)+(-1,2)-2(4,1)=(0,6)$.

(2)设$\boldsymbol a=m\boldsymbol b+n\boldsymbol c$,其中$m,n\in\mathbf R$,即$(3,2)=(-m+4n,2m+n)$,

所以$\begin{cases}-m+4n=3,\\2m+n=2,\end{cases}$解得$\begin{cases}m=\frac59,\\n=\frac89.\end{cases}$

所以$\boldsymbol a=\frac59\boldsymbol b+\frac89\boldsymbol c$.

(3)因为$\boldsymbol a+k\boldsymbol c=(3+4k,2+k)$,$2\boldsymbol b-\boldsymbol a=(-5,2)$,所以$2(3+4k)-(-5)(2+k)=0$,解得$k=-\frac{16}{13}$.

20.解：因为$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=\boldsymbol 0$,所以$\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OC}$,$\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OD}$.所以$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OC}|$,$|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OD}|$,故四边形$ABCD$是平行四边形.

又$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AD}|$,故四边形$ABCD$是菱形.

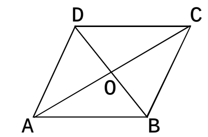
因为$\cos\angle DAB=\frac12$,$\angle DAB\in(0°,180°)$,

所以$\angle DAB=60°$.

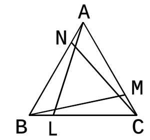
所以$\triangle ABD$是边长为1的正三角形.

所以$|\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{AC}|=2|\overrightarrow{AO}|=2\times\frac{\sqrt3}{2}=\sqrt3$,

$|\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{BD}|=|\overrightarrow{AB}|=1$.



(第20题图)



(第21题图)

21.证明：如图,令$\overrightarrow{BC}=a$,$\overrightarrow{CA}=b$为一组基底,根据已知有$\overrightarrow{BL}=la$,$\overrightarrow{CM}=mb$.

因为$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=-a-b$,

所以$\overrightarrow{AN}=n\overrightarrow{AB}=-na-nb$.

所以$\overrightarrow{AL}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BL}=(l-1)a-b$, ①

$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CM}=a+mb$, ②

$\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AN}=-na+(1-n)b$. ③

把①②③代入已知式$\overrightarrow{AL}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}=0$,则有$(l-n)a+(m-n)b=0$.根据平面向量基本定理,有$l-n=m-n=0$,所以$l=m=n$.

22.解：(1)因为$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=-a-\frac12b$,$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}=\frac12b-a$,

所以$\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{BE}=-2a$.

(2)假设存在满足要求的点E,且$\overrightarrow{AE}=\lambda b(0\leqslant\lambda\leqslant1)$.

①若$\overrightarrow{BF}=\frac13\overrightarrow{BE}$,

则$\overrightarrow{BF}=\frac13(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB})=\frac13(\lambda b-a)$.

所以$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\frac23a+\frac13\lambda b$.

因为$\overrightarrow{AC}$与$\overrightarrow{AF}$是共线向量,

所以可设$\overrightarrow{AF}=\mu\overrightarrow{AC}$ $(\mu\in\mathbf R)$,又$\overrightarrow{AC}=a+b$,所以$\frac23a+\frac13\lambda b=\mu(\boldsymbol a+\boldsymbol b)$.

由a,b是不共线的向量,可得$\mu=\frac23$,$\lambda=2$,与$0\leqslant\lambda\leqslant1$矛盾,舍去.

②若$\overrightarrow{BF}=\frac23\overrightarrow{BE}$,同理可得$\mu=\frac13$,$\lambda=\frac12$,满足$0\leqslant\lambda\leqslant1$.

综上可知,存在满足条件的点E,它是线段AD的中点.

第 6 期
第 3~4 版同步周测参考答案

一、选择题

1.A

提示：由题设，得 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-1,1)$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$.

2.B

3.C

提示：$(\boldsymbol{a}+\sqrt{2}\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+2\sqrt{2}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{b}^2=1+0+2\times4=9$，所以 $|\boldsymbol{a}+\sqrt{2}\boldsymbol{b}|=3$.

4.B

提示：$\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上的射影为 $|a|\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|b|}=\dfrac{2\times3+1\times4}{5}=2$.

5.B

6.A

提示：由题意，得 $\lambda a+b=(-3\lambda-1,2\lambda)$，$a-2b=(-1,2)$.
因为 $(\lambda a+b)\perp(a-2b)$，
所以 $(-3\lambda-1)\times(-1)+2\lambda\times2=0$，
解得 $\lambda=-\dfrac{1}{7}$.

7.D

8.B

提示：$\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}-2\overrightarrow{DA}=(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD})+(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$，所以 $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=|\overrightarrow{AB}|^2-|\overrightarrow{AC}|^2=0$，所以 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|$，所以△ABC 为等腰三角形.

9.B

提示：结论①③正确，②④错误.

10.D

提示：由 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=1$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，不妨以 O 为原点，$\overrightarrow{OA}$ 的方向为 x 轴正方向建立平面直角坐标系，则 $A(1,0)$，$B(0,1)$，故 $C(\lambda,\mu)$，$M\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$.
所以 $\overrightarrow{MC}=\left(\lambda-\dfrac{1}{2},\mu-\dfrac{1}{2}\right)$. 因为 $|\overrightarrow{MC}|=1$，所以 $\left(\lambda-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\mu-\dfrac{1}{2}\right)^2=1$. 故选 D.

11.B

提示：由 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OC}$ 在 $\overrightarrow{OB}$ 方向上的射影相等，得 $\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|}=\dfrac{\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OB}|}$，
所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$. 所以 $3a+b=12+5b$，即 $3a-4b-12=0$. 所以点 (a,b) 在直线 $3x-4y-12=0$ 上，a^2+b^2 表示原点 O 与直线 $3x-4y-12=0$ 上的点的距离 d 的平方，则 d 的最小值为 $\dfrac{12}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{12}{5}$，故 a^2+b^2 的最小值为 $\dfrac{144}{25}$.

12.C

提示：由已知，得 $|\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{e}|^2\geqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e}|^2$，展开，得 $t^2-2t(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e})+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}-1\geqslant0$. 由于上式对 $t\in\mathbf{R}$ 恒成立，故 $\Delta=4(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e})^2-4(2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}-1)\leqslant0$，即 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}-1)^2\leqslant0$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}=1$. 所以 $\boldsymbol{e}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}-\boldsymbol{e}^2=1-1=0$. 所以 $e\perp(a-e)$.

二、填空题

13.45°

14.135°

15.$\dfrac{2}{3}$

提示：由题设，得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot(2\boldsymbol{a}-\sqrt{5}\cdot\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}^2-\sqrt{5}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$，$\boldsymbol{c}^2=(2\boldsymbol{a}-\sqrt{5}\boldsymbol{b})^2=4\boldsymbol{a}^2-4\sqrt{5}\cdot\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+5\boldsymbol{b}^2=9$，即 $|\boldsymbol{c}|=3$，所以 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle=\dfrac{a\cdot c}{|a||\boldsymbol{c}|}=\dfrac{2}{3}$.

16.0，$2\sqrt{5}$

提示：在正方形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$，$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AD}|=1$，

则 $|\lambda_1\overrightarrow{AB}+\lambda_2\overrightarrow{BC}+\lambda_3\overrightarrow{CD}+\lambda_4\overrightarrow{DA}+\lambda_5\cdot\overrightarrow{AC}+\lambda_6\cdot\overrightarrow{BD}|=|\lambda_1\overrightarrow{AB}+\lambda_2\overrightarrow{AD}-\lambda_3\overrightarrow{AB}-\lambda_4\overrightarrow{AD}+\lambda_5(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})+\lambda_6(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})|$

$=|(\lambda_1-\lambda_3+\lambda_5-\lambda_6)\overrightarrow{AB}+(\lambda_2-\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6)\overrightarrow{AD}|$

$=\sqrt{(\lambda_1-\lambda_3+\lambda_5-\lambda_6)^2+(\lambda_2-\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6)^2}$. ①

由于 $\lambda_i(i=1,2,3,4,5,6)$ 取遍 ±1，可得

当 $\lambda_1-\lambda_3+\lambda_5-\lambda_6=\lambda_2-\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6=0$ 时，①式取得最小值 0，此时可取 $\lambda_1=\lambda_3=\lambda_4=\lambda_5=\lambda_6=1$，$\lambda_2=-1$；

当 $\lambda_1-\lambda_3+\lambda_5-\lambda_6=2$，$\lambda_2-\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6=4$ 时，①式取得最大值 $2\sqrt{5}$，此时可取 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_5=\lambda_6=1$，$\lambda_3=\lambda_4=-1$.

三、解答题

17.**解**：要保持平衡状态，则 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$，故 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OC}$. 以 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 为邻边作▱$AOBC'$，则 $|\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OC'}|$，且 $\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{OC'}$，所以 $|\overrightarrow{OA}|>|\overrightarrow{OB}|$，$|\overrightarrow{OA}|>|\overrightarrow{OC}|$. 所以细绳 OA 受力最大，故细绳 OA 的耐力要求最高.

18.**解**：(1)由于 $|a|=1$，$|b|=\sqrt{3}$，$|a+b|=2$，
故 $|a+b|^2=a^2+b^2+2a\cdot b=1+3+2a\cdot b=4$，
所以 $a\cdot b=0$，即 $a\perp b$.
所以向量 a 与 b 的夹角为 90°.
(2)假设存在实数 λ，使得 $(\lambda a-b)\perp(a+2b)$，那么 $(\lambda a-b)\cdot(a+2b)=\lambda a^2+(2\lambda-1)\cdot a\cdot b-2b^2=\lambda+0-6=0$，
解得 $\lambda=6$.
故存在实数 $\lambda=6$，使得 $(\lambda a-b)\perp(a+2b)$.

19.**解**：(1)因为四边形 $ABCD$ 是矩形，所以 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$，即 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.
因为 $AB=9$，$BC=6$，$\overrightarrow{CP}=2\overrightarrow{PD}$，
所以 $|\overrightarrow{CP}|=6$，$|\overrightarrow{PD}|=3$，
则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DP})\cdot(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{PC})$
$=\left(\overrightarrow{BC}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BC}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}\right)$
$=|\overrightarrow{BC}|^2-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}-\dfrac{2}{9}|\overrightarrow{AB}|^2$
$=6^2-\dfrac{2}{9}\times9^2=18$.
(2)设 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AD}$ 的夹角为 θ.
与(1)同理，易得 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=|\overrightarrow{BC}|^2-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}-\dfrac{2}{9}|\overrightarrow{AB}|^2=6^2-\dfrac{1}{3}\times9\times6\times\cos\theta-\dfrac{2}{9}\times9^2=6$，解得 $\cos\theta=\dfrac{2}{3}$.
故 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AD}$ 夹角的余弦值为 $\dfrac{2}{3}$.

20.**解**：(1)因为 $\boldsymbol{a}=(-1,2)$，$\boldsymbol{b}=(3,2)$，所以 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-4,0)$. 故 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=(-1)\times(-4)+2\times0=4$.
(2)$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2,4)$，$2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-5,2)$，所以 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=2\times(-5)+4\times2=-2$.
(3)因为 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=3\times2+2\times1=8$，
所以 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})=8(-1,2)=(-8,16)$；
因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-1\times3+2\times2=1$，
所以 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=(2,1)$.

21.**解**：(1)设 $\overrightarrow{OM}=(x,y)$，因为点 M 在直线 OP 上，所以向量 $\overrightarrow{OM}$ 与 $\overrightarrow{OP}$ 共线.
又 $\overrightarrow{OP}=(2,1)$，
所以 $x-2y=0$，即 $x=2y$，
所以 $\overrightarrow{OM}=(2y,y)$.
又 $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM}$，$\overrightarrow{OA}=(1,7)$，
所以 $\overrightarrow{MA}=(1-2y,7-y)$.
同理 $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}=(5-2y,1-y)$，
于是 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(1-2y)(5-2y)+(7-y)(1-y)=5y^2-20y+12=5(y-2)^2-8$.
所以当 $y=2$ 时，$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ 取得最小值 -8，此时 $\overrightarrow{OM}=(4,2)$.
(2)当 $\overrightarrow{OM}=(4,2)$，即 $y=2$ 时，有 $\overrightarrow{MA}=(-3,5)$，$\overrightarrow{MB}=(1,-1)$，
所以 $|\overrightarrow{MA}|=\sqrt{34}$，$|\overrightarrow{MB}|=\sqrt{2}$.
所以 $\cos\angle AMB=\dfrac{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}}{|\overrightarrow{MA}||\overrightarrow{MB}|}=-\dfrac{4\sqrt{17}}{17}$.

22.**解**：(1)$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，
又 $\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，所以 $x=\dfrac{1}{3}$，$y=\dfrac{2}{3}$.
(2)由 $\overrightarrow{BP}$ 与 $\overrightarrow{AD}$ 共线，可设 $\overrightarrow{BP}=\lambda\cdot\overrightarrow{AD}$，$\lambda\in\mathbf{R}$.
因为 $\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，所以 $\overrightarrow{BP}=\dfrac{\lambda}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2\lambda}{3}\overrightarrow{AC}$.
所以 $\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{AB}=-\left(\dfrac{\lambda}{3}+1\right)\overrightarrow{AB}-\dfrac{2\lambda}{3}\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AC}=-\left(\dfrac{\lambda}{3}+1\right)\overrightarrow{AB}+\left(1-\dfrac{2\lambda}{3}\right)\cdot\overrightarrow{AC}$.
所以 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=\left(\dfrac{\lambda}{3}+1\right)^2|\overrightarrow{AB}|^2+\left(\dfrac{\lambda}{3}+1\right)\cdot\left(\dfrac{4\lambda}{3}-1\right)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\dfrac{2\lambda}{3}\cdot\left(1-\dfrac{2\lambda}{3}\right)|\overrightarrow{AC}|^2$. ①
因为 $AB=2$，$AC=5$，$\cos\angle CAB=\dfrac{3}{5}$，所以 $|\overrightarrow{AB}|^2=4$，$|\overrightarrow{AC}|^2=25$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=6$. ②
把②代入①并整理，
得 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=\dfrac{128}{9}\lambda^2-8\lambda-2$.
因为 $\overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{PC}$，所以 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=0$，
即 $\dfrac{128}{9}\lambda^2-8\lambda-2=0$，解得 $\lambda_1=\dfrac{3}{4}$，$\lambda_2=-\dfrac{3}{16}$，
所以 $\dfrac{|\overrightarrow{BP}|}{|\overrightarrow{AD}|}=|\lambda|=\dfrac{3}{4}$ 或 $\dfrac{3}{16}$.

第 7 期
第 2~3 版章节测试参考答案

一、选择题

1.C　2.B　3.D　4.D　5.B　6.A

7.B

提示：设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ. 因为 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$，所以 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}^2=|a|\cdot|b|\cos\theta-\boldsymbol{b}^2=0$. 又 $|a|=2|b|$，可得 $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$. 因为 $\theta\in[0,\pi]$，所以 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$.

8.B

提示：设 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的夹角为 θ，则 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 方向上的射影为 $|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta=\dfrac{(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\dfrac{|\boldsymbol{a}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}=1$.

9.B

提示：由 $\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AB}=(1-\lambda)\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$，且 $\overrightarrow{BQ}\cdot\overrightarrow{CP}=-2$，$AB=1$，$AC=2$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，得 $3\lambda-2=0$，解得 $\lambda=\dfrac{2}{3}$. 故选 B.

10.D

提示：设 $\overrightarrow{AM}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AN}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AC}$，得 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}$，由平行四边形法则，于是 $NP/\!/AB$，所以 $\dfrac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{|\overrightarrow{AN}|}{|\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{1}{5}$.
同理可得 $\dfrac{S_{\triangle ABQ}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{1}{4}$，所以 $\dfrac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ABQ}}=\dfrac{4}{5}$.

11.B

12.C

提示：当点 P 在边 AB 上时，$m\in[0,1]$，$n=0$，所以 $m+n\in[0,1]$.
取 AB 的中点 O，连接 OC，则 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AD}$. 当点 P 在边 BC 上时，设 $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}$，$\lambda\in[0,1]$，则 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\lambda(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=\overrightarrow{AB}+\lambda\left(\overrightarrow{AD}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)=\left(1-\dfrac{\lambda}{2}\right)\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AD}$. 所以 $m=1-\dfrac{\lambda}{2}$，$n=\lambda$.
所以 $m+n=1+\dfrac{\lambda}{2}\in\left[1,\dfrac{3}{2}\right]$.
当点 P 在边 AC 上时，由向量加法的平行四边形法则，得 $n\in[0,1]$，$m\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$，所以 $m+n\in\left[0,\dfrac{3}{2}\right]$.
所以 $m+n$ 的取值范围是 $\left[0,\dfrac{3}{2}\right]$.
故选 C.

二、填空题

13.6，相反

14.4

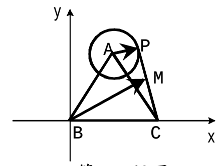
提示：力 $\boldsymbol{F}$ 对物体所做的功 $W=\boldsymbol{F}\cdot\overrightarrow{AB}=(2,3)\cdot(2,0)=4$.

15.$\dfrac{3}{2}$

提示：$\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{ED}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$，所以 $\overrightarrow{EC}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}$. 又 $\overrightarrow{EC}=\lambda\cdot\overrightarrow{AD}+\mu\overrightarrow{AB}$，所以 $\lambda=\dfrac{1}{2}$，$\mu=1$，所以 $\lambda+\mu=\dfrac{3}{2}$.

16.$\dfrac{49}{4}$

提示：建立如图所示的平面直角坐标系，则 $B(0,0)$，$C(2\sqrt{3},0)$，$A(\sqrt{3},3)$.
由 $|\overrightarrow{AP}|=1$，知点 P 的轨迹是以 $A(\sqrt{3},3)$ 为圆心，1 为半径的圆.



(第 16 题图)

设 $P(x,y)$，由 $\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{MC}$，得 $M\left(\dfrac{x+2\sqrt{3}}{2},\dfrac{y}{2}\right)$，则 $\overrightarrow{BM}=\left(\dfrac{x+2\sqrt{3}}{2},\dfrac{y}{2}\right)$.
故 $|\overrightarrow{BM}|^2=\dfrac{1}{4}[(x+2\sqrt{3})^2+y^2]$，它表示圆 A 上的点到点 $N(-2\sqrt{3},0)$ 的距离 d 平方的 $\dfrac{1}{4}$.
结合图形可知，$d_{max}=|\overrightarrow{AN}|+1=7$，所以 $(|\overrightarrow{BM}|^2)_{max}=\dfrac{1}{4}d_{max}^2=\dfrac{49}{4}$.

三、解答题

17.**解**：根据题意，得
$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，
$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{BA}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，
$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{BC}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$，
$\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BF}=(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})-(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

18.**解**：(1)由 $(2a-3b)\cdot(2a+b)=61$，
解得 $a\cdot b=-6$.
所以 $\cos\theta=\dfrac{a\cdot b}{|a||b|}=\dfrac{-6}{4\times3}=-\dfrac{1}{2}$.
又 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$，所以 $\theta=\dfrac{2\pi}{3}$.
(2)$|a-b|^2=a^2-2a\cdot b+b^2=37$，
所以 $|a-b|=\sqrt{37}$；
$|a+b|^2=a^2+2a\cdot b+b^2=13$，
所以 $|a+b|=\sqrt{13}$.

19.**解**：(1)$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\boldsymbol{e}_1+(1+\lambda)\boldsymbol{e}_2$.
因为 A，E，C 三点共线，
所以存在实数 m，使得 $\overrightarrow{AE}=m\overrightarrow{EC}$，
即 $\boldsymbol{e}_1+(1+\lambda)\boldsymbol{e}_2=m(-2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)$.
因为 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是平面内两个不共线的非零向量，所以 $1=-2m$，且 $1+\lambda=m$，
解得 $\lambda=-\dfrac{3}{2}$.
(2)$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EC}=-3\boldsymbol{e}_1-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{e}_2=-3(2,1)-\dfrac{1}{2}(2,-2)=(-7,-2)$.
在平行四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$，
设点 A 的坐标为 (x,y)，
则 $\begin{cases}3-x=-7,\\5-y=-2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=10,\\y=7.\end{cases}$
所以点 A 的坐标为 $(10,7)$.

20.**解**：设点 P 的坐标为 (x_1,y_1)，则 $\overrightarrow{AP}=(x_1-2,y_1-3)$，$\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}=(5-2,4-3)+\lambda(7-2,10-3)=(3+5\lambda,1+7\lambda)$.
由 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}$，
得 $\begin{cases}x_1-2=3+5\lambda,\\y_1-3=1+7\lambda,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_1=5+5\lambda,\\y_1=4+7\lambda.\end{cases}$
所以点 P 的坐标为 $(5+5\lambda,4+7\lambda)$.
(1)令 $5+5\lambda=4+7\lambda$，得 $\lambda=\dfrac{1}{2}$.
所以当 $\lambda=\dfrac{1}{2}$ 时，点 P 在直线 $y=x$ 上.
(2)若 P 为第一象限内的点，
则有 $\begin{cases}5+5\lambda>0,\\4+7\lambda>0,\end{cases}$ 解得 $\lambda>-\dfrac{4}{7}$.
故 λ 的取值范围为 $\left(-\dfrac{4}{7},+\infty\right)$.

21.(1)**解**：由题意，得 $M\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，$N\left(2,\dfrac{1}{2}\right)$.
所以 $\overrightarrow{MP}=\left(t,\dfrac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{NP}=\left(t-2,\dfrac{1}{2}\right)$.
因为 $MP\perp NP$，所以 $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{NP}=t(t-2)+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=0$，解得 $t=\dfrac{2\pm\sqrt{3}}{2}$.
(2)**证明**：设 $R(x,y)$，
则 $\overrightarrow{MR}=\left(x,y-\dfrac{1}{2}\right)$.
因为 $\overrightarrow{MP}$ 与 $\overrightarrow{MR}$ 共线，
所以 $t\left(y-\dfrac{1}{2}\right)-\dfrac{1}{2}x=0$. ①
又 $\overrightarrow{QN}=\left(2-t,\dfrac{1}{2}\right)$，
$\overrightarrow{NR}=\left(x-2,y-\dfrac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{QN}$ 与 $\overrightarrow{NR}$ 共线，
所以 $(2-t)\left(y-\dfrac{1}{2}\right)-\dfrac{1}{2}(x-2)=0$. ②
联立①②，解得 $x=\dfrac{t}{t-1}$，$y=\dfrac{t}{2t-2}$.
所以 $\overrightarrow{AR}=\left(\dfrac{t}{t-1},\dfrac{t}{2t-2}\right)$.
又 $\overrightarrow{AC}=(2,1)$，$\dfrac{t}{t-1}\cdot1-\dfrac{t}{2t-2}\cdot2=0$，
所以 $\overrightarrow{AR}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 共线.
因为 $\overrightarrow{AR}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 有公共点 A，
所以 R，A，C 三点共线.

22.**解**：(1)因为 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}+\dfrac{2}{3}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\dfrac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{3}b+\dfrac{2}{3}a$，
所以 $x=\dfrac{2}{3}$，$y=\dfrac{1}{3}$，所以 $x-y=\dfrac{1}{3}$.
(2)设 $\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{AB}(0\leqslant\lambda\leqslant1)$，
因为在△ABC 中，$AB=2$，$AC=1$，$\angle ACB=\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\angle CAB=\dfrac{\pi}{3}$，
所以 $\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{FA}=(\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AC})\cdot(-\overrightarrow{AF})=(\lambda\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})\cdot(-\lambda\overrightarrow{AB})=-4\lambda^2+\lambda\times1\times2\times\dfrac{1}{2}=-4\lambda^2+\lambda=-4\left(\lambda-\dfrac{1}{8}\right)^2+\dfrac{1}{16}$，
又 $0\leqslant\lambda\leqslant1$，所以 $\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{FA}\in\left[-3,\dfrac{1}{16}\right]$.
(3)因为 A，M，D 三点共线，所以设 $\overrightarrow{CM}=x\overrightarrow{CA}+(1-x)\overrightarrow{CD}=x\overrightarrow{CA}+(1-x)\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\overrightarrow{CB}$.
因为 F 为 AB 的中点，所以 $\overrightarrow{CF}=\dfrac{1}{2}\cdot\overrightarrow{CA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CB}$，又 C，M，F 三点共线，所以存在 $t\in R$ 使得 $\overrightarrow{CM}=t\overrightarrow{CF}$，
所以 $x\overrightarrow{CA}+\dfrac{2}{3}(1-x)\overrightarrow{CB}=\dfrac{1}{2}t\overrightarrow{CA}+\dfrac{1}{2}t\overrightarrow{CB}$，所以 $\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}t,\\\dfrac{2}{3}(1-x)=\dfrac{1}{2}t,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\dfrac{2}{5},\\t=\dfrac{4}{5},\end{cases}$
所以 $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\dfrac{2}{5}\overrightarrow{CA}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{CB}\right)\cdot\overrightarrow{AB}$
$=\left(\dfrac{2}{5}\overrightarrow{CA}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{CA}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB}\right)\cdot\overrightarrow{AB}$
$=\dfrac{4}{5}\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{5}|\overrightarrow{AB}|^2$
$=\dfrac{4}{5}\times1\times2\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{2}{5}\times4=\dfrac{4}{5}$.