第 8 期

第 3~4 版章节测试参考答案

一、选择题

1~6.ACBABC　　7~12.BCCCAB

二、填空题

13.5

14.$\pm\sqrt{39}$

15.$\sqrt{98+56\sqrt{2}}$

16.①②③

三、解答题

17.**解:** 因为 BG=2GD,

所以$\overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BD}$.

又$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PB}=a+c-2b$,

所以$\overrightarrow{PG}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BG}=\boldsymbol{b}+\frac{2}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{b})$

$=\frac{2}{3}a-\frac{1}{3}b+\frac{2}{3}c$.

18.**证明:** 设$|AB|=2a$,$|AD|=2b$,$|AP|=2c$,以 A 为坐标原点,以 AB,AD,AP 所在直线分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系,则 B(2a,0,0),C(2a,2b,0),D(0,2b,0),P(0, 0,2c),E(a,0,0),F(a,b,c).

(1) 因为 $\overrightarrow{EF}=(0,b,c)$, $\overrightarrow{AP}=(0,0,2c)$,$\overrightarrow{AD}=(0,2b,0)$,

所以$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AD})$,

所以$\overrightarrow{EF}$与$\overrightarrow{AP}$,$\overrightarrow{AD}$共面.

又因为点 $E\notin$平面 PAD,所以 EF∥平面 PAD.

(2)因为$\overrightarrow{CD}=(-2a,0,0)$,所以$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{EF}=(-2a,0,0)\cdot(0,b,c)=0$, 所以 $CD\perp EF$.

19.**解:** 如图,以 D 为坐标原点,分别以 DA,DC,DD_1 所在直线为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系 D-xyz.

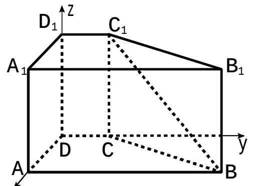
则 $C_1(0,1,2)$,$B(2,4,0)$,

所以$\overrightarrow{BC_1}=(-2,-3,2)$,$\overrightarrow{CD}=(0,-1,0)$.

设$\overrightarrow{BC_1}$与$\overrightarrow{CD}$所成的角为 θ,

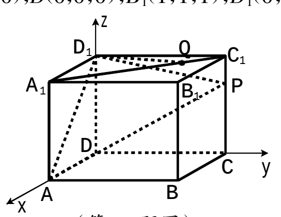
则 $\cos\theta=\frac{\overrightarrow{BC_1}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{BC_1}||\overrightarrow{CD}|}=\frac{3\sqrt{17}}{17}$.

所以异面直线 BC_1 与 DC 所成角的余弦值为$\frac{3\sqrt{17}}{17}$.



(第 19 题图)

20.**解:** (1)如图,建立空间直角坐标系,则 $A(1,0,0)$,$B(1,1,0)$,$P(0,1,m)$,$C(0,1,0)$,$D(0,0,0)$,$B_1(1,1,1)$,$D_1(0,0,1)$.



(第 20 题图)

所以$\overrightarrow{BD}=(-1,-1,0)$,$\overrightarrow{BB_1}=(0,0,1)$,$\overrightarrow{AP}=(-1,1,m)$,$\overrightarrow{AC}=(-1,1,0)$.

又由$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BB_1}=0$,知$\overrightarrow{AC}$为平面 BDD_1B_1 的一个法向量.

设 AP 与平面 BDD_1B_1 的夹角为 θ,

则 $\sin\theta=\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right|=\frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AC}|}$

$=\frac{2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+m^2}}$,

依题意有$\frac{2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+m^2}}=\frac{1}{3}$,

解得 $m=4$,或 $m=-4$(舍去).

故当 $m=4$ 时, 直线 AP 与平面 BDD_1B_1 夹角的正弦值为$\frac{1}{3}$.

(2)若在线段 A_1C_1 上存在这样的点 Q,设此点的横坐标为 x,则 $Q(x,1-x,1)$,

所以$\overrightarrow{D_1Q}=(x,1-x,0)$.

依题意,对任意的 m 要使 D_1Q 在平面 APD_1 上的投影垂直于 AP,即$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{D_1Q}=0\Leftrightarrow -x+(1-x)=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$.

即 Q 为 A_1C_1 的中点时,满足题设的要求.

21.(1)**证明:** 连接 B_1C,ME.

因为 M,E 分别为 BB_1,BC 的中点,

所以 ME∥B_1C,且 $ME=\frac{1}{2}B_1C$.

又因为 N 为 A_1D 的中点,

所以 $ND=\frac{1}{2}A_1D$.

由题设知 A_1B_1 $\underline{\mathbin{/\!/}}$ DC, 所以四边形 A_1B_1CD 为平行四边形, 所以 B_1C $\underline{\mathbin{/\!/}}$ A_1D,故 ME $\underline{\mathbin{/\!/}}$ ND,

因此四边形 $MNDE$ 为平行四边形,MN∥ED.

又 $MN\not\subset$平面 EDC_1,

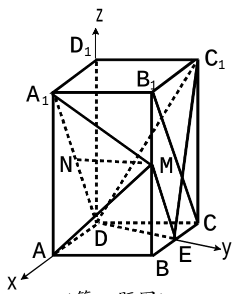
所以 MN∥平面 C_1DE.

(2)**解:** 连接 BD,因为四边形 $ABCD$ 为菱形,$\angle BAD=60°$,所以 $BD=CD$,所以 $DE\perp DA$.

以 D 为坐标原点,$\overrightarrow{DA}$的方向为 x 轴正方向,建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$,则

$A(2,0,0)$,$A_1(2,0,4)$,$M(1,\sqrt{3},2)$,$N(1,0,2)$,

$\overrightarrow{A_1A}=(0,0,-4)$,$\overrightarrow{A_1M}=(-1,\sqrt{3},-2)$,$\overrightarrow{A_1N}=(-1,0,-2)$,$\overrightarrow{MN}=(0,-\sqrt{3},0)$.



(第21题图)

设 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$为平面 A_1MA 的法向量,则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1M}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1A}=0,\end{cases}$

所以$\begin{cases}-x+\sqrt{3}y-2z=0,\\ -4z=0.\end{cases}$

可取 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},1,0)$.

设 $\boldsymbol{n}=(p,q,r)$为平面 A_1MN 的法向量,

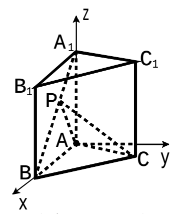
则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MN}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1N}=0,\end{cases}$

所以$\begin{cases}-\sqrt{3}q=0,\\ -p-2r=0.\end{cases}$可取 $\boldsymbol{n}=(2,0,-1)$.

于是 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{2\times\sqrt{3}}{2\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$,

所以二面角 $A-MA_1-N$ 的正弦值为$\frac{\sqrt{10}}{5}$.

22.**解:** 建立如图所示的空间直角坐标系,则 $B(a,0,0)$,$A_1(0,0,a)$,$C\left(\frac{a}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}a,0\right)$.



(第 22 题图)

设 $P(x,0,z)$.

(1)由$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AB}=0$,

得$\left(x-\frac{a}{2}\right)\cdot a=0$,得 $x=\frac{a}{2}$.

所以 P 为 A_1B 的中点,

即$\frac{A_1P}{PB}=1$时,$PC\perp AB$.

(2)当$\frac{A_1P}{PB}=\frac{2}{3}$时,由$\overrightarrow{A_1P}=\frac{2}{3}\overrightarrow{PB}$,

得$(x,0,z-a)=\frac{2}{3}\cdot(a-x,0,-z)$,

即$\begin{cases}3x=2a-2x,\\ 3(z-a)=-2z,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=\frac{2}{5}a,\\ z=\frac{3a}{5},\end{cases}$

即 $P\left(\frac{2}{5}a,0,\frac{3a}{5}\right)$.

设平面 PAC 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x',y',z')$,

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}\frac{2}{5}ax'+\frac{3a}{5}z'=0,\\ \frac{a}{2}x'+\frac{\sqrt{3}}{2}ay'=0.\end{cases}$

令 $x'=3$,则 $y'=-\sqrt{3}$,$z'=-2$,

所以 $\boldsymbol{n}=(3,-\sqrt{3},-2)$.

又平面 ABC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n_0}=(0,0,1)$,

故 $\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{n_0}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n_0}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{n_0}|}=\frac{-2}{4\times1}=-\frac{1}{2}$.

设二面角 P-AC-B 为 θ, 结合图形知 θ 为锐角.

则 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{n_0}\rangle|=\frac{1}{2}$,故 $\theta=60°$.

所以二面角 P-AC-B 的大小为 60°.

(3)设点 C_1 到平面 PAC 的距离为 d,

则 $d=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{C_1C}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{2a}{4}=\frac{a}{2}$.

所以点 C_1 到平面 PAC 的距离为$\frac{a}{2}$.

2019-2020 学年

数学·人教 A(选修 2-1)答案页第 2 期

学习周报® ②

第 5 期

第 3~4 版同步周测参考答案

一、选择题

1~6.ACABBD　　7~12.CBACCA

二、填空题

13.$y^2=20x$

14.$\left(-\frac{7}{16},0\right)$

提示: 抛物线的标准方程是 $y^2=-\frac{7}{4}x$,则焦点在 x 轴的负半轴上,且 $2p=\frac{7}{4}$,故焦点坐标是$\left(-\frac{7}{16},0\right)$.

15.$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

提示: 设机器人为 $A(x,y)$,依题意得点 A 在以 $F(1,0)$为焦点,$x=-1$ 为准线的抛物线上,该抛物线的标准方程为 $y^2=4x$.

过点 $P(-1,0)$,斜率为 k 的直线为 $y=k(x+1)$.

由$\begin{cases}y^2=4x,\\ y=kx+k,\end{cases}$得 $ky^2-4y+4k=0$.

当 $k=0$ 时,显然不符合题意;

当 $k\neq0$ 时,

依题意得 $\Delta=(-4)^2-4k\cdot4k<0$,

化简得 $k^2-1>0$,解得 $k>1$ 或 $k<-1$,

因此 k 的取值范围为$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

16.2

提示: 因为$F(1,0)$,所以直线AB:$y=k(x-1)$,与$y^2=4x$联立,化简可得$k^2x^2-2(2+k^2)x+k^2=0$.

设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,

则$x_1+x_2=\frac{4+2k^2}{k^2}$,$x_1x_2=1$.

所以$y_1+y_2=k(x_1+x_2-2)=\frac{4}{k}$,

$y_1y_2=k^2[x_1x_2-(x_1+x_2)+1]=-4$.

由$\angle AMB=90°$,得$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.

又$\overrightarrow{MA}=(x_1+1,y_1-1)$,$\overrightarrow{MB}=(x_2+1,y_2-1)$,

所以$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(x_1+1)(x_2+1)+(y_1-1)\cdot(y_2-1)=x_1x_2+(x_1+x_2)+y_1y_2-(y_1+y_2)+2=0$,

即$1+2+\frac{4}{k^2}-4-\frac{4}{k}+2=0$,解得$k=2$.

三、解答题

17.**解:** 双曲线的标准方程为$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$,故其焦点坐标为$(\pm3,0)$.

所以所求抛物线的标准方程为$y^2=-12x$或$y^2=12x$.

18.**解:** 设$B\left(x,\frac{x^2}{2p}\right)$,又$F\left(0,\frac{p}{2}\right)$,

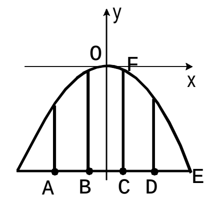
则 $x+0=2\sqrt{3}$, 即 $x=2\sqrt{3}$.

所以$B\left(2\sqrt{3},\frac{6}{p}\right)$.

因为$|BF|=2|AF|$,结合抛物线的定义,得$\frac{6}{p}+\frac{p}{2}=2\sqrt{3+\frac{p^2}{4}}$,解得$p=\pm2$.

又$p>0$,所以$p=2$.

19.**解:** 建立如图所示的平面直角坐标系.



(第19题图)

设抛物线方程为$x^2=-2py(p>0)$.

由题意,得点E的坐标为$(10,-4)$,

将其代入抛物线方程,解得$p=\frac{25}{2}$.

所以抛物线方程为$x^2=-25y$.

设点$F(2,b)$,则$b=-\frac{4}{25}$.

故最长支柱的长$|CF|=4-\frac{4}{25}=\frac{96}{25}$(m).

20.**解:** 由 $y^2=4x$,得 $p=2$,其准线方程为 $x=-1$,焦点为 $F(1,0)$.

(1)由抛物线的定义可知,

$|AF|=x_1+\frac{p}{2}$,从而 $x_1=4-1=3$.

代入 $y^2=4x$ 中,解得 $y_1=\pm2\sqrt{3}$.

所以点 A 的坐标为$(3,2\sqrt{3})$或$(3,-2\sqrt{3})$.

(2)当直线 l 的斜率存在时,

设直线 l 的方程为 $y=k(x-1)$.

与抛物线方程联立并消去 y,

整理得 $k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$,

则 $x_1+x_2=2+\frac{4}{k^2}$.

所以$|AB|=x_1+x_2+p=4+\frac{4}{k^2}>4$.

当直线 l 的斜率不存在时, 直线 l 的方程为 $x=1$,此时$|AB|=4$,

所以$|AB|\geqslant4$, 即线段 AB 的长的最小值为 4.

21.(1)**解:** 联立$x^2=-y$与$y=kx-3$,

得$x^2+kx-3=0$.

因为$\Delta_1=k^2+12>0$,

所以l与抛物线$x^2=-y$恒有2个交点.

若$m\geqslant3$,则l与抛物线$x^2=4y$至少有1个交点.

联立$x^2=4y$与$y=kx-3$,得$x^2-4kx+12=0$.

所以$\Delta_2=16k^2-48\geqslant0$.结合 $k>0$,得 $k\geqslant\sqrt{3}$.所以k的最小值为$\sqrt{3}$.

(2)**证明:** 若$m=3$,则l与抛物线$x^2=4y$只有1个交点.

结合(1),可知$k=\sqrt{3}$,$A(2\sqrt{3},3)$.

由于$F(0,1)$为抛物线$x^2=4y$的焦点,

则$|\overrightarrow{FA}|=3+1=4$.

设$B(x_1,y_1)$,$C(x_2,y_2)$,

则$x_1+x_2=-k=-\sqrt{3}$,$x_1x_2=-3$.

所以 $y_1+y_2=k(x_1+x_2)-6=-9$,$y_1y_2=(kx_1-3)(kx_2-3)=k^2x_1x_2-3k(x_1+x_2)+9=9$.

所以 $\overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{FC}=x_1x_2+(y_1-1)(y_2-1)=x_1x_2+y_1y_2-(y_1+y_2)+1=16$.

所以$\overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{FC}=|\overrightarrow{FA}|^2$.

22.**解:** (1)由抛物线的性质,可得$\frac{p}{2}=1$,所以 $p=2$,所以抛物线的准线方程为 $x=-1$.

(2)设 $A(x_A,y_A)$,$B(x_B,y_B)$,$C(x_C,y_C)$,重心 $G(x_G,y_G)$.由(1)知抛物线方程为 $y^2=4x$.

令 $y_A=2t$,$t\neq0$, 则 $x_A=t^2$, 由于直线 AB 过 F,故直线 AB 的方程为 $x=\frac{t^2-1}{2t}\cdot y+1$,

代入 $y^2=4x$,得 $y^2-\frac{2(t^2-1)}{t}y-4=0$,

所以 $y_A\cdot y_B=2ty_B=-4$,即 $y_B=-\frac{2}{t}$,

所以 $B\left(\frac{1}{t^2},-\frac{2}{t}\right)$.

又 $x_G=\frac{1}{3}(x_A+x_B+x_C)$,$y_G=\frac{1}{3}(y_A+y_B+y_C)$,

因为重心 G 在 x 轴上,所以 $2t-\frac{2}{t}+y_C=0$,

所以 $C\left(\left(\frac{1}{t}-t\right)^2,2\left(\frac{1}{t}-t\right)\right)$,$G\left(\frac{2t^4-2t^2+2}{3t^2},0\right)$, 所以直线 AC 的方程为 $y-2t=2t(x-t^2)$,得 $Q(t^2-1,0)$,因为 Q 在焦点 F 的右侧,所以 $t^2>2$,

所以$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{1}{2}|FG|\cdot|y_A|}{\frac{1}{2}|QG|\cdot|y_C|}$

$=\frac{\left|\frac{2t^4-5t^2+2}{3t^2}\right|\cdot|2t|}{\left|t^2-1-\frac{2t^4-2t^2+2}{3t^2}\right|\cdot\left|\frac{2}{t}-2t\right|}$

$=\frac{2t^4-t^2}{t^4-1}=2-\frac{t^2-2}{t^4-1}$.

令 $m=t^2-2$,则 $m>0$,$\frac{S_1}{S_2}=2-\frac{m}{m^2+4m+3}=2-\frac{1}{m+\frac{3}{m}+4}\geqslant2-\frac{1}{2\sqrt{m\cdot\frac{3}{m}}+4}=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以当且仅当 $m=\sqrt{3}$ 时,$\frac{S_1}{S_2}$取得最小值,最小值为 $1+\frac{\sqrt{3}}{2}$,此时 $G(2,0)$.

第 6 期
第 2~3 版章节测试参考答案

一、选择题

1~6.DAABDC　　7~12.DDCAAA

二、填空题

13.2

提示:由抛物线的定义,得动点Q到焦点的距离的最小值为顶点到准线的距离,即$\frac{p}{2}=1$,$p=2$.

14.8

提示:根据双曲线的定义,有$|MF_2|-|MF_1|=2a=4$,$|NF_2|-|NF_1|=2a=4$,两式相加,得$|MF_2|+|NF_2|-|MN|=8$.

15.$\pm\frac{\sqrt{3}}{4}$

16.$\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$

三、解答题

17.解:设点$N(x,y)$.因为N是EF的中点,$F(2,0)$,所以$E(2x-2,2y)$.又E是OM的中点,$O(0,0)$,所以$M(4x-4,4y)$.将其代入抛物线方程中,得$(4y)^2=8(4x-4)$,即$y^2=2x-2$,此即为点N的轨迹方程.

18.解:(1)把$M\left(\frac{2}{3},-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$代入方程$y^2=2px$,

得$p=2$,因此抛物线的方程为$y^2=4x$.

(2)抛物线的准线方程为$x=-1$,

所以$F_1(-1,0)$,设双曲线的右焦点为F,则$F(1,0)$,于是$2a=|MF_1|-|MF|=\frac{7}{3}-\frac{5}{3}=\frac{2}{3}$,因此$a=\frac{1}{3}$.

因为$c=1$,所以$b^2=c^2-a^2=\frac{8}{9}$,

于是,双曲线的方程为$\frac{x^2}{\frac{1}{9}}-\frac{y^2}{\frac{8}{9}}=1$.

19.解:由题意,知抛物线的焦点在x轴上,可设抛物线的方程为$y^2=ax(a\neq0)$.

由点$M\left(\frac{2}{3},-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$在抛物线上,

得$\left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2=\frac{2}{3}a$,解得$a=4$.

所以所求抛物线的方程为$y^2=4x$.

因为点$M\left(\frac{2}{3},-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$在椭圆上,

所以$\frac{4}{9a^2}+\frac{24}{9b^2}=1$.　　①

又$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{1}{2}$,　　②

由①②,可得$a^2=4$,$b^2=3$.

所以所求椭圆的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

20.解:(1)当k不存在时,直线l的方程为$x=1$,代入双曲线的方程,得$y=0$,即l与C有一个交点.

当k存在时,设直线l的方程为

$y=k(x-1)+2$,

代入C的方程,并整理,得

$(2-k^2)x^2+2(k^2-2k)x-k^2+4k-6=0$.

当$2-k^2=0$,即$k=\pm\sqrt{2}$时,上述方程有唯一解.

当$2-k^2\neq0$,即$k\neq\pm\sqrt{2}$时,$\Delta=16(3-2k)$.由$\Delta=0$,解得$k=\frac{3}{2}$;由$\Delta>0$,解得$k<\frac{3}{2}$;由$\Delta<0$,解得$k>\frac{3}{2}$.

所以,当$k\in\{k\mid k$不存在,或$k=\pm\sqrt{2}$,或$k=\frac{3}{2}\}$时,l与C只有一个交点;当$k\in\left\{k\middle|k<\frac{3}{2},且k\neq\pm\sqrt{2}\right\}$时,$l$与$C$有两个交点;当$k\in\left\{k\middle|k>\frac{3}{2}\right\}$时,$l$与$C$无交点.

(2)设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,由(1)知,

$x_1+x_2=\frac{2(k^2-2k)}{k^2-2}=2\times1$,解得$k=1$.

所以直线AB的方程为$x-y+1=0$.

21.(1)解:抛物线$C:x^2=-2py$经过点$(2,-1)$,可得$4=2p$,即$p=2$,

可得抛物线C的方程为$x^2=-4y$,其准线方程为$y=1$.

(2)证明:抛物线C的焦点为$F(0,-1)$,

设直线l的方程为$y=kx-1(k\neq0)$,

由$\begin{cases}y=kx-1,\\x^2=-4y,\end{cases}$可得$x^2+4kx-4=0$.

设$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,

可得$x_1+x_2=-4k$,$x_1x_2=-4$,

直线OM的方程为$y=\frac{y_1}{x_1}x$,

即$y=-\frac{x_1}{4}x$,

直线ON的方程为$y=\frac{y_2}{x_2}x$,

即$y=-\frac{x_2}{4}x$,

可得$A\left(\frac{4}{x_1},-1\right)$,$B\left(\frac{4}{x_2},-1\right)$,

可得AB的中点的横坐标为$2\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)=2\cdot\frac{-4k}{-4}=2k$,

即有AB为直径的圆的圆心为$(2k,-1)$,

半径为$\frac{|AB|}{2}=\frac{1}{2}\left|\frac{4}{x_1}-\frac{4}{x_2}\right|=2\cdot\frac{\sqrt{16k^2+16}}{4}=2\sqrt{1+k^2}$,

可得圆的方程为

$(x-2k)^2+(y+1)^2=4(1+k^2)$,

化简得$x^2-4kx+(y+1)^2=4$,

由$x=0$,可得$y=1$,或$y=-3$.

则以AB为直径的圆经过y轴上的两个定点$(0,1)$,$(0,-3)$.

22.(1)解:由题意得$\frac{y}{x+2}\cdot\frac{y}{x-2}=-\frac{1}{2}$,

整理得曲线C的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$$(y\neq0)$,

所以曲线C是焦点在x轴上不含长轴端点的椭圆.

(2)(i)证明:设$G(x_G,y_G)$,$P(x_0,y_0)$,则$Q(-x_0,-y_0)$,$E(x_0,0)$,

所以直线QE的方程为$y=\frac{y_0}{2x_0}(x-x_0)$,

与$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$联立消去y,

得$(2x_0^2+y_0^2)x^2-2x_0y_0^2x+x_0^2y_0^2-8x_0^2=0$,

所以$-x_0x_G=\frac{x_0^2y_0^2-8x_0^2}{2x_0^2+y_0^2}$,

所以$x_G=\frac{(8-y_0^2)x_0}{2x_0^2+y_0^2}$,

所以$y_G=\frac{y_0}{2x_0}(x_G-x_0)=\frac{y_0(4-x_0^2-y_0^2)}{2x_0^2+y_0^2}$,

所以$k_{PG}=\frac{y_G-y_0}{x_G-x_0}=\frac{\frac{y_0(4-x_0^2-y_0^2)}{2x_0^2+y_0^2}-y_0}{\frac{x_0(8-y_0^2)}{2x_0^2+y_0^2}-x_0}$

$=\frac{4y_0-y_0x_0^2-y_0^3-2y_0x_0^2-y_0^3}{8x_0-x_0y_0^2-2x_0^3-x_0y_0^2}$

$=\frac{4y_0-y_0x_0^2-y_0^3-2y_0x_0^2-y_0^3}{2x_0(4-y_0^2-x_0^2)}$,

把$x_0^2+2y_0^2=4$代入上式,

得$k_{PG}=\frac{y_0(x_0^2-3x_0^2)}{2x_0(4-y_0^2-4+2y_0^2)}$

$=\frac{-y_0\cdot2x_0^2}{2x_0y_0^2}=-\frac{x_0}{y_0}$,

所以$k_{PQ}\cdot k_{PG}=\frac{y_0}{x_0}\cdot\left(-\frac{x_0}{y_0}\right)=-1$,

所以$PQ\perp PG$,

故△PQG为直角三角形.

(ii)解:$S_{\triangle PQG}=\frac{1}{2}|PE|\cdot(x_G-x_Q)$

$=\frac{1}{2}y_0(x_G+x_0)=\frac{1}{2}y_0\left[\frac{(8-y_0^2)x_0}{2x_0^2+y_0^2}+x_0\right]$

$=\frac{1}{2}y_0x_0\cdot\frac{8-y_0^2+2x_0^2+y_0^2}{2x_0^2+y_0^2}$

$=\frac{y_0x_0(4+x_0^2)}{2x_0^2+y_0^2}=\frac{y_0x_0(x_0^2+2y_0^2+x_0^2)}{2x_0^2+y_0^2}$

$=\frac{2y_0x_0(x_0^2+y_0^2)}{2x_0^2+y_0^2}=\frac{8y_0x_0(x_0^2+y_0^2)}{(2x_0^2+y_0^2)(x_0^2+2y_0^2)}$

$=\frac{8(y_0x_0^3+x_0y_0^3)}{2x_0^4+2y_0^4+5x_0^2y_0^2}=\frac{8\left(\frac{x_0}{y_0}+\frac{y_0}{x_0}\right)}{2\left(\frac{x_0}{y_0}+\frac{y_0}{x_0}\right)^2+1}$.

令$t=\frac{x_0}{y_0}+\frac{y_0}{x_0}$,$x_0>0$,$y_0>0$,则$t\geqslant2$,

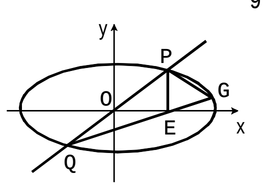
$S_{\triangle PQG}=\frac{8t}{2t^2+1}=\frac{8}{2t+\frac{1}{t}}$,

易知“对号”函数$f(t)=2t+\frac{1}{t}$在$[2,+\infty)$上为增函数,

$f(t)\geqslant4+\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$($t=2$时取等号),

所以$S_{\triangle PQG}\leqslant\frac{8}{\frac{9}{2}}=\frac{16}{9}$$\left(此时x_0=y_0=\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$,

故△PQG面积的最大值为$\frac{16}{9}$.



(第 22 题图)

第 7 期
第 3~4 版同步周测参考答案

一、选择题

1~6.CCCBCB　　7~12.DBBCBA

二、填空题

13.8

14.-4

15.-15

16.(1,1,1)

提示:设$DP=y>0$,则$A(2,0,0)$,$B(2,2,0)$,$P(0,0,y)$,$E\left(1,1,\frac{y}{2}\right)$,$\overrightarrow{DP}=(0,0,y)$,$\overrightarrow{AE}=\left(-1,1,\frac{y}{2}\right)$.所以$\cos\langle\overrightarrow{DP},\overrightarrow{AE}\rangle=\frac{\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{AE}}{|\overrightarrow{DP}||\overrightarrow{AE}|}=\frac{\frac{1}{2}y^2}{y\sqrt{2+\frac{y^2}{4}}}=\frac{y}{\sqrt{8+y^2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,解得$y=2$,所以$E(1,1,1)$.

三、解答题

17.解:(1)由G为△BCD的重心,

知$\overrightarrow{GE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BE}$,

又E,F为CD,AD的中点,

所以$\overrightarrow{EF}\parallel\overrightarrow{AC}$,且$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$,

所以$\overrightarrow{AG}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$

$=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}$.

(2)由向量加法的平行四边形法则及几何意义,知

$\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{AH}$,$\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AF}$,

所以$\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{FH}$.

18.解:(1)因为$\overrightarrow{BC}=(-2,-1,2)$,

且$c\parallel\overrightarrow{BC}$,

所以设$c=\lambda\overrightarrow{BC}=(-2\lambda,-\lambda,2\lambda)$,

得$|c|=\sqrt{(-2\lambda)^2+(-\lambda)^2+(2\lambda)^2}=3|\lambda|=3$,

解得$\lambda=\pm1$.

即$c=(-2,-1,2)$或$c=(2,1,-2)$.

(2)因为$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}=(1,1,0)$,$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}=(-1,0,2)$,

所以$k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(k-1,k,2)$,$k\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(k+2,k,-4)$.

又因为$(k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp(k\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$,

所以$(k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(k\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=0$.

即$(k-1,k,2)\cdot(k+2,k,-4)=2k^2+k-10=0$.

解得$k=2$或$k=-\frac{5}{2}$.

19.解:(1)因为$\overrightarrow{HF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{EG}$,$\overrightarrow{EH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{GF}$,

所以四边形$EGFH$是平行四边形.

又$AC=BD$,

所以四边形$EGFH$是菱形,

所以$\overrightarrow{EF}\perp\overrightarrow{HG}$,

故$\overrightarrow{EF}$与$\overrightarrow{GH}$的夹角为$90°$.

(2)由(1),同理可证$\overrightarrow{EF}\perp\overrightarrow{MN}$,

所以$EF\perp$平面$MHNG$,

所以$EF\perp HN$,$EF\perp MG$,

故$\overrightarrow{EF}\cdot(\overrightarrow{NH}+\overrightarrow{MG})=0$.

20.解:由于$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$,

则$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=0$,

即$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}|^2}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$.

又$(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\perp(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$,则

$(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{b}^2-3\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2|\boldsymbol{a}|^2-2|\boldsymbol{b}|^2-3|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=0$,

即$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{2|\boldsymbol{a}|^2-2|\boldsymbol{b}|^2}{3|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$.

所以$\frac{|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}|^2}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{2|\boldsymbol{a}|^2-2|\boldsymbol{b}|^2}{3|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$,

即$5|\boldsymbol{b}|^2=8|\boldsymbol{a}|^2$,

则$|\boldsymbol{b}|=\frac{2\sqrt{10}}{5}|\boldsymbol{a}|$,

所以$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}|^2}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$

$=\frac{\frac{8}{5}|\boldsymbol{a}|^2-2|a|^2}{|\boldsymbol{a}|\cdot\frac{2\sqrt{10}}{5}|a|}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$.

21.解:以点D为原点O,DA,DC,DD_1分别为x,y,z轴建立空间直角坐标系,

则$D(0,0,0)$,$B(1,1,0)$,$A_1(1,0,\lambda)$.

设$P(0,1,x)$,其中$x\in[0,\lambda]$,

则$\overrightarrow{BP}=(-1,0,x)$,$\overrightarrow{A_1P}=(-1,1,x-\lambda)$.

因为$A_1P\perp PB$,所以$\overrightarrow{A_1P}\cdot\overrightarrow{BP}=0$,

代入化简得$x^2-\lambda x+1=0$.

由点P唯一,得$\Delta=\lambda^2-4=0$,且$\lambda>0$,

解得$\lambda=2$.

22.(1)证明:因为$\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}$

$=\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}\right)+\left(\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}\right)$

$=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE})+(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF})=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}$,

所以A,E,C_1,F四点共面.

(2)解:因为$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE})$

$=\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{DD_1}-\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BB_1}$

$=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}$,

所以$x=-1$,$y=1$,$z=\frac{1}{3}$,

所以$x+y+z=\frac{1}{3}$.