① 第4期

第3~4版同步周测参考答案

一、选择题

1~6.ACABCA　7~12.BCCADB

二、填空题

13. $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1(y<0)$

提示：由已知关系式可知点M与$A(0,5)$,$B(0,-5)$的距离之差等于8,则点M的轨迹是焦点在y轴上的双曲线的下支,其中$a=4$,$c=5$,则$b^2=9$.所以点M的轨迹方程为$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1(y<0)$.

14. 2或$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

提示：当双曲线的焦点在x轴上时,有$\frac{b}{a}=\sqrt{3}$,则离心率$e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=2$;当双曲线的焦点在$y$轴上时,有$\frac{a}{b}=\sqrt{3}$,同理,得$e=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

15. $\frac{4}{5}$

提示：由方程$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$知$a^2=16$,$b^2=9$,即$a=4$,$c=\sqrt{16+9}=5$.在$\triangle ABP$中,利用正弦定理和双曲线的定义知,$\frac{|\sin A-\sin B|}{\sin P}=\frac{||PB|-|PA||}{|AB|}=\frac{2a}{2c}=\frac{2\times4}{2\times5}=\frac{4}{5}$.

16. $12\sqrt{6}$

提示：设左焦点为F_1,$|PF|-|PF_1|=2a=2$,所以$|PF|=2+|PF_1|$,$\triangle APF$的周长为$|AF|+|AP|+|PF|=|AF|+|AP|+2+|PF_1|$,$\triangle APF$周长最小即为$|AP|+|PF_1|$最小,当$A,P,F_1$在一条直线上时最小,过$AF_1$的直线方程为$\frac{x}{-3}+\frac{y}{6\sqrt{6}}=1$,与$x^2-\frac{y^2}{8}=1$联立,解得$P$点坐标为$(-2,2\sqrt{6})$,此时$S=S_{\triangle AF_1F}-S_{\triangle F_1PF}=12\sqrt{6}$.

三、解答题

17.解：双曲线中,$a=3$,$c=5$.不妨设$|PF_1|>|PF_2|$,则$|PF_1|-|PF_2|=2a=6$.又$|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot\cos60^\circ$,而$|F_1F_2|=2c=10$,得$|PF_1|^2+|PF_2|^2-|PF_1|\cdot|PF_2|=(|PF_1|-|PF_2|)^2+|PF_1|\cdot|PF_2|=100$,所以$|PF_1|\cdot|PF_2|=64$.故$\triangle F_1PF_2$的面积$S=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|\sin60^\circ=16\sqrt{3}$.

18.解：设重心$G(x,y)$,点$P(m,n)$,因为$F_1(-5,0)$,$F_2(5,0)$,

则有$\begin{cases}x=\frac{-5+5+m}{3},\\ y=\frac{0+0+n}{3},\end{cases}$故$\begin{cases}m=3x,\\ n=3y,\end{cases}$代入双曲线$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$中,得$\frac{9x^2}{16}-y^2=1$.

又P与F_1F_2不共线,所以$y\neq0$,故所求轨迹方程为$\frac{9x^2}{16}-y^2=1(y\neq0)$.

19.解：直线l的方程为$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$,即$bx+ay-ab=0$,则点$(1,0)$到直线$l$的距离$d_1=\frac{b(a-1)}{\sqrt{a^2+b^2}}$,点$(-1,0)$到直线$l$的距离$d_2=\frac{b(a+1)}{\sqrt{a^2+b^2}}$,$s=d_1+d_2=\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{2ab}{c}\geq\frac{4}{5}c$,即$5a\sqrt{c^2-a^2}\geq2c^2$,

于是有$5\sqrt{e^2-1}\geq2e^2$,

即$4e^4-25e^2+25\leq0$,得$\frac{5}{4}\leq e^2\leq5$.

又$e>1$,所以e的取值范围是$\left[\frac{\sqrt{5}}{2},\sqrt{5}\right]$.

20.解：以直线AB为x轴,线段AB的垂直平分线为y轴,建立直角坐标系,如下图,则$A(3,0)$,$B(-3,0)$.

因为$|PB|-|PA|=4<6$,

所以P在双曲线的右支上,

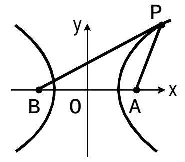
且$a=2$,$c=3$,$b=\sqrt{5}$.

所以P在双曲线$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$右支上.

因为P在A的北偏东30°方向,

所以$k_{AP}=\tan60^\circ=\sqrt{3}$.

所以AP所在直线的方程为$y=\sqrt{3}\cdot(x-3)$.与双曲线方程联立,解得点P的坐标为$(8,5\sqrt{3})$或$\left(\frac{16}{7},-\frac{5\sqrt{3}}{7}\right)$(舍去),所以$A,P$两地的距离$|AP|=10$千米.



（第20题图）

21.解：(1)双曲线的右焦点为$F(\sqrt{2},0)$,渐近线方程为$x\pm y=0$,

则圆心F到渐近线的距离$d=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$.所以圆的方程为$(x-\sqrt{2})^2+y^2=1$.

(2)设$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,经过点P的直线方程为$y=kx-1$(k显然存在).

联立方程组$\begin{cases}x^2-y^2=1,\\ y=kx-1,\end{cases}$消去$y$,

整理得$(1-k^2)x^2+2kx-2=0$.

所以$\Delta=(2k)^2-4(1-k^2)(-2)=8-4k^2>0$,且$x_1+x_2=\frac{-2k}{1-k^2}>0$,$x_1x_2=\frac{-2}{1-k^2}>0$,解得$1<k<\sqrt{2}$.又$y_1+y_2=k(x_1+x_2)-2=\frac{-2}{1-k^2}$,

所以线段MN的中点为$\left(\frac{-k}{1-k^2},\frac{-1}{1-k^2}\right)$,

垂直平分线的方程为

$y+\frac{1}{1-k^2}=-\frac{1}{k}\left(x+\frac{k}{1-k^2}\right)$.

令$x=0$,得截距$t=\frac{2}{k^2-1}>2$.

故t的取值范围是$(2,+\infty)$.

22.解：(1)双曲线C的焦点在坐标轴上,其渐近线方程为$y=\pm\sqrt{2}x$,

则可设双曲线C的方程为$x^2-\frac{y^2}{2}=\lambda$,将点$P\left(\frac{\sqrt{6}}{2},1\right)$代入双曲线$C$的方程,可得$\lambda=1$,所以双曲线$C$的标准方程为$x^2-\frac{y^2}{2}=1$.

(2)假设存在被点$B(1,1)$平分的弦.

设$B(1,1)$是弦MN的中点,且$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,则$x_1+x_2=2$,$y_1+y_2=2$.

因为点M,N在双曲线C上,所以$\begin{cases}2x_1^2-y_1^2=2,\\ 2x_2^2-y_2^2=2,\end{cases}$所以$2(x_1+x_2)(x_1-x_2)-(y_1-y_2)\cdot(y_1+y_2)=0$,所以$4(x_1-x_2)=2(y_1-y_2)$,

所以$k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=2$,

所以直线MN的方程为$y-1=2(x-1)$,

即$2x-y-1=0$,由$\begin{cases}2x^2-y^2=2,\\ 2x-y-1=0,\end{cases}$

得$2x^2-4x+3=0$,

因为$\Delta=16-4\times3\times2=-8<0$,所以直线$MN$与双曲线$C$无交点,所以不存在被点$B(1,1)$平分的弦.

2019-2020学年
数学·人教A(选修2-1)答案页第1期　学习周报® ①

第1期

第3~4版同步周测参考答案

一、选择题

1.B

提示：只有④正确.

2.A

3.C

4.C

提示：原命题与逆否命题同真假,故选C.

5.D

提示：只有选项D中的命题是真命题,即$p\Rightarrow q$,故p是q的充分条件.

6.C

提示：$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$的夹角为锐角$\Rightarrow|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|>|\overrightarrow{BC}|$,且$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|>|\overrightarrow{BC}|\Rightarrow\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$的夹角为锐角,故选C.

7.D

8.D

9.C

提示：对于命题p,当公差$d=0$时,$S_n=na_1$,此时点(n,S_n)在一条直线上,所以p为假命题,逆否命题s也为假命题.对于命题r,若$mx^2+(2m-2)x-1>0$的解集为$\mathbf{R}$,则$m\neq0$且$(2m-2)^2+4m<0$,无解,所以r为假命题.故选C.

10.C

提示：一次函数$y=-\frac{m}{n}x+\frac{1}{n}$的图象同时经过第一、三、四象限$\Rightarrow-\frac{m}{n}>0$,且$\frac{1}{n}<0\Rightarrow m>0$,且$n<0\Rightarrow mn<0$,反之不可以.故选C.

11.B

提示：根据命题的等价性可得.

12.D

提示：因为$f(x)$是$\mathbf{R}$上的增函数,且$f(-1)=-4$,

所以$Q=\{x|f(x)<-4\}=\{x|x<-1\}$.

同理,得$P=\{x|f(x+t)<2\}=\{x|x+t<2\}=\{x|x<2-t\}$.

因为"$x\in P$"是"$x\in Q$"的充分不必要条件,

所以$P\subsetneqq Q$.故$2-t<-1$,解得$t>3$.

二、填空题

13.$A=60^\circ$,$B=30^\circ$(答案不唯一)

14.若$(\complement_UA)\cap(\complement_UB)=\complement_UB$,则$A\subsetneqq B$

提示：否命题与逆否命题互为逆否命题,故命题p的逆否命题是：若$(\complement_UA)\cap(\complement_UB)=\complement_UB$,则$A\subsetneqq B$.

15.1;4

提示：由$|x|\leq m(m>0)$,可得$-m\leq x\leq m$.若p是q的充分条件,则$-m\geq-1$且$m\leq4$,解得$0<m\leq1$,则m的最大值为1;若p是q的必要条件,则$-m\leq-1$且$m\geq4$,解得$m\geq4$,则m的最小值为4.

16.$(0,2)$

提示：由$\frac{x-2m}{x+m}<0(m>0)$,得$p:x\in(-m,2m)$.由$x(x-4)<0$,得$q:x\in(0,4)$.

根据题意,可知上述两区间相交但不存在包含关系,结合$m>0$,得$0<2m<4$,所以m的取值范围是$(0,2)$.

三、解答题

17.解：原命题可改写为：若一个函数是单调函数,则该函数不是周期函数.

故逆命题为：若一个函数不是周期函数,则该函数是单调函数;

否命题为：若一个函数不是单调函数,则该函数是周期函数;

逆否命题为：若一个函数是周期函数,则该函数不是单调函数.

18.证明：因为一个命题的原命题与逆否命题具有相同的真假性,所以可证明原命题为真命题.

因为$a+b\geq0$,所以$a\geq-b$,$b\geq-a$.

因为$f(x)$是$\mathbf{R}$上的增函数,

所以$f(a)\geq f(-b)$,$f(b)\geq f(-a)$,

所以$f(a)+f(b)\geq f(-a)+f(-b)$.

所以原命题为真命题,故其逆否命题为真命题.

19.解：若方程$x^2+mx+1=0$有实数根,则$\Delta_1=m^2-4\geq0$,所以$p:m\geq2$或$m\leq-2$;

若方程$4x^2+4(m-2)x+1=0$无实数根,则$\Delta_2=16(m-2)^2-16<0$,所以$q:1<m<3$.

由p真q假,得$\begin{cases}m\geq2或m\leq-2,\\ m\geq3或m\leq1,\end{cases}$

所以$m\geq3$或$m\leq-2$;

由p假q真,得$\begin{cases}-2<m<2,\\ 1<m<3,\end{cases}$

所以$1<m<2$.

所以实数m的取值范围为$(-\infty,-2]\cup(1,2)\cup[3,+\infty)$.

20.解：由$(x-1+m)(x-1-m)\geq0$,其中$m>0\Rightarrow p:x\in\{x|x\geq1+m或x\leq1-m\}$.

由$x=n+\frac{1}{n}$,结合基本不等式,

得$q:x\in\{x|x\geq2或x\leq-2\}$.

又p是q的必要条件,即$q\Rightarrow p$,

故$\{x|x\geq2或x\leq-2\}\subseteq\{x|x\geq1+m或x\leq1-m\}$,

所以$1-m\geq-2$且$1+m\leq2$,

又$m>0$,故$0<m\leq1$.

所以实数m的取值范围是$(0,1]$.

21.证明：充分性：因为$a+b=0$,

所以$S_n=aq^n+b=aq^n-a$,

所以$a_n=S_n-S_{n-1}=(aq^n-a)-(aq^{n-1}-a)=a(q-1)q^{n-1}(n>1)$.

又$a_1=aq-a=a(q-1)$满足上式,

所以$a_n=a(q-1)q^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$.

所以$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a(q-1)q^n}{a(q-1)q^{n-1}}=q$.

故数列$\{a_n\}$是公比为q的等比数列.

必要性：因为数列$\{a_n\}$是公比为q的等比数列,

所以$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1}{1-q}-\frac{a_1}{1-q}q^n$.

因为$S_n=aq^n+b$,

所以$a=-\frac{a_1}{1-q}$,$b=\frac{a_1}{1-q}$.

所以$a+b=0$.

综上,结论得证.

22.解：(1)由题设,得$A=\left(0,\frac{1}{\square}\right)$,$B=(-1,4)$,$C=\left(0,\frac{1}{3}\right)$.

由A是B成立的充分不必要条件,知$A\subsetneqq B$,故$\frac{1}{\square}\leq4$.

又$\square>0$,所以$\square\geq\frac{1}{4}$.　①

由A是C成立的必要不充分条件,知$C\subsetneqq A$,故$\frac{1}{\square}>\frac{1}{3}$,得$\square<3$.　②

由①②及$\square$是正整数,得$\square=1$或2.

(2)$D=\{x|x^2+(a-8)x-8a\leq0\}=\{x|(x+a)(x-8)\leq0\}$.

当$\square=1$时,$A=(0,1)$,此时$A\cap D=\left(0,\frac{1}{2}\right)$不可能成立.

当$\square=2$时,$A=\left(0,\frac{1}{2}\right)$,此时要使$A\cap D=\left(0,\frac{1}{2}\right)$,则$-a\leq0$,即$a\geq0$.

故使得$A\cap D=\left(0,\frac{1}{2}\right)$的一个必要不充分条件是$a\in[-1,+\infty)$.(答案不唯一)

① 第 2 期

第 3~4 版章节测试参考答案

一、选择题

1.B

2.D

提示:①等底等高的三角形都是面积相等的三角形,但不一定全等;②当 x,y 中一个为零,另一个不为零时,$|x|+|y|\neq 0$;③当 c=0 时不成立;④菱形的对角线互相垂直,矩形的对角线不一定垂直.

3.A　4.D　5.C

6.A

提示:因为 a>0,b>0,所以 $4\geqslant a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$,得 $ab\leqslant 4$;若 a=4,$b=\frac{1}{4}$,则 $ab=1\leqslant 4$,但 $a+b=4+\frac{1}{4}>4$,所以“$a+b\leqslant 4$”是“$ab\leqslant 4$”的充分不必要条件.

7.D

提示:由¬p 是真命题,得 p 是假命题.又 p∨q 是真命题,所以 q 是真命题.

8.B

9.B

提示:$a^2>b^2$,$\frac{a}{b}<1$ 不能推出 $a>b$,$\left(\frac{1}{2}\right)^a<\left(\frac{1}{2}\right)^b\Leftrightarrow a>b$.

10.A

提示:作出平面区域 D,可知 p 是真命题,则¬p 是假命题;q 是假命题,则¬q 是真命题.所以 p∨q 真,¬p∨q 假,p∧¬q 真,¬p∧¬q 假.故选 A.

11.C

提示:$A=\{x|-1<x<1\}$;当 $a=1$ 时,$B=\{x|b-1<x<3\}$.若“$a=1$”是“$A\cap B\neq\varnothing$”的充分而不必要条件,则 b 必须满足条件 $b-1<1\Rightarrow b<2$.所以 b 的取值范围可以是$\{b|b<2\}$或其子集.故选 C.

12.A

提示:由题设,知 $\forall x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$,$2\sqrt{3}\cos^2x+\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+m>0$,

即 $2\sqrt{3}\cos^2x+\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)>-m$.

设 $y=2\sqrt{3}\cos^2x+\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}(1+\cos 2x)+\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x+\sqrt{3}=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}$.

由 $x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$,知 $2x+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right]$,从而 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$,$y\in\left[\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$.

所以 $-m<\frac{\sqrt{3}}{2}$,即 $m>-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

故选 A.

二、填空题

13.3

提示:由 $\frac{a_n+a_{n+1}}{2}<a_n$,得 $a_{n+1}<a_n$,所以数列$\{a_n\}$为递减数列,故原命题是真命题,其逆否命题为真命题.易知原命题的逆命题为真命题,所以其否命题也为真命题.

14.方向相同或相反的两个向量共线

15.[1,2)

提示:两个都是假命题,则

$\begin{cases}x<2 \text{ 或 } x>5,\\ 1\leqslant x\leqslant 4\end{cases}\Rightarrow 1\leqslant x<2$.

16.(-4,0)

提示:由 $g(x)<0$ 得 $2^x-2<0$,$x<1$.

又因为 $\forall x\in R$,$f(x)<0$ 或 $g(x)<0$,所以 $f(x)=m(x-2m)(x+m+3)<0$ 在 $x\geqslant 1$ 时恒成立,所以 $\begin{cases}m<0,\\ -m-3<1,\\ 2m<1,\end{cases}$ 解得 $-4<m<0$.

三、解答题

17.**证明**:将“若 $m^2+n^2=2$,则 $m+n\leqslant 2$”视为原命题,则它的逆否命题为“若 $m+n>2$,则 $m^2+n^2\neq 2$”.

因为 $m+n>2$,

所以 $m^2+n^2\geqslant\frac{1}{2}(m+n)^2>\frac{1}{2}\times 2^2=2$,

所以 $m^2+n^2\neq 2$.

所以原命题的逆否命题是真命题,从而原命题也为真命题,得证.

18.**证明**:充分性:

因为 A,B 为锐角,且 $A+B=\frac{\pi}{4}$,

所以 $\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=1$,

可得 $\tan A+\tan B=1-\tan A\tan B$,

所以 $(1+\tan A)(1+\tan B)$

$=1+\tan A+\tan B+\tan A\tan B$

$=1+(1-\tan A\tan B)+\tan A\tan B$

$=2$.

必要性:

因为 $(1+\tan A)(1+\tan B)=2$,

所以 $\tan A+\tan B=1-\tan A\tan B$,

故 $\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=1$.

因为 A,B 为锐角,所以 $0<A+B<\pi$,

从而 $A+B=\frac{\pi}{4}$.

综上可知,$A+B=\frac{\pi}{4}$ 为 $(1+\tan A)\cdot(1+\tan B)=2$ 的充要条件.

19.**解**:(1)由 p 为真命题,

得 $0<a-\frac{3}{2}<1$,

解得 $\frac{3}{2}<a<\frac{5}{2}$.

故 a 的取值范围是$\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$.

(2)$\forall x\in R$,有 $|x-1|\geqslant 0$,

故 $0<\left(\frac{1}{2}\right)^{|x-1|}\leqslant 1$.

由 q 为真命题,得 a>1.

故 a 的取值范围是$(1,+\infty)$.

(3)因为“p∧q”为假命题,“p∨q”为真命题,所以 p,q 一真一假.

若 p 真 q 假,则 a 不存在;

若 p 假 q 真,则 $1<a\leqslant\frac{3}{2}$ 或 $a\geqslant\frac{5}{2}$.

故 a 的取值范围是

$\left(1,\frac{3}{2}\right]\cup\left[\frac{5}{2},+\infty\right)$.

20.**解**:(1)由 $M\cap P=\{x|5<x\leqslant 8\}$,得 $-3\leqslant a\leqslant 5$,因此 $M\cap P=\{x|5<x\leqslant 8\}$的充要条件是$\{a|-3\leqslant a\leqslant 5\}$.

(2)求实数 a 的一个值,使它成为 $M\cap P=\{x|5<x\leqslant 8\}$的一个充分而不必要条件,就是在集合$\{a|-3\leqslant a\leqslant 5\}$中取一个值,如取 a=0,此时必有 $M\cap P=\{x|5<x\leqslant 8\}$;反之,$M\cap P=\{x|5<x\leqslant 8\}$不一定有 a=0,故 a=0 是 $M\cap P=\{x|5<x\leqslant 8\}$的一个充分不必要条件.

(3)求实数 a 的取值范围,使它成为 $M\cap P=\{x|5<x\leqslant 8\}$的一个必要不充分条件就是另求一个集合,使$\{a|-3\leqslant a\leqslant 5\}$是它的一个真子集.

如果$\{a|a\leqslant 5\}$,则不一定有 $M\cap P=\{x|5<x\leqslant 8\}$,但是 $M\cap P=\{x|5<x\leqslant 8\}$时,必有 $a\leqslant 5$,故$\{a|a\leqslant 5\}$是 $M\cap P=\{x|5<x\leqslant 8\}$的一个必要不充分条件.

21.**解**:(1)因为 $f(x)+g(x)=a^2x^3+x^2+a^3$,　①

又 $f(x)$为奇函数,$g(x)$为偶函数,

所以 $-f(x)+g(x)=-a^2x^3+x^2+a^3$.　②

由①②,解得 $f(x)=a^2x^3$,$g(x)=x^2+a^3$ $(a\neq 0)$.

(2)若 p 真,易知 $f(x)$在$[1,2]$上是增函数,所以$[f(x)]_{\min}=f(1)=a^2\geqslant 1$,解得 $a\leqslant -1$ 或 $a\geqslant 1$.

若 q 真,对于 $x\in[-2,3]$,$[g(x)]_{\max}=g(3)=9+a^3\geqslant 17$,解得 $a\geqslant 2$.

若 p∨q 为假命题,则 p 假 q 假,

所以 $a\in(-1,1)\cap(-\infty,2)=(-1,1)$.

故 p∨q 为真命题时,$a\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

22.**解**:(1)若$\{a_n\}$为递增数列,则 $a_{n+1}>a_n$,即 $3^{n+1}-m\cdot 2^{n+1}>3^n-m\cdot 2^n$.

化简,可得 $m<2\times\left(\frac{3}{2}\right)^n$.易知函数 $f(n)=2\times\left(\frac{3}{2}\right)^n$ 是增函数,

所以 $f(n)\geqslant f(1)=3$.

所以 $m<3$.

又 $m>0$,所以 m 的取值范围是$(0,3)$.

(2)若¬p 是¬q 的必要不充分条件,则 p 是 q 的充分不必要条件.

当直线 l 与圆 O 相交时,有 $\frac{|m|}{2}<r$.

所以 $r\geqslant\frac{3}{2}$.

故 r 的取值范围是$\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$.

第 3 期

第 3~4 版同步周测参考答案

一、选择题

1.D

2.B

3.B

4.C

5.A

提示:由已知条件,得 c=4,a=5,则 $b=\sqrt{a^2-c^2}=3$.故短轴长为 2b=6.

6.B

提示:由题意,得 $\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$,所以 $\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{1}{4}$,得 $3a^2=4b^2$.

7.D

提示:已知方程表示平面内到定点 $F_1(0,-2)$,$F_2(0,2)$的距离之和等于常数10的点的轨迹,即$2a=10$,$2c=4$,交点在y轴上的椭圆,所以$a=5$,$c=2$,$b^2=a^2-c^2=21$,方程为 $\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{21}=1$.故选D.

8.B

提示:根据题意,知点 $P\left(-c,\pm\frac{b^2}{a}\right)$.

因为 $\angle F_1PF_2=45°$,所以有 $\frac{2c}{\frac{b^2}{a}}=\tan 45°=1$,即 $2ac=b^2=a^2-c^2$,所以 $e^2+2e-1=0$,解得 $e=\sqrt{2}-1$,或 $e=-\sqrt{2}-1$(舍去).

9.C

提示:由椭圆方程得 m>0 且 $m\neq 5$.直线 $y-kx-1=0$ 过定点$(0,1)$,若使直线 $y-kx-1=0$ 与椭圆 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{m}=1$ 恒有公共点,则点$(0,1)$在椭圆上或椭圆内,由此解得 $m\geqslant 1$ 且 $m\neq 5$.

10.B

11.B

12.B

二、填空题

13.中心

14.$\frac{3}{5}$

15.[1,2]

提示:因为 $P(m,n)$是椭圆 $x^2+\frac{y^2}{2}=1$ 上的一个动点,所以 $m^2+\frac{n^2}{2}=1$,即 $n^2=2-2m^2$,所以 $m^2+n^2=2-m^2$.又 $-1\leqslant m\leqslant 1$,所以 $1\leqslant 2-m^2\leqslant 2$,所以 $1\leqslant m^2+n^2\leqslant 2$.

16.3;$\frac{(2x-1)^2}{9}+4y^2=1$

提示:椭圆 C 的右顶点$(3,0)$满足题意;根据对称性,原点左侧有 2 个点满足题意,所以有 3 个点 P 使得 $|PQ|=2$ 成立.设 $M(x,y)$,$P(a,b)$,则 $a=2x-1$,$b=2y$,代入椭圆 C 的方程中可得 $\frac{(2x-1)^2}{9}+4y^2=1$.

三、解答题

17.**解**:(1)设椭圆的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 或 $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$.

由已知得 2a=10,则 a=5.

又因为 $e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$,所以 c=4.

所以 $b^2=a^2-c^2=25-16=9$.

所以椭圆方程为

$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 或 $\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{9}=1$.

(2)设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$.

由题意得 c=b=3,

$a^2=b^2+c^2=18$,

故所求椭圆的方程为 $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$.

18.**解**:因为点 B 与点 A(-1,1)关于原点 O 对称,所以点 B(1,-1).

设 P(x,y),

由条件可得 $\frac{y-1}{x+1}\cdot\frac{y+1}{x-1}=-\frac{1}{3}$,

化简,得 $x^2+3y^2=4$,故动点 P 的轨迹方程为 $x^2+3y^2=4(x\neq\pm 1)$.

19.**解**:由已知,得 $\frac{x^2}{\frac{m}{9}}+\frac{y^2}{\frac{m}{16}}=1$,

$a^2=\frac{m}{9}$,$b^2=\frac{m}{16}$,$c^2=\frac{7m}{144}$.

在$\triangle PF_1F_2$中,由面积公式,得

$S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|\sin 60°=3\sqrt{3}$,

解得$|PF_1|\cdot|PF_2|=12$.

在$\triangle PF_1F_2$中,由余弦定理,得

$4c^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot\cos 60°=|PF_1|^2+|PF_2|^2-|PF_1|\cdot|PF_2|=(|PF_1|+|PF_2|)^2-3|PF_1|\cdot|PF_2|$,

即 $4c^2=4a^2-3\times 12$,所以 $b^2=a^2-c^2=9$,

即 $9=\frac{m}{16}$,解得 m=144.

由此可得 $a=\sqrt{\frac{m}{9}}=4$,$c=\sqrt{\frac{7m}{144}}=\sqrt{7}$,

所以离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

20.**解**:(1)根据题意,a=2,则椭圆的焦点在 x 轴上,且 $c=\sqrt{3}$,故焦点坐标为$(\sqrt{3},0)$,$(-\sqrt{3},0)$.

(2)若 m=3,则椭圆的方程为 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$,变形可得 $y^2=1-\frac{x^2}{9}$.

设 P(x,y),则

$|PA|^2=(x-2)^2+y^2=\frac{8x^2}{9}-4x+5$.

又由 $-3\leqslant x\leqslant 3$,根据二次函数的性质,分析可得,

当 x=-3 时,$|PA|^2$取得最大值,为 25;

当 $x=\frac{9}{4}$ 时,$|PA|^2$取得最小值,为 $\frac{1}{2}$.

所以$|PA|$的最大值为 5,最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

21.**解**:(1)由题意可得 2b=4,即 b=2,$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{5}$,$a^2-b^2=c^2$,

解得 $a=\sqrt{5}$,c=1,

所以椭圆方程为 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$.

(2)B(0,2),设 PB 的方程为 y=kx+2,代入椭圆方程 $4x^2+5y^2=20$,可得$(4+5k^2)x^2+20kx=0$,

解得 $x=-\frac{20k}{4+5k^2}$,或 x=0,

所以 $P\left(-\frac{20k}{4+5k^2},\frac{8-10k^2}{4+5k^2}\right)$.

由 y=kx+2,令 y=0,可得 $M\left(-\frac{2}{k},0\right)$,

又$|ON|=|OF|$,所以 N(0,-1),

由 $OP\perp MN$,得 $\frac{8-10k^2}{-20k}\cdot\frac{1}{\frac{-2}{k}}=-1$,

解得 $k=\pm\frac{2\sqrt{30}}{5}$,

所以直线 PB 的斜率为 $\pm\frac{2\sqrt{30}}{5}$.

22.**解**:(1)设 $F_1(-1,0)$,$F_2(1,0)$,则 $\sqrt{x^2+y^2+2x+1}+\sqrt{x^2+y^2-2x+1}=2\sqrt{2}$ 等价于$|PF_1|+|PF_2|=2\sqrt{2}>|F_1F_2|$,

所以曲线 C 为以 F_1,F_2 为焦点的椭圆,且长轴长为 $2\sqrt{2}$,焦距为 2,

故曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

(2)联立方程组 $\begin{cases}y=kx+m,\\ \frac{x^2}{2}+y^2=1,\end{cases}$ 消去 y 可得$(2k^2+1)x^2+4kmx+2m^2-2=0$,

$\Delta=16k^2m^2-4(2k^2+1)(2m^2-2)=16k^2-8m^2+8>0$.

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,

则 $x_1+x_2=-\frac{4km}{2k^2+1}$,$x_1x_2=\frac{2m^2-2}{2k^2+1}$,

所以 $k_1+k_2=\frac{y_1}{x_1-2}+\frac{y_2}{x_2-2}=\frac{x_2y_1+x_1y_2-2(y_1+y_2)}{(x_1-2)(x_2-2)}=0$,

所以 $x_2y_1+x_1y_2-2(y_1+y_2)=0$,

即 $x_2(kx_1+m)+x_1(kx_2+m)-2(kx_1+kx_2+2m)=0$,

即 $2k\cdot\frac{2m^2-2}{2k^2+1}-(m-2k)\cdot\frac{4km}{2k^2+1}-4m=\frac{-4(k+m)}{2k^2+1}=0$,

所以 k+m=0,故直线 L 的方程为 y=kx-k=k(x-1),

所以直线 L 过定点(1,0).