11.B

12.C

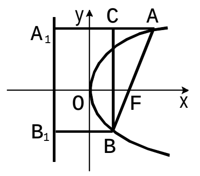
二、填空题

13.若 $x\notin\mathbf{R}$,则 $x^2+1\leqslant 1$

14.2

15.$\frac{8}{3}$

提示:如图,过点 A,B 分别作准线的垂线,垂足为 $A_1$,$B_1$,过点 B 作 $AA_1$ 的垂线,垂足为 C.



(第15题图)

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$|BF|=m$,则 $|AF|=3m$,由抛物线的定义,知 $|BB_1|=m$,$|AA_1|=3m$.

在△ABC 中,因为 $|AC|=2m$,$|AB|=4m$,所以 $k_{AB}=\tan60°=\sqrt{3}$.所以直线 $AB$ 的方程为 $y=\sqrt{3}(x-1)$.与抛物线方程联立,消去 $y$,得 $3x^2-10x+3=0$.所以弦 $AB$ 的中点到抛物线准线的距离为 $\frac{x_1+x_2}{2}+1=\frac{5}{3}+1=\frac{8}{3}$.

16.-2

三、解答题

17.**解**:(1)由已知,得 $p=4$,故抛物线 $C$ 的标准方程为 $y^2=8x$.

(2)设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$M(x,y)$,则 $y_1^2=8x_1$,$y_2^2=8x_2$.两式作差,得 $(y_1-y_2)(y_1+y_2)=8(x_1-x_2)$.当 $x_1\neq x_2$ 时,有 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{8}{y_1+y_2}$,即 $k_{AB}=\frac{8}{2y}=k_{MP}=\frac{y-0}{x-3}$,所以 $y^2=4x-12$;当 $x_1=x_2$ 时,$AB\perp x$ 轴,则 $AB$ 的中点即为点 $P(3,0)$,也满足 $y^2=4x-12$.

综上所述,弦 $AB$ 的中点 $M$ 的轨迹方程为 $y^2=4x-12$.

18.**解**:若 $p$ 为真命题,则 $\begin{cases}a-1>0,\\2(a-1)-1>0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a-1<0,\\1\cdot(a-1)-1>0,\end{cases}$ 解得 $a>\frac{3}{2}$;若 $q$ 为真命题,则 $a^2-4<0$,解得 $-2<a<2$.

(1)若 $p\wedge q$ 是真命题,则 $p$ 真 $q$ 真,所以实数 $a$ 的取值范围为 $\left(\frac{3}{2},2\right)$.

(2)由题意,得 $p,q$ 同真假.若 $p$ 真 $q$ 真,由(1)知 $\frac{3}{2}<a<2$;若 $p$ 假 $q$ 假,则 $\begin{cases}a\leqslant-\frac{3}{2},\\a\leqslant-2 或 a\geqslant 2\end{cases}\Rightarrow a\leqslant-2$.所以实数 $a$ 的取值范围为 $(-\infty,-2]\cup\left(\frac{3}{2},2\right)$.

19.**解**:(1)因为 $e\geqslant\sqrt{2}k$,所以 $\frac{\sqrt{3+m}}{\sqrt{3}}\geqslant\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{3}}$,解得 $m\leqslant 3$.又 $m>0$,所以实数 $m$ 的取值范围为 $(0,3]$.

(2)由 $m^2-(2a+2)m+a(a+2)\leqslant 0$,得 $(m-a)(m-a-2)\leqslant 0$,所以 $a\leqslant m\leqslant a+2$.

因为 $p$ 是 $q$ 的必要不充分条件,所以 $\begin{cases}a>0,\\a+2\leqslant 3,\end{cases}$ 解得 $0<a\leqslant 1$.

所以实数 $a$ 的取值范围为 $(0,1]$.

20.(1)**证明**:连接 $AC$,交 $BD$ 于点 $O$,连接 $OE$,因为正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,四边形 $ABCD$ 是正方形,

所以 $O$ 是 $AC$ 中点,因为 $E$ 为 $CC_1$ 的中点,所以 $OE\parallel AC_1$,因为 $AC_1\not\subset$ 平面 $BDE$,$OE\subset$ 平面 $BDE$,所以 $AC_1\parallel$ 平面 $BDE$.

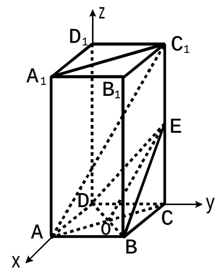
(2)**解**:以 $D$ 为原点,$DA$ 所在直线为 $x$ 轴,$DC$ 所在直线为 $y$ 轴,$DD_1$ 所在直线为 $z$ 轴,建立如图所示的空间直角坐标系,因为 $AB=BC=1$,$AA_1=4$,所以 $A_1(1,0,4)$,$C_1(0,1,4)$,$D(0,0,0)$,$E(0,1,2)$,

则 $\overrightarrow{A_1C_1}=(-1,1,0)$,$\overrightarrow{DE}=(0,1,2)$,

设异面直线 $A_1C_1$ 与 $DE$ 所成角为 $\theta$,

则 $\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{A_1C_1}\cdot\overrightarrow{DE}|}{|\overrightarrow{A_1C_1}|\cdot|\overrightarrow{DE}|}=\frac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

所以异面直线 $A_1C_1$ 与 $DE$ 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$.



(第20题图)

21.**解**:(1)由题意知 $c=1$,$F_1(-1,0)$,$F_2(1,0)$.又 $2a=|TF_1|+|TF_2|=\sqrt{(-1+1)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2}+\sqrt{(-1-1)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3}{2}+\frac{5}{2}=4$,所以 $a=2$,所以 $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}$,所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)若存在点 $P(m,0)$,使得以 PG,PH 为邻边的平行四边形是菱形,

则 P 为线段 GH 的中垂线与 x 轴的交点.

设直线 $l_1$ 的方程为

$y=kx+2$,$G(x_1,y_1)$,$H(x_2,y_2)$,

由 $\begin{cases}y=kx+2,\\\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$

得 $(3+4k^2)x^2+16kx+4=0$,

$\Delta=256k^2-16(3+4k^2)>0$,又 $k>0$,

所以 $k>\frac{1}{2}$.

由韦达定理,得 $x_1+x_2=-\frac{16k}{3+4k^2}$,

设 GH 的中点为 $(x_0,y_0)$,

则 $x_0=-\frac{8k}{3+4k^2}$,$y_0=kx_0+2=\frac{6}{3+4k^2}$,

所以线段 GH 的中垂线方程为

$y=-\frac{1}{k}\left(x+\frac{8k}{3+4k^2}\right)+\frac{6}{3+4k^2}$,

令 $y=0$,可得 $x=\frac{-2k}{3+4k^2}=-\frac{2}{\frac{3}{k}+4k}$,

即 $m=-\frac{2}{\frac{3}{k}+4k}$.

因为 $k>\frac{1}{2}$,所以 $\frac{3}{k}+4k\geqslant 2\cdot\sqrt{\frac{3}{k}\cdot 4k}=4\sqrt{3}$,当且仅当 $\frac{3}{k}=4k$,即 $k=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时取等号,

所以 $m\geqslant-\frac{2}{4\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{6}$,且 $m<0$.

所以 m 的取值范围是 $\left[-\frac{\sqrt{3}}{6},0\right)$.

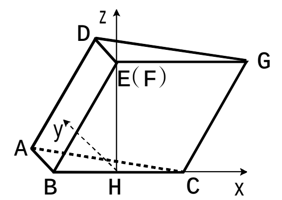
22.(1)**证明**:由已知得 $AD\parallel BE$,$CG\parallel BE$,所以 $AD\parallel CG$,故 $AD$,$CG$ 确定一个平面,从而 $A$,$C$,$G$,$D$ 四点共面.由已知得 $AB\perp BE$,$AB\perp BC$,故 $AB\perp$ 平面 $BCGE$.

又因为 $AB\subset$ 平面 $ABC$,所以平面 $ABC\perp$ 平面 $BCGE$.

(2)**解**:如图,作 $EH\perp BC$,垂足为 $H$.因为 $EH\subset$ 平面 $BCGE$,平面 $BCGE\perp$ 平面 $ABC$,所以 $EH\perp$ 平面 $ABC$.

由已知,菱形 $BCGE$ 的边长为 2,$\angle EBC=60°$,可求得 $BH=1$,$EH=\sqrt{3}$.

以 $H$ 为坐标原点,$\overrightarrow{HC}$ 的方向为 $x$ 轴的正方向,建立如图(3)所示的空间直角坐标系 $H-xyz$,



(第22题图)

则 $A(-1,1,0)$,$C(1,0,0)$,$G(2,0,\sqrt{3})$,$\overrightarrow{CG}=(1,0,\sqrt{3})$,$\overrightarrow{AC}=(2,-1,0)$.

设平面 $ACGD$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则 $\begin{cases}\overrightarrow{CG}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\\overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x+\sqrt{3}z=0,\\2x-y=0,\end{cases}$ 所以可取 $\boldsymbol{n}=(3,6,-\sqrt{3})$.

又平面 $BCGE$ 的法向量可取为 $\boldsymbol{m}=(0,1,0)$,所以 $\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\frac{6}{\sqrt{3^2+6^2+3}\times 1}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因此,二面角 $B-CG-A$ 的大小为 30°.





## 第 9~12 期

### 第 9~10 版综合测试(一)参考答案

一、选择题

1.A

**提示**:当 $\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$ 时,$f(x)=\pm\cos\omega x$ 是偶函数;若 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ $(\omega\neq 0)$ 是偶函数,则 $\sin\varphi=\pm1$,即 $\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$.所以 $p$ 是 $q$ 的充要条件.

2.D 3.B 4.C

5.C

**提示**:由已知,得 $a^2-9=4+3$,解得 $a=4$.

6.B

**提示**:由渐近线方程为 $y=\sqrt{2}x$,得 $\frac{b}{a}=\sqrt{2}$,所以 $e^2=1+\frac{b^2}{a^2}=3\Rightarrow e=\sqrt{3}$.

7.C

8.D

9.C

**提示**:由题知 $F\left(\frac{3}{4},0\right)$,所以直线 $AB$ 的方程为 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{3}{4}\right)$.与抛物线 $C$ 的方程联立消去 $y$ 并整理,得 $\frac{1}{3}x^2-\frac{7}{2}x+\frac{3}{16}=0$.设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $x_1+x_2=\frac{21}{2}$.所以 $|AB|=x_1+x_2+p=\frac{21}{2}+\frac{3}{2}=12$.

10.B

**提示**:由 $F(-2\sqrt{5},0)$,

得 $c=2\sqrt{5}$.

设椭圆的右焦点为 $F_1$,

连接 $PF_1$.

由 $|OP|=|OF|=|OF_1|$,

知 $PF_1\perp PF$.

所以 $|PF_1|=\sqrt{|F_1F|^2-|PF|^2}$

$=\sqrt{(4\sqrt{5})^2-4^2}$

$=8$.

由椭圆定义,

得 $|PF_1|+|PF|=2a=4+8=12$,

从而 $a=6$,$a^2=36$.

于是 $b^2=a^2-c^2=16$.

所以椭圆 $C$ 的方程为 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$.

11.A

12.A

**提示**:$4-b^2=1$,故 $b^2=3$,

椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

联立 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 与 $y=kx+2$,得 $(4k^2+3)x^2+16kx+4=0$,

有 $\Delta=(16k)^2-16(4k^2+3)\leqslant 0$,

解得 $-\frac{1}{2}\leqslant k\leqslant\frac{1}{2}$.

二、填空题

13.$a=1$,$b=-1$(答案不唯一)

14.$\frac{9}{2}$

15.①③

16.$\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

**提示**:设椭圆的长半轴长、短半轴长、半焦距分别为 a、b、c,因为 $\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=0$,所以点 M 的轨迹是以原点 O 为圆心,半焦距为半径的圆.又点 M 总在椭圆的内部,所以 $c<b$,$c^2<b^2=a^2-c^2$,即 $2c^2<a^2$.所以 $e^2=\frac{c^2}{a^2}<\frac{1}{2}$,而 $e\in(0,1)$,故 $e\in\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

三、解答题

17.**解**:若 $p$ 为真命题,

则 $a<x<3a$;

若 $q$ 为真命题,

则 $2<x\leqslant 3$.

(1)当 $a=1$ 时,$p$:$1<x<3$.

由"$p\wedge q$"为真命题,

知 $p,q$ 均为真命题,

所以 $2<x<3$,

即实数 $x$ 的取值范围为 $(2,3)$.

(2)设 $A=\{x|a<x<3a\}$,$B=\{x|2<x\leqslant 3\}$.

若 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的充分不必要条件,

则 $p$ 是 $q$ 的必要不充分条件,

所以 $B\subsetneqq A$,

即 $\begin{cases}0<a\leqslant 2,\\3a>3,\end{cases}$

解得 $1<a\leqslant 2$.

所以实数 $a$ 的取值范围为 $(1,2]$.

18.**解**:(1)准线方程为 $x=-\frac{p}{2}$,

于是 $4+\frac{p}{2}=5$,

解得 $p=2$.

所以抛物线的方程为 $y^2=4x$.

(2)由(1)得 $A(4,4)$,

故 $B(0,4)$,$M(0,2)$.

又 $F(1,0)$,

所以 $k_{FA}=\frac{4}{3}$,

$FA$ 所在直线的方程为

$y=\frac{4}{3}(x-1)$. ①

因为 $MN\perp FA$,

所以 $k_{MN}=-\frac{3}{4}$,

$MN$ 所在直线的方程为

$y-2=-\frac{3}{4}x$. ②

联立①②,

解得 $x=\frac{8}{5}$,$y=\frac{4}{5}$,

所以点 $N$ 的坐标为 $\left(\frac{8}{5},\frac{4}{5}\right)$.

19.**解**:(1)抛物线 $y^2=4x$ 的焦点坐标为 $(1,0)$,直线的斜率为 $-1$,

则该直线方程为 $y=-(x-1)$,

即 $x+y-1=0$.

(2)设点 A、B 的坐标分别为 $(x_1,y_1)$、$(x_2,y_2)$,

由 $\begin{cases}y^2=4x,\\y=-x+1,\end{cases}$

消去 y 可得 $x^2-6x+1=0$,

根据韦达定理,

得 $x_1+x_2=6$,$x_1x_2=1$,

所以 $|AB|=\sqrt{1+(-1)^2}\times\sqrt{6^2-4}=8$,

点 O 到直线 AB 的距离

$d=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

所以 $S_{\triangle ABO}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d$

$=\frac{1}{2}\times 8\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=2\sqrt{2}$.

20.(1)**解**:以O为坐标原点,OA,OC,$OO_1$ 所在直线分别为x,y,z轴,建立空间直角坐标系,则 $B(1,1,0)$,$A_1(1,0,1)$,$C_1(0,1,1)$.

设 $n=(x,y,z)$ 是平面 $A_1BC_1$ 的法向量,则 $n\cdot\overrightarrow{BA_1}=0$,$n\cdot\overrightarrow{BC_1}=0$,而 $\overrightarrow{BA_1}=(0,-1,1)$,$\overrightarrow{BC_1}=(-1,0,1)$,

所以 $\begin{cases}-y+z=0,\\-x+z=0,\end{cases}$ 即 $x=y=z$.

取 $z=1$,则 $x=y=1$,故 $\boldsymbol{n}=(1,1,1)$.

所以 $n=(1,1,1)$ 为平面 $A_1BC_1$ 的一个法向量.

(2)**证明**:因为 $E\left(0,\frac{2}{3},1\right)$,$F\left(0,1,\frac{2}{3}\right)$,则 $\overrightarrow{EF}=\left(0,\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$,

又 $n\cdot\overrightarrow{EF}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=0$,

所以 $\overrightarrow{EF}\perp n$,所以 $EF\parallel$ 平面 $A_1BC_1$.

③ 21.解：(1)根据题意，得半焦距 $c=1$，$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $a=\sqrt{2}$，$b^2=a^2-c^2=1$.所以椭圆 $E$ 的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

(2)设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{2}+y^2=1,\\ y=x+m,\end{cases}$ 消去 $y$ 并整理，得 $3x^2+4mx+2m^2-2=0$，则 $\Delta=(4m)^2-12(2m^2-2)>0$，即 $-\sqrt{3}<m<\sqrt{3}$ 且 $m\neq0$，且 $x_1+x_2=-\frac{4m}{3}$，$x_1x_2=\frac{2m^2-2}{3}$.设 $AB$ 的中点为 $C(x_C,y_C)$，则 $x_C=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{2m}{3}$，$y_C=x_C+m=\frac{m}{3}$.所以线段 $AB$ 的垂直平分线的方程为 $y-\frac{m}{3}=-\left(x+\frac{2m}{3}\right)$.令 $y=0$，得点 $T$ 的坐标为 $\left(-\frac{m}{3},0\right)$.于是点 $T$ 到直线 $AB$ 的距离 $d=\frac{\left|\frac{2}{3}m\right|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{3}|m|$.又 $|AB|=\sqrt{2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{4}{3}\times\sqrt{3-m^2}$，所以 $\triangle TAB$ 的面积 $S=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{3}|m|\times\frac{4}{3}\times\sqrt{3-m^2}=\frac{2\sqrt{2}}{9}\times\sqrt{(3-m^2)m^2}\leqslant\frac{2\sqrt{2}}{9}\times\frac{3-m^2+m^2}{2}=\frac{\sqrt{2}}{3}$，当且仅当 $m^2=\frac{3}{2}$，即 $m=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}\in(-\sqrt{3},\sqrt{3})$ 时等号成立.

所以 $\triangle TAB$ 面积的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

22.(1)证明：以点 C 为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系，则 $C(0,0,0)$，$B(\sqrt{2},0,0)$，$A_1(0,1,1)$，$D\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，$M\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1,0\right)$，$B_1(\sqrt{2},1,0)$，

所以 $\overrightarrow{CD}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，

$\overrightarrow{BD}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，

$\overrightarrow{BM}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},1,0\right)$.

因为 $\begin{cases}\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\\ \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{BM}=0,\end{cases}$

所以 $CD\perp BD$，$CD\perp BM$，

又 $BD\cap BM=B$，

所以 $CD\perp$ 平面 $BDM$.

(2)解：$\overrightarrow{BB_1}=(0,1,0)$，$\overrightarrow{CB}=(\sqrt{2},0,0)$，

设平面 $B_1BD$ 的法向量为 $n_1=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}n_1\cdot\overrightarrow{BB_1}=0,\\ n_1\cdot\overrightarrow{BD}=0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}y=0,\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=0,\end{cases}$

令 $x=1$，得 $n_1=(1,0,\sqrt{2})$.

设平面 CBD 的法向量为 $n_2=(x,y,z)$，

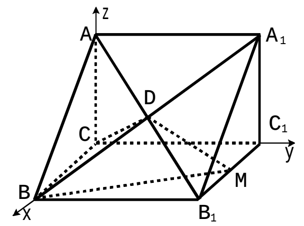
则 $\begin{cases}n_2\cdot\overrightarrow{CB}=0,\\ n_2\cdot\overrightarrow{CD}=0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}\sqrt{2}x=0,\\ \frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=0,\end{cases}$

令 $y=1$，得 $n_2=(0,1,-1)$.

所以 $\cos\theta=\frac{n_1\cdot n_2}{|n_1||n_2|}=-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，

所以二面角 $C-BD-B_1$ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.



(第22题图)

**第11~12版综合测试(二)参考答案**

**一、选择题**

1.C 2.B 3.D

4.D

提示：由已知得 $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OC}=2(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})+(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})$，整理可得 $\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OC}$，故选D.

5.D

6.D

提示：由 $b=4$，$e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}$，$a^2=b^2+c^2$，解得 $a=5$.由椭圆的定义知 $\triangle ABF_2$ 的周长为 $4a=20$.

7.A

8.D

提示：以 $D$ 为原点，以 $DA$，$DC$，$DD_1$ 分别为 $x$，$y$，$z$ 轴建立空间直角坐标系，则 $A(1,0,0)$，$C_1(0,1,1)$，

设 $P(x,y,1)(0\leqslant x\leqslant1,0\leqslant y\leqslant1)$.

则 $\overrightarrow{PA}=(1-x,-y,-1)$，$\overrightarrow{PC_1}=(-x,1-y,0)$，

于是 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC_1}=x^2-x+y^2-y$

$=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$.

因为 $0\leqslant x\leqslant1$，$0\leqslant y\leqslant1$，

所以 $0\leqslant\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant\frac{1}{4}$，$0\leqslant\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant\frac{1}{4}$，

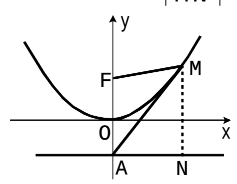
故 $-\frac{1}{2}\leqslant\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\leqslant0$.

9.B

提示：由已知得 AB 的斜率 $k=k_{PM}=1$.设 $E$ 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则有 $\begin{cases}\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1,\\ \frac{x_2^2}{a^2}-\frac{y_2^2}{b^2}=1,\end{cases}$ 两式相减并结合 $\begin{cases}x_1+x_2=-24,\\ y_1+y_2=-30,\end{cases}$ 得 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{4b^2}{5a^2}=1$，即 $4b^2=5a^2$.又 $a^2+b^2=9$，解得 $a^2=4$，$b^2=5$.故选B.

10.D

提示：如图所示，过点 $M$ 作抛物线准线的垂线，垂足为 $N$，则 $|MN|=y_0+\frac{p}{2}=\frac{5y_0}{4}$，故 $y_0=2p$.将点 $M(1,2p)$ 代入抛物线 $C$ 的方程中，得 $1^2=2p\cdot2p$，解得 $p=\frac{1}{2}$.从而可得 $|MN|=\frac{5}{4}$.又 $|AN|=1$，所以 $\tan\angle FAM=\tan\angle AMN=\frac{|AN|}{|MN|}=\frac{4}{5}$.



(第10题图)

11.C

提示：由 $C_1$ 与 $C_2$ 的方程可知两曲线都过原点，所以直线 $AB$ 必过原点，可设 $AB$ 的方程为 $y=kx(k>0)$，则圆心 $C_1(0,2)$ 到直线 $AB$ 的距离 $d=\frac{2}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{2^2-\left(\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，解得 $k=2$.由 $\begin{cases}y=2x,\\ x^2+(y-2)^2=4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=0,\\ y=0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=\frac{8}{5},\\ y=\frac{16}{5},\end{cases}$ 把点 $\left(\frac{8}{5},\frac{16}{5}\right)$ 代入 $C_2$ 的方程，得 $\left(\frac{16}{5}\right)^2=2p\cdot\frac{8}{5}$，解得 $p=\frac{16}{5}$.所以 $C_2$ 的方程为 $y^2=\frac{32}{5}x$.

12.B

**二、填空题**

13.$(3,+\infty)$

提示：由题设，得 $(m,+\infty)$ 是 $(3,+\infty)$ 的真子集，所以 $m>3$.

14.$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$

15.$(-\infty,-2]\cup(-1,+\infty)$

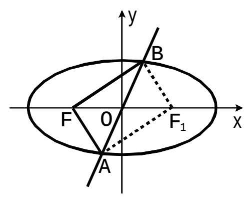
提示：由题知 $p:m\leqslant-1$，$q:-2<m<2$.若“$p\wedge q$”为真命题，则 $-2<m\leqslant-1$，从而可知，若“$p\wedge q$”为假命题，则 $m\leqslant-2$ 或 $m>-1$.





16.$\frac{5}{7}$

提示：如图所示，在 $\triangle ABF$ 中，根据余弦定理，有 $|AF|^2=|AB|^2+|BF|^2-2|AB|\cdot|BF|\cos\angle ABF$，即 $6^2=10^2+|BF|^2-2\times10\times|BF|\times\frac{4}{5}$，解得 $|BF|=8$.所以 $|AF|^2+|BF|^2=|AB|^2$.所以 $\angle AFB=90°$，可得 $|OF|=\frac{1}{2}|AB|=5$，即 $c=5$.设椭圆的右焦点为 $F_1$，连接 $AF_1$，$BF_1$.由椭圆的对称性，知 $AB$ 与 $FF_1$ 互相平分，所以四边形 $AFBF_1$ 为平行四边形.所以 $|BF_1|=|AF|=6$.所以 $2a=|BF|+|BF_1|=14$，得 $a=7$.因此，离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{5}{7}$.



(第16题图)

**三、解答题**

17.解：命题 $p$ 等价于 $\Delta=a^2-16\geqslant0$，即 $a\leqslant-4$ 或 $a\geqslant4$；命题 $q$ 等价于 $-\frac{a}{4}\leqslant3$，即 $a\geqslant-12$.

由“$p\vee q$”是真命题，“$p\wedge q$”是假命题，知 $p$ 和 $q$ 一真一假.

若 $p$ 真 $q$ 假，则 $a<-12$；若 $p$ 假 $q$ 真，则 $-4<a<4$.

故实数 $a$ 的取值范围是 $(-\infty,-12)\cup(-4,4)$.

18.解：(1)由离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{2}$，得 $a=b$，则可设双曲线的方程为 $x^2-y^2=\lambda$.将点 $(4,-\sqrt{10})$ 代入，得 $\lambda=6$.所以该双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{6}=1$.

(2)结合(1)可得 $|F_1F_2|=2\sqrt{6+6}=4\sqrt{3}$.又 $M(4,-\sqrt{10})$，所以 $\triangle F_1MF_2$ 的面积 $S=\frac{1}{2}\times4\sqrt{3}\times\sqrt{10}=2\sqrt{30}$.

19.证明：取基底 $\overrightarrow{AA'}$，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$.

(1)因为 $\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{ED'}+\overrightarrow{D'G}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{EG}$，所以 $EG\parallel AC$.

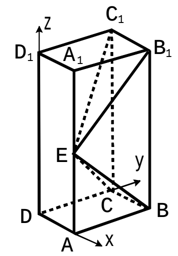
(2)因为 $\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{FD'}+\overrightarrow{D'G}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}=2\overrightarrow{FG}$，所以 $FG\parallel AB'$.

又由(1) $EG\parallel AC$，所以平面 $EFG\parallel$ 平面 $AB'C$.

20.(1)证明：由已知得，$B_1C_1\perp$ 平面 $ABB_1A_1$，$BE\subset$ 平面 $ABB_1A_1$，故 $B_1C_1\perp BE$.又 $BE\perp EC_1$，$B_1C_1\cap EC_1=C_1$，所以 $BE\perp$ 平面 $EB_1C_1$.

(2)解：由(1)知 $BE\perp$ 平面 $EB_1C_1$，所以 $\angle BEB_1=90°$.由题设知 $Rt\triangle ABE\cong Rt\triangle A_1B_1E$，所以 $\angle AEB=45°$，故 $AE=AB$，$AA_1=2AB$.

以 $D$ 为坐标原点，$\overrightarrow{DA}$ 的方向为 $x$ 轴正方向，$|\overrightarrow{DA}|$ 为单位长，建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$，



(第20题图)

则 $C(0,1,0)$，$B(1,1,0)$，$C_1(0,1,2)$，$E(1,0,1)$，$\overrightarrow{CB}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{CE}=(1,-1,1)$，$\overrightarrow{CC_1}=(0,0,2)$.

设平面 $EBC$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{CB}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{CE}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_1=0,\\ x_1-y_1+z_1=0,\end{cases}$

所以可取 $\boldsymbol{n}=(0,-1,-1)$.

设平面 $ECC_1$ 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_2,y_2,z_2)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{CC_1}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{CE}\cdot\boldsymbol{m}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2z_2=0,\\ x_2-y_2+z_2=0.\end{cases}$

所以可取 $\boldsymbol{m}=(1,1,0)$.

于是 $\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=-\frac{1}{2}$.

所以二面角 $B-EC-C_1$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

21.解：(1)由题意得 $F(1,0)$，$l$ 的方程为 $y=k(x-1)(k>0)$.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

由 $\begin{cases}y=k(x-1),\\ y^2=4x,\end{cases}$ 得 $k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$.

故 $x_1+x_2=\frac{2(k^2+2)}{k^2}$.

所以 $|AB|=|AF|+|BF|=x_1+x_2+p=\frac{2(k^2+2)}{k^2}+2=8$，解得 $k=-1$(舍去)，或 $k=1$.

所以直线 $l$ 的方程 $y=x-1$.

(2)由(1)得 $AB$ 的中点坐标为 $(3,2)$，所以直线 $AB$ 的垂直平分线方程为 $y-2=-(x-3)$，即 $y=-x+5$.

设所求圆的圆心坐标为 $(x_0,y_0)$，

则 $\begin{cases}y_0=-x_0+5,\\ (x_0+1)^2=\frac{(y_0-x_0+1)^2}{2}+16,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x_0=3,\\ y_0=2,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_0=11,\\ y_0=-6.\end{cases}$

因此，所求圆的方程为 $(x-3)^2+(y-2)^2=16$ 或 $(x-11)^2+(y+6)^2=144$.

22.(1)解：由已知，得离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，又 $\frac{c^2}{a^2}=1-\frac{b^2}{a^2}$，可得 $a^2=4b^2$.又 $\triangle OAB$ 的面积 $S=\frac{1}{2}ab=1$，联立以上两式，解得 $b^2=1$，$a^2=4$.所以椭圆 $C$ 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)证明：因为 $|PQ|=2|AM|$，所以线段 $PQ$ 是 $\triangle APQ$ 外接圆的直径，则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=0$.由(1)知 $A(2,0)$.设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则 $\overrightarrow{AP}=(x_1-2,y_1)$，$\overrightarrow{AQ}=(x_2-2,y_2)$，可得 $x_1x_2-2(x_1+x_2)+y_1y_2+4=0$. ①

联立 $\begin{cases}y=kx+m,\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$ 得 $(4k^2+1)x^2+8kmx+4m^2-4=0$，则 $\Delta=16(1+4k^2-m^2)>0$，且 $x_1+x_2=\frac{-8km}{4k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{4m^2-4}{4k^2+1}$，$y_1y_2=k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=\frac{m^2-4k^2}{4k^2+1}$.代入①中并化简，得 $12k^2+16km+5m^2=0$，解得 $k=-\frac{1}{2}m$ 或 $k=-\frac{5}{6}m$.所以直线 $l$ 的方程为 $y=-\frac{1}{2}m(x-2)$ 或 $y=-\frac{5}{6}m\left(x-\frac{6}{5}\right)$.所以直线 $l$ 过定点 $(2,0)$ 或 $\left(\frac{6}{5},0\right)$.又直线 $l$ 不过点 $A(2,0)$，所以直线 $l$ 过定点 $\left(\frac{6}{5},0\right)$.

**第13~14版综合测试(三)参考答案**

**一、选择题**

1.A

2.D

提示：把全称量词改为存在量词，并把结论否定.

3.D 4.A 5.C 6.C 7.B 8.B

9.A 10.B