第 12 期

第 2~3 版综合测试(二)参考答案

一、选择题

1~7.BBCBAAD

8.C

9.B

提示:由题意,得当 $t=0$ 时,$P=P_0$,

故当 $t=5$ 时,$(1-10\%)P_0=P_0e^{-5k}$,

所以 $k=-\frac{1}{5}\ln0.9$.故 $P=P_0e^{\frac{t}{5}\ln0.9}$.

当 $P=50\%P_0$ 时,有 $50\%P_0=P_0e^{\frac{t}{5}\ln0.9}$,所以 $t=\frac{5\ln0.5}{\ln0.9}\approx33$.

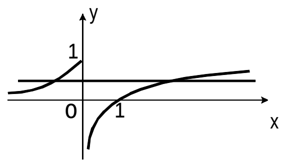
10.B

11.C

提示:$f(g(x))=0\Rightarrow g(x)=0$,或 1,或 $-1\Rightarrow m=3+2+2=7$;$g(f(x))=0\Rightarrow f(x)=0$,或 $\frac{3}{2}$,或 $-\frac{3}{2}$,所以 $n=3+0+0=3$.则 $m+n=10$.

12.A

提示:函数 $f(x)=\begin{cases}\log_a x, & x>0,\\ a^x, & x\leqslant0\end{cases}$ 的图像如图所示.由 $[f(x)]^2-bf(x)=0$,得 $f(x)\cdot[f(x)-b]=0$,则 $f(x)=0$,或 $f(x)-b=0$.当 $f(x)=0$ 时,$x=1$;当 $f(x)-b=0$,即 $b=f(x)$ 时,通过图像分析,$0<b\leqslant1$ 时,函数 $f(x)$ 与直线 $y=b$ 有两个交点,故当 $0<b\leqslant1$ 时,方程 $[f(x)]^2-bf(x)=0$ 恰有三个不同的实数根.



(第 12 题图)

二、填空题

13.$(0.5,0.75)$

14.$(-\infty,0)$

提示:令 $t=x^2-2x=(x-1)^2-1$,则 $t>0$,

故 t 在 $(2,+\infty)$ 上单调递增,在 $(-\infty,0)$ 上单调递减.而函数 $f(t)=\log_3t$ 在 $t>0$ 时是单调递增的,由复合函数的单调性,知函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,0)$.

15.(1)$[-6,-2]$;(2)$(-11,3)$

16.$\frac{4}{3}$

提示:由已知,得 $|a(t+2)^3-(t+2)-at^3+t|\leqslant\frac{2}{3}$.化简,得 $|a(3t^2+6t+4)-1|\leqslant\frac{1}{3}$.

所以 $-\frac{1}{3}\leqslant a(3t^2+6t+4)-1\leqslant\frac{1}{3}$,即 $\frac{2}{3}\leqslant a\cdot(3t^2+6t+4)\leqslant\frac{4}{3}$.由 $3t^2+6t+4=3(t+1)^2+1\geqslant1$,可得 a 的最大值为 $\frac{4}{3}$.

三、解答题

17.**解**:(1)由 $\log_2(x+2)<4=\log_22^4=\log_216$,得 $0<x+2<16$,

所以 $B=\{x|-2<x<14\}$.

于是 $\complement_UB=\{x|x\leqslant-2,$ 或 $x\geqslant14\}$.

故阴影部分为

$A\cap(\complement_UB)=\{x|x\leqslant-3,$ 或 $x\geqslant14\}$.

(2)因为 $C\subseteq B$,

所以 $C=\varnothing$ 或 $C\neq\varnothing$.

①当 $C=\varnothing$ 时,则 $2a\geqslant a+1$,即 $a\geqslant1$.

②当 $C\neq\varnothing$ 时,

得 $\begin{cases}2a<a+1,\\ a+1\leqslant14,\\ 2a\geqslant-2,\end{cases}$ 解得 $-1\leqslant a<1$.

综上所述,实数 a 的取值范围为 $[-1,+\infty)$.

18.**解**:(1)令 $\log_ax=t(t\in\mathbf{R})$,

则 $x=a^t$,

所以 $f(t)=\frac{a}{a^2-1}(a^t-a^{-t})$.

故所求解析式为

$f(x)=\frac{a}{a^2-1}(a^x-a^{-x})(x\in\mathbf{R})$.

(2)因为 $f(-x)=\frac{a}{a^2-1}(a^{-x}-a^x)=-\frac{a}{a^2-1}\cdot(a^x-a^{-x})=-f(x)$,所以 $f(x)$ 为奇函数.

当 $a>1$ 时,$y=a^x$ 为增函数,$y=-a^{-x}$ 为增函数,且 $\frac{a^2}{a^2-1}>0$,所以 $f(x)$ 为增函数;

当 $0<a<1$ 时,$y=a^x$ 为减函数,$y=-a^{-x}$ 为减函数,且 $\frac{a^2}{a^2-1}<0$,所以 $f(x)$ 为增函数.

综上,$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数.

19.**解**:(1)$f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是增函数.证明如下:

任取 $0\leqslant x_1<x_2$,则 $f(x_1)-f(x_2)=\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}=\frac{x_1-x_2}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}<0$,

所以 $f(x_1)<f(x_2)$.

故 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是增函数.

(2)显然 $g(x)=\sqrt{x}+\log_2x-2$ 是增函数.

因为 $g(1)=1+\log_21-2=-1<0$,$g(2)=\sqrt{2}+\log_22-2=\sqrt{2}-1>0$,

所以 $g(x)$ 在区间 $(1,2)$ 内有且只有一个零点 x_0.

取区间 $(1,2)$ 的中点 $x_1=1.5$,计算得 $g(1.5)=\sqrt{1.5}+\log_21.5-2\approx1.225+0.585-2=-0.19<0$.

因为 $g(15)\cdot g(2)<0$,所以 $x_0\in(1.5,2)$.

再取区间 $(1.5,2)$ 的中点 $x_2=1.75$,计算得 $g(1.75)=\sqrt{1.75}+\log_21.75-2\approx1.323+0.807-2=0.13>0$.

因为 $g(1.5)\cdot g(1.75)<0$,

所以 $x_0\in(1.5,1.75)$.

因为 $|1.75-1.5|=0.25<0.3$,

所以 $g(x)$ 零点的近似值为 1.5.

20.**解**:(1)$h(x)=\log_a(x-1)-\log_{\frac{1}{a}}(3-x)=\log_a(x-1)(3-x)$.

令 $t=(x-1)(3-x)=-(x-2)^2+1$,而 $x\in(1,3)$,所以 $t\in(0,1]$.

当 $0<a<1$ 时,$\log_at\geqslant0$,即 $h(x)\geqslant0$;

当 $a>1$ 时,$\log_at\leqslant0$,即 $h(x)\leqslant0$.

所以当 $0<a<1$ 时,函数 $h(x)$ 的值域为 $[0,+\infty)$;当 $a>1$ 时,函数 $h(x)$ 的值域为 $(-\infty,0]$.

(2)由 $f(x)+g(x)\geqslant0$,得 $f(x)\geqslant-g(x)$,

即 $\log_a(x-1)\geqslant\log_a(3-x)$.①

当 $0<a<1$ 时,要使不等式①成立,

则 $\begin{cases}x-1>0,\\ 3-x>0,\\ x-1\leqslant3-x,\end{cases}$ 即 $1<x\leqslant2$;

当 $a>1$ 时,要使不等式①成立,

则 $\begin{cases}x-1>0,\\ 3-x>0,\\ x-1\geqslant3-x,\end{cases}$ 即 $2\leqslant x<3$.

综上所述,当 $0<a<1$ 时,x 的取值范围为 $(1,2]$;当 $a>1$ 时,x 的取值范围为 $[2,3)$.

21.**解**:(1)令 $x=y=1$,得 $f(1)=2f(1)$,

所以 $f(1)=0$.

由题意,可得 $f(9)=f(3)+f(3)=-1-1=-2$,

且 $f(9)+f\left(\frac{1}{9}\right)=f(1)=0$,

所以 $f\left(\frac{1}{9}\right)=2$.

(2)不等式 $f(kx)+f(2-x)<2(k>0)$ 可转化为 $kx(2-x)>\frac{1}{9}(k>0)$,且 $0<x<2$,则当 $0<x<2$ 时,要使不等式 $k>\frac{1}{9x(2-x)}$ 有解,只需满足 $k>\left[\frac{1}{9x(2-x)}\right]_{\min}$.又当 $0<x<2$ 时,$[x(2-x)]_{\max}=1$,故 $k>\frac{1}{9}$.

故 k 的取值范围为 $\left(\frac{1}{9},+\infty\right)$.

22.**解**:(1)当 $0\leqslant t\leqslant1$ 时,由函数 $c=m\cdot(2^t-1)$ 的图像过点 $(1,20)$,得 $20=m(2^1-1)$,解得 $m=20$,所以 $c=20(2^t-1)$.

令 $20(2^t-1)\geqslant10$,解得 $t\geqslant\log_23-\log_22=\frac{\lg3}{\lg2}-1\approx\frac{0.477}{0.3}-1=0.59$.

结合图像可知药物有疗效的时间为 $2-0.59=1.41$(小时).

(2)由(1)知,当 $0\leqslant t\leqslant1$ 时,$c=20(2^t-1)$.

当 $t\geqslant1$ 时,由函数 $c=k\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^t$ 的图像过点 $(2,10)$,得 $10=k\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2$,解得 $k=40$,所以 $c=40\left(\frac{1}{2}\right)^t$.

设首次服药 1 小时后,再次服用同种规格的这种药物 t 小时后的药物浓度为 $f(t)$.

当 $0\leqslant t\leqslant1$ 时,$f(t)=20(2^t-1)+40\left(\frac{1}{2}\right)^{t+1}=20(2^t+2^{-t})-20$.

在 $[0,1]$ 上任取 $t_1<t_2$,则 $f(t_1)-f(t_2)=20\cdot(2^{t_1}+2^{-t_1})-20(2^{t_2}+2^{-t_2})=20(2^{t_1}-2^{t_2})\cdot\frac{2^{t_1+t_2}-1}{2^{t_1+t_2}}$.

由 $2^{t_1}<2^{t_2}$,$2^{t_1+t_2}>1$,得 $f(t_1)-f(t_2)<0$,

即 $f(t_1)<f(t_2)$.

所以 $f(t)$ 在 $[0,1]$ 上是增函数,

所以 $[f(t)]_{\max}=f(1)=30<32$.

当 $t>1$ 时,$f(t)=40\left(\frac{1}{2}\right)^t+40\left(\frac{1}{2}\right)^{t+1}$

$=60\left(\frac{1}{2}\right)^t<f(1)=30<32$.

所以首次服药 1 小时后,可立即再次服用同种规格的这种药物.

第 9 期

第 3~4 版同步周测参考答案

一、选择题

1.C　2.B　3.D　4.A　5.B　6.C　7.C

8.C

提示:设腰长为 1,则 $y=f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x^2$,$0\leqslant x\leqslant1$,其图像显然是抛物线的一部分.

9.B

提示:通过 n 块玻璃后的光线强度变为原来的 $\left(1-\frac{1}{10}\right)^n$,令 $\left(1-\frac{1}{10}\right)^n<\frac{1}{3}$,两边取对数,得 $n>\frac{\lg3}{1-2\lg3}\approx10.42$,所以 n 至少取 11.

10.B

11.C

提示:开始时平均价格与即时价格一致,排除 A、D;平均价格不能一直大于即时价格,排除 B.

12.B

提示:依题意得 $\begin{cases}9a+3b+c=0.7,\\ 16a+4b+c=0.8,\\ 25a+5b+c=0.5,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=-0.2,\\ b=1.5,\\ c=-2,\end{cases}$

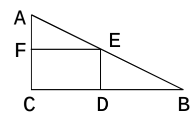
所以 $p=-0.2t^2+1.5t-2=-0.2\left(t-\frac{15}{4}\right)^2+\frac{13}{16}$,所以当 $t=3.75$ 时,p 取得最大值.

二、填空题

13.$y=\frac{1}{2^x}(x\in\mathbf{N}_+)$　14.8

15.600

提示:如图,在直角三角形 ABC 中,剪出一个矩形 $CDEF$.设 $CD=x$,$CF=y$,则 $AF=40-y$.因为 $\triangle AEF\backsim\triangle ABC$,所以 $\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{BC}$,即 $\frac{40-y}{40}=\frac{x}{60}$,所以 $y=40-\frac{2}{3}x$,矩形的面积 $S=xy=x\left(40-\frac{2}{3}x\right)=-\frac{2}{3}(x-30)^2+600(0<x<60)$,当 $x=30$ 时,S 取得最大值 600.



(第 15 题图)

16.ABE(或 $BDEF$)

提示:可以先用 6 亿元投资项目 E,所获利润为 0.9 亿元,那么剩下的 7 亿元投资所获利润只需大于 0.7 亿元.

方案 1:用 5 亿元投资项目 A,所获利润为 0.55 亿元,剩下的 2 亿元只能投资项目 B,则又获得利润 0.4 亿元,此时剩下的 7 亿元投资所获利润为 0.95 亿元,则投资项目选 ABE 符合要求.

方案 2:用 4 亿元投资项目 D,所获利润为 0.5 亿元,剩下的 3 亿元只能投资项目 B,F,则又获得利润 0.5 亿元,此时剩下的 7 亿元投资所获利润为 1 亿元,则投资项目选 $BDEF$ 符合要求.

三、解答题

17.**解**:(1)根据题意,课桌高度 y 是椅子高度 x 的一次函数,故可设函数解析式为 $y=kx+b(k\neq0)$.将符合条件的两套课桌椅的高度代入上述函数解析式,得 $\begin{cases}40k+b=75,\\ 37k+b=70.2,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}k=1.6,\\ b=11,\end{cases}$ 所以 y 与 x 的函数解析式是 $y=1.6x+11$.

(2)把 $x=42$ 代入(1)中所求的函数解析式中,有 $y=1.6\times42+11=78.2$.所以给出的这套桌椅是配套的.

18.**解**:设可获得总利润为 $R(x)$ 万元,

则 $R(x)=40x-y=40x-\frac{x^2}{5}+48x-8\ 000$

$=-\frac{x^2}{5}+88x-8\ 000$

$=-\frac{1}{5}(x-220)^2+1\ 680(0\leqslant x\leqslant210)$.

因为 $R(x)$ 在 $[0,210]$ 上是增函数,所以 $x=210$ 时,$[R(x)]_{\max}=-\frac{1}{5}(210-220)^2+1\ 680=1\ 660$.

所以年产量为 210 吨时,可获得最大利润 1 660 万元.

19.**解**:(1)由题意得 $a(1-p\%)^{10}=\frac{a}{2}$,即 $(1-p\%)^{10}=\frac{1}{2}$,解得 $p\%=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{10}}$.

(2)设经过 m 年森林面积为 $\frac{\sqrt{2}}{2}a$,

则 $a(1-p\%)^m=\frac{\sqrt{2}}{2}a$,即 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m}{10}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$,得 $\frac{m}{10}=\frac{1}{2}$,解得 $m=5$.

故到今年为止,已砍伐了 5 年.

(3)设从今年开始,n 年后森林面积为 $\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot a(1-p\%)^n$,

令 $\frac{\sqrt{2}}{2}a(1-p\%)^n\geqslant\frac{1}{4}a$,

即 $(1-p\%)^n\geqslant\frac{\sqrt{2}}{4}$,

$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{10}}\geqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$,得 $\frac{n}{10}\leqslant\frac{3}{2}$,解得 $n\leqslant15$,

故今后最多还能砍伐 15 年.

20.**解**:由题意知,每年投入广告费 x 万元,年销量为 $Q=\frac{3x+1}{x+1}$ 万件,年平均每万件产品成本为 $32+\frac{3}{Q}$,年平均每万件产品所占广告费为 $\frac{x}{Q}$,售价为 $\frac{3}{2}\left(32+\frac{3}{Q}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{Q}=48+\frac{x+9}{2Q}$,

则年利润为 $y=Q\left(48+\frac{x+9}{2Q}\right)-32Q-3-x=16Q+\frac{x+3}{2}-x=50-\left(\frac{32}{x+1}+\frac{x+1}{2}\right)$.

当 $x=100$ 时,显然 $y<0$.

故当年广告费投入 100 万元,该公司亏损.

21.**解**:(1)若 $a=\frac{1}{2}$,

则 $f(x)=\left|\log_{25}(x+1)-\frac{1}{2}\right|+2\geqslant2$,

当且仅当 $\left|\log_{25}(x+1)-\frac{1}{2}\right|=0$,即 $x=4$ 时,等号成立.

所以一天中时刻 4 时该市的空气污染指数最低.

(2)令 $\log_{25}(x+1)-a=0$,得 $x=25^a-1$.

当 $x\in[0,25^a-1]$ 时,$f(x)=-[\log_{25}(x+1)-a]+2a+1=-\log_{25}(x+1)+3a+1$,

可知 $f(x)$ 是减函数,所以 $f(x)\leqslant f(0)=3a+1$;

当 $x\in(25^a-1,24]$ 时,$f(x)=\log_{25}(x+1)-a+2a+1=\log_{25}(x+1)+a+1$,

可知 $f(x)$ 是增函数,所以 $f(x)\leqslant f(24)=a+2$.

由题意,得 $\begin{cases}3a+1\leqslant3,\\ a+2\leqslant3,\\ 0<a<1,\end{cases}$ 解得 $0<a\leqslant\frac{2}{3}$.所以调节参数 a 应控制在 $\left(0,\frac{2}{3}\right]$ 内.

22.**解**:依题意,得 $\begin{cases}a\cdot1^2+b\cdot1+c=52,\\ a\cdot2^2+b\cdot2+c=54,\\ a\cdot3^2+b\cdot3+c=58,\end{cases}$

即 $\begin{cases}a+b+c=52,\\ 4a+2b+c=54,\\ 9a+3b+c=58,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\ b=-1,\\ c=52,\end{cases}$

所以甲:$y_1=x^2-x+52$.

又 $\begin{cases}p\cdot q^1+r=52,①\\ p\cdot q^2+r=54,②\\ p\cdot q^3+r=58,③\end{cases}$

②-①,得 $p\cdot q^2-p\cdot q^1=2$,④

③-②,得 $p\cdot q^3-p\cdot q^2=4$,⑤

⑤÷④,得 $q=2$.

将 $q=2$ 代入④式,得 $p=1$.

将 $q=2,p=1$ 代入①式,得 $r=50$,

所以乙:$y_2=2^x+50$.

计算当 $x=4$ 时,$y_1=64$,$y_2=66$;

当 $x=5$ 时,$y_1=72$,$y_2=82$;

当 $x=6$ 时,$y_1=82$,$y_2=114$.

可见,乙选择的模型较好.

③

第 10 期

第 2~3 版章节测试参考答案

一、选择题

1.D　2.D　3.C　4.C　5.C　6.C

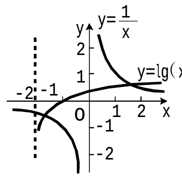
7.B

提示：设 A，B 产品原销售价分别为 a 元，b 元，由题意，可得 $a\cdot(1+20\%)^2=b\cdot(1-20\%)^2=23.04$，解得 a=16，b=36，则 $23.04\times2-(16+36)=-5.92$，所以此时厂家亏 5.92 元.

8.C

9.C

提示：易知 $x\neq0$，则原方程化为 $\lg(x+2)=\frac{1}{x}$. 在同一平面直角坐标系中作出函数 $y=\lg(x+2)$ 与 $y=\frac{1}{x}$ 的图像，如图所示. 由图像可知，原方程有两个根，一个在区间$(-2,-1)$内，一个在区间$(1,2)$内，所以 k=-2 或 k=1.



（第 9 题图）

10.B

提示：当 h=0 时，V=0，排除选项 A，C. 当 $h\in[0,H]$，可将水“流出”设想成“流入”，当 h 从 0 匀速变化到 H 时，根据鱼缸形状可知，函数 V 的增量开始越来越大，但经过中截面后则越来越小，故选 B.

11.D

提示：由 $\alpha=\frac{r}{R}$，得 $r=\alpha R$，代入方程中，整理，得 $\frac{M_2}{M_1}=\frac{3\alpha^3+3\alpha^4+\alpha^5}{(1+\alpha)^2}\approx3\alpha^3$. 所以 $r=\alpha R\approx\sqrt[3]{\frac{M_2}{3M_1}}R$.

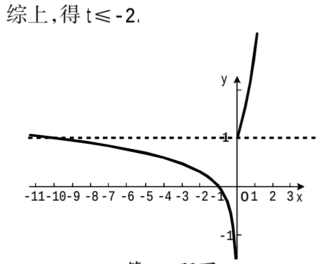
12.A

提示：设 m=f(x)，作出函数 f(x) 的图像如图，则当 $m\geqslant1$ 时，m=f(x) 有两个实根；当 m<1 时，m=f(x) 有一个实根. 关于 x 的方程$[f(x)]^2+f(x)+t=0$ 有三个不同的实根，等价于关于 m 的方程 $m^2+m+t=0$ 有两个不同的实根 m_1,m_2，且 $m_1<1,m_2\geqslant1$.

当 m=1 时，t=-2，此时由 $m^2+m-2=0$ 解得 m=1 或 m=-2，则 f(x)=1 有两个实根，f(x)=-2 有一个实根，满足条件.

当 $m\neq1$ 时，设 $h(m)=m^2+m+t$，则 h(1)<0 即可，即 1+1+t<0，解得 t<-2.

综上，得 $t\leqslant-2$.



（第 12 题图）

二、填空题

13.$y=18v+\frac{180000}{v}(0<v\leqslant120)$

14.1.5，1.75，1.875，1.8125

提示：根据“二分法”的定义，最初确定的区间是(1，2)，又方程的近似解是 1.8，故后 4 个区间分别是(1.5，2)，(1.75，2)，(1.75，1.875)，(1.75，1.8125)，故他再取的 4 个值分别为 1.5，1.75，1.875，1.8125.

15.5

提示：设 x 小时后，血液中的酒精含量不超过 0.09 mg/mL，则有 $0.3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^x\leqslant0.09$，即 $\left(\frac{3}{4}\right)^x\leqslant0.3$，估算或取对数计算得 5 小时后，可以开车.

16.$\left(0,\frac{1}{2}\right)$

提示：由题意，得 $-(1+\log_2a)=2^x$ 有解. 因为 $2^x\in(0,+\infty)$，所以 $-(1+\log_2a)>0$，解得 $0<a<\frac{1}{2}$.

故实数 a 的取值范围为$\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

三、解答题

17.(1)**证明**：因为 $f(0)=1>0$，$f(2)=-\frac{1}{3}<0$，所以 $f(0)\cdot f(2)<0$.

故函数 f(x) 在区间(0，2)内有零点，即方程 f(x)=0 在区间(0，2)内有实数解.

(2)**解**：取区间(0，2)的中点 $x_1=1$，计算得 $f(1)=\frac{1}{3}$. 因为 $f(1)\cdot f(2)<0$，

所以 $x_0\in(1,2)$.

再取区间(1，2)的中点 $x_2=\frac{3}{2}$，计算得 $f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{1}{8}$. 因为 $f(1)\cdot f\left(\frac{3}{2}\right)<0$，所以 $x_0\in\left(1,\frac{3}{2}\right)$.

再取区间$\left(1,\frac{3}{2}\right)$的中点 $x_3=\frac{5}{4}$，计算得 $f\left(\frac{5}{4}\right)=\frac{17}{192}$. 因为 $f\left(\frac{5}{4}\right)\cdot f\left(\frac{3}{2}\right)<0$，所以 $x_0\in\left(\frac{5}{4},\frac{3}{2}\right)$.

综上，故 x_0 在区间$\left(\frac{5}{4},\frac{3}{2}\right)$内.

18.**解**：(1)当 m=0 时，$f(x)=4^x-2^{x+1}=2^x(2^x-2)$. 令 f(x)=0，可得 $2^x-2=0$，解得 x=1.

所以 f(x) 的零点是 1.

(2)令 $t=2^x$，则 t>0，$f(x)=g(t)=t^2-2t-m=(t-1)^2-1-m$.

若 f(x) 有两个零点，则方程 g(t)=0 在(0，+∞)上有两解，由 g(t) 图像的对称轴为 x=1，

可得$\begin{cases}g(0)=-m>0,\\-1-m<0,\end{cases}$解得 $-1<m<0$. 所以实数 m 的取值范围是(-1，0).

19.**解**：(1)根据表中的数据可知该城市人口数量每年都在增加；又 $a_2-a_1=53$，$a_3-a_2=68$，$a_4-a_3=73$，$a_5-a_4=63$，$a_6-a_5=46$，所以第 3 年到第 4 年的增长数量最大，为 73 万，第 5 年到第 6 年的增长数量最小，为 46 万.

(2)令 P(x)=2440，得 $4.4878e^{-0.6544x}=\frac{1}{44}$，

所以 $x=\frac{\ln44+\ln4.4878}{0.6544}\approx8.1$.

故 T(2440)=8.1，表示到 2022 年该城市的人口数量接近 2440 万.

20.**解**：(1)当 $x\leqslant100$ 时，$y=(320-x)(20+0.2x)-2x-4x=-0.2x^2+38x+6400$.

所以 $y=\begin{cases}-0.2x^2+38x+6400,0\leqslant x\leqslant100,x\in N,\\8202+\lg x,100<x<320,x\in N.\end{cases}$

(2)由(1)可知，当 $0\leqslant x\leqslant100$ 时，

$y=-\frac{1}{5}(x-95)^2+8205$，

故当 x=95 时，$y_{max}=8205$；

当 100<x<320 时，y 是增函数，

故 $y=8202+\lg x<8202+\lg320=8202+1+5\lg2\approx8204.505<8205$.

综上所述，为使工厂获得最大经济效益，应购进 95 台智能机器人，此时最大年利润为 8205 万元.

21.**解**：(1)基本要求是：①f(x) 是定义域[10，1000]上的增函数；②$f(x)\leqslant9$；③$f(x)\leqslant0.2x$ 在[10，1000]上恒成立. 若 $f(x)=\frac{x}{150}+2$，则 $f(10)=\frac{10}{150}+2>0.2\times10$，不满足条件③，故 $f(x)=\frac{x}{150}+2$ 不符合团队的要求.

(2)$f(x)=\frac{10x-3a}{x+2}=10-\frac{3a+20}{x+2}(10\leqslant x\leqslant1000)$.

因为 f(x) 是增函数，所以 3a+20>0. ①

故 f(x) 的最大值为

$f(1000)=10-\frac{3a+20}{1002}\leqslant9$.　　②

由 $f(x)\leqslant0.2x$ 在[10，1000]上恒成立，可得 $x^2-48x+15a\geqslant0$ 在[10，1000]上恒成立.

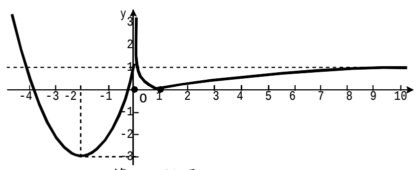
令 $g(x)=x^2-48x+15a=(x-24)^2+15a-24^2$，

则需 $g(24)=15a-24^2\geqslant0$.　　③

联立①②③，解得 $a\geqslant\frac{982}{3}=327\frac{1}{3}$.

所以正整数 a 的最小值为 328.

22.**解**：(1)函数 g(x)=f(x)-a 的零点个数即 f(x) 的图像与直线 y=a 交点的个数. 画出 f(x) 的图像如图所示.



（第 22 题图）

从而可知，当 $a\in(-\infty,-3)$ 时，f(x) 的图像与直线 y=a 没有交点，故 g(x) 没有零点；当 a=-3 时，f(x) 的图像与直线 y=a 有 1 个交点，故 g(x) 有 1 个零点；当 $a\in(-3,0)$ 时，f(x) 的图像与直线 y=a 有 2 个交点，故 g(x) 有 2 个零点；当 $a\in\{0\}\cup(1,+\infty)$ 时，f(x) 的图像与直线 y=a 有 3 个交点，故 g(x) 有 3 个零点；当 $a\in(0,1]$ 时，f(x) 的图像与直线 y=a 有 4 个交点，故 g(x) 有 4 个零点.

(2)由(1)可知，当函数 g(x) 有 4 个零点时，$a\in(0,1]$.

设 $x_1<x_2<x_3<x_4$，则有 $x_1x_2=1$，$\lg x_3=-\lg x_4$，即 $x_3x_4=1$. 故 $x_1x_2x_3x_4=1$.

第 11 期

第 2~3 版综合测试(一)参考答案

一、选择题

1.A

2.C

3.D

4.C

提示：因为 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}+3=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+1$，所以 $f(x)=x^2+1$.

故 f(3)=10.

5.B

6.D

提示：设 $t=x^2-4x=(x-2)^2-4$，则 $t\geqslant0$，$y=\sqrt{t}$. 由于 y 在[0，+∞)上单调递增，t 在[4，+∞)上单调递增，故 f(x) 在(4，+∞)上单调递增.

7.A

提示：函数 y 是奇函数，排除 B，C；当 $x=\frac{1}{2}$ 时，$y=\frac{x^2-1}{x}<0$，排除 D.

故选 A.

8.D

提示：$f(x)=\log_2(2x)\cdot\log_4(2x)$

$=\log_2(2x)\cdot\frac{\log_2(2x)}{\log_24}=\frac{1}{2}(\log_2x+1)^2$.

设 $t=\log_2x$，则 $y=f(x)=\frac{1}{2}(t+1)^2$.

因为 $x\in\left[\frac{1}{4},4\right]$，所以 $t\in[-2,2]$.

所以当 t=-1 时，y 取得最小值 0.

故选 D.

9.D

提示：指数函数增长最快，故选 D.

10.D

提示：方程 f(x)-2=0 在(-∞，0)内有根，即方程 f(x)=2 在(-∞，0)内有根，也即函数 y=f(x) 的图像与函数 y=2 的图像在(-∞，0)内有交点. 故选 D.

11.C　12.A

二、填空题

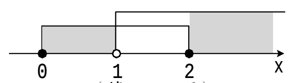
13.{3，4，5，6，7，8}

14.1

15.$\left(\frac{5}{2},3\right)$

16. [0，1]∪(2，+∞)

提示：由已知得 P=[0，2]，Q=(1，+∞). 结合如图所示数轴，可知 $P\odot Q=[0,1]\cup(2,+\infty)$.



（第 16 题图）

三、解答题

17.**解**：(1)当 a=3 时，$N=\{x|4\leqslant x\leqslant5\}$，所以 $\complement_RN=\{x|x<4$ 或 $x>5\}$.

又 $M=\{x|-2\leqslant x\leqslant5\}$，

所以 $M\cup(\complement_RN)=\mathbf{R}$.

(2)当 2a-1<a+1，即 a<2 时，$N=\varnothing$，满足 $N\subseteq M$.

当 $2a-1\geqslant a+1$，即 $a\geqslant2$ 时，

由 $N\subseteq M$，得$\begin{cases}a+1\geqslant-2,\\2a-1\leqslant5,\end{cases}$解得 $-3\leqslant a\leqslant3$.

综上可知，实数 a 的取值范围为(-∞，3].

18.(1)**证明**：任取 $x_1,x_2\in[1,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，则 $f(x_1)-f(x_2)=\frac{2x_1+1}{x_1+1}-\frac{2x_2+1}{x_2+1}=\frac{x_1-x_2}{(x_1+1)(x_2+1)}$.

因为 $1\leqslant x_1<x_2$，

所以 $x_1-x_2<0$，$(x_1+1)(x_2+1)>0$.

所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$.

所以 f(x) 在[1，+∞)上是增函数.

(2)**解**：由(1)知 f(x) 在区间[2，4]上是增函数，所以 f(x) 的最大值为 $f(4)=\frac{9}{5}$，最小值为 $f(2)=\frac{5}{3}$.

19.**解**：(1)设 $f(x)=x^\alpha$，则有 $5=25^\alpha$，解得 $\alpha=\frac{1}{2}$. 所以 $f(x)=\sqrt{x}$.

(2)$g(x)=f(2-\lg x)=\sqrt{2-\lg x}$.

要使 g(x) 有意义，只需 $2-\lg x\geqslant0$，

解得 $0<x\leqslant100$.

所以 g(x) 的定义域为(0，100].

又 $2-\lg x\geqslant0$，

所以 g(x) 的值域为[0，+∞).

20.**解**：(1)由图 1 可知 f(x) 的图像过点(2，0)，(0，-2)，

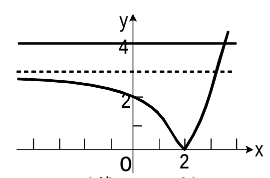
所以 $a^2+b=0$，$a^0+b=-2$，

解得 $a=\sqrt{3}$，b=-3.

(2)由图 2 可知 f(x) 是减函数，所以 0<a<1. 又 $f(0)=a^0+b<0$，所以 b<-1.

所以 a 的取值范围是(0，1)，b 的取值范围是(-∞，-1).

(3)由(1)得 $f(x)=(\sqrt{3})^x-3$，在同一平面直角坐标系中画出函数 $y=|f(x)|$ 和 y=m 的图像如图所示，可知实数 m 的取值范围是{0}∪[3，+∞).



（第 20 题图）

21.**解**：(1)令 $x-(x^2+2x-2)=0$，解得 x=-2，或 x=1. 所以 F(x) 的零点是 -2 和 1.

(2)当 a=0 时，$F(x)=-1-\ln x$ 在(0，+∞)上单调递减，故其在区间$\left[\frac{1}{e},1\right]$上至多有 1 个零点，不满足要求.

当 $a\neq0$ 时，由题可得

$\begin{cases}ax_0^2-1=\ln x_0,\\ae^2x_0^2-1=\ln(ex_0).\end{cases}$

因为 $\ln(ex_0)=\ln x_0+1$，所以 $ae^2x_0^2-1=ax_0^2-1+1$，解得 $a=\frac{1}{x_0^2(e^2-1)}$.

因为 $x_0\in\left[\frac{1}{e},1\right]$，

所以 $x_0^2(e^2-1)\in\left[\frac{e^2-1}{e^2},e^2-1\right]$，

$\frac{1}{x_0^2(e^2-1)}\in\left[\frac{1}{e^2-1},\frac{e^2}{e^2-1}\right]$.

所以实数 a 的取值范围是

$\left[\frac{1}{e^2-1},\frac{e^2}{e^2-1}\right]$.

22.(1)**解**：由 g(t) 为常数，得 $g(0)-\frac{p}{r}=0$，所以 $g(0)=\frac{p}{r}$，即初始质量分数为 $\frac{p}{r}$.

(2)**证明**：设 $0<t_1<t_2$，则

$g(t_1)-g(t_2)$

$=\frac{p}{r}+\left[g(0)-\frac{p}{r}\right]\cdot e^{-\frac{r}{v}t_1}-\frac{p}{r}-\left[g(0)-\frac{p}{r}\right]\cdot e^{-\frac{r}{v}t_2}$

$=\left[g(0)-\frac{p}{r}\right]\cdot\left(e^{-\frac{r}{v}t_1}-e^{-\frac{r}{v}t_2}\right)$

$=\left[g(0)-\frac{p}{r}\right]\cdot\frac{e^{\frac{r}{v}t_2}-e^{\frac{r}{v}t_1}}{e^{\frac{r}{v}(t_1+t_2)}}$.

因为 $t_1<t_2$，所以 $e^{\frac{r}{v}t_1}<e^{\frac{r}{v}t_2}$，

所以 $e^{\frac{r}{v}t_2}-e^{\frac{r}{v}t_1}>0$.

又 $g(0)-\frac{p}{r}<0$，$e^{\frac{r}{v}(t_1+t_2)}>0$，

所以 $g(t_1)<g(t_2)$.

故湖水污染质量分数随时间的增加而增加，说明湖泊的污染程度会越来越严重.

(3)**解**：污染停止，即 p=0，

则 $g(t)=g(0)\cdot e^{-\frac{r}{v}t}$.

设经过 t 天能使湖泊污染程度下降到初始污染程度的 5%，即 $g(t)=5\%\cdot g(0)$，

所以 $\frac{1}{20}=e^{-\frac{r}{v}t}$，解得 $t=\frac{v}{r}\ln20$.

故需要经过 $\frac{v}{r}\ln20$ 天才能使湖泊的污染程度下降到初始污染程度的 5%.