第 20 期

第2~3版同步周测参考答案

一、选择题

1~6.DDACBC　　7~12.ACBCCD

二、填空题

13.1 或 2 或 3　　14.2

15.$8\sqrt{2}\pi$　　16.$\sqrt{2}$

三、解答题

17.**证明**:(1)因为 M 是棱柱的侧面 AA_1C_1C 对角线的交点,所以 M 是 AC_1 中点.因为 D 是 AB 中点,所以 $MD/\!/BC_1$,因为 $MD\not\subset$平面 A_1BC_1,$BC_1\subset$平面 A_1BC_1,所以 $MD/\!/$平面 A_1BC_1.

(2)因为 $AB=AC$,E 是 BC 中点,所以 $AE\perp BC$.因为 $AA_1\perp$平面 ABC,$AE\subset$平面 ABC,所以 $AA_1\perp AE$.

因为在三棱柱中 $BB_1/\!/AA_1$,

所以 $BB_1\perp AE$.

因为 $BB_1\cap BC=B$,

$BB_1\subset$平面 BCC_1B_1,

$BC\subset$平面 BCC_1B_1,

所以 $AE\perp$平面 BCC_1B_1.

因为 $AE\subset$平面 MAE,

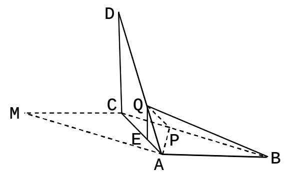
所以平面 $MAE\perp$平面 BCC_1B_1.

18.**证明**:(1)因为 $PA\perp$平面 $ABCD$,$AB\subset$平面 $ABCD$,所以 $AB\perp PA$.又 $AB\perp AD$,$PA\cap AD=A$,所以 $AB\perp$平面 PAD,因为 $PD\subset$平面 PAD,所以 $AB\perp PD$.

(2)因为 $CD=2AB$,E 为 CD 的中点,所以 $AB=DE$,又因为 $AB/\!/DE$,所以四边形 $ABED$ 为平行四边形,所以 $AD/\!/BE$.因为 E,F 分别是 CD 和 PC 的中点,所以 $EF/\!/PD$.因为 $EF\cap BE=E$,$PD\cap AD=D$,所以平面 $BEF/\!/$平面 PAD.

19.(1)**证明**:因为四边形 $ABCM$ 是平行四边形,$\angle ACM=90°$,所以 $\angle BAC=90°$,所以 $AB\perp AC$.又 $AB\perp DA$,$DA\cap AC=A$,所以 $AB\perp$平面 ACD.又 $AB\subset$平面 ABC,所以平面 $ACD\perp$平面 ABC.

(2)**解**:由已知可得,$DC=CM=AB=3$,因为 $\angle ACM=90°$,所以 $AC\perp DC$,所以 $DA=3\sqrt{2}$,$\angle ADC=45°$.又 $BP=DQ=\frac{2}{3}DA$,所以 $BP=2\sqrt{2}$.如图,作 $QE\perp AC$,垂足为 E,则 $QE/\!/DC$,且 $QE=\frac{1}{3}DC$.因为平面 $ACD\perp$平面 ABC,$AC\perp DC$,所以 $DC\perp$平面 ABC,所以 $QE\perp$平面 ABC,$QE=1$.因为 $\angle ADC=\angle ABC=45°$,所以 $S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BP\cdot\sin\angle ABC=\frac{1}{2}\times3\times2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=3$.因此,三棱锥 $Q-ABP$ 的体积为 $V_{Q-ABP}=\frac{1}{3}\cdot QE\cdot S_{\triangle ABP}=\frac{1}{3}\times1\times3=1$.



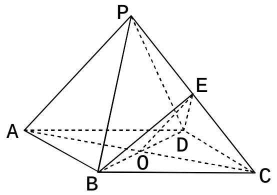
(第 19 题图)

20.(1)**证明**:连接 AC 交 BD 于 O,连接 OE,因为 E 为 PC 中点,O 为 AC 中点,所以 $OE/\!/PA$,又 $PA\not\subset$平面 BDE,$OE\subset$平面 BDE,故 $PA/\!/$平面 BDE.

(2)**解**:由(1)可得,$\angle DEO$ 或其补角为异面直线 PA 与 DE 所成的角,设 $AB=2$,则 $EO=1$,$OD=\sqrt{2}$,$DE=\sqrt{3}$,由勾股定理,得$\triangle ODE$ 为直角三角形,

则 $\cos\angle DEO=\frac{OE}{DE}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,

故异面直线 PA 与 DE 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.



(第 20 题图)

21.(1)**证明**:连接 B_1C,ME.

因为 M,E 分别为 BB_1,BC 的中点,

所以 $ME/\!/B_1C$,且 $ME=\frac{1}{2}B_1C$.

又因为 N 为 A_1D 的中点,

所以 $ND=\frac{1}{2}A_1D$.

由题设知 $A_1B_1\underline{/\!/}DC$,

可得 $B_1C\underline{/\!/}A_1D$,故 $ME\underline{/\!/}ND$,

因此四边形 $MNDE$ 为平行四边形,

所以 $MN/\!/ED$.

又 $MN\not\subset$平面 C_1DE,

所以 $MN/\!/$平面 C_1DE.

(2)**解法一**:过 C 作 C_1E 的垂线,垂足为 H.

由于 $ABCD$ 是菱形,且 $\angle BAD=60°$,

所以 $\angle BCD=60°$,$\triangle BCD$ 为正三角形,而 E 为 BC 中点,所以 $DE\perp BC$,

又 $DE\perp C_1C$,所以 $DE\perp$平面 C_1CE,

故 $DE\perp CH$.

从而 $CH\perp$平面 C_1DE,故 CH 的长即为 C 到平面 C_1DE 的距离.

由已知可得 $CE=1$,$C_1C=4$,

所以 $C_1E=\sqrt{17}$,

故 $CH=\frac{CE\cdot CC_1}{C_1E}=\frac{4\sqrt{17}}{17}$.

从而点 C 到平面 C_1DE 的距离为 $\frac{4\sqrt{17}}{17}$.

解法二:由于 $ABCD$ 是菱形,且 $\angle BAD=60°$,所以 $\angle BCD=60°$,$\triangle BCD$ 为正三角形,而 E 为 BC 中点,所以 $DE\perp BC$,$DE=\sqrt{3}$.

又 $DE\perp C_1C$,所以 $DE\perp$平面 C_1CE,

故 $DE\perp C_1E$.

在 Rt$\triangle CEC_1$ 中,$CE=1$,$C_1C=4$,

所以 $C_1E=\sqrt{17}$.

设点 C 到平面 C_1DE 的距离为 h,

则由 $V_{C_1-DCE}=V_{C-DEC_1}$

得 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}\times4=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{17}\times h$,得 $h=\frac{4\sqrt{17}}{17}$,

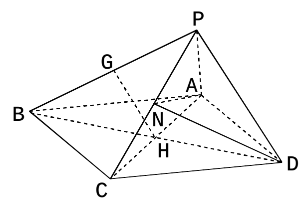
从而点 C 到平面 C_1DE 的距离为 $\frac{4\sqrt{17}}{17}$.

22.(1)**证明**:连接 BD,由题意得 $AC\cap BD=H$,$BH=DH$,又 $BG=PG$,所以 $GH/\!/PD$,因为 $GH\not\subset$平面 PAD,$PD\subset$平面 PAD,所以 $GH/\!/$平面 PAD.

(2)**证明**:取棱 PC 中点 N,连接 DN,则 $DN\perp PC$,又因为平面 $PAC\perp$平面 PCD,平面 $PAC\cap$平面 $PCD=PC$,所以 $DN\perp$平面 PAC,又 $PA\subset$平面 PAC,所以 $DN\perp PA$,又 $PA\perp CD$,$CD\cap DN=D$,所以 $PA\perp$平面 PCD.

(3)**解**:连接 AN,由(2)中 $DN\perp$平面 PAC,知$\angle DAN$ 是直线 AD 与平面 PAC 所成角.

因为$\triangle PCD$ 是等边三角形,$CD=2$,且 N 为 PC 中点,所以 $DN=\sqrt{3}$.又 $DN\perp AN$,在 Rt$\triangle AND$ 中,$\sin\angle DAN=\frac{DN}{DA}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.所以直线 AD 与平面 PAC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.



(第 22 题图)

第17期

第 2~3 版同步周测参考答案

一、选择题

1~6.DAACAA　7~12.DCBCBB

二、填空题

13.2　14.-63　15.$a_n=2^n$

16.$\frac{5}{16}-\frac{2n^2+6n+5}{4(n+1)^2(n+2)^2}$

三、解答题

17.**解**:(1)由条件可得

$a_{n+1}=\frac{2(n+1)}{n}a_n$.①

将 $n=1$ 代入①得,$a_2=4a_1$,

而 $a_1=1$,所以 $a_2=4$.

将 $n=2$ 代入①得,$a_3=3a_2$,

所以 $a_3=12$.

从而 $b_1=1$,$b_2=2$,$b_3=4$.

(2)$\{b_n\}$是首项为 1,公比为 2 的等比数列.

理由如下:

由条件可得 $\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{2a_n}{n}$,

即 $b_{n+1}=2b_n$,又 $b_1=1$,所以$\{b_n\}$是首项为 1,公比为 2 的等比数列.

(3)由(2)可得 $\frac{a_n}{n}=2^{n-1}$,

所以 $a_n=n\cdot2^{n-1}$.

18.(1)**证明**:$\frac{a_{n+1}+3}{a_n+3}=\frac{2a_n+3+3}{a_n+3}=2$ $(n\in N_+)$,

所以数列$\{a_n+3\}$是等比数列,且公比为 2.

(2)**解**:由(1)及题设,可知数列$\{a_n+3\}$是首项为 4,公比为 2 的等比数列,所以 $a_n+3=4\times2^{n-1}=2^{n+1}$,于是 $a_n=2^{n+1}-3$,所以 $n\cdot a_n=n\cdot2^{n+1}-3n$.

设 $b_n=n\cdot2^{n+1}$,$c_n=-3n$,并设它们的前 n 项和分别为 T_n,R_n.

则 $T_n=1\times2^2+2\times2^3+3\times2^4+\cdots+n\cdot2^{n+1}$,①

所以 $2T_n=1\times2^3+2\times2^4+\cdots+(n-1)\cdot2^{n+1}+n\cdot2^{n+2}$,②

由②-①,得 $T_n=-2^2-2^3-2^4-\cdots-2^{n+1}+n\cdot2^{n+2}=n\cdot2^{n+2}-4\cdot\frac{1-2^n}{1-2}=(n-1)\cdot2^{n+2}+4$.

又 $R_n=\frac{-3+(-3n)}{2}\cdot n=-\frac{3}{2}n^2-\frac{3}{2}n$,

所以 $S_n=T_n+R_n=(n-1)\cdot2^{n+2}-\frac{3}{2}n^2-\frac{3}{2}n+4$.

19.**解**:(1)由已知,得 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2m}=\frac{3}{2}(a_2+a_4+\cdots+a_{2m})$,所以 $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2m-1}=\frac{1}{2}(a_2+a_4+\cdots+a_{2m})$,所以 $q=2$.

由 $a_5+2a_4=a_2a_4$,得 $a_3q^2+2a_3q=a_3^2$,即 $q^2+2q=a_3$,所以 $a_3=8$,所以 $a_n=a_3q^{n-3}=2^n$.

(2)因为$\{b_n\}$是递增数列,

所以 $b_{n+1}>b_n$ 对 $n\in N_+$恒成立,

且 $n\in N_+$时,$(n+1-\lambda)2^{n+1}>(n-\lambda)2^n$,

得 $\lambda<n+2$ 对 $n\in N_+$恒成立,即 $\lambda<3$.

所以实数 λ 的取值范围是$(-\infty,3)$.

20.**解**:(1)因为 $2S_n=3^n+3$,

所以 $2a_1=3+3$,所以 $a_1=3$.

当 $n\geqslant2$ 时,$2S_{n-1}=3^{n-1}+3$.

此时,$2a_n=2S_n-2S_{n-1}=3^n-3^{n-1}$,即 $a_n=3^{n-1}$.

所以 $a_n=\begin{cases}3,n=1,\\3^{n-1},n\geqslant2.\end{cases}$

(2)因为 $a_nb_n=\log_3a_n$,所以 $b_1=\frac{1}{3}$;

当 $n\geqslant2$ 时,$b_n=3^{1-n}\log_33^{n-1}=(n-1)\cdot3^{1-n}$.

所以 $T_1=b_1=\frac{1}{3}$.

当 $n\geqslant2$ 时,

$T_n=b_1+b_2+b_3+\cdots b_n=\frac{1}{3}+[1\times3^{-1}+2\times3^{-2}+\cdots+(n-1)3^{1-n}]$.

所以 $3T_n=1+[1\times3^0+2\times3^{-1}+\cdots+(n-1)3^{2-n}]$.

两式相减,得

$2T_n=\frac{2}{3}+(3^0+3^{-1}+3^{2-n})-(n-1)\cdot3^{1-n}=\frac{2}{3}+\frac{1-3^{1-n}}{1-3^{-1}}-(n-1)\cdot3^{1-n}=\frac{13}{6}-\frac{6n+3}{2\times3^n}$,

所以 $T_n=\frac{13}{12}-\frac{6n+3}{4\times3^n}$.

经检验,$n=1$ 时也适合,

综上,可得 $T_n=\frac{13}{12}-\frac{6n+3}{4\times3^n}(n\in N_+)$.

21.(1)**解**:由 $S_n^2-(n^2+n-1)S_n-(n^2+n)=0$,得$[S_n-(n^2+n)](S_n+1)=0$.

因为$\{a_n\}$是正项数列,

所以 $S_n>0$,所以 $S_n=n^2+n$.

于是 $a_1=S_1=2$,$n\geqslant2$ 时,

$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+n-(n-1)^2-(n-1)=2n$.

当 $n=1$ 时,也满足上式,所以数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2n$.

(2)**证明**:由于 $a_n=2n$,$b_n=\frac{n+1}{(n+2)^2a_n^2}$,

则 $b_n=\frac{n+1}{4n^2(n+2)^2}=\frac{1}{16}\left[\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+2)^2}\right]$.

$T_n=\frac{1}{16}\times\left[1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^2}-\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+2)^2}\right]=\frac{1}{16}\times\left[1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{(n+2)^2}\right]<\frac{1}{16}\times\left(1+\frac{1}{2^2}\right)=\frac{5}{64}$.

22.(1)**证明**:因为 $2a_n=a_{n+1}+a_{n-1}(n\geqslant2,n\in N_+)$,

所以$\{a_n\}$是等差数列.

又因为 $a_1=\frac{1}{4}$,$a_2=\frac{3}{4}$,

所以 $a_n=\frac{1}{4}+(n-1)\cdot\frac{1}{2}=\frac{2n-1}{4}$.

因为 $b_n=\frac{1}{3}b_{n-1}+\frac{n}{3}(n\geqslant2,n\in N_+)$,

所以 $b_{n+1}-a_{n+1}=\frac{1}{3}b_n+\frac{n+1}{3}-\frac{2n+1}{4}=\frac{1}{3}b_n-\frac{2n-1}{12}=\frac{1}{3}\left(b_n-\frac{2n-1}{4}\right)=\frac{1}{3}(b_n-a_n)$.

又因为 $b_1-a_1=b_1-\frac{1}{4}\neq0$,

所以$\{b_n-a_n\}$是以 $b_1-\frac{1}{4}$ 为首项,

以 $\frac{1}{3}$ 为公比的等比数列.

(2)**证明**:因为 $b_n-a_n=\left(b_1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$,$a_n=\frac{2n-1}{4}$,

所以 $b_n=\left(b_1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{2n-1}{4}$.

当 $n\geqslant2$ 时,$b_n-b_{n-1}=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\left(b_1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$.

又 $b_1<0$,所以 $b_n-b_{n-1}>0$.

所以$\{b_n\}$是单调递增数列.

(3)**解**:因为当且仅当 $n=3$ 时,S_n 取最小值,所以$\begin{cases}b_3<0,\\b_4>0,\end{cases}$

即$\begin{cases}\frac{5}{4}+\left(b_1-\frac{1}{4}\right)\times\left(\frac{1}{3}\right)^2<0,\\\frac{7}{4}+\left(b_1-\frac{1}{4}\right)\times\left(\frac{1}{3}\right)^3>0,\end{cases}$

解得 $-47<b_1<-11$,

所以 b_1 的取值范围是$(-47,-11)$.

第18期

第 2~3 版同步周测参考答案

一、选择题

1~6.BBBCCB　　7~12.BCCDBC

二、填空题

13.-8　　14.1009

15.$\frac{1}{18}$　　16.$3\sqrt{17}$

三、解答题

17.**解**:(1)设$\{a_n\}$的公比为$q(q\neq0)$,由题设得$a_n=q^{n-1}$.

因为$a_5=4a_3$,所以$q^4=4q^2$,

解得$q=-2$,或$q=2$.

故$a_n=(-2)^{n-1}$或$a_n=2^{n-1}$.

(2)若$a_n=(-2)^{n-1}$,

则$S_n=\frac{1\times[1-(-2)^n]}{1-(-2)}=\frac{1-(-2)^n}{3}$.

由$S_m=63$,得$\frac{1-(-2)^m}{3}=63$,

所以$(-2)^m=-188$,

此方程没有正整数解.

若$a_n=2^{n-1}$,则$S_n=\frac{1\times(1-2^n)}{1-2}=2^n-1$.

由$S_m=63$,得$2^m=64$,解得$m=6$.

综上,$m=6$.

18.(1)**证明**:$2S_n=-a_n+n$,

当$n\geqslant2$时,$2S_{n-1}=-a_{n-1}+n-1$,

两式相减,得$2a_n=-a_n+a_{n-1}+1$,

即$a_n=\frac{1}{3}a_{n-1}+\frac{1}{3}$.

所以$a_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\left(a_{n-1}-\frac{1}{2}\right)$,

所以数列$\left\{a_n-\frac{1}{2}\right\}$为等比数列.

(2)**解**:由$2S_1=-a_1+1$,得$a_1=\frac{1}{3}$.

由(1)知,数列$\left\{a_n-\frac{1}{2}\right\}$是以$-\frac{1}{6}$为首项,$\frac{1}{3}$为公比的等比数列.

所以$a_n-\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n$,

所以$a_n=-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{2}$,

所以$a_n-1=-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n-\frac{1}{2}$,

所以$T_n=\frac{-\frac{1}{6}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{3}}-\frac{n}{2}=\frac{1}{4}\cdot\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n-1\right]-\frac{n}{2}$.

19.**解**:(1)因为$\{a_n\}$是等差数列,$a_1=-10$,且a_2+10,a_3+8,a_4+6成等比数列,

所以$(a_3+8)^2=(a_2+10)(a_4+6)$,

设公差为d,所以$(-2+2d)^2=d(-4+3d)$,

化简得$d^2-4d+4=0$,

解得$d=2$,

所以$a_n=a_1+(n-1)d=-10+2n-2=2n-12$.

(2)由$a_1=-10$,$d=2$,得

$S_n=-10n+\frac{n(n-1)}{2}\times2=n^2-11n$

$=\left(n-\frac{11}{2}\right)^2-\frac{121}{4}$,

所以$n=5$或$n=6$时,S_n取最小值-30.

20.**解**:(1)$\{a_n\}$是等差数列,$\{b_n\}$是等比数列,公比大于0.

设等差数列$\{a_n\}$的公差为d,等比数列$\{b_n\}$的公比为q,q>0.

由题意知,$3q=3+2d$,$3q^2=15+4d$,解得$d=3$,$q=3$,故$a_n=3+3(n-1)=3n$,$b_n=3\times3^{n-1}=3^n$.

(2)数列$\{c_n\}$满足$c_n=\begin{cases}1,n\text{为奇数},\\ b_{\frac{n}{2}},n\text{为偶数},\end{cases}$

$a_1c_1+a_2c_2+\cdots+a_{2n}c_{2n}=(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1})+(a_2b_1+a_4b_2+a_6b_3+\cdots+a_{2n}b_n)$

$=\left[3n+\frac{n(n-1)}{2}\times6\right]+(6\times3+12\times3^2+18\times3^3+\cdots+6n\times3^n)=3n^2+6(1\times3+2\times3^2+\cdots+n\times3^n)$.

令$T_n=1\times3+2\times3^2+\cdots+n\times3^n$,①

则$3T_n=1\times3^2+2\times3^3+\cdots+n\times3^{n+1}$,②

②-①得,$2T_n=-3-3^2-3^3-\cdots-3^n+n3^{n+1}=-3\times\frac{1-3^n}{1-3}+n3^{n+1}=\frac{(2n-1)3^{n+1}+3}{2}$.

故$a_1c_1+a_2c_2+\cdots+a_{2n}c_{2n}=3n^2+6T_n=\frac{(2n-1)3^{n+2}+6n^2+9}{2}(n\in\mathbf{N}_+)$.

21.**解**:(1)$A_n=n^2$,所以$n\geqslant2$时,$a_n=A_n-A_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1$.当$n=1$时,$a_1=A_1=1$.所以$n=1$时,适合上式.所以$a_n=2n-1(n\in\mathbf{N}_+)$.

因为$a_{n+1}-a_n=2(b_{n+1}-b_n)$,所以$b_{n+1}-b_n=\frac{1}{2}\times2=1$,又$b_1=2$,

所以数列$\{b_n\}$是首项为2,公差为1的等差数列.

所以$B_n=2n+\frac{n(n-1)}{2}\times1=\frac{n^2+3n}{2}$.

(2)对任意$n\in\mathbf{N}_+$,都有$a_n=B_n$,

所以$a_{n+1}-a_n=B_{n+1}-B_n=b_{n+1}$.

所以$b_{n+1}-b_n=\frac{1}{2}(a_{n+1}-a_n)=\frac{1}{2}b_{n+1}$.

所以$b_{n+1}=2b_n$,$b_1>0$.所以数列$\{b_n\}$是等比数列,公比为2.

所以$B_n=\frac{2^n-1}{2-1}b_1=(2^n-1)b_1$.

又$\frac{b_{n+1}}{a_na_{n+1}}=\frac{B_{n+1}-B_n}{B_{n+1}B_n}=\frac{1}{B_n}-\frac{1}{B_{n+1}}$,$\frac{b_2}{a_1a_2}+\frac{b_3}{a_2a_3}+\frac{b_4}{a_3a_4}+\cdots+\frac{b_{n+1}}{a_na_{n+1}}<\frac{1}{3}$成立,

所以$\frac{1}{B_1}-\frac{1}{B_2}+\frac{1}{B_2}-\frac{1}{B_3}+\cdots+\frac{1}{B_n}-\frac{1}{B_{n+1}}=\frac{1}{B_1}-\frac{1}{B_{n+1}}=\frac{1}{b_1}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}-1}\right)<\frac{1}{3}$,

所以$b_1>3\left(1-\frac{1}{2^{n+1}-1}\right)$,因为对任意$n\in\mathbf{N}_+$,都成立,所以$b_1\geqslant3$.所以正实数$b_1$的取值范围是$[3,+\infty)$.

22.(1)**证明**:$S_n=a_{n+1}+2n-8$,$n\in\mathbf{N}_+$,$a_1=8$,当$n=1$时,$a_1=S_1=a_2-6$,$a_2=14$,

当$n\geqslant2$,$n\in\mathbf{N}_+$时,$S_n=a_{n+1}+2n-8$,$S_{n-1}=a_n+2n-10$,

两式相减,得$a_{n+1}=2a_n-2$,即$a_{n+1}-2=2(a_n-2)$,即$\frac{b_{n+1}}{b_n}=2(n\geqslant2)$,又$\frac{b_2}{b_1}=\frac{a_2-2}{a_1-2}=2$,

所以$\{b_n\}$是首项$b_1=6$,公比为2的等比数列.

(2)**解**:由(1)知$a_n-2=6\cdot2^{n-1}$,即$a_n=3\cdot2^n+2$,

所以$c_n=(-1)^n\frac{a_n}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)}$

$=(-1)^n\frac{3\cdot2^n+2}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)}$

$=(-1)^n\left(\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{2^{n+1}+1}\right)$,

$T_n=-\left(\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2^2+1}\right)+\left(\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{2^3+1}\right)-\left(\frac{1}{2^3+1}+\frac{1}{2^4+1}\right)+\cdots+(-1)^n\left(\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{2^{n+1}+1}\right)$,

所以$T_n=-\frac{1}{3}+(-1)^n\frac{1}{2^{n+1}+1}$.

当n为偶数时,$T_n=-\frac{1}{3}+(-1)^n\frac{1}{2^{n+1}+1}$是递减的,此时当$n=2$时,$T_n$取最大值$-\frac{2}{9}$,则$\lambda\geqslant-\frac{2}{9}$.

当n为奇数时,$T_n=-\frac{1}{3}+(-1)^n\cdot\frac{1}{2^{n+1}+1}$是递增的,此时$T_n<-\frac{1}{3}$,则$\lambda\geqslant-\frac{1}{3}$.

综上,λ的取值范围是$\left[-\frac{2}{9},+\infty\right)$.

第 19 期

第2~3版同步周测参考答案

一、选择题

1~6.DACCCB　　7~12.BDBBBDD

二、填空题

13.$\frac{\sqrt{65}}{2}$　　14.$\frac{9\pi}{2}$

15.26,$\sqrt{2}-1$　　16.118.8

三、解答题

17.**解**:(1)由题意,四棱锥为正四棱锥,因为该四棱锥的侧棱长为$\sqrt{2}a$,底面是边长为a的正方形,所以四棱锥的高为$\frac{\sqrt{6}}{2}a$,设外接球的半径为R,则有$R^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{2}a-R\right)^2$,

所以$R=\frac{\sqrt{6}}{3}a$,

所以外接球的体积为

$\frac{4}{3}\pi\times\left(\frac{\sqrt{6}}{3}a\right)^3=\frac{8\sqrt{6}}{27}\pi a^3$.

(2)设内切球的半径为r,则$\frac{1}{3}\times a^2\times\frac{\sqrt{6}}{2}a=\frac{1}{3}\times\left(a^2+4\times\frac{1}{2}\times a\times\sqrt{2a^2-\frac{a^2}{4}}\right)\times r$,

所以$r=\frac{\sqrt{42}-\sqrt{6}}{12}a$,

所以内切球的表面积为

$4\pi r^2=\frac{4-\sqrt{7}}{3}\pi a^2$.

18.**解**:由已知条件,得$CD=2$,$BC=2$.阴影部分绕AB所在直线旋转一周得到的旋转体是圆台挖去半个球所得组合体,其中圆台的上、下底面半径分别为1,2,高为$\sqrt{3}$,母线长为2,球的半径为1.

所以旋转体的体积$V=V_{\text{圆台}}-V_{\text{半球}}=\frac{1}{3}\pi\times\sqrt{3}\times(2^2+2\times1+1^2)-\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi\times1^3=\frac{7\sqrt{3}-2}{3}\pi$,

表面积$S=S_{\text{半球}}+S_{\text{圆台侧}}+S_{\text{圆台下底}}=\frac{1}{2}\times4\pi\times1^2+\pi\times(1+2)\times2+\pi\times2^2=12\pi$.

19.(1)**证明**:由已知得,$B_1C_1\perp$平面ABB_1A_1,$BE\subset$平面ABB_1A_1,故$B_1C_1\perp BE$.

又$BE\perp EC_1$,$B_1C_1\cap EC_1=C_1$,

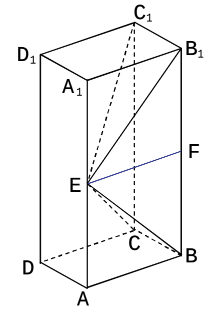
所以$BE\perp$平面EB_1C_1.

(2)**解**:由(1)知$\angle BEB_1=90°$.由题设知$Rt\triangle ABE\cong Rt\triangle A_1B_1E$,所以$\angle AEB=\angle A_1EB_1=45°$,故$AE=AB=3$,$AA_1=2AE=6$.

如图,作$EF\perp BB_1$,垂足为F,

则$EF\perp$平面BB_1C_1C,且$EF=AB=3$.

所以四棱锥$E-BB_1C_1C$的体积$V=\frac{1}{3}\times3\times6\times3=18$.



(第 19 题图)

20.(1)**证明**:由已知得,$AD\parallel BE$,$CG\parallel BE$,所以$AD\parallel CG$,故AD,CG确定一个平面,从而A,C,G,D四点共面.由已知得,$AB\perp BE$,$AB\perp BC$,故$AB\perp$平面$BCGE$.

又因为$AB\subset$平面ABC,

所以平面$ABC\perp$平面$BCGE$.

(2)**解**:如图,取CG的中点M,连接EM,DM.

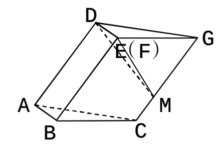
因为$AB\parallel DE$,$AB\perp$平面$BCGE$,

所以$DE\perp$平面$BCGE$,故$DE\perp CG$.

由已知,四边形$BCGE$是菱形,且$\angle EBC=60°$,得$EM\perp CG$,故$CG\perp$平面DEM.

因此$DM\perp CG$.

在$Rt\triangle DEM$中,$DE=1$,$EM=\sqrt{3}$,故$DM=2$.所以四边形$ACGD$的面积为4.



(第 20 题图)

21.(1)**证明**:在等腰梯形$ABCD$中,$AB\parallel DC$,$CD=8$,$BA=4$,则$\triangle AOB\backsim\triangle COD$,所以$\frac{AO}{OC}=\frac{AB}{CD}=\frac{1}{2}$,又$\frac{PE}{EC}=\frac{1}{2}$,所以$AP\parallel OE$,所以$OE\parallel$平面$PAD$.

(2)**解**:若直线PB与底面$ABCD$所成的角为45°,而$PD\perp$平面$ABCD$,所以$\angle PBD$为直线PB与底面$ABCD$所成的角,所以$\angle PBD=45°$,所以$PD=BD$.又在等腰梯形$ABCD$中,$AC\perp BD$,所以$\triangle AOB$,$\triangle COD$均为等腰直角三角形,$OB=2\sqrt{2}$,$OD=4\sqrt{2}$,

所以$BD=PD=6\sqrt{2}$,所以$V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}\times S_{ABCD}\times PD=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times(6\sqrt{2}\times6\sqrt{2})\times6\sqrt{2}=72\sqrt{2}$.

所以四棱锥$P-ABCD$的体积为$72\sqrt{2}$.

22.(1)**证明**:因为P在$\odot O$上,AB是$\odot O$的直径,所以$AP\perp BP$.因为$AA_1\perp$平面PAB,所以$AA_1\perp BP$,

又$AP\cap AA_1=A$,所以$BP\perp$平面PAA_1,又$A_1P\subset$平面PAA_1,故$BP\perp A_1P$.

(2)**解**:①由题意知,$V_{\text{圆柱}}=\pi\cdot OA^2\cdot AA_1=4\pi\cdot AA_1=12\pi$,解得$AA_1=3$,

由$OA=2$,$\angle AOP=120°$,

得$\angle BAP=30°$,$BP=2$,$AP=2\sqrt{3}$,

所以$S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$,

所以三棱锥A_1-APB的体积

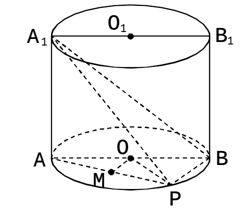
$V_{A_1-APB}=\frac{1}{3}S_{\triangle PAB}\cdot AA_1=\frac{1}{3}\times2\sqrt{3}\times3=2\sqrt{3}$.

②在AP上存在一点M,当M为AP的中点时,使异面直线OM与A_1B所成角的余弦值为$\frac{2}{5}$.

证明:因为O、M分别为AB、AP的中点,则$OM\parallel BP$,所以$\angle A_1BP$就是异面直线OM与A_1B所成的角,

因为$AA_1=3$,$AB=4$,所以$A_1B=5$.又$BP\perp A_1P$,在$Rt\triangle A_1PB$中,$\cos\angle A_1PB=\frac{BP}{A_1B}=\frac{2}{5}$.

所以在AP上存在一点M,当M为AP的中点时,使异面直线OM与A_1B所成角的余弦值为$\frac{2}{5}$.



(第 22 题图)