提示: 令 $h(x)=e^x-e^{-x}+\frac{x}{x^2+1}$,则易知 $y=h(x)$ 在 $[-m,m]$ 上为奇函数.

所以 $[h(x)]_{max}+[h(x)]_{min}=0$.

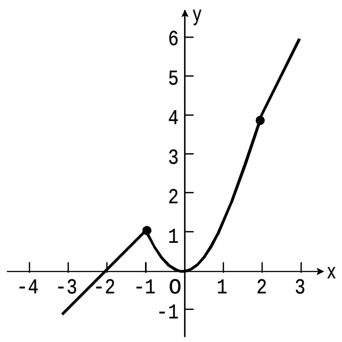
因为 $[g(x)]_{max}=[h(x)]_{max}+\frac{1}{2}$;$[g(x)]_{min}=[h(x)]_{min}+\frac{1}{2}$,

又因为函数 $g(x)$ 在区间 $[-m,m](m>0)$ 上的最大值与最小值的和为 a,所以 $a=1$.

所以 $f(x)=x|x|=\begin{cases}-x^2,x<0,\\x^2,x\geqslant0,\end{cases}$ 所以 $y=f(x)$ 在 $x\in[0,2]$ 上为增函数.又因为对任意的 $x\in[0,2]$,不等式 $f(x-2k)<2k$ 恒成立,所以 $f(2-2k)<2k$,即 $(2-2k)^2<2k$,解得 $\frac{1}{2}<k<2$.所以实数 k 的取值范围是 $\left(\frac{1}{2},2\right)$.

三、解答题

17.**解:**(1)函数 $f(x)=\begin{cases}x+2,x\leqslant-1,\\x^2,-1<x<2,\\2x,x\geqslant2\end{cases}$ 的图象如下图所示:



(第 17 题图)

(2)当 $a\leqslant-1$ 时,$f(a)=a+2=\frac{1}{2}$,

可得 $a=-\frac{3}{2}$;

当 $-1<a<2$ 时,$f(a)=a^2=\frac{1}{2}$,

可得 $a=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$;

当 $a\geqslant2$ 时,$f(a)=2a=\frac{1}{2}$,

可得 $a=\frac{1}{4}$(舍去).

综上所述,实数 a 的取值集合为 $\left\{-\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

18.**解:**(1)由题意设 $f(x)=mx+n(m\neq0)$,代入 $f(x+1)=m(x+1)+n=mx+m+n=x+3a$,所以 $m=1,m+n=3a,n=3a-1$;代入 $f(a)=3$,得 $a+n=3$,所以 $a=1,m=1,n=2$,所以 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=x+2$.

(2)由(1)知 $g(x)=\frac{x+2}{x+1}$,所以 $g(x-2)+g(-x)=\frac{x}{x-1}+\frac{x-2}{x-1}=2$,且 $g(x)=\frac{x+2}{x+1}=1+\frac{1}{x+1}$.

证明:在 $(-1,+\infty)$ 上任取 $x_1>x_2>-1$,

$g(x_1)-g(x_2)=\frac{1}{x_1+1}-\frac{1}{x_2+1}=\frac{x_2-x_1}{(x_1+1)(x_2+1)}$,

因为 $x_1>x_2>-1$,所以 $x_1+1>0,x_2+1>0,x_2-x_1<0$,$g(x_1)<g(x_2)$,

所以函数 $g(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上是减函数.

19.**解:**(1)设点 (x,y) 是 $y=g(x)$ 上的任意一点,则 $(-x,-y)$ 在 $y=f(x)$ 上,

则 $-y=(-x)^2-x=x^2-x$,即 $y=g(x)=-x^2+x$.

(2)$h(x)=-x^2+x-mx^2-mx+3=(-1-m)x^2+(1-m)x+3$,

当 $-1-m>0$,即 $m<-1$ 时,对称轴 $x=\frac{1-m}{2(m+1)}\leqslant-1$,所以 $-3\leqslant m<-1$;

当 $-1-m=0$,即 $m=-1$ 时,$h(x)=2x+3$,符合题意,所以 $m=-1$;

当 $-1-m<0$,即 $m>-1$ 时,对称轴 $x=\frac{1-m}{2(m+1)}\geqslant1$,所以 $-1<m\leqslant-\frac{1}{3}$.

综上,实数 m 的取值范围是 $\left[-3,-\frac{1}{3}\right]$.

20.**解:**(1)因为 $f(x)$ 是定义域为 R 的奇函数,所以 $f(0)=0$,即 $f(0)=1-(k+1)=-k=0$,

得 $k=0$,则 $f(x)=a^x-a^{-x}$,因为 $f(1)>0$,所以 $f(1)=a-a^{-1}>0$,即 $a>\frac{1}{a}$,

得 $a>1$ 或 $a<-1$(舍去),此时 $f(x)$ 为增函数.理由:因为 $y=a^x$ 是增函数,$y=a^{-x}$ 是减函数,

所以 $f(x)=a^x-a^{-x}$ 是增函数.

(2)由 $f(\sin2\theta+\cos2\theta)+f(1-m\cos\theta)<0$,得 $f(\sin2\theta+\cos2\theta)<-f(1-m\cos\theta)=f(m\cos\theta-1)$,因为 $f(x)=a^x-a^{-x}$ 是增函数,所以 $\sin2\theta+\cos2\theta<m\cos\theta-1$ 对所有的 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$ 恒成立,即 $2\sin\theta\cos\theta+2\cos^2\theta-1<m\cos\theta-1$,得 $2\sin\theta\cos\theta+2\cos^2\theta<m\cos\theta$,

因为 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$,$\cos\theta>0$,所以上式等价为 $2\sin\theta+2\cos\theta<m$ 在 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$ 恒成立,

因为 $2\sin\theta+2\cos\theta=2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$,

当 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$ 时,$\theta+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{12}\right)$,所以当 $\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$,即 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时,$2\sin\theta+2\cos\theta$ 取得最大值为 $2\sqrt{2}$,所以 $m>2\sqrt{2}$,所以实数 m 的取值范围是 $(2\sqrt{2},+\infty)$.

21.**解:**(1)因为函数 $y=h(x)=(2x-3)\cdot f(x)$ 的图象与 x 轴恰有两个不同的交点,所以若 $f(x)=0$ 恰有一解,且解不为 $\frac{3}{2}$,即 $a^2-4=0$,解得 $a=\pm2$;

若 $f(x)=0$ 有两个不同的解,且其中一个解为 $\frac{3}{2}$,代入得 $\frac{9}{4}+\frac{3}{2}a+1=0$,解得 $a=-\frac{13}{6}$,检验满足 $\Delta>0$.

综上所述,a 的取值集合为 $\left\{-\frac{13}{6},-2,2\right\}$.

(2)①当 $-\frac{a}{2}\leqslant0$,即 $a\geqslant0$ 时,

函数 $y=|f(x)|$ 在 $[0,1]$ 上单调递增,

故 $y_{max}=f(1)=2+a$;

②当 $0<-\frac{a}{2}<1$,即 $-2<a<0$ 时,

$\Delta=a^2-4<0$,$f(x)$ 的图象的对称轴在 $(0,1)$ 上,且开口向上,

故 $y_{max}=\max\{f(0),f(1)\}=\max\{1,a+2\}=\begin{cases}a+2,-1\leqslant a<0,\\1,-2<a<-1.\end{cases}$

综上所述,$y_{max}=\begin{cases}a+2,a\geqslant-1,\\1,-2<a<-1.\end{cases}$

22.**解:**(1)$f(x)=x^2-\frac{1}{3}x$ 是 Ω 函数,

$g(x)=\sin\pi x$ 不是 Ω 函数.

(2)因为 $f(x)$ 是以 T 为最小正周期的周期函数,所以 $f(T)=f(0)$.

假设 $T<1$,则 $[T]=0$,

所以 $f([T])=f(0)$,矛盾.

所以必有 $T\geqslant1$,

而函数 $g(x)=x-[x]$ 的周期为 1,

且显然不是 Ω 函数,

综上,T 的最小值为 1.

(3)当函数 $f(x)=x+\frac{a}{x}$ 是 Ω 函数时,

若 $a=0$,则 $f(x)=x$ 显然不是 Ω 函数,矛盾.

若 $a<0$,则 $f'(x)=1-\frac{a}{x^2}>0$,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0),(0,+\infty)$ 上单调递增,

此时不存在 $m\in(-\infty,0)$,$m\notin Z$,

使得 $f(m)=f([m])$,

同理不存在 $m\in(0,+\infty)$,$m\notin Z$,

使得 $f(m)=f([m])$,

又注意到 $m[m]\geqslant0$,

即不会出现 $[m]<0<m$ 的情形,

所以此时 $f(x)=x+\frac{a}{x}$ 不是 Ω 函数.

当 $a>0$ 时,设 $f(m)=f([m])$,

所以 $m+\frac{a}{m}=[m]+\frac{a}{[m]}$,

所以有 $a=m[m]$,其中 $[m]\neq0$,

当 $m>0$ 时,因为 $[m]<m<[m]+1$,

所以 $[m]^2<m[m]<[m]([m]+1)$,

所以 $[m]^2<a<[m]([m]+1)$.

当 $m<0$ 时,$[m]<0$,因为 $[m]<m<[m]+1$,

所以 $[m]^2>m[m]>[m]([m]+1)$,

所以 $[m]^2>a>[m]([m]+1)$.

记 $k=[m]$,综上,我们可以得到 a 的取值范围为 $\{a|a>0$ 且 $\forall k\in\mathbf{N}_+,a\neq k^2$ 且 $a\neq k(k+1)\}$.

第1期

第2~3版同步周测参考答案

一、选择题

1~6.DACCBC 7~12.DDDDCA

二、填空题

13.$\{x|-1\leqslant x\leqslant2\}$

14.假

15.$\{a|a\leqslant-2$,或 $a=1\}$

16.$(0,2)$

提示: 由题意可知 $a^2,2a,a^2+1,2a+1$ 中 $2a+1$ 最大,因为 $a^2+1\geqslant2a,a^2+1>a^2$,所以只需 $2a+1>a^2+1$,解得 $0<a<2$.

三、解答题

17.**解:**(1)全集 $U=\mathbf{R}$,$A=\left\{x\middle|\frac{1}{2}<2^x<4\right\}=\{x|2^{-1}<2^x<2^2\}=\{x|-1<x<2\}$,

$B=\{x|\log_3x\leqslant2\}=\{x|0<x\leqslant9\}$,

所以 $A\cap B=\{x|0<x<2\}$.

(2)由(1)可知,$A\cup B=\{x|-1<x\leqslant9\}$,

所以 $\complement_U(A\cup B)=\{x|x>9$,或 $x\leqslant-1\}$.

18.**解:** 命题 p 等价于:$\forall x\in\mathbf{R},x^2+mx+1\geqslant0$.若命题 p 为真,

则 $\Delta=m^2-4\leqslant0$,解得 $-2\leqslant m\leqslant2$;

若命题 q 为真,

则方程 $\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{2}=1$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆,

所以 $0<m<2$.

因为“$p\wedge q$”是假命题,“$p\vee q$”是真命题,

所以 p、q 一真一假.

当 p 真 q 假时,

$\begin{cases}m\leqslant0\text{或}m\geqslant2,\\-2\leqslant m\leqslant2,\end{cases}$

所以 $-2\leqslant m\leqslant0$,或 $m=2$.

当 p 假 q 真时,$\begin{cases}m<-2\text{或}m>2,\\0<m<2,\end{cases}$ 无解.

综上,m 的取值范围是 $[-2,0]\cup\{2\}$.

19.**解:**(1)对任意的实数 b 都有 $A\subseteq B$,则 $1\in A,2\in A,b\notin A$.

因为集合 $A=\{a-4,a+4\}$,

所以 $\begin{cases}a-4=1,\\a+4=2,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a-4=2,\\a+4=1,\end{cases}$

两方程组均无解,

所以满足题意的实数 a 不存在.

(2)由(1)易知,欲 $A\subseteq B$,当且仅当 $\begin{cases}a-4=1,\\a+4=b,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a-4=2,\\a+4=b,\end{cases}$

或 $\begin{cases}a-4=b,\\a+4=1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a-4=b,\\a+4=2,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=5,\\b=9,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=6,\\b=10,\end{cases}$

或 $\begin{cases}a=-3,\\b=-7,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-2,\\b=-6.\end{cases}$

所以满足题意的实数对 (a,b) 为 $(5,9),(6,10),(-3,-7),(-2,-6)$.

20.**解:**(1)由 $(x+3)(6-x)\leqslant0$,

得 $x\geqslant6$,或 $x\leqslant-3$,

所以 $A=(-\infty,-3]\cup[6,+\infty)$.

由 $\log_2(x+2)<4=\log_22^4=\log_216$,

得 $0<x+2<16$,所以 $B=(-2,14)$,

于是 $\complement_UB=(-\infty,-2]\cup[14,+\infty)$.

故阴影部分为 $A\cap(\complement_UB)=(-\infty,-3]\cup[14,+\infty)$.

(2)因为 $C\subseteq B$,

所以 $C=\varnothing$ 或 $C\neq\varnothing$,则

①当 $C=\varnothing$ 时,则 $2a\geqslant a+1$,即 $a\geqslant1$.

②当 $C\neq\varnothing$ 时,又 $C\subseteq B$,

所以 $\begin{cases}2a<a+1,\\a+1\leqslant14,\\2a\geqslant-2,\end{cases}$ 解得 $-1\leqslant a<1$.

综上所述,实数 a 的取值范围为 $[-1,+\infty)$.

21.**解:**(1)因为命题 p:$\frac{x^2}{m-1}+\frac{y^2}{m-4}=1$ 表示双曲线为真命题,则

由 $(m-1)(m-4)<0$,解得 $1<m<4$.

所以实数 m 的取值范围是 $(1,4)$.

(2)因为命题 q:$\frac{x^2}{m-2}+\frac{y^2}{4-m}=1$ 表示椭圆为真命题,

所以 $\begin{cases}m-2>0,\\4-m>0,\\m-2\neq4-m.\end{cases}$

所以 $2<m<3$,或 $3<m<4$,

因为 $\{m|1<m<4\}\supsetneqq\{m|2<m<3$,或 $3<m<4\}$,

所以“命题 p 为真命题”是“命题 q 为真命题”的必要不充分条件.

22.**解:**(1)当 $a>0$ 时,$\{x|x^2-4ax+3a^2<0\}=\{x|(x-3a)(x-a)<0\}=\{x|a<x<3a\}$,如果 $a=1$,则命题 p 所对应的集合是 $A=\{x|1<x<3\}$;而 $\{x|x^2-x-6\leqslant0$,且 $x^2+2x-8>0\}=\{x|2<x\leqslant3\}$,所以命题 q 所对应的集合是 $B=\{x|2<x\leqslant3\}$.

因为 $p\wedge q$ 为真,所以 $A\cap B=\{x|1<x<3\}\cap\{x|2<x\leqslant3\}=\{x|2<x<3\}$.

故实数 x 的取值范围是 $\{x|2<x<3\}$.

(2)因为 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的充分不必要条件,所以 q 是 p 的充分不必要条件.由(1)知,$\{x|2<x\leqslant3\}\subsetneqq\{x|a<x<3a\}(a>0)$,所以 $a\leqslant2$ 且 $3<3a$,解得 $1<a\leqslant2$.

故实数 a 的取值范围是 $\{a|1<a\leqslant2\}$.

第2期

第2~3版同步周测参考答案

一、选择题

1~6.CCADAA 7~12.DCAABC

二、填空题

13.$(2,4)$

14.$a=-4,b=1$

15.$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

16.$[-3,2\sqrt{2}-3]$

提示: $f(x)=x^2+(1-a)x-a=(x+1)(x-a)=\left(x+\frac{1-a}{2}\right)^2-a-\left(\frac{1-a}{2}\right)^2$,其值域为 $\left[-a-\left(\frac{1-a}{2}\right)^2,+\infty\right)$.

由 $f(f(x))<0$,得 $[f(x)]^2+(1-a)f(x)-a=[f(x)+1][f(x)-a]<0$.

当 $a\leqslant-1$ 时,由 $[f(x)+1][f(x)-a]<0$,得 $f(x)\in(a,-1)$,

要使不等式 $f(f(x))<0$ 的解集为空集,则 $-a-\left(\frac{1-a}{2}\right)^2\geqslant-1$,解得 $-3\leqslant a\leqslant1$,所以 $-3\leqslant a\leqslant-1$;

当 $a>-1$ 时,由 $[f(x)+1][f(x)-a]<0$,得 $f(x)\in(-1,a)$,

要使不等式 $f(f(x))<0$ 的解集为空集,则 $-a-\left(\frac{1-a}{2}\right)^2\geqslant a$,

解得 $-3-2\sqrt{2}\leqslant a\leqslant2\sqrt{2}-3$,所以 $-1<a\leqslant2\sqrt{2}-3$.

综上,实数 a 的取值范围是 $[-3,2\sqrt{2}-3]$.

三、解答题

17.**证明:** 当 $x\geqslant4$ 时,要证 $\sqrt{x-3}+\sqrt{x-2}>\sqrt{x-4}+\sqrt{x-1}$,只需证 $(\sqrt{x-3}+\sqrt{x-2})^2>(\sqrt{x-4}+\sqrt{x-1})^2$,

需证 $x-3+2\sqrt{(x-3)(x-2)}+x-2>x-4+2\sqrt{(x-4)(x-1)}+x-1$,即证 $\sqrt{(x-3)(x-2)}>\sqrt{(x-4)(x-1)}$,只需证 $x^2-5x+6>x^2-5x+4$,即证 $6>4$,显然上式成立,所以原不等式成立,即 $\sqrt{x-3}+\sqrt{x-2}>\sqrt{x-4}+\sqrt{x-1}$.

18.**解:**(1)当 $a=2$ 时,$f(x)\leqslant0$ 可化为 $2x^2-5x+2\leqslant0$,可得 $(2x-1)(x-2)\leqslant0$,解得 $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant2$,

所以 $f(x)\leqslant0$ 的解集为 $\left[\frac{1}{2},2\right]$.

(2)当 $a>0$ 时,不等式 $f(x)\leqslant0$ 可化为 $ax^2-(2a+1)x+2\leqslant0$,

进一步化为 $a\left(x-\frac{1}{a}\right)(x-2)\leqslant0$.

①当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时,有 $\frac{1}{a}>2$,解不等式得 $2\leqslant x\leqslant\frac{1}{a}$;

②当 $a=\frac{1}{2}$ 时,有 $\frac{1}{a}=2$,解不等式得 $x=2$;

③当 $a>\frac{1}{2}$ 时,有 $\frac{1}{a}<2$,解不等式得 $\frac{1}{a}\leqslant x\leqslant2$.

综上,当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时,不等式的解集

① 为$\left\{x \middle| 2\leqslant x\leqslant \frac{1}{a}\right\}$；当$a=\frac{1}{2}$时，不等式的解集为$\{x|x=2\}$；当$a>\frac{1}{2}$时，不等式的解集为$\left\{x \middle| \frac{1}{a}\leqslant x\leqslant 2\right\}$.

19.(1)**解**：$f(x)=|2x-1|+x+\frac{1}{2}$

$$=\begin{cases}3x-\frac{1}{2}, x\geqslant\frac{1}{2},\\ -x+\frac{3}{2}, x<\frac{1}{2},\end{cases}$$

所以$[f(x)]_{\min}=f\left(\frac{1}{2}\right)=1$，所以$m=1$.

(2)**证明**：因为$a^3+b^3-a^2b-ab^2=(a^2-b^2)\cdot(a-b)=(a-b)^2(a+b)\geqslant 0$，$a+b+c=1$，所以$a^3+b^3\geqslant a^2b+ab^2=ab(a+b)=ab(1-c)=ab-abc$.同理可证：$b^3+c^3\geqslant bc-abc$，$c^3+a^3\geqslant ca-abc$.三式相加，得$2(a^3+b^3+c^3)\geqslant ab+bc+ca-3abc$.

20.**解**：(1)要使不等式$mx^2-2x-m+1<0$恒成立，只需$\begin{cases}m<0,\\ \Delta=(-2)^2-4m(-m+1)<0,\end{cases}$该不等式组无解.所以不存在实数$m$，使对所有的实数$x$，不等式$mx^2-2x-m+1<0$恒成立.

(2)由$|m|\leqslant 2$，得$-2\leqslant m\leqslant 2$.

由$mx^2-2x-m+1<0$，

得$(x^2-1)m-2x+1<0$.

令$f(m)=(x^2-1)m-2x+1(-2\leqslant m\leqslant 2)$，

则$f(m)<0$.

当$x=1$时，$f(m)=-1<0$，满足题意；

当$x=-1$时，$f(m)=3>0$，不满足题意；

当$x\neq\pm 1$时，要使$f(m)<0$，

只需$\begin{cases}f(-2)<0,\\ f(2)<0,\end{cases}$

即$\begin{cases}(x^2-1)(-2)-2x+1<0,\\ (x^2-1)\times 2-2x+1<0,\end{cases}$

解得$\frac{-1+\sqrt{7}}{2}<x<\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

综上，x的取值范围是

$\left(\frac{-1+\sqrt{7}}{2},\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$.

21.**解**：(1)当$a=1$时，$f(x)=|x+1|-|x-1|$，

即$f(x)=\begin{cases}-2, x\leqslant -1,\\ 2x, -1<x<1,\\ 2, x\geqslant 1.\end{cases}$

故不等式$f(x)>1$的解集为$\left\{x \middle| x>\frac{1}{2}\right\}$.

(2)当$x\in(0,1)$时$|x+1|-|ax-1|>x$成立等价于当$x\in(0,1)$时$|ax-1|<1$恒成立.

即$-1<ax-1<1$恒成立，$ax-1>-1$时，得$ax>0$恒成立，所以$a>0$；

当$ax-1<1$时，得$ax<2$，也就是$a<\frac{2}{x}$恒成立，又$x\in(0,1)$，所以$\frac{2}{x}>2$，所以$a\leqslant 2$.

综上，a的取值范围为$(0,2]$.

22.**解**：(1)因为$k>0$，$f(x)>m$，

即$\frac{kx}{x^2+3k}>m$，

所以$mx^2-kx+3km<0$.

因为不等式$mx^2-kx+3km<0$的解集为$\{x|x<-3$，或$x>-2\}$，

所以-3，-2是方程$mx^2-kx+3km=0$的根，且$m<0$，

所以$\begin{cases}\frac{k}{m}=-5,\\ 3k=6,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=2,\\ m=-\frac{2}{5}.\end{cases}$

所以$5mx^2+\frac{k}{2}x+3>0\Leftrightarrow 2x^2-x-3<0$，

解得$-1<x<\frac{3}{2}$，

所以不等式$5mx^2+\frac{k}{2}x+3>0$的解集为$\left\{x \middle| -1<x<\frac{3}{2}\right\}$.

(2)因为$f(x)>1$，所以$\frac{kx}{x^2+3k}>1$，所以$x^2-kx+3k<0$，令$g(x)=x^2-kx+3k$，$x\in(3,+\infty)$，存在$x_0>3$，使得$f(x_0)>1$成立，即存在$g(x_0)<0$成立，即$[g(x)]_{\min}<0$成立.当$0<k\leqslant 6$时，$g(x)$在$(3,+\infty)$上单调递增，所以$g(x)>g(3)=9$，显然不存在$g(x)<0$；当$k>6$时，$g(x)$在$\left(3,\frac{k}{2}\right)$上单调递减，在$\left(\frac{k}{2},+\infty\right)$上单调递增，所以$[g(x)]_{\min}=g\left(\frac{k}{2}\right)=-\frac{k^2}{4}+3k$，由$-\frac{k^2}{4}+3k<0$，又$k>0$，可得$k>12$.

综上，k的取值范围是$(12,+\infty)$.

第 3 期

第 2~3 版同步周测参考答案

一、选择题

1.A　2.C　3.B　4.D　5.C　6.C　7.D

8.A　9.B　10.A　11.A

12.B

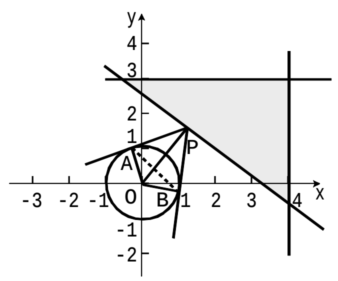
提示：由$x+2y+4=4xy$，得$x+2y=4xy-4$，不等式可化为$(4xy-4)a^2+2a+2xy-34\geqslant 0$恒成立，化简，得$xy\geqslant\frac{2a^2-a+17}{2a^2+1}$恒成立.根据基本不等式，有$x+2y\geqslant 2\cdot\sqrt{2xy}$，所以$4xy=x+2y+4\geqslant 4+2\sqrt{2xy}$，即$2(\sqrt{xy})^2-\sqrt{2}\cdot\sqrt{xy}-2\geqslant 0$，解得$\sqrt{xy}\geqslant\sqrt{2}$，所以$xy\geqslant 2$.所以$\frac{2a^2-a+17}{2a^2+1}\leqslant 2$，解得$a\leqslant -3$，或$a\geqslant\frac{5}{2}$，所以实数a的取值范围是$(-\infty,-3]\cup\left[\frac{5}{2},+\infty\right)$.

二、填空题

13.6　14.9　15.4

16.$\frac{1}{2}$

提示：画出平面区域D，如图所示.$\angle PAB=\angle AOP$，设$P(x,y)$，则$\cos\angle PAB=\cos\angle AOP=\frac{OA}{OP}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.当$\angle PAB$最小时，$\cos\angle PAB$最大，即$\sqrt{x^2+y^2}$最小，$P$点即为可行域内离原点最近的点，此时$OP$垂直于直线$3x+4y-10=0$，$|OP|=\frac{|-10|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{10}{5}=2$，所以$\cos\angle PAB$的最大值为$\frac{1}{2}$.



（第 16 题图）

三、解答题

17.(1)**解**：因为a，b均为正实数，

又$ab=3$，所以$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}=2\sqrt{3}>0$，$a^3+b^3\geqslant 2\sqrt{a^3b^3}=6\sqrt{3}>0$，

所以$(a+b)(a^3+b^3)\geqslant 36$，当且仅当$a=b$时，等号成立，所以$(a+b)(a^3+b^3)$的最小值为36.

(2)**证明**：因为$a^2+b^2=3$，又因为$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}=\frac{3}{2}$，所以$a+b\leqslant\sqrt{6}$.

18.**解**：(1)若营养液有效，则需满足$y\geqslant 4$，所以$\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 2,\\ 4\cdot\frac{4+x}{4-x}\geqslant 4,\end{cases}$或$\begin{cases}2<x\leqslant 5,\\ 4(5-x)\geqslant 4,\end{cases}$

解得$0\leqslant x\leqslant 2$或$2<x\leqslant 4$，所以$0\leqslant x\leqslant 4$，所以只投放一次4个单位的营养液，有效时间可达4天.

(2)设第二次投放营养液的持续时间为x天，则此时第一次投放营养液的持续时间为$(x+3)$天，且$0\leqslant x\leqslant 2$；

设y_1为第一次投放营养液的浓度，y_2为第二次投放营养液的浓度，y为水中的营养液的浓度.所以$y_1=2[5-(x+3)]=4-2x$，$y_2=b\cdot\frac{4+x}{4-x}$，$y=y_1+y_2=4-2x+b\cdot\frac{4+x}{4-x}$.问题等价于$y\geqslant 4$在$[0,2]$上恒成立，即$b\geqslant 2x\cdot\frac{4-x}{4+x}$在$[0,2]$上恒成立.

令$t=4+x$，$t\in[4,6]$，则$b\geqslant -2\left(t+\frac{32}{t}\right)+24$.又$-2\left(t+\frac{32}{t}\right)+24\leqslant 24-2\times 2\sqrt{t\cdot\frac{32}{t}}=24-16\sqrt{2}$，

当且仅当$t=\frac{32}{t}$，即$t=4\sqrt{2}$时，取等号，所以$b\geqslant 24-16\sqrt{2}$，所以b的最小值为$24-16\sqrt{2}$.

答：要使接下来的2天中，营养液能够持续有效，b的最小值为$24-16\sqrt{2}$.

19.**解**：(1)不等式$|x-1|+|x+1|<m$的解集不是空集的充要条件是$m>(|x-1|+|x+1|)_{\min}$，

因为$|x-1|+|x+1|\geqslant|x-1-x-1|=2$，

所以$m>2$，

故实数m的取值范围是$(2,+\infty)$.

(2)由(1)得$m-2>0$，则$f(m)=m+\frac{1}{(m-2)^2}=\frac{1}{2}(m-2)+\frac{1}{2}(m-2)+\frac{1}{(m-2)^2}+2$，

所以

$f(m)\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{2}(m-2)\cdot\frac{1}{2}(m-2)\cdot\frac{1}{(m-2)^2}}+2=$

$\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}+2$，

当且仅当$\frac{1}{2}(m-2)=\frac{1}{(m-2)^2}$，

即$m=\sqrt[3]{2}+2>2$时，等号成立，

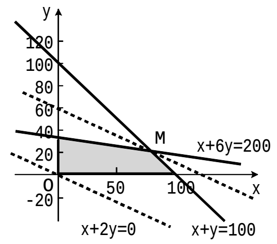
所以函数$f(m)=m+\frac{1}{(m-2)^2}$的最小值为$\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}+2$.

20.**解**：根据题意，设投放A型车x辆，B型车y辆，共享单车公司可获得的总收入为z元，

则有$\begin{cases}x+y\leqslant 100,\\ 400x+2400y\leqslant 80000,\\ x\geqslant 0, x\in Z,\\ y\geqslant 0, y\in Z,\end{cases}$

即$\begin{cases}x+y\leqslant 100,\\ x+6y\leqslant 200,\\ x\geqslant 0, x\in Z,\\ y\geqslant 0, y\in Z,\end{cases}$①

且$z=2\times 0.5x+2y=x+2y$，画出不等式组①表示的平面区域，如图所示.



（第 20 题图）

目标函数$z=x+2y$可化为$y=-\frac{1}{2}x+\frac{z}{2}$，其中$\frac{z}{2}$表示斜率为$-\frac{1}{2}$的直线系与可行域有交点时该直线的截距.

由图可知，当$y=-\frac{1}{2}x+\frac{z}{2}$过点M(80,20)时，z取得最大值，其最大值$z=80+2\times 20=120$.

答：公司投放A、B两种型号的单车分别为80辆、20辆才能使每天获得的总收入最多，最多为120元.

21.**解**：(1)由题意知，可行域M如图所示.

由$\begin{cases}x=1,\\ y=\frac{1}{2}x,\end{cases}$得$\begin{cases}x=1,\\ y=\frac{1}{2},\end{cases}$所以$A\left(1,\frac{1}{2}\right)$.

由$\begin{cases}x=1,\\ 2x+y=10,\end{cases}$得$\begin{cases}x=1,\\ y=8,\end{cases}$所以$B(1,8)$.

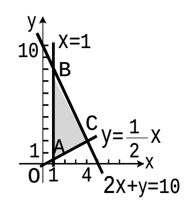
由$\begin{cases}2x+y=10,\\ y=\frac{1}{2}x,\end{cases}$得$\begin{cases}x=4,\\ y=2,\end{cases}$所以$C(4,2)$.

因为$k_{AC}=\frac{1}{2}$，$z_1=y-2x$，

所以$y=2x+z_1$，z_1是y轴的截距，$k=2>k_{AC}=\frac{1}{2}$，

所以过点$B(1,8)$时，$(z_1)_{\max}=8-2\times 1=6$.

因为$z_2=x^2+y^2$表示区域M上的点(x,y)到原点$O(0,0)$距离的平方，如图，点$A\left(1,\frac{1}{2}\right)$使所求距离的平方最小，所以$(z_2)_{\min}=1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$.



（第 21 题图）

(2)因为$a>0$，

$y=2a\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=a\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=a\cos x$过区域$M$中的点，而区域中$1\leqslant x\leqslant 4$，

又因为$a>0$，函数$y=a\cos x$图象过点$\left(\frac{\pi}{2},0\right)$，$1<\frac{\pi}{2}<4$，

当$x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$时，$y<0$，$\frac{3\pi}{2}>4$，

所以满足$y=a\cos x$过区域M中的点，

只需图象与射线$x=1\left(y\geqslant\frac{1}{2}\right)$有公共点，所以只需$x=1$时，$a\cos 1\geqslant\frac{1}{2}$，

所以$a\geqslant\frac{1}{2\cos 1}$，

所以a的取值范围是$\left[\frac{1}{2\cos 1},+\infty\right)$.

22.**解**：(1)因为$f'(x)=x^2+2ax-b$，

由题意知$f'(1)=-4$，且$f(1)=-\frac{11}{3}$，

所以$\begin{cases}1+2a-b=-4,\\ \frac{1}{3}+a-b=-\frac{11}{3},\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-1,\\ b=3,\end{cases}$

所以$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x$，$f'(x)=x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$.

令$f'(x)=0$，得$x_1=-1$，$x_2=3$，

当x变化时，$f(x)$，$f'(x)$变化情况如下表：

x	(-∞,-1)	-1	(-1,3)	3	(3,+∞)
f′(x)	+	0	-	0	+
f(x)	↗	极大值	↘	极小值	↗

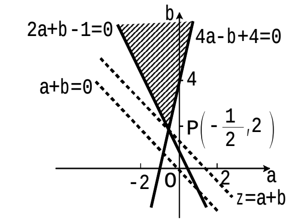
所以当$x=-1$时，$f(x)$取得极大值，极大值为$f(-1)=\frac{5}{3}$.

(2)因为$y=f(x)$在区间$[-1,2]$上是单调减函数，

所以$f'(x)=x^2+2ax-b\leqslant 0$在区间$[-1,2]$上恒成立.

根据二次函数图象可知$f'(-1)\leqslant 0$，$f'(2)\leqslant 0$，则$\begin{cases}1-2a-b\leqslant 0,\\ 4+4a-b\leqslant 0,\end{cases}$

即$\begin{cases}2a+b-1\geqslant 0,\\ 4a-b+4\leqslant 0,\end{cases}$作出不等式组表示的平面区域如图所示.



（第 22 题图）

当直线$z=a+b$经过交点$P\left(-\frac{1}{2},2\right)$时，$z=a+b$取得最小值$-\frac{1}{2}+2=\frac{3}{2}$，

所以$z=a+b$的最小值为$\frac{3}{2}$.

第 4 期

第 2~3 版同步周测参考答案

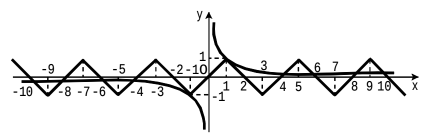
一、选择题

1.D　2.A　3.A　4.B　5.B　6.A

7.C　8.A　9.C　10.A　11.B

12.C

提示：在同一坐标系中画出函数$y=f(x)$和函数$y=\frac{1}{x}+a$的图象如下图所示：



（第 12 题图）

$y=\frac{1}{x}+a$的图象是由$y=\frac{1}{x}$的图象上下平移得到的，由图得，向上平移时保证图象第三象限的部分在x轴的下方，则第一象限部分有4个交点，第三象限部分有6个交点；同时向下平移时保证图象第一象限的部分在x轴的上方，则第一象限的部分有6个交点，第三象限部分有4个交点，即$\begin{cases}-\frac{1}{10}+a\leqslant 0,\\ \frac{1}{10}+a\geqslant 0,\end{cases}$

解得$-\frac{1}{10}\leqslant a\leqslant\frac{1}{10}$.故选C.

二、填空题

13.$(0,1]$

14.-2

15.$\left(-\frac{1}{4},+\infty\right)$

16.$\left(\frac{1}{2},2\right)$