第 16 期

第 2~3 版同步周测参考答案

一、选择题

1~6.CAACAC　7~12.CBBCCA

二、填空题

13.1　14.8　15.$\frac{26}{61}$　16.2

三、解答题

17.**解**:(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为d,由$a_4-a_3=2$,得$d=2$,

又由$a_1+a_2=10$,得$a_1+a_2=2a_1+d=10$,

解得$a_1=4$,

所以$a_n=4+(n-1)\cdot 2=2n+2(n\in N_+)$.

(2)设等比数列$\{b_n\}$的公比为q,

因为$b_2=a_3,b_3=a_7$,

所以$b_2=a_3=8,b_3=a_7=16$,

所以$q=\frac{b_3}{b_2}=2$,则$b_4=b_3\cdot q=32$,

由$2n+2=32$,解得$n=15$,

所以b_4与数列$\{a_n\}$的第 15 项相等.

18.**解**:(1)设$\{a_n\}$的公差为$d(d\neq 0)$,

由题意,得$a_5^2=a_2a_6$,

即$(a_1+4d)^2=(a_1+d)(a_1+5d)$,

化简,得$2a_1d+11d^2=0$.

又$a_1=11$,所以$d=-2$,或$d=0$(舍去),

故$a_n=-2n+13$.

(2)由(1)知当$n\leqslant 6$时,$a_n>0$;

当$n\geqslant 7$时,$a_n<0$.

当$n\leqslant 6$时,$S_n=|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_n|=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=12n-n^2$.

当$n\geqslant 7$时,

$S_n=|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_6|+|a_7|+\cdots+|a_n|=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_6-(a_7+a_8+\cdots+a_n)=2(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_6)-(a_1+a_2+\cdots+a_n)=2S_6-\left[na_1+\frac{n(n-1)}{2}d\right]=72-(12n-n^2)=n^2-12n+72$.

所以$S_n=\begin{cases}12n-n^2,n\leqslant 6,\\ n^2-12n+72,n\geqslant 7.\end{cases}$

19.**解**:设等差数列$\{a_n\}$的公差为d,

则$S_n=na_1+\frac{1}{2}n(n-1)d$.

因为$S_7=7,S_{15}=75$,

所以$\begin{cases}7a_1+21d=7,\\ 15a_1+105d=75,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a_1=-2,\\ d=1.\end{cases}$

所以$\frac{S_n}{n}=a_1+\frac{1}{2}(n-1)d=-2+\frac{1}{2}(n-1)$,

因为$\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=\frac{1}{2}$,

所以数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是等差数列,

其首项为-2,公差为$\frac{1}{2}$,

所以$T_n=-2n+\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}n^2-\frac{9}{4}n$.

20.**解**:(1)由题意可设

$a_n=4+(n-1)d(d\neq 0)$,

又有$S_3=12+3d,S_4=16+6d,S_5=20+10d$,

因为$\left(\frac{1}{5}S_5\right)^2=\frac{1}{3}S_3\cdot\frac{1}{4}S_4$,

所以$(4+2d)^2=(4+d)\left(4+\frac{3}{2}d\right)$.

所以$d=-\frac{12}{5}$,或$d=0$(舍去).

所以$a_n=-\frac{12}{5}n+\frac{32}{5}$.

(2)$S_n=4n+\frac{n(n-1)}{2}\times\left(-\frac{12}{5}\right)=-\frac{6}{5}n^2+\frac{26}{5}n$,因为$S_n>0$,所以$-\frac{6}{5}n^2+\frac{26}{5}n>0$,即$0<n<\frac{13}{3}$,又因为$n\in N_+$,所以$n$的最大值为 4.

21.(1)**解**:设等差数列$\{a_n\}$的首项为a_1,

所以$a_n=dn+a_1-d$.

又因为$a_na_{n+1}=4n^2-1$,

解得$\begin{cases}a_1=1,\\ d=2,\end{cases}$或$\begin{cases}a_1=-1,\\ d=-2.\end{cases}$

又因为$d>0$,所以$a_1=1,d=2$,

所以$a_n=2n-1$.

(2)**证明**:因为$\frac{2}{a_na_{n+1}}=\frac{2}{4n^2-1}$

$=\frac{2}{(2n+1)(2n-1)}=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}$,

所以$\frac{2}{a_1a_2}+\frac{2}{a_2a_3}+\frac{2}{a_3a_4}+\cdots+\frac{2}{a_na_{n+1}}$

$=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=1-\frac{1}{2n+1}<1$.

22.**解**:(1)由题意可知,

当$n=1$时,$a_1=a$,

当$n\geqslant 2$时,$S_n=\frac{a}{a-1}(a_n-1)$,　①

$S_{n-1}=\frac{a}{a-1}(a_{n-1}-1)$,　②

由①-②,得$\frac{a_n}{a_{n-1}}=a$,

所以数列$\{a_n\}$是等比数列,

所以$a_n=a^n(n\in N_+)$.

(2)因为$b_n=a_n\cdot\lg a_n$,

所以$b_n=n\cdot a^n\cdot\lg a$,

对一切$n\in N_+$都有$b_n<b_{n+1}$,

即有$n\cdot a^n\cdot\lg a<(n+1)\cdot a^{n+1}\cdot\lg a$,

①当$\lg a>0$,即$a>1$时,

有$a>\frac{n}{n+1}$对一切$n\in N_+$都成立,

所以$a>1$;

②当$\lg a<0$,即$0<a<1$时,

有$a<\frac{n}{n+1}$对一切$n\in N_+$都成立,

所以$0<a<\frac{1}{2}$.

综上,可知a的取值范围是$\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup(1,+\infty)$.

第13期

第 2~3 版同步周测参考答案

一、选择题

1~6.BCDDAB　　7~12.DCDCAC

二、填空题

13.0　　14.$\frac{1}{2}$

15.$\overrightarrow{AG}$　　16.$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

三、解答题

17.**解**:(1)由$A(-1,4),B(-4,1)$,得$\overrightarrow{AB}=(-3,-3)$.点$C$在直线$x=1$上,设$C$的坐标为$(1,y)$,则$\overrightarrow{AC}=(2,y-4)$,因为$A$、$B$、$C$三点共线,所以$\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{AC}$,所以$-3\times 2=-3\times(y-4)$,所以$y=6$.所以点$C$的坐标为$(1,6)$.

(2)设点C的坐标为$(1,y)$,点D的坐标为(m,n),则$\overrightarrow{AB}=(-3,-3)$,$\overrightarrow{BC}=(5,y-1)$,$\overrightarrow{DC}=(1-m,y-n)$,

若四边形$ABCD$是矩形,

则$\begin{cases}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC},\\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\end{cases}$

所以$\begin{cases}1-m=-3,\\ y-n=-3,\\ -3\times 5=3\times(y-1),\end{cases}$

所以$\begin{cases}m=4,\\ n=-1,\\ y=-4,\end{cases}$

所以C的坐标为$(1,-4)$,D的坐标为$(4,-1)$.

18.**解**:(1)因为$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$,所以$3x-36=0$,所以$x=12$,所以$\boldsymbol{b}=(9,12)$.

因为$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$,所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=12+4y=0$,

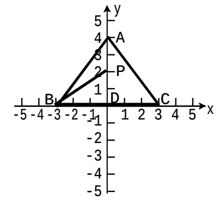
所以$y=-3$,所以$\boldsymbol{c}=(4,-3)$.

(2)$\boldsymbol{m}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-3,-4)$,$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}=(7,1)$,所以$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=-25$,$|\boldsymbol{m}|=5$,$|\boldsymbol{n}|=5\sqrt{2}$.设$\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}$的夹角为$\theta$,则$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,因为$\theta\in[0,\pi]$,所以$\theta=\frac{3\pi}{4}$,即向量$\boldsymbol{m}$与$\boldsymbol{n}$的夹角为$\frac{3\pi}{4}$.

19.**解**:(1)因为$\overrightarrow{BP}=\sin^2\theta\cdot\overrightarrow{BA}+\cos^2\theta\cdot\overrightarrow{BD}$,又$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$,所以$A,P,D$三点共线,又$\sin^2\theta,\cos^2\theta\in[0,1]$,所以$P$在线段$AD$上.因为$D$为$BC$的中点,设$|PD|=x$,则$|AP|=4-x$,$x\in[0,4]$,所以$(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})\cdot\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{AP}=2x(4-x)=-2x^2+8x=-2(x-2)^2+8$,所以当$x=2$时,$(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})\cdot\overrightarrow{AP}$取最大值,最大值为 8.

(2)因为$\triangle ABC$为等腰三角形,且AD为底边的中线,

所以以D为坐标原点,DC,DA所在直线分别为x,y轴建立如图所示的平面直角坐标系,由(1)可得$P(0,2)$,又$|\overrightarrow{BD}|^2=5^2-4^2=9$,所以$B(-3,0),C(3,0)$,所以$\overrightarrow{PB}=(-3,-2)$,$\overrightarrow{PC}=(3,-2)$,所以$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=-9+4=-5$.



(第 19 题图)

20. **解**:(1)$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x-\cos^2\omega x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\omega x-\frac{1+\cos 2\omega x}{2}=\sin\left(2\omega x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}$,所以$f(x)=\sin\left(2\omega x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}$.

(2)因为$f(x)$的最小正周期为$\frac{\pi}{2}$,

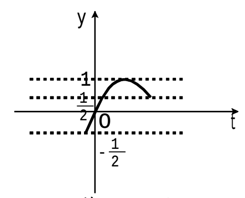
所以$\frac{2\pi}{2\omega}=\frac{\pi}{2}$,所以$\omega=2$.

(3)$f(x)=\sin\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}$.根据题意,方程$a=\sin\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}$在$x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$上只有一个解,

即方程$a+\frac{1}{2}=\sin\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)$在$x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$上只有一个解.

令$4x-\frac{\pi}{6}=t$,$t\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$,

所以直线$y=a+\frac{1}{2}$和$y=\sin t$在$t\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$只有一个交点,如图所示:



(第 20 题图)

根据图象看出$y=1$,$-\frac{1}{2}\leqslant y<\frac{1}{2}$都和$y=\sin t$在$\left[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$上只有一个交点,

故$a=\frac{1}{2}$,或$a\in[-1,0)$时,直线$y=a$和函数$y=f(x)$,$x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$的图象只有一个交点.

21.**解**:(1)因为$\frac{AB}{AC}=\frac{DB}{DC}=\frac{1}{2}$,即$\overrightarrow{BD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$,所以$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.所以$\overrightarrow{AD}\cdot(2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=\frac{1}{3}(2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=\frac{1}{3}(4|\overrightarrow{AB}|^2-|\overrightarrow{AC}|^2)=0$.

(2)因为点E为BC的中点,设$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$的夹角为θ,所以$\frac{1}{|\overrightarrow{AE}|^2}+\frac{1}{|\overrightarrow{BC}|^2}=\frac{4}{(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})^2}+\frac{1}{(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})^2}=\frac{4}{5+4\cos\theta}+\frac{1}{5-4\cos\theta}=\frac{1}{10}(5+4\cos\theta+5-4\cos\theta)\left(\frac{4}{5+4\cos\theta}+\frac{1}{5-4\cos\theta}\right)=\frac{1}{10}\left[5+\frac{5+4\cos\theta}{5-4\cos\theta}+\frac{4(5-4\cos\theta)}{5+4\cos\theta}\right]\geqslant\frac{1}{10}\times(5+4)=\frac{9}{10}$.

当且仅当$5+4\cos\theta=2(5-4\cos\theta)$,即$\cos\theta=\frac{5}{12}$时取等号.

此时$\triangle ABC$的面积$S=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin\theta=\frac{1}{2}\times 1\times 2\times\sqrt{1-\left(\frac{5}{12}\right)^2}=\frac{\sqrt{119}}{12}$.

22.**证明**:(1)设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则$\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{3}=1$,$\frac{x_2^2}{4}+\frac{y_2^2}{3}=1$.

两式相减,并由$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=k$得$\frac{x_1+x_2}{4}+\frac{y_1+y_2}{3}\cdot k=0$.

由题设知$\frac{x_1+x_2}{2}=1$,$\frac{y_1+y_2}{2}=m$,于是$k=-\frac{3}{4m}$. ①

在椭圆C中,当$x=1$时,$y=\pm\frac{3}{2}$,

所以$0<m<\frac{3}{2}$,故$k<-\frac{1}{2}$.

(2)由题意得$F(1,0)$. 设$P(x_3,y_3)$,则$\overrightarrow{FP}=(x_3-1,y_3)$,$\overrightarrow{FA}=(x_1-1,y_1)$,$\overrightarrow{FB}=(x_2-1,y_2)$,由$\overrightarrow{FP}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}=\mathbf{0}$,得$(x_3-1,y_3)+(x_1-1,y_1)+(x_2-1,y_2)=(0,0)$. 由(1)及题设得$x_3=3-(x_1+x_2)=1$,$y_3=-(y_1+y_2)=-2m<0$.又点$P$在$C$上,所以$m=\frac{3}{4}$,从而$P\left(1,-\frac{3}{2}\right)$,$|\overrightarrow{FP}|=\frac{3}{2}$. 于是$|\overrightarrow{FA}|=\sqrt{(x_1-1)^2+y_1^2}=\sqrt{(x_1-1)^2+3\left(1-\frac{x_1^2}{4}\right)}=2-\frac{x_1}{2}$.

同理,$|\overrightarrow{FB}|=2-\frac{x_2}{2}$. 所以$|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|=4-\frac{1}{2}(x_1+x_2)=3$. 故$2|\overrightarrow{FP}|=|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|$.

④ 第14期

第2~3版同步周测参考答案

一、选择题

1~6.DBBCBD　7~12.BACCAD

二、填空题

13.$-\frac{4}{3}$　14.$\frac{56}{65}$

15.$-\frac{3\sqrt3}{2}$　16.$\left(\frac12,\frac32\right)$

三、解答题

17.解:

(1)$\frac{\tan150°\cos(-210°)\sin(-420°)}{\sin1050°\cos(-600°)}$

$=\frac{(-\tan30°)(-\cos30°)(-\sin60°)}{(-\sin30°)(-\cos60°)}$

$=-\frac{\frac{\sqrt3}{3}\times\frac{\sqrt3}{2}\times\frac{\sqrt3}{2}}{\frac12\times\frac12}$

$=-\sqrt3$.

(2)$\frac{\cos40°+\sin50°(1+\sqrt3\tan10°)}{\sin70°\sqrt{1+\cos40°}}$

$=\frac{\cos40°+\sin50°\left(\frac{\cos10°+\sqrt3\sin10°}{\cos10°}\right)}{\sin70°\sqrt{1+\cos40°}}$

$=\frac{\cos40°+\frac{2\sin40°\cos40°}{\cos10°}}{\sin70°\sqrt{1+\cos40°}}$

$=\frac{\cos40°+1}{\sin70°\sqrt{1+\cos40°}}$

$=\frac{2\cos^2 20°-1+1}{\cos20°\sqrt{1+2\cos^2 20°-1}}$

$=\frac{2\cos^2 20°}{\sqrt2\cos^2 20°}=\sqrt2$.

18.解:(1)由已知得$\pi=\frac{2\pi}{\omega}$,解得$\omega=2$.将点$\left(\frac{\pi}{4},\sqrt2\right)$代入解析式,得$\sqrt2=2\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)$,所以$\cos\varphi=\frac{\sqrt2}{2}$,由$0<\varphi<\pi$,可知$\varphi=\frac{\pi}{4}$,于是$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$.

令$2x+\frac{\pi}{4}=k\pi$($k\in\mathbf Z$),所以$x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$($k\in\mathbf Z$),于是函数$f(x)$图象的对称中心为$\left(\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8},0\right)$($k\in\mathbf Z$).

(2)令$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant2x+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$($k\in\mathbf Z$),所以$-\frac{3\pi}{8}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{8}+k\pi$($k\in\mathbf Z$),于是函数$f(x)$的单调递增区间为$\left[-\frac{3\pi}{8}+k\pi,\frac{\pi}{8}+k\pi\right]$($k\in\mathbf Z$).

19.解:(1)由$f(x)=\sin x$,

得$f(x+\theta)=\sin(x+\theta)$.

因为$f(x+\theta)$为偶函数,

所以$\theta=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf Z)$.

因为$\theta\in[0,2\pi)$,

所以$\theta=\frac{\pi}{2}$或$\theta=\frac{3\pi}{2}$.

(2)$y=\left[f\left(x+\frac{\pi}{12}\right)\right]^2+\left[f\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]^2$

$=\sin^2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)+\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$=\frac{1-\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)}{2}+\frac{1-\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)}{2}$

$=1-\frac12\left(\cos2x\cos\frac{\pi}{6}-\sin2x\sin\frac{\pi}{6}-\sin2x\right)$

$=\frac34\sin2x-\frac{\sqrt3}{4}\cos2x+1$

$=\frac{\sqrt3}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+1$.

因为$x\in\mathbf R$,

所以$\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\in[-1,1]$,

所以$y=\frac{\sqrt3}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+1\in\left[1-\frac{\sqrt3}{2},1+\frac{\sqrt3}{2}\right]$,

所以函数$y=\left[f\left(x+\frac{\pi}{12}\right)\right]^2+\left[f\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]^2$的值域为$\left[1-\frac{\sqrt3}{2},1+\frac{\sqrt3}{2}\right]$.

20.解:(1)$f(x)=2\sin(\pi-x)\cos x+2\cos^2x-1=2\sin x\cos x+\cos2x=\sin2x+\cos2x$

$=\sqrt2\left(\frac{\sqrt2}{2}\sin2x+\frac{\sqrt2}{2}\cos2x\right)$

$=\sqrt2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$,

所以最小正周期$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

(2)因为$x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$,

所以$2x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,

$2x+\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$.

所以当$2x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}$,即$x=-\frac{\pi}{4}$时,$\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$有最小值$-\frac{\sqrt2}{2}$,所以$f(x)$有最小值-1.因为当$x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$时,$f(x)\geqslant m$恒成立,所以$m\leqslant-1$,即$m$的取值范围是$(-\infty,-1]$.

21.解:(1)设水轮上圆心O正右侧的点为A,y轴与水面交点为B,

因为$OB=1$,$OP_0=2$,所以$\angle BOP_0=\frac{\pi}{3}$,

故$\angle AOP_0=\frac{\pi}{6}$.

设$h=2\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{6}\right)+1$,则$T=\frac{2\pi}{\omega}=3$,

所以$\omega=\frac{2\pi}{3}$,

所以$h=2\sin\left(\frac{2\pi}{3}t-\frac{\pi}{6}\right)+1(t\geqslant0)$.

(2)令$\sin\left(\frac{2\pi}{3}t-\frac{\pi}{6}\right)=1$,

可得$\frac{2\pi}{3}t-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf N$,

故$t=1+3k,k\in\mathbf N$,所以当$k=0$时,$t=1$,故点P第一次到达最高点大约要1秒.

22.解:$f(\theta)=4\cos^2\theta-4\cos\theta+3\sin^2\theta=\cos^2\theta-4\cos\theta+3$,$g(\theta)=m\cdot\cos\theta$.

(1)对任意的$\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$,若$f(\theta)\geqslant g(\theta)$,即$\cos^2\theta-4\cos\theta+3\geqslant m\cos\theta$,$\cos\theta\in(0,1]$,

所以$\cos\theta+\frac{3}{\cos\theta}-4\geqslant m$,设$\cos\theta=t$,$t\in(0,1]$,则$h(t)=t+\frac3t-4$在$(0,1]$上是减函数,

所以函数$h(t)=t+\frac3t-4$在$(0,1]$上的最小值为$h(1)=0$,

所以对任意的$\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$,若$f(\theta)\geqslant g(\theta)$恒成立,则$m\leqslant0$,所以$m$的取值范围为$(-\infty,0]$.

(2)对$\theta\in[-\pi,\pi]$,$f(\theta)=g(\theta)$有两个不等实根,即$\cos^2\theta-4\cos\theta+3=m\cos\theta$有两个不等实根,$\cos\theta\in[-1,1]$.当$\cos\theta=0$时,上述方程不成立,所以$\cos\theta\neq0$,所以两边同除以$\cos\theta$,得$\cos\theta+\frac{3}{\cos\theta}-4=m$有两个不等实根,设$\cos\theta=t$,$t\in[-1,0)\cup(0,1]$,则$F(t)=t+\frac3t-4$与$y=m$在$[-1,0)$和$(0,1]$上有交点,并且此函数在两个区间上是减函数,又函数$F(t)=t+\frac3t-4$在$(0,1]$上的最小值为$F(1)=0$,在$[-1,0)$的最大值为$F(-1)=-8$,所以要使对$\theta\in[-\pi,\pi]$,$f(\theta)=g(\theta)$有两个不等实根的$m$的取值范围为$(-\infty,-8]\cup[0,+\infty)$.

第15期

第2~3版同步周测参考答案

一、选择题

1~6.BDADCA　7~12.DAACAD

二、填空题

13.75°或15°　14.$\frac{2\sqrt3}{3}$

15.54　16.$\frac{\sqrt{13}}{2}$

三、解答题

17.解:(1)因为$a=3$,$b-c=2$,$\cos B=-\frac12$,所以由余弦定理,得$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=9+(b-2)^2-2\times3\times(b-2)\times\left(-\frac12\right)$,

所以$b=7$,所以$c=b-2=5$.

(2)在△ABC中,因为$\cos B=-\frac12$,所以$\sin B=\frac{\sqrt3}{2}$.由正弦定理,得$\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}$,所以$\sin C=\frac{c\sin B}{b}=\frac{5\times\frac{\sqrt3}{2}}{7}=\frac{5\sqrt3}{14}$.因为$b>c$,所以$B>C$,所以$C$为锐角,所以$\cos C=\frac{11}{14}$,所以$\sin(B-C)=\sin B\cos C-\cos B\sin C=\frac{\sqrt3}{2}\times\frac{11}{14}-\left(-\frac12\right)\times\frac{5\sqrt3}{14}=\frac{4\sqrt3}{7}$.

18.解:(1)因为$a=3c$,$b=\sqrt2$,$\cos B=\frac23$,所以由余弦定理,得$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{10c^2-2}{6c^2}=\frac23$,解得$c=\frac{\sqrt3}{3}$.

(2)因为$\frac{\sin A}{a}=\frac{\cos B}{2b}$,所以由正弦定理,得$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\cos B}{2b}$,所以$2\sin B=\cos B$,因为$\sin^2B+\cos^2B=1$,所以$\sin B=\frac{\sqrt5}{5}$,$\cos B=\frac{2\sqrt5}{5}$,所以$\sin\left(B+\frac{\pi}{2}\right)=\cos B=\frac{2\sqrt5}{5}$.

19.解:(1)因为$(\sin B-\sin C)^2=\sin^2A-\sin B\sin C$,

则$\sin^2B+\sin^2C-2\sin B\sin C=\sin^2A-\sin B\sin C$,

所以由正弦定理,得$b^2+c^2-a^2=bc$,

所以$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac12$,

因为$0<A<\pi$,所以$A=\frac{\pi}{3}$.

(2)因为$\sqrt2a+b=2c$,$A=\frac{\pi}{3}$,

所以由正弦定理,得$\sqrt2\sin A+\sin B=2\sin C$,

所以$\frac{\sqrt6}{2}+\sin\left(\frac{2\pi}{3}-C\right)=2\sin C$,

所以$\sin\left(C-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt2}{2}$,

又$0<C<\frac23\pi$,所以$-\frac{\pi}{6}<C-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}$,

所以$C-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{4}$,$C=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}$,

所以$\sin C=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt2}{2}\times\frac{\sqrt3}{2}+\frac{\sqrt2}{2}\times\frac12=\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}$.

20.解:(1)如图所示,过点O作$OH\perp AB$,垂足为H.在Rt△OHA中,$OA=20$,$\angle OAH=\alpha$,所以$AH=20\cos\alpha$,因此$AB=2AH=40\cos\alpha$.

(2)由图可知,点P处的观众离点O最远.连接OP.

在△OAP中,由余弦定理,得

$OP^2=OA^2+AP^2-2OA\cdot AP\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)$

$=400+(40\cos\alpha)^2-2\times20\times40\cos\alpha\left(-\frac12\cos\alpha-\frac{\sqrt3}{2}\sin\alpha\right)$

$=400(6\cos^2\alpha+2\sqrt3\sin\alpha\cos\alpha+1)$

$=400(3\cos2\alpha+\sqrt3\sin2\alpha+4)$

$=800\sqrt3\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)+1600$.

因为$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$,

所以$2\alpha+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{3},\pi\right)$,

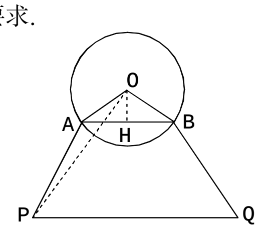
所以当$2\alpha+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$,即$\alpha=\frac{\pi}{12}$时,

$(OP^2)_{max}=800\sqrt3+1600$,

又$(OP^2)_{max}=800\sqrt3+1600<3600$,

所以$(OP)_{max}<60$,所以观众席内每一个观众到舞台O处的距离都不超过60米.

故对于任意α,上述设计方案均能符合要求.



(第20题图)

21.解:(1)因为$S=\frac12bc\sin A=\frac{\sqrt3}{2}$,

所以$bc\sin A=\sqrt3$.

因为$bc\cos A+1=\frac{\sqrt3\cos A}{\sin A}+1=0$,

解得$\tan A=-\sqrt3$.

因为$0<A<\pi$,所以$A=\frac{2\pi}{3}$.

(2)由(1)知,

$S=\frac12bc\sin A=\frac12bc\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt3}{2}$,

所以$bc=2$.

在△ABC中,因为M为BC的中点,

所以$2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

因为$AM=\frac{\sqrt3}{2}$,

所以$3=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})^2=b^2+c^2+2bc\cdot\cos\frac{2\pi}{3}=b^2+c^2-2$,所以$b^2+c^2=5$.

又$bc=2$,解得$\begin{cases}c=2,\\b=1,\end{cases}$或$\begin{cases}c=1,\\b=2.\end{cases}$

由余弦定理,得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=7$,

所以$a=\sqrt7$,所以$BM=\frac{\sqrt7}{2}$.

因为AN为∠BAC的角平分线,

$S_{\triangle ABN}=\frac12AB\cdot AN\sin\frac{\pi}{3}$,

$S_{\triangle CAN}=\frac12AC\cdot AN\sin\frac{\pi}{3}$,

所以$\frac{S_{\triangle ABN}}{S_{\triangle CAN}}=\frac cb=\frac{BN}{CN}=\frac12$,或$\frac{BN}{CN}=2$,

所以$BN=\frac{\sqrt7}{3}$或$\frac{2\sqrt7}{3}$,

所以$MN=|BM-BN|=\frac{\sqrt7}{6}$.

22.解:(1)连接AC,在△ABC中,$AB=2$,$BC=4$,$B=120°$,

所以由余弦定理,得

$AC=\sqrt{AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos B}=2\sqrt7$.

在△ACD中,$AC=2\sqrt7$,$CD=5$,$\cos D=\frac15$,

所以由余弦定理,得

$\sqrt{AD^2+CD^2-2AD\cdot CD\cdot\cos D}=AC$,

即$\sqrt{AD^2+5^2-2AD}=2\sqrt7$,

解得$AD=3$.

(2)在△ABC中,由余弦定理,得$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos B=20-16\cos B$.

在△ACD中,由余弦定理,得$AC^2=AD^2+DC^2-2AD\cdot DC\cdot\cos D=34-30\cos D$.

所以$20-16\cos B=34-30\cos D$,

即$15\cos D-8\cos B=7$,

而面积$S=\frac12AB\cdot BC\cdot\sin B+\frac12AD\cdot CD\cdot\sin D=\frac12(15\sin D+8\sin B)$,

所以$4S^2+49=225+64-240\cos(B+D)$,

即$S^2=60-60\cos(B+D)$,

所以$S^2=60-60\cos(B+D)\leqslant120$,

所以当$B+D=\pi$时,即$\cos D=\frac{7}{23}$,$\cos B=-\frac{7}{23}$时,四边形$ABCD$面积的最大值为$2\sqrt{30}$.