第 12 期

第 2~3 版同步周测参考答案

一、选择题

1~6.AAAACD　7~12.AADCBA

二、填空题

13.$y^2=4x$　14.$x+2y-2=0$　15.2

16.42

三、解答题

17. 解:(1)$2a=\sqrt{(6+4)^2+(2\sqrt{2})^2}-\sqrt{(6-4)^2+(2\sqrt{2})^2}=4\sqrt{3}$,所以 $a^2=12$,又 $c=4$,所以 $b^2=4^2-12=4$,所以该双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$.

(2) 因为 $MF_1\perp F_1F_2$, 所以点 M 的横坐标为-4,当 $x=-4$ 时,$y^2=\frac{4}{3}$,所以 $|MF_1|=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,

所以 $S_{\triangle MF_1F_2}=\frac{1}{2}|MF_1||F_1F_2|=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\times 8=\frac{8\sqrt{3}}{3}$.

18.(1)解:因为 $|PF|=y_P+\frac{p}{2}$,

所以 $4=3+\frac{p}{2}$,解得 $p=2$,

所以抛物线 C 的标准方程为 $x^2=4y$.

(2)证明:设切线 AN 的方程为 $y=k(x-a),k\neq 0$,

联立方程组 $\begin{cases}x^2=4y,\\ y=k(x-a),\end{cases}$ 消 y 可得 $x^2-4kx+4ka=0$,

由题意可得 $\Delta=16k^2-16ka=0$,即 $a=k$,

所以切点 $N(2a,a^2)$,又 $A(a,0)$,$F(0,1)$,

所以 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AN}=(-a,1)\cdot(a,a^2)=0$.

所以 $\angle FAN=90°$,

所以以 FN 为直径的圆过点 A.

19解:(1)椭圆 C 的离心率为 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

短轴的一个端点到焦点的距离为 $\sqrt{b^2+c^2}=a=\sqrt{2}$,

所以 $c=1$,所以 $b=\sqrt{a^2-c^2}=1$,

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

(2)设直线 l 的方程为 $y=kx+m$,则直线 l 与 y 轴交点的纵坐标为 m,

设点 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,

由 $\begin{cases}y=kx+m,\\ x^2+2y^2=2,\end{cases}$ 化简得

$(2k^2+1)x^2+4kmx+2m^2-2=0$,

由韦达定理,得 $x_1+x_2=-\frac{4km}{2k^2+1}$,

$\Delta=16k^2m^2-4(2k^2+1)(2m^2-2)>0$,化简得 $m^2<2k^2+1$.

由线段 AB 的中点在直线 $x=-\frac{1}{2}$ 上,得 $x_1+x_2=-1$,

故 $-\frac{4km}{2k^2+1}=-1$,即 $4km=2k^2+1$,

所以 $m=\frac{2k^2+1}{4k}=\frac{k}{2}+\frac{1}{4k}\geqslant 2\sqrt{\frac{k}{2}\cdot\frac{1}{4k}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

当且仅当 $\frac{k}{2}=\frac{1}{4k}$, 即 $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取等号,此时 $m^2<2k^2+1$,满足 $\Delta>0$,

因此, 直线 l 与 y 轴交点纵坐标的最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

20.(1)解:抛物线 $C:x^2=-2py$ 经过点 $(2,-1)$,可得 $4=2p$,即 $p=2$,

可得抛物线 C 的方程为 $x^2=-4y$,其准线方程为 $y=1$.

(2)证明:抛物线 C 的焦点为 $F(0,-1)$,

设直线 l 的方程为 $y=kx-1(k\neq 0)$,由 $\begin{cases}y=kx-1,\\ x^2=-4y,\end{cases}$ 可得 $x^2+4kx-4=0$.

设 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,

可得 $x_1+x_2=-4k$,$x_1x_2=-4$,

直线 OM 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1}x$,即 $y=-\frac{x_1}{4}x$,

直线 ON 的方程为 $y=\frac{y_2}{x_2}x$,即 $y=-\frac{x_2}{4}x$,

可得 $A\left(\frac{4}{x_1},-1\right)$,$B\left(\frac{4}{x_2},-1\right)$,

可得 AB 的中点的横坐标为 $2\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)=2\cdot\frac{-4k}{-4}=2k$,

即有 AB 为直径的圆的圆心为 $(2k,-1)$,

半径为 $\frac{|AB|}{2}=\frac{1}{2}\left|\frac{4}{x_1}-\frac{4}{x_2}\right|=2\cdot\frac{\sqrt{16k^2+16}}{4}=2\sqrt{1+k^2}$,

可得圆的方程为 $(x-2k)^2+(y+1)^2=4(1+k^2)$,

化简得 $x^2-4kx+(y+1)^2=4$,

由 $x=0$,可得 $y=1$,或 $y=-3$.

则以 AB 为直径的圆经过 y 轴上的两个定点 $(0,1)$,$(0,-3)$.

21.解:(1)由题意知 $c=1$,$F_1(-1,0)$,$F_2(1,0)$.

又 $2a=|TF_1|+|TF_2|=\sqrt{(-1+1)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2}+\sqrt{(-1-1)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3}{2}+\frac{5}{2}=4$,

所以 $a=2$,所以 $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}$,

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)若存在点 $P(m,0)$,使得以 PG,PH 为邻边的平行四边形是菱形,

则 P 为线段 GH 的中垂线与 x 轴的交点.

设直线 l_1 的方程为 $y=kx+2$,$G(x_1,y_1)$,$H(x_2,y_2)$,

由 $\begin{cases}y=kx+2,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 得 $(3+4k^2)x^2+16kx+4=0$,

$\Delta=256k^2-16(3+4k^2)>0$,又 $k>0$,所以 $k>\frac{1}{2}$.

由韦达定理,得 $x_1+x_2=-\frac{16k}{3+4k^2}$,设 GH 的中点为 (x_0,y_0),

则 $x_0=-\frac{8k}{3+4k^2}$,$y_0=kx_0+2=\frac{6}{3+4k^2}$,

所以线段 GH 的中垂线方程为

$y=-\frac{1}{k}\left(x+\frac{8k}{3+4k^2}\right)+\frac{6}{3+4k^2}$,

令 $y=0$,可得 $x=\frac{-2k}{3+4k^2}=-\frac{2}{\frac{3}{k}+4k}$,

即 $m=-\frac{2}{\frac{3}{k}+4k}$.

因为 $k>\frac{1}{2}$,所以 $\frac{3}{k}+4k\geqslant 2\sqrt{\frac{3}{k}\cdot 4k}=4\sqrt{3}$,当且仅当 $\frac{3}{k}=4k$,即 $k=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时取等号,

所以 $m\geqslant -\frac{2}{4\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{6}$,且 $m<0$.

所以 m 的取值范围是 $\left[-\frac{\sqrt{3}}{6},0\right)$.

22.(1)解:由题意得 $\frac{y}{x+2}\cdot\frac{y}{x-2}=-\frac{1}{2}$,

整理得曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1(y\neq 0)$,

所以曲线 C 是焦点在 x 轴上不含长轴端点的椭圆.

(2)(i)证明:设 $G(x_G,y_G)$,$P(x_0,y_0)$,则 $Q(-x_0,-y_0)$,$E(x_0,0)$,

所以直线 QE 的方程为 $y=\frac{y_0}{2x_0}(x-x_0)$,

与 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ 联立消去 y,

得 $(2x_0^2+y_0^2)x^2-2x_0y_0^2x+x_0^2y_0^2-8x_0^2=0$,

所以 $-x_0x_G=\frac{x_0^2y_0^2-8x_0^2}{2x_0^2+y_0^2}$,

所以 $x_G=\frac{(8-y_0^2)x_0}{2x_0^2+y_0^2}$,

所以 $y_G=\frac{y_0}{2x_0}(x_G-x_0)=\frac{y_0(4-x_0^2-y_0^2)}{2x_0^2+y_0^2}$,

所以 $k_{PG}=\frac{y_G-y_0}{x_G-x_0}$

$=\frac{\frac{y_0(4-x_0^2-y_0^2)}{2x_0^2+y_0^2}-y_0}{\frac{x_0(8-y_0^2)}{2x_0^2+y_0^2}-x_0}$

$=\frac{4y_0-y_0x_0^2-y_0^3-2y_0x_0^2-y_0^3}{8x_0-x_0y_0^2-2x_0^3-x_0y_0^2}$

$=\frac{4y_0-y_0x_0^2-y_0^3-2y_0x_0^2-y_0^3}{2x_0(4-y_0^2-x_0^2)}$,

把 $x_0^2+2y_0^2=4$ 代入上式,

得 $k_{PG}=\frac{y_0(x_0^2-3x_0^2)}{2x_0(4-y_0^2-4+2y_0^2)}$

$=\frac{-y_0\cdot 2x_0^2}{2x_0y_0^2}=-\frac{x_0}{y_0}$,

所以 $k_{PQ}\cdot k_{PG}=\frac{y_0}{x_0}\cdot\left(-\frac{x_0}{y_0}\right)=-1$,

所以 $PQ\perp PG$,

故△PQG 为直角三角形.

(ii)解:$S_{\triangle PQG}=\frac{1}{2}|PE|\cdot(x_G-x_Q)$

$=\frac{1}{2}y_0(x_G+x_0)=\frac{1}{2}y_0\left[\frac{(8-y_0^2)x_0}{2x_0^2+y_0^2}+x_0\right]$

$=\frac{1}{2}y_0x_0\cdot\frac{8-y_0^2+2x_0^2+y_0^2}{2x_0^2+y_0^2}$

$=\frac{y_0x_0(4+x_0^2)}{2x_0^2+y_0^2}=\frac{y_0x_0(x_0^2+2y_0^2+x_0^2)}{2x_0^2+y_0^2}$

$=\frac{2y_0x_0(x_0^2+y_0^2)}{2x_0^2+y_0^2}=\frac{8y_0x_0(x_0^2+y_0^2)}{(2x_0^2+y_0^2)(x_0^2+2y_0^2)}$

$=\frac{8(y_0x_0^3+x_0y_0^3)}{2x_0^4+2y_0^4+5x_0^2y_0^2}=\frac{8\left(\frac{x_0}{y_0}+\frac{y_0}{x_0}\right)}{2\left(\frac{x_0}{y_0}+\frac{y_0}{x_0}\right)^2+1}$.

令 $t=\frac{x_0}{y_0}+\frac{y_0}{x_0}$,$x_0>0$,$y_0>0$,则 $t\geqslant 2$,

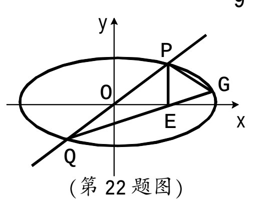
$S_{\triangle PQG}=\frac{8t}{2t^2+1}=\frac{8}{2t+\frac{1}{t}}$,

易知“对号”函数 $f(t)=2t+\frac{1}{t}$ 在 $[2,+\infty)$ 上为增函数,

$f(t)\geqslant 4+\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$($t=2$ 时取等号),

所以 $S_{\triangle PQG}\leqslant\frac{8}{\frac{9}{2}}=\frac{16}{9}$(此时 $x_0=y_0=\frac{2\sqrt{3}}{3}$),

故△PQG 面积的最大值为 $\frac{16}{9}$.



(第 22 题图)

第9期

第 2~3 版同步周测参考答案

一、选择题

1~6.ADCBDB　　7~12.CCCDCB

二、填空题

13.0

14.$x+y-1=0$

15.$[-7,-1]$

16.$(x-1)^2+y^2=4$

三、解答题

17.解:(1)因为 $k_{AB}=-\frac{1}{3}$,所以 AB 边上的高所在直线的斜率为 3,又 AB 边上的高过点 $C(1,2)$,

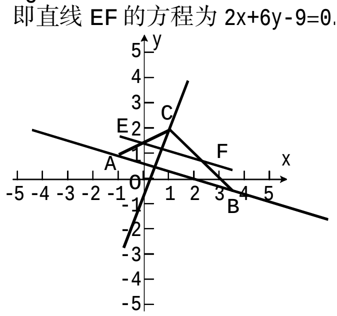
所以由点斜式得 AB 边上的高所在的直线方程为 $y-2=3(x-1)$,即 $3x-y-1=0$.

(2)易得 $A(-1,1)$,$E\left(0,\frac{3}{2}\right)$,

根据中位线定理可得 $k_{EF}=-\frac{1}{3}$,

由点斜式,可得直线 EF 的方程为 $y-\frac{3}{2}=-\frac{1}{3}(x-0)$,

即直线 EF 的方程为 $2x+6y-9=0$.



(第 17 题图)

18.解:(1)直线 $l:(k-1)x-2y+5-3k=0(k\in R)$可化为 $(x-3)k-x-2y+5=0$,

令 $\begin{cases}x-3=0,\\ -x-2y+5=0,\end{cases}$ 得定点 P 的坐标为 $(3,1)$.

(2)易知圆心在 AP 的垂直平分线上,设 AP 垂直平分线上的点为 (x,y),则 $\sqrt{(x-5)^2+(y+1)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}$,化简得 $x-y-4=0$,

又因为圆心在直线 $x-2y+2=0$ 上,所以由 $\begin{cases}x-2y+2=0,\\ x-y-4=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=10,\\ y=6,\end{cases}$

所以圆 C 的圆心坐标为 $(10,6)$,半径 $r=\sqrt{(10-3)^2+(6-1)^2}=\sqrt{74}$,

所以圆 C 的方程为 $(x-10)^2+(y-6)^2=74$.

19.解:(1)根据题意,圆 $(x-3)^2+(y-4)^2=4$ 的圆心为 $(3,4)$,半径 $r=2$,

分 2 种情况讨论:

①当直线的斜率不存在时,直线方程为 $x=1$,与圆相切,符合题意;

②当直线的斜率存在时,设切线的方程为 $y=k(x-1)$,

则有 $\frac{|3k-4-k|}{\sqrt{1+k^2}}=2$,解得 $k=\frac{3}{4}$,此时切线的方程为 $y=\frac{3}{4}(x-1)$,即 $3x-4y-3=0$.

综上,所求的切线方程为 $x=1$ 或 $3x-4y-3=0$.

(2)根据题意,设 $P(m,n)$,

则 $|AP|^2+|BP|^2=(m+1)^2+n^2+(m-1)^2+n^2=2(m^2+n^2)+2$,

又由 $OP=\sqrt{m^2+n^2}$(O 为坐标原点),则当 OP 最小时,$|AP|^2+|BP|^2$ 取得最小值,

又由 P 在圆 $(x-3)^2+(y-4)^2=4$ 上,则 $|OP|_{min}=5-2=3$,

即 (m^2+n^2) 的最小值为 9,此时 $|AP|^2+|BP|^2$ 取得最小值,且其最小值为 $2\times 9+2=20$,

此时 $m=3\times\frac{3}{5}=\frac{9}{5}$,$n=3\times\frac{4}{5}=\frac{12}{5}$,

即点 P 的坐标为 $\left(\frac{9}{5},\frac{12}{5}\right)$.

20.解:(1)根据题意,圆 $C:x^2+y^2-6x-10y-6t=0$ 变形可得 $(x-3)^2+(y-5)^2=34+6t$,

故圆心为 $C(3,5)$,半径 $r=\sqrt{34+6t}$,

则圆心 C 到直线 l 的距离为 $d=\frac{|3+15+12|}{\sqrt{10}}=3\sqrt{10}$,

又弦长为 $2\sqrt{10}$,则 $r^2=(3\sqrt{10})^2+(\sqrt{10})^2=100$,

即 $34+6t=100$,解得 $t=11$.

(2)当 $t=1$ 时,圆 C 的方程为 $x^2+y^2-6x-10y-6=0$,①

变形可得 $(x-3)^2+(y-5)^2=40$,

则圆心为 $C(3,5)$,半径 $r=2\sqrt{10}<3\sqrt{10}$,圆 C 与直线 l 相离.

假设在直线 AB 上存在一个定点满足条件,设动点 $P(m,n)$.

由已知得 $PA\perp AC$,$PB\perp BC$,

则 A,B 在以 CP 为直径的圆 $(x-3)\cdot(x-m)+(y-5)(y-n)=0$ 上,

该圆的方程可化为 $x^2+y^2-(3+m)x-(5+n)y+3m+5n=0$.②

由①-②得,直线 AB 的方程为 $(m-3)x+(n-5)y-3m-5n-6=0$.③

又点 $P(m,n)$ 在直线 l 上,则 $m+3n+12=0$,即 $m=-3n-12$,代入③式得

$(-3n-15)x+(n-5)y+4n+30=0$,

即直线 AB 的方程为 $15x+5y-30+n\cdot(3x-y-4)=0$.

因为上式对任意 n 都成立,故 $\begin{cases}3x-y-4=0,\\ 15x+5y-30=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=\frac{5}{3},\\ y=1,\end{cases}$

故直线 AB 恒过一个定点,定点坐标为 $\left(\frac{5}{3},1\right)$.

21.解:设 BD 与圆 O 交于 M,连接 AM,

由 AB 为圆 O 的直径,得 $AM\perp BM$,

即有 $DM=AC=6$,$BM=6$,$AM=8$,

以 C 为坐标原点,l 为 x 轴,建立直角坐标系,则 $A(0,-6)$,$B(-8,-12)$,$D(-8,0)$.

(1)设点 $P(x_1,0)$,$PB\perp AB$,

则 $k_{BP}\cdot k_{AB}=-1$,

即 $\frac{0-(-12)}{x_1-(-8)}\cdot\frac{-6-(-12)}{0-(-8)}=-1$,

解得 $x_1=-17$,所以 $P(-17,0)$,$PB=\sqrt{(-17+8)^2+(0+12)^2}=15$,所以道路 PB 的长为 15 百米.

(2)当 P 在 D 处,则直线 BD 的方程为 $x=-8$,又点 $O(-4,-9)$,

所以 O 到 BD 的距离 $d=4<5$,

所以 P 选在 D 处不满足规划要求;

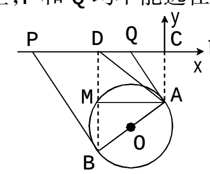
当 Q 在 D 处,连接 AD,又 $D(-8,0)$,$A(0,-6)$,

所以线段 AD:$\frac{x}{8}+\frac{y}{6}=-1(-8\leqslant x\leqslant 0)$,

在线段 AD 上取 $N\left(-1,-\frac{21}{4}\right)$,因为 $ON=\sqrt{3^2+\left(\frac{15}{4}\right)^2}<\sqrt{3^2+4^2}=5$,所以线段 AD 上存在点到点 O 的距离小于圆 O 的半径.

因此 Q 选在 D 处也不满足规划要求.

综上,P 和 Q 均不能选在 D 处.



(第 21 题图)

22.(1)解:由题意,得 $c=\sqrt{3}$,即 $a^2-b^2=3$,又 $\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$,

解得 $a^2=6$,$b^2=3$.

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)①解:椭圆 C 的右焦点 $F(\sqrt{3},0)$,

设切线方程为 $y=k(x-\sqrt{3})$,即 $kx-y-\sqrt{3}k=0$,

由 $\frac{|-\sqrt{3}k|}{\sqrt{1+k^2}}=\sqrt{2}$,解得 $k=\pm\sqrt{2}$,

所以切线方程为 $y=\pm\sqrt{2}(x-\sqrt{3})$.

由方程组 $\begin{cases}y=\sqrt{2}(x-\sqrt{3}),\\ x^2+2y^2=6,\end{cases}$ 可得 $5x^2-8\sqrt{3}x+6=0$,设 $P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,

则 $x_1+x_2=\frac{8\sqrt{3}}{5}$,$x_1x_2=\frac{6}{5}$,

所以 $|PQ|=\sqrt{1+2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{192}{25}-\frac{24}{5}}=\frac{6\sqrt{6}}{5}$,

因为 O 到直线 PQ 的距离为 $\sqrt{2}$,

所以△OPQ 的面积为 $S=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{6\sqrt{6}}{5}=\frac{6\sqrt{3}}{5}$.当切线方程为 $y=-\sqrt{2}\cdot(x-\sqrt{3})$ 时,同理,可得△OPQ 的面积为 $\frac{6\sqrt{3}}{5}$.综上可知,△OPQ 的面积为 $\frac{6\sqrt{3}}{5}$.

②证明:(i)若直线 PQ 的斜率不存在,

则直线 PQ 的方程为 $x=\sqrt{2}$ 或 $x=-\sqrt{2}$.

当 $x=\sqrt{2}$ 时,$P(\sqrt{2},\sqrt{2})$,$Q(\sqrt{2},-\sqrt{2})$.

因为 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$,所以 $OP\perp OQ$.

当 $x=-\sqrt{2}$ 时,同理可得 $OP\perp OQ$,即以线段 PQ 为直径的圆恒过原点.

(ii)若直线 PQ 的斜率存在,设直线 PQ 的方程为 $y=kx+m$,即 $kx-y+m=0$.

因为直线与圆相切,所以 $\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=\sqrt{2}$,即 $m^2=2k^2+2$.

将直线 PQ 方程代入椭圆 C 的方程,得 $(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-6=0$.

设 $P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,

则有 $x_1+x_2=-\frac{4km}{1+2k^2}$,$x_1x_2=\frac{2m^2-6}{1+2k^2}$,

因为 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+(kx_1+m)\cdot(kx_2+m)=(1+k^2)x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=(1+k^2)\cdot\frac{2m^2-6}{1+2k^2}+km\left(-\frac{4km}{1+2k^2}\right)+m^2$,

将 $m^2=2k^2+2$ 代入上式可得 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$,

所以,以线段 PQ 为直径的圆恒过原点.

综上,以线段 PQ 为直径的圆恒过原点.

第 10 期

第2~3版同步周测参考答案

一、选择题

1~6.DBDACA　　7~12.BBBBAD

二、填空题

13.$\frac{1}{4}$

14.$2\sqrt{5}$,(1,0)和(-1,0)

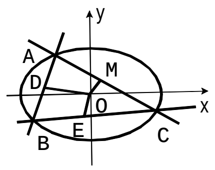
15.(0,4)

16.$-\frac{25}{16}$

提示:如图所示,由题意可得:$c=3,e=\frac{3}{5}=\frac{c}{a}$,$b^2=a^2-c^2$.联立解得 $a=5,b=4$.所以椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),D(x_0,y_0)$.由$\frac{x_1^2}{25}+\frac{y_1^2}{16}=1,\frac{x_2^2}{25}+\frac{y_2^2}{16}=1$,

相减可得$\frac{x_0}{25}+\frac{k_1y_0}{16}=0$,所以$\frac{1}{25}+\frac{k_1k_{OD}}{16}=0$,所以$\frac{1}{k_1}=-\frac{25}{16}k_{OD}$.

同理可得$\frac{1}{k_2}=-\frac{25}{16}k_{OE},\frac{1}{k_3}=-\frac{25}{16}k_{OM}$.所以$\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}+\frac{1}{k_3}=-\frac{25}{16}(k_{OD}+k_{OE}+k_{OM})=-\frac{25}{16}$.



(第 16 题图)

三、解答题

17.解:因为椭圆中心在原点,焦点在坐标轴上,且经过两点 $P\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right),Q\left(0,-\frac{1}{2}\right)$,

所以设椭圆方程为 $mx^2+ny^2=1(m>0,n>0)$,

则$\begin{cases}\frac{1}{9}m+\frac{1}{9}n=1,\\ \frac{1}{4}n=1,\end{cases}$解得 $m=5,n=4$,所以椭圆方程为 $5x^2+4y^2=1$,所以椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{\frac{1}{5}}+\frac{y^2}{\frac{1}{4}}=1$.

18.解:(1)根据题意,椭圆$\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{16}=1$中,$a=2\sqrt{5}$,$b=4$,则 $c=\sqrt{20-16}=2$,则 A(0,4),F(2,0).

易知直线 BC 斜率存在,设为 k,再设 $B(x_1,y_1),C(x_2,y_2)$,BC 的中点 $D(x_0,y_0)$,则有$\begin{cases}\frac{x_1^2}{20}+\frac{y_1^2}{16}=1,\\ \frac{x_2^2}{20}+\frac{y_2^2}{16}=1,\end{cases}$两式相减,得$\frac{x_0}{5}+\frac{y_0k}{4}=0$,①

又由 F(2,0)为△ABC 的重心,得$\frac{x_1+x_2+0}{3}=\frac{2x_0}{3}=2,\frac{y_1+y_2+4}{3}=\frac{2y_0+4}{3}=0$,

解得 $x_0=3,y_0=-2$,代入①得 $k=\frac{6}{5}$,则直线 BC 的方程为 $6x-5y-28=0$.

(2)根据题意,由(1)的结论,$\overrightarrow{AB}=(x_1,y_1-4),\overrightarrow{AC}=(x_2,y_2-4)$,

因为$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$,所以 $x_1x_2+y_1y_2-4(y_1+y_2)+16=0$,②

易知直线 BC 斜率存在,设 BC 的方程为 $y=kx+b$,代入 $4x^2+5y^2=80$,可得$(4+5k^2)x^2+10bkx+5b^2-80=0$.

所以 $x_1+x_2=\frac{-10bk}{4+5k^2},x_1\cdot x_2=\frac{5b^2-80}{4+5k^2}$,

$y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2b=\frac{8b}{4+5k^2}$,

$y_1\cdot y_2=k^2x_1x_2+bk(x_1+x_2)+b^2=\frac{4b^2-80k^2}{4+5k^2}$,

代入②得 $b=-\frac{4}{9}$,或 $b=4$(舍去).

所以直线 BC 过定点 $E\left(0,-\frac{4}{9}\right)$,设 D(x,y),

则$\frac{y+\frac{4}{9}}{x}\cdot\frac{y-4}{x}=-1$,即 $9x^2+9y^2-32y-16=0$,

所以所求点 D 的轨迹方程是 $x^2+\left(y-\frac{16}{9}\right)^2=\left(\frac{20}{9}\right)^2(y\neq4)$.

19.解:(1)根据题意,直线 l 与椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$恰有一个公共点 P,即相切,

由$\begin{cases}y=kx+m,\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\end{cases}$

得$(a^2k^2+b^2)x^2+2a^2kmx+a^2(m^2-b^2)=0$,

则$\Delta=(2a^2km)^2-4(a^2k^2+b^2)a^2(m^2-b^2)=0$,

化简,得 $m^2=a^2k^2+b^2$.

(2)因点 Q 与点 P 关于坐标原点 O 对称,故△QAB 的面积是△OAB 的面积的两倍.

所以当 $k=-\frac{1}{2}$时,△OAB 的面积取到最大值$\frac{a^2}{2}$,此时 OA⊥OB,

从而原点 O 到直线 l 的距离 $d=\frac{a}{\sqrt{2}}$,又 $d=\frac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}$,故$\frac{m^2}{k^2+1}=\frac{a^2}{2}$.

再由(1),得$\frac{a^2k^2+b^2}{k^2+1}=\frac{a^2}{2}$,则 $k^2=1-\frac{2b^2}{a^2}$.

又 $k=-\frac{1}{2}$,故 $k^2=1-\frac{2b^2}{a^2}=\frac{1}{4}$,即$\frac{b^2}{a^2}=\frac{3}{8}$,

从而 $e^2=\frac{c^2}{a^2}=1-\frac{b^2}{a^2}=\frac{5}{8}$,即 $e=\frac{\sqrt{10}}{4}$.所以椭圆的离心率为$\frac{\sqrt{10}}{4}$.

20.解:(1)设 $F_1(-1,0),F_2(1,0)$,则$\sqrt{x^2+y^2+2x+1}+\sqrt{x^2+y^2-2x+1}=2\sqrt{2}$等价于$|PF_1|+|PF_2|=2\sqrt{2}>|F_1F_2|$,

所以曲线 C 为以 F_1,F_2 为焦点的椭圆,且长轴长为 $2\sqrt{2}$,焦距为 2,

故曲线 C 的方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

(2)联立方程组$\begin{cases}y=kx+m,\\ \frac{x^2}{2}+y^2=1,\end{cases}$消去 y 可得$(2k^2+1)x^2+4kmx+2m^2-2=0$,

$\Delta=16k^2m^2-4(2k^2+1)(2m^2-2)=16k^2-8m^2+8>0$.

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,

则 $x_1+x_2=-\frac{4km}{2k^2+1},x_1x_2=\frac{2m^2-2}{2k^2+1}$,

所以 $k_1+k_2=\frac{y_1}{x_1-2}+\frac{y_2}{x_2-2}$

$=\frac{x_2y_1+x_1y_2-2(y_1+y_2)}{(x_1-2)(x_2-2)}=0$,

所以 $x_2y_1+x_1y_2-2(y_1+y_2)=0$,

即 $x_2(kx_1+m)+x_1(kx_2+m)-2(kx_1+kx_2+2m)=0$,

即 $2k\cdot\frac{2m^2-2}{2k^2+1}-(m-2k)\cdot\frac{4km}{2k^2+1}-4m=\frac{-4(k+m)}{2k^2+1}=0$,

所以 $k+m=0$,故直线 L 的方程为 $y=kx-k=k(x-1)$,所以直线 L 过定点(1,0).

21.解:(1)由题意可得 $2b=4$,即 $b=2$,$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{5}$,$a^2-b^2=c^2$,

解得 $a=\sqrt{5}$,$c=1$,所以椭圆方程为$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$.

(2)B(0,2),设 PB 的方程为 $y=kx+2$,代入椭圆方程 $4x^2+5y^2=20$,可得$(4+5k^2)x^2+20kx=0$,

解得 $x=-\frac{20k}{4+5k^2}$,或 $x=0$,

所以 $P\left(-\frac{20k}{4+5k^2},\frac{8-10k^2}{4+5k^2}\right)$.

由 $y=kx+2$,令 $y=0$,可得 $M\left(-\frac{2}{k},0\right)$,又|ON|=|OF|,所以 N(0,-1),由 OP⊥MN,得$\frac{8-10k^2}{-20k}\cdot\frac{1}{\frac{-2}{k}}=-1$,解得 $k=\pm\frac{2\sqrt{30}}{5}$,

所以直线 PB 的斜率为$\pm\frac{2\sqrt{30}}{5}$.

22.解:(1)设椭圆的焦距为 2c,由题意可得,$b=1,\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$a^2=b^2+c^2$,解得 $a=2$.

所以椭圆 C 的标准方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)设 $B(m,n),M(x_M,0),N(x_N,0)$,直线 BP 的方程为 $y-1=\frac{n-1}{m}x$,令 $y=0$,可得 $x_N=\frac{m}{1-n}$,所以 $N\left(\frac{m}{1-n},0\right)$.

由点 A,B 关于 x 轴对称,所以 A(m,-n).同理,$M\left(\frac{m}{1+n},0\right)$.

假设在 y 轴的正半轴上存在点 Q(0,t)(t>0),使得∠OQM=∠ONQ.

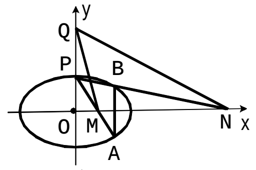
由 tan∠OQM=tan∠ONQ,

可得$\frac{|x_M|}{|t|}=\frac{|t|}{|x_N|}$,即 $t^2=|x_Mx_N|$,

所以 $t^2=\frac{m^2}{1-n^2}$,又点 B 在椭圆 C 上,所以$\frac{m^2}{4}+n^2=1$,所以 $t^2=4$,又 $t>0$,解得 $t=2$.

经过验证:t=2 时,∠OQM=∠ONQ.

所以在 y 轴的正半轴上存在点 Q(0,2),使得∠OQM=∠ONQ.



(第 22 题图)

第 11 期

第2~3版同步周测参考答案

一、选择题

1~6.ABCCBB　7~12.ADDAAB

二、填空题

13.$y^2=28x$　　14.$\sqrt{5}$

15.$\sqrt{5}$　　16.$\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$

三、解答题

17.解:设重心 G(x,y),点 P(m,n),因为 $F_1(-5,0),F_2(5,0)$,

则有$\begin{cases}x=\frac{-5+5+m}{3},\\ y=\frac{0+0+n}{3},\end{cases}$故$\begin{cases}m=3x,\\ n=3y,\end{cases}$代入双曲线$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$中,得$\frac{9x^2}{16}-y^2=1$.

又 P 与 F_1F_2 不共线,所以 $y\neq0$,故所求轨迹方程为$\frac{9x^2}{16}-y^2=1(y\neq0)$.

18.解:(1)抛物线 $y^2=4x$ 的焦点坐标为(1,0),直线的斜率为-1,

则该直线方程为 $y=-(x-1)$,即 $x+y-1=0$.

(2)设点 A、B 的坐标分别为(x_1,y_1)、(x_2,y_2),由$\begin{cases}y^2=4x,\\ y=-x+1,\end{cases}$消去 y 可得 $x^2-6x+1=0$,

根据韦达定理,得 $x_1+x_2=6,x_1x_2=1$,所以$|AB|=\sqrt{1+(-1)^2}\times\sqrt{6^2-4}=8$,

点 O 到直线 AB 的距离 $d=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以 $S_{\triangle ABO}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{1}{2}\times8\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$.

19.解:(1)双曲线 C 的焦点在坐标轴上,其渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{2}x$,

则可设双曲线C的方程为 $x^2-\frac{y^2}{2}=\lambda$,将点 $P\left(\frac{\sqrt{6}}{2},1\right)$代入双曲线 C 的方程,可得 $\lambda=1$,所以双曲线 C 的标准方程为 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$.

(2)假设存在被点 B(1,1)平分的弦.

设 B(1,1)是弦 MN 的中点,且 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$,则 $x_1+x_2=2,y_1+y_2=2$.

因为点 M,N 在双曲线 C 上,所以$\begin{cases}2x_1^2-y_1^2=2,\\ 2x_2^2-y_2^2=2,\end{cases}$所以 $2(x_1+x_2)(x_1-x_2)-(y_1-y_2)\cdot(y_1+y_2)=0$,

所以 $4(x_1-x_2)=2(y_1-y_2)$,所以 $k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=2$,

所以直线 MN 的方程为 $y-1=2(x-1)$,即 $2x-y-1=0$,由$\begin{cases}2x^2-y^2=2,\\ 2x-y-1=0,\end{cases}$得 $2x^2-4x+3=0$,

因为$\Delta=16-4\times3\times2=-8<0$,所以直线 MN 与双曲线 C 无交点,所以不存在被点 B(1,1)平分的弦.

20.解:(1)设直线 l 的方程为 $y=\frac{3}{2}(x-t)$,将其代入抛物线 $y^2=3x$,得 $3x^2-(6t+4)x+3t^2=0$.

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,则 $x_1+x_2=2t+\frac{4}{3},x_1x_2=t^2$,

由抛物线的定义,可得$|AF|+|BF|=x_1+x_2+p=2t+\frac{4}{3}+\frac{3}{2}=4$,解得 $t=\frac{7}{12}$,所以直线 l 的方程为 $y=\frac{3}{2}x-\frac{7}{8}$.

(2)若$\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}$,则 $y_1=-3y_2$,所以$\frac{3}{2}\cdot(x_1-t)=-3\times\frac{3}{2}(x_2-t)$,

化简得 $x_1=-3x_2+4t$,

结合 $x_1+x_2=2t+\frac{4}{3},x_1x_2=t^2$,解得 $t=1,x_1=3,x_2=\frac{1}{3}$,所以$|AB|=\sqrt{1+\frac{9}{4}}\times\sqrt{\left(3+\frac{1}{3}\right)^2-4}=\frac{4\sqrt{13}}{3}$.

21.(1)解:由抛物线的定义,得$|MF|=\frac{p}{2}-(-2)=\frac{5}{2}$,所以 $p=1$,所以抛物线的方程为 $y^2=-2x$.

(2)**证明:**由(1)可知,点 M 的坐标为(-2,2).

设直线 l 的方程为 $x=ky+b$.

因为点 M 不在直线 l 上,所以 $b+2+2k\neq0$.

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,将直线 l 与抛物线联立得$\begin{cases}x=ky+b,\\ y^2=-2x,\end{cases}$化简得 $y^2+2ky+2b=0$,所以 $y_1+y_2=-2k,y_1y_2=2b$,①

又 $k_1+k_2=\frac{y_1-2}{x_1+2}+\frac{y_2-2}{x_2+2}=-2$,

即$(y_1-2)(ky_2+b+2)+(y_2-2)(ky_1+b+2)=-2(ky_1+b+2)(ky_2+b+2)$,化简得$(2k+2k^2)y_1y_2+(b+2+2k+2kb)\cdot(y_1+y_2)+2b^2+4b=0$,

将①代入得,$kb-2k-2k^2+b^2+2b=0$,即$(b-k)(b+2+2k)=0$,得 $b=k$.

当 $b=k$ 时,直线 l 的方程为 $x=k(y+1)$,此时直线 l 恒过点(0,-1).

22.解:(1)由抛物线的性质,可得$\frac{p}{2}=1$,所以 $p=2$,所以抛物线的准线方程为 $x=-1$.

(2)设 $A(x_A,y_A),B(x_B,y_B),C(x_C,y_C)$,重心 $G(x_G,y_G)$.由(1)知抛物线方程为 $y^2=4x$.

令 $y_A=2t,t\neq0$,则 $x_A=t^2$,由于直线 AB 过 F,故直线 AB 的方程为 $x=\frac{t^2-1}{2t}\cdot y+1$,

代入 $y^2=4x$,得 $y^2-\frac{2(t^2-1)}{t}y-4=0$,

所以 $y_A\cdot y_B=2ty_B=-4$,即 $y_B=-\frac{2}{t}$,

所以 $B\left(\frac{1}{t^2},-\frac{2}{t}\right)$,

又 $x_G=\frac{1}{3}(x_A+x_B+x_C),y_G=\frac{1}{3}(y_A+y_B+y_C)$,因为重心 G 在 x 轴上,所以 $2t-\frac{2}{t}+y_C=0$,

所以 $C\left(\left(\frac{1}{t}-t\right)^2,2\left(\frac{1}{t}-t\right)\right)$,$G\left(\frac{2t^4-2t^2+2}{3t^2},0\right)$,所以直线 AC 的方程为 $y-2t=2t(x-t^2)$,得 $Q(t^2-1,0)$,因为 Q 在焦点 F 的右侧,所以 $t^2>2$,

所以$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{1}{2}|FG|\cdot|y_A|}{\frac{1}{2}|QG|\cdot|y_C|}=\frac{\left|\frac{2t^4-5t^2+2}{3t^2}\right|\cdot|2t|}{\left|t^2-1-\frac{2t^4-2t^2+2}{3t^2}\right|\cdot\left|\frac{2}{t}-2t\right|}=\frac{2t^4-t^2}{t^4-1}=2-\frac{t^2-2}{t^4-1}$.

令 $m=t^2-2$,则 $m>0$,$\frac{S_1}{S_2}=2-\frac{m}{m^2+4m+3}=2-\frac{1}{m+\frac{3}{m}+4}\geqslant2-\frac{1}{2\sqrt{m\cdot\frac{3}{m}}+4}=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以当且仅当 $m=\sqrt{3}$ 时,$\frac{S_1}{S_2}$取得最小值,最小值为 $1+\frac{\sqrt{3}}{2}$,此时 G(2,0).