第 16 期

第 2~3 版同步周测参考答案

一、选择题

1~6.DABADC　　7~12.CADBAA

二、填空题

13.256　　14.$\frac{26}{61}$

15.$\frac{3}{64}$　　16.$\left[-\frac{2}{3},+\infty\right)$

三、解答题

17.**解**:(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为d,由$a_4-a_3=2$,得$d=2$,

又由$a_1+a_2=10$,得$a_1+a_2=2a_1+d=10$,

解得$a_1=4$,

所以$a_n=4+(n-1)\cdot 2=2n+2(n\in \mathbf{N}_+)$.

(2)设等比数列$\{b_n\}$的公比为q,

因为$b_2=a_3,b_3=a_7$,

所以$b_2=a_3=8,b_3=a_7=16$,

所以$q=\frac{b_3}{b_2}=2$,则$b_4=b_3\cdot q=32$,

由$2n+2=32$,解得$n=15$,

所以b_4与数列$\{a_n\}$的第15项相等.

18.**解**:(1)设等比数列$\{a_n\}$的公比为q,且$q>0$,

由$a_1=2,a_3=2a_2+16$,得$2q^2=4q+16$,

即$q^2-2q-8=0$,解得$q=-2$(舍去)或$q=4$.

所以$a_n=a_1q^{n-1}=2\times 4^{n-1}=2^{2n-1}$.

(2)$b_n=\log_2 a_n=\log_2 2^{2n-1}=2n-1$,

因为$b_1=1,b_{n+1}-b_n=2(n+1)-1-2n+1=2$,

所以数列$\{b_n\}$是以1为首项,以2为公差的等差数列,则数列$\{b_n\}$的前n项和$T_n=n\times 1+\frac{n(n-1)\times 2}{2}=n^2$.

19.**解**:(1)数列$\{a_{n+1}-a_n\}$是首项为$\frac{1}{4}$,公比为$\frac{1}{2}$的等比数列,$a_1=1$,

可得$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$,

即有$a_n=a_1+(a_2-a_1)+\cdots+(a_n-a_{n-1})=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2^n}$.

(2)$(3n-1)\cdot a_n=\frac{3}{2}(3n-1)-(3n-1)\cdot\frac{1}{2^n}$,

前n项和$S_n=\frac{3}{2}(2+5+\cdots+3n-1)-\left[2\cdot\frac{1}{2}+5\cdot\frac{1}{4}+\cdots+(3n-1)\cdot\frac{1}{2^n}\right]$,

设$P_n=\frac{3}{2}(2+5+\cdots+3n-1)$,

则$P_n=\frac{3}{2}\cdot\frac{n(2+3n-1)}{2}=\frac{3n}{4}(3n+1)$.

设$T_n=2\cdot\frac{1}{2}+5\cdot\frac{1}{4}+\cdots+(3n-1)\cdot\frac{1}{2^n}$,

$\frac{1}{2}T_n=2\cdot\frac{1}{4}+5\cdot\frac{1}{8}+\cdots+(3n-1)\cdot\frac{1}{2^{n+1}}$,

两式相减,得$\frac{1}{2}T_n=1+3\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)-(3n-1)\cdot\frac{1}{2^{n+1}}$

$=1+3\cdot\frac{\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{2}}-(3n-1)\cdot\frac{1}{2^{n+1}}$,

化简可得$T_n=5-(3n+5)\cdot\frac{1}{2^n}$,

则$S_n=\frac{3n}{4}(3n+1)+5-(3n+5)\cdot\frac{1}{2^n}$.

20.(1)**解**:正项数列$\{a_n\}$首项为2,其前n项和为S_n,

满足$2S_n-S_{n-1}=4(n\in\mathbf{N}_+,n\geqslant 2)$.

由$2S_2-S_1=4$,得$2(2+a_2)-2=4$,

解得$a_2=1$.

由$2S_3-S_2=4$,得$2(2+1+a_3)-(2+1)=4$,

解得$a_3=\frac{1}{2}$.

(2)**解**:由$2S_n-S_{n-1}=4$,

得$2S_{n-1}-S_{n-2}=4(n\in\mathbf{N}_+,n\geqslant 3)$,

两式相减,得$a_n=\frac{1}{2}a_{n-1}(n\in\mathbf{N}_+,n\geqslant 3)$,

又$a_2=\frac{1}{2}a_1$,

所以数列$\{a_n\}$是首项为2,公比为$\frac{1}{2}$的等比数列.

故$a_n=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2},n\in\mathbf{N}_+$.

(3)**证明**:因为$b_n=\frac{1}{2-\log_2 a_n}=\frac{1}{2-(2-n)}=\frac{1}{n}$,

所以$b_nb_{n+2}=\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$.

前n项和为$T_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)<\frac{3}{4}$.

21.**解**:(1)根据题意,因为$a_3=5,a_1,a_2,a_5$成等比数列,所以$\begin{cases}a_1+2d=5,\\(a_1+d)^2=a_1(a_1+4d),\end{cases}$

解得$a_1=1,d=2$,所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2n-1$.

(2)因为$b_n=\frac{1}{a_n^2+4n-2}=\frac{1}{(2n-1)^2+4n-2}$

$=\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$,

所以$S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$.

依题意,对任意正整数n,不等式$1-\frac{1}{2n+1}+(-1)^{n+1}a>0$恒成立,

当n为奇数时,$1-\frac{1}{2n+1}+(-1)^{n+1}a>0$,

即$a>-1+\frac{1}{2n+1}$,所以$a>-\frac{2}{3}$;

当n为偶数时,$1-\frac{1}{2n+1}+(-1)^{n+1}a>0$,

即$a<1-\frac{1}{2n+1}$,所以$a<\frac{4}{5}$.

所以实数a的取值范围是$\left(-\frac{2}{3},\frac{4}{5}\right)$.

22.(1)**证明**:因为数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,且$S_n=4-a_n-\frac{1}{2^{n-2}}(n\in\mathbf{N}_+)$,

所以当$n=1$时,$a_1=S_1=4-a_1-\frac{1}{2^{-1}}$,

解得$a_1=1$;

当$n\geqslant 2$时,$S_{n-1}=4-a_{n-1}-\frac{1}{2^{n-3}}$,

则$a_n=S_n-S_{n-1}=a_{n-1}-a_n+\frac{1}{2^{n-2}}$,

即$2a_n=a_{n-1}+\frac{1}{2^{n-2}}$,

故$2^{n-1}\cdot a_n=2^{n-2}\cdot a_{n-1}+1$,

即$2^{n-1}\cdot a_n-2^{n-2}\cdot a_{n-1}=1$,因为$b_n=2^{n-1}\cdot a_n$,

所以$\{b_n\}$是以1为首项,以1为公差的等差数列.所以$b_n=n$.

(2)**解**:由(1)知,$(n+1)\left(b_n+\frac{8}{b_n}\right)\leqslant(n+1)\lambda\leqslant b_{n+1}+\frac{36}{b_{n+1}}\Leftrightarrow n+\frac{8}{n}\leqslant\lambda\leqslant 1+\frac{36}{(n+1)^2}$,

根据对勾函数的性质,可得$n+\frac{8}{n}$在$n=3$时取最小值$\frac{17}{3}$.

由反比例函数的性质,可得$1+\frac{36}{(n+1)^2}$在$n=1$时取最大值10.

当$n=1$时,$9\leqslant\lambda\leqslant 10$;当$n=2$时,$6\leqslant\lambda\leqslant 5$,不存在满足条件的$\lambda$值;

当$n=3$时,$\frac{17}{3}\leqslant\lambda\leqslant\frac{13}{4}$,不存在满足条件的$\lambda$值;当$n\geqslant 4$时,不存在满足条件的$\lambda$值.

综上,存在$n=1$,使不等式成立,λ的取值范围是$[9,10]$.

第13期

第 2~3 版同步周测参考答案

一、选择题

1~6.BCDDAB　　7~12.DCDCAC

二、填空题

13.0　　14.$2\sqrt{3}$

15.$\overrightarrow{AG}$　　16.$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

三、解答题

17.**解**:(1)由$A(-1,4),B(-4,1)$,得$\overrightarrow{AB}=(-3,-3)$.点$C$在直线$x=1$上,设$C$的坐标为$(1,y)$,则$\overrightarrow{AC}=(2,y-4)$,因为$A$、$B$、$C$三点共线,所以$\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{AC}$,所以$-3\times 2=-3\times(y-4)$,所以$y=6$.所以点C的坐标为$(1,6)$.

(2)设点C的坐标为$(1,y)$,点D的坐标为(m,n),则$\overrightarrow{AB}=(-3,-3)$,$\overrightarrow{BC}=(5,y-1)$,$\overrightarrow{DC}=(1-m,y-n)$,

若四边形$ABCD$是矩形,

则$\begin{cases}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC},\\\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\end{cases}$

所以$\begin{cases}1-m=-3,\\y-n=-3,\\-3\times 5=3\times(y-1),\end{cases}$

所以$\begin{cases}m=4,\\n=-1,\\y=-4,\end{cases}$

所以C的坐标为$(1,-4)$,D的坐标为$(4,-1)$.

18.**解**:(1)因为$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$,所以$3x-36=0$,所以$x=12$,所以$\boldsymbol{b}=(9,12)$.

因为$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$,所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=12+4y=0$,

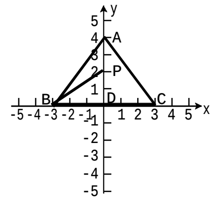
所以$y=-3$,所以$\boldsymbol{c}=(4,-3)$.

(2)$\boldsymbol{m}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-3,-4)$,$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}=(7,1)$,所以$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=-25$,$|\boldsymbol{m}|=5$,$|\boldsymbol{n}|=5\sqrt{2}$.设$\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}$的夹角为$\theta$,则$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,因为$\theta\in[0,\pi]$,所以$\theta=\frac{3\pi}{4}$,即向量$\boldsymbol{m}$与$\boldsymbol{n}$的夹角为$\frac{3\pi}{4}$.

19.**解**:(1)因为$\overrightarrow{BP}=\sin^2\theta\cdot\overrightarrow{BA}+\cos^2\theta\cdot\overrightarrow{BD}$,又$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$,所以$A,P,D$三点共线,又$\sin^2\theta,\cos^2\theta\in[0,1]$,所以$P$在线段$AD$上.因为$D$为$BC$的中点,设$|PD|=x$,则$|AP|=4-x,x\in[0,4]$,所以$(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})\cdot\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{AP}=2x(4-x)=-2x^2+8x=-2(x-2)^2+8$,所以当$x=2$时,$(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})\cdot\overrightarrow{AP}$取最大值,最大值为8.

(2)因为$\triangle ABC$为等腰三角形,且AD为底边的中线,

所以以D为坐标原点,DC,DA所在直线分别为x,y轴建立如图所示的平面直角坐标系,由(1)可得$P(0,2)$,又$|\overrightarrow{BD}|^2=5^2-4^2=9$,所以$B(-3,0),C(3,0)$,所以$\overrightarrow{PB}=(-3,-2)$,$\overrightarrow{PC}=(3,-2)$,所以$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=-9+4=-5$.



(第 19 题图)

20.**解**:(1)$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x-\cos^2\omega x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\omega x-\frac{1+\cos 2\omega x}{2}=\sin\left(2\omega x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}$,所以$f(x)=\sin\left(2\omega x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}$.

(2)因为$f(x)$的最小正周期为$\frac{\pi}{2}$,

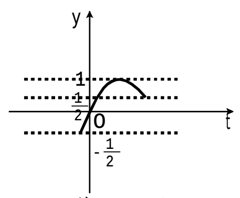
所以$\frac{2\pi}{2\omega}=\frac{\pi}{2}$,所以$\omega=2$.

(3)$f(x)=\sin\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}$.根据题意,方程$a=\sin\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}$在$x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$上只有一个解,

即方程$a+\frac{1}{2}=\sin\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)$在$x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$上只有一个解.

令$4x-\frac{\pi}{6}=t,t\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$,

所以直线$y=a+\frac{1}{2}$和$y=\sin t$在$t\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$只有一个交点,如图所示:



(第 20 题图)

根据图象看出$y=1,-\frac{1}{2}\leqslant y<\frac{1}{2}$都和$y=\sin t$在$\left[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$上只有一个交点.

故$a=\frac{1}{2}$,或$a\in[-1,0)$时,直线$y=a$和函数$y=f(x),x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$的图象只有一个交点.

21.**解**:(1)因为$\frac{AB}{AC}=\frac{DB}{DC}=\frac{1}{2}$,即$\overrightarrow{BD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$,所以$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.所以$\overrightarrow{AD}\cdot(2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=\frac{1}{3}(2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=\frac{1}{3}(4|\overrightarrow{AB}|^2-|\overrightarrow{AC}|^2)=0$.

(2)因为点E为BC的中点,设$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$的夹角为θ,所以$\frac{1}{|\overrightarrow{AE}|^2}+\frac{1}{|\overrightarrow{BC}|^2}=\frac{4}{(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})^2}+\frac{1}{(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})^2}=\frac{4}{5+4\cos\theta}+\frac{1}{5-4\cos\theta}=\frac{1}{10}(5+4\cos\theta+5-4\cos\theta)\left(\frac{4}{5+4\cos\theta}+\frac{1}{5-4\cos\theta}\right)=\frac{1}{10}\left[5+\frac{5+4\cos\theta}{5-4\cos\theta}+\frac{4(5-4\cos\theta)}{5+4\cos\theta}\right]\geqslant\frac{1}{10}\times(5+4)=\frac{9}{10}$.

当且仅当$5+4\cos\theta=2(5-4\cos\theta)$,即$\cos\theta=\frac{5}{12}$时取等号.

此时$\triangle ABC$的面积$S=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin\theta=\frac{1}{2}\times 1\times 2\times\sqrt{1-\left(\frac{5}{12}\right)^2}=\frac{\sqrt{119}}{12}$.

22.**证明**:(1)设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,则$\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{3}=1,\frac{x_2^2}{4}+\frac{y_2^2}{3}=1$.

两式相减,并由$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=k$得$\frac{x_1+x_2}{4}+\frac{y_1+y_2}{3}\cdot k=0$.

由题设知$\frac{x_1+x_2}{2}=1,\frac{y_1+y_2}{2}=m$,于是$k=-\frac{3}{4m}$.①

在椭圆C中,当$x=1$时,$y=\pm\frac{3}{2}$,

所以$0<m<\frac{3}{2}$,故$k<-\frac{1}{2}$.

(2)由题意得$F(1,0)$.设$P(x_3,y_3)$,则$\overrightarrow{FP}=(x_3-1,y_3)$,$\overrightarrow{FA}=(x_1-1,y_1)$,$\overrightarrow{FB}=(x_2-1,y_2)$,由$\overrightarrow{FP}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}=\mathbf{0}$,得$(x_3-1,y_3)+(x_1-1,y_1)+(x_2-1,y_2)=(0,0)$.由(1)及题设得$x_3=3-(x_1+x_2)=1$,$y_3=-(y_1+y_2)=-2m<0$.又点$P$在$C$上,所以$m=\frac{3}{4}$,从而$P\left(1,-\frac{3}{2}\right)$,$|\overrightarrow{FP}|=\frac{3}{2}$.于是$|\overrightarrow{FA}|=\sqrt{(x_1-1)^2+y_1^2}=\sqrt{(x_1-1)^2+3\left(1-\frac{x_1^2}{4}\right)}=2-\frac{x_1}{2}$.

同理,$|\overrightarrow{FB}|=2-\frac{x_2}{2}$.所以$|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|=4-\frac{1}{2}(x_1+x_2)=3$.故$2|\overrightarrow{FP}|=|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|$.

④ **第14期**

第2~3版同步周测参考答案

一、选择题

1~6.DBBCBD　7~12.BACCAD

二、填空题

13.$-\frac{4}{3}$　14.$\frac{56}{65}$

15.$\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$　16.$-\frac{3\pi}{4}$

三、解答题

17.解:

(1)$\frac{\tan150°\cos(-210°)\sin(-420°)}{\sin1050°\cos(-600°)}$

$=\frac{(-\tan30°)(-\cos30°)(-\sin60°)}{(-\sin30°)(-\cos60°)}$

$=-\frac{\frac{\sqrt3}{3}\times\frac{\sqrt3}{2}\times\frac{\sqrt3}{2}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}$

$=-\sqrt3$.

(2)$\frac{\cos40°+\sin50°(1+\sqrt3\tan10°)}{\sin70°\sqrt{1+\cos40°}}$

$=\frac{\cos40°+\sin50°\left(\frac{\cos10°+\sqrt3\sin10°}{\cos10°}\right)}{\sin70°\sqrt{1+\cos40°}}$

$=\frac{\cos40°+\frac{2\sin40°\cos40°}{\cos10°}}{\sin70°\sqrt{1+\cos40°}}$

$=\frac{\cos40°+1}{\sin70°\sqrt{1+\cos40°}}$

$=\frac{2\cos^220°-1+1}{\cos20°\sqrt{1+2\cos^220°-1}}$

$=\frac{2\cos^220°}{\sqrt2\cos^220°}=\sqrt2$.

18.解:(1)由已知得 $\pi=\frac{2\pi}{\omega}$,解得 $\omega=2$.将点$\left(\frac{\pi}{4},\sqrt2\right)$代入解析式,得 $\sqrt2=2\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)$,所以 $\cos\varphi=\frac{\sqrt2}{2}$,由 $0<\varphi<\pi$,可知 $\varphi=\frac{\pi}{4}$,于是 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$.

令 $2x+\frac{\pi}{4}=k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$,所以 $x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8}(k\in\mathbf{Z})$,于是函数 $f(x)$ 图象的对称中心为$\left(\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8},0\right)(k\in\mathbf{Z})$.

(2)令 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant2x+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$,所以 $-\frac{3\pi}{8}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{8}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$,于是函数 $f(x)$ 的单调递增区间为$\left[-\frac{3\pi}{8}+k\pi,\frac{\pi}{8}+k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$.

19.解:(1)由 $f(x)=\sin x$,

得 $f(x+\theta)=\sin(x+\theta)$.

因为 $f(x+\theta)$ 为偶函数,

所以 $\theta=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

因为 $\theta\in[0,2\pi)$,

所以 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 或 $\theta=\frac{3\pi}{2}$.

(2)$y=\left[f\left(x+\frac{\pi}{12}\right)\right]^2+\left[f\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]^2$

$=\sin^2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)+\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$=\frac{1-\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)}{2}+\frac{1-\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)}{2}$

$=1-\frac{1}{2}\left(\cos2x\cos\frac{\pi}{6}-\sin2x\sin\frac{\pi}{6}-\sin2x\right)$

$=\frac{3}{4}\sin2x-\frac{\sqrt3}{4}\cos2x+1$

$=\frac{\sqrt3}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+1$.

因为 $x\in\mathbf{R}$,

所以 $\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\in[-1,1]$,

所以 $y=\frac{\sqrt3}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+1\in\left[1-\frac{\sqrt3}{2},1+\frac{\sqrt3}{2}\right]$,

所以函数 $y=\left[f\left(x+\frac{\pi}{12}\right)\right]^2+\left[f\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]^2$ 的值域为$\left[1-\frac{\sqrt3}{2},1+\frac{\sqrt3}{2}\right]$.

20.解:(1)$f(x)=2\sin(\pi-x)\cos x+2\cos^2x-1=2\sin x\cos x+\cos2x=\sin2x+\cos2x$

$=\sqrt2\left(\frac{\sqrt2}{2}\sin2x+\frac{\sqrt2}{2}\cos2x\right)$

$=\sqrt2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$,

所以最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

(2)因为 $x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$,

所以 $2x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,

$2x+\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$.

所以当 $2x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}$,即 $x=-\frac{\pi}{4}$ 时,

$\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$有最小值 $-\frac{\sqrt2}{2}$,所以 $f(x)$ 有最小值 -1.因为当 $x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ 时,$f(x)\geqslant m$ 恒成立,所以 $m\leqslant-1$,即 m 的取值范围是$(-\infty,-1]$.

21.解:(1)设水轮上圆心 O 正右侧的点为 A,y 轴与水面交点为 B,

因为 $OB=1$,$OP_0=2$,所以 $\angle BOP_0=\frac{\pi}{3}$,

故 $\angle AOP_0=\frac{\pi}{6}$.

设 $h=2\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{6}\right)+1$,则 $T=\frac{2\pi}{\omega}=3$,

所以 $\omega=\frac{2\pi}{3}$,

所以 $h=2\sin\left(\frac{2\pi}{3}t-\frac{\pi}{6}\right)+1(t\geqslant0)$.

(2)令 $\sin\left(\frac{2\pi}{3}t-\frac{\pi}{6}\right)=1$,

可得 $\frac{2\pi}{3}t-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{N}$,

故 $t=1+3k,k\in\mathbf{N}$,所以当 $k=0$ 时,$t=1$,故点 P 第一次到达最高点大约要1秒.

22.解:$f(\theta)=4\cos^2\theta-4\cos\theta+3\sin^2\theta=\cos^2\theta-4\cos\theta+3$,$g(\theta)=m\cdot\cos\theta$.

(1)对任意的 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$,若 $f(\theta)\geqslant g(\theta)$,即 $\cos^2\theta-4\cos\theta+3\geqslant m\cos\theta$,$\cos\theta\in(0,1]$,

所以 $\cos\theta+\frac{3}{\cos\theta}-4\geqslant m$,设 $\cos\theta=t$,$t\in(0,1]$,则 $h(t)=t+\frac{3}{t}-4$ 在$(0,1]$上是减函数,

所以函数 $h(t)=t+\frac{3}{t}-4$ 在$(0,1]$上的最小值为 $h(1)=0$,

所以对任意的 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$,若 $f(\theta)\geqslant g(\theta)$ 恒成立,则 $m\leqslant0$,所以 m 的取值范围为$(-\infty,0]$.

(2)对 $\theta\in[-\pi,\pi]$,$f(\theta)=g(\theta)$ 有两个不等实根,即 $\cos^2\theta-4\cos\theta+3=m\cos\theta$ 有两个不等实根,$\cos\theta\in[-1,1]$.当 $\cos\theta=0$ 时,上述方程不成立,所以 $\cos\theta\neq0$,所以两边同除以 $\cos\theta$,得 $\cos\theta+\frac{3}{\cos\theta}-4=m$ 有两个不等实根,设 $\cos\theta=t$,$t\in[-1,0)\cup(0,1]$,则 $F(t)=t+\frac{3}{t}-4$ 与 $y=m$ 在$[-1,0)$和$(0,1]$上有交点,并且此函数在两个区间上是减函数,又函数 $F(t)=t+\frac{3}{t}-4$ 在$(0,1]$上的最小值为 $F(1)=0$,在$[-1,0)$的最大值为 $F(-1)=-8$,所以要使对 $\theta\in[-\pi,\pi]$,$f(\theta)=g(\theta)$ 有两个不等实根的 m 的取值范围为$(-\infty,-8]\cup[0,+\infty)$.

第15期

第2~3版同步周测参考答案

一、选择题

1~6.BDBDCA　7~12.DAACAD

二、填空题

13.75°或15°　14.$\frac{3\sqrt2}{4}$

15.54　16.$\frac{\sqrt{13}}{2}$

三、解答题

17.解:(1)因为 $a=3$,$b-c=2$,$\cos B=-\frac{1}{2}$,所以由余弦定理,得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=9+(b-2)^2-2\times3\times(b-2)\times\left(-\frac{1}{2}\right)$,

所以 $b=7$,所以 $c=b-2=5$.

(2)在△ABC中,因为 $\cos B=-\frac{1}{2}$,所以 $\sin B=\frac{\sqrt3}{2}$.由正弦定理,得 $\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}$,所以 $\sin C=\frac{c\sin B}{b}=\frac{5\times\frac{\sqrt3}{2}}{7}=\frac{5\sqrt3}{14}$.因为 $b>c$,所以 $B>C$,所以 C 为锐角,所以 $\cos C=\frac{11}{14}$,所以 $\sin(B-C)=\sin B\cos C-\cos B\sin C=\frac{\sqrt3}{2}\times\frac{11}{14}-\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{5\sqrt3}{14}=\frac{4\sqrt3}{7}$.

18.解:(1)因为 $a=3c$,$b=\sqrt2$,$\cos B=\frac{2}{3}$,所以由余弦定理,得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{10c^2-2}{6c^2}=\frac{2}{3}$,解得 $c=\frac{\sqrt3}{3}$.

(2)因为 $\frac{\sin A}{a}=\frac{\cos B}{2b}$,所以由正弦定理,得 $\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\cos B}{2b}$,所以 $2\sin B=\cos B$,因为 $\sin^2B+\cos^2B=1$,所以 $\sin B=\frac{\sqrt5}{5}$,$\cos B=\frac{2\sqrt5}{5}$,所以 $\sin\left(B+\frac{\pi}{2}\right)=\cos B=\frac{2\sqrt5}{5}$.

19.解:(1)因为 $(\sin B-\sin C)^2=\sin^2A-\sin B\sin C$,

则 $\sin^2B+\sin^2C-2\sin B\sin C=\sin^2A-\sin B\sin C$,

所以由正弦定理,得 $b^2+c^2-a^2=bc$,

所以 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$,

因为 $0<A<\pi$,所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

(2)因为 $\sqrt2a+b=2c$,$A=\frac{\pi}{3}$,

所以由正弦定理,得 $\sqrt2\sin A+\sin B=2\sin C$,

所以 $\frac{\sqrt6}{2}+\sin\left(\frac{2\pi}{3}-C\right)=2\sin C$,

所以 $\sin\left(C-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt2}{2}$,

又 $0<C<\frac{2}{3}\pi$,所以 $-\frac{\pi}{6}<C-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}$,

所以 $C-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{4}$,$C=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}$,

所以 $\sin C=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt2}{2}\times\frac{\sqrt3}{2}+\frac{\sqrt2}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}$.

20.解:(1)如图所示,过点 O 作 $OH\perp AB$,垂足为 H.在Rt△OHA中,$OA=20$,$\angle OAH=\alpha$,所以 $AH=20\cos\alpha$,因此 $AB=2AH=40\cos\alpha$.

(2)由图可知,点 P 处的观众离点 O 最远.连接OP.

在△OAP中,由余弦定理,得

$OP^2=OA^2+AP^2-2OA\cdot AP\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)$

$=400+(40\cos\alpha)^2-2\times20\times40\cos\alpha\left(-\frac{1}{2}\cdot\cos\alpha-\frac{\sqrt3}{2}\sin\alpha\right)$

$=400(6\cos^2\alpha+2\sqrt3\sin\alpha\cos\alpha+1)$

$=400(3\cos2\alpha+\sqrt3\sin2\alpha+4)$

$=800\sqrt3\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)+1600$.

因为 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$,

所以 $2\alpha+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{3},\pi\right)$,

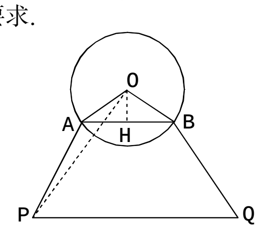
所以当 $2\alpha+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$,即 $\alpha=\frac{\pi}{12}$ 时,

$(OP^2)_{\max}=800\sqrt3+1600$,

又 $(OP^2)_{\max}=800\sqrt3+1600<3600$,

所以 $(OP)_{\max}<60$,所以观众席内每一个观众到舞台 O 处的距离都不超过60米.

故对于任意 α,上述设计方案均能符合要求.



(第20题图)

21.解:(1)因为 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt3}{2}$,

所以 $bc\sin A=\sqrt3$.

因为 $bc\cos A+1=\frac{\sqrt3\cos A}{\sin A}+1=0$,

解得 $\tan A=-\sqrt3$.

因为 $0<A<\pi$,所以 $A=\frac{2\pi}{3}$.

(2)由(1)知,

$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}bc\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt3}{2}$,

所以 $bc=2$.

在△ABC中,因为 M 为 BC 的中点,

所以 $2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

因为 $AM=\frac{\sqrt3}{2}$,

所以 $3=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})^2=b^2+c^2+2bc\cdot\cos\frac{2\pi}{3}=b^2+c^2-2$,所以 $b^2+c^2=5$.

又 $bc=2$,解得 $\begin{cases}c=2,\\b=1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}c=1,\\b=2.\end{cases}$

由余弦定理,得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=7$,

所以 $a=\sqrt7$,所以 $BM=\frac{\sqrt7}{2}$.

因为 AN 为∠BAC的角平分线,

$S_{\triangle ABN}=\frac{1}{2}AB\cdot AN\sin\frac{\pi}{3}$,

$S_{\triangle CAN}=\frac{1}{2}AC\cdot AN\sin\frac{\pi}{3}$,

所以 $\frac{S_{\triangle ABN}}{S_{\triangle CAN}}=\frac{c}{b}=\frac{BN}{CN}=\frac{1}{2}$,或 $\frac{BN}{CN}=2$,

所以 $BN=\frac{\sqrt7}{3}$ 或 $\frac{2\sqrt7}{3}$,

所以 $MN=|BM-BN|=\frac{\sqrt7}{6}$.

22.解:(1)连接AC,在△ABC中,$AB=2$,$BC=4$,$B=120°$,

所以由余弦定理,得

$AC=\sqrt{AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos B}=2\sqrt7$.

在△ACD中,$AC=2\sqrt7$,$CD=5$,$\cos D=\frac{1}{5}$,

所以由余弦定理,得

$\sqrt{AD^2+CD^2-2AD\cdot CD\cdot\cos D}=AC$,

即 $\sqrt{AD^2+5^2-2AD}=2\sqrt7$,

解得 $AD=3$.

(2)在△ABC中,由余弦定理,得 $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos B=20-16\cos B$.

在△ACD中,由余弦定理,得 $AC^2=AD^2+DC^2-2AD\cdot DC\cdot\cos D=34-30\cos D$.

所以 $20-16\cos B=34-30\cos D$,

即 $15\cos D-8\cos B=7$,

而面积 $S=\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin B+\frac{1}{2}AD\cdot CD\cdot\sin D=\frac{1}{2}(15\sin D+8\sin B)$,

所以 $4S^2+49=225+64-240\cos(B+D)$,

即 $S^2=60-60\cos(B+D)$,

所以 $S^2=60-60\cos(B+D)\leqslant120$,

所以当 $B+D=\pi$ 时,即 $\cos D=\frac{7}{23}$,$\cos B=-\frac{7}{23}$ 时,四边形 $ABCD$ 面积的最大值为 $2\sqrt{30}$.