第 8 期

第 2~3 版同步周测参考答案

一、选择题

1~6.BACCAA　7~12.ACBBBC

二、填空题

13.-e　14.ln101　15.$\ln\frac{32}{27}$

16.$\left[\frac{2}{e-2},+\infty\right)$

提示:当 $x>0$ 时,$f(x)=\frac{e^2x^2+1}{x}=e^2x+\frac{1}{x}\geqslant 2\sqrt{e^2x\cdot\frac{1}{x}}=2e$,当且仅当 $x=\frac{1}{e}$ 时取等号,所以当 $x\in(0,+\infty)$ 时,函数 $f(x)$ 有最小值 2e.因为 $g(x)=\frac{e^2x^2}{e^x}$,所以 $g'(x)=\frac{e^2(2xe^x-x^2e^x)}{e^{2x}}=-\frac{e^2x(x-2)}{e^x}$.当 $0<x<2$ 时,$g'(x)>0$,则函数 $g(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递增;当 $x>2$ 时,$g'(x)<0$,则函数 $g(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递减,所以当 $x=2$ 时,函数 $g(x)$ 有最大值 $g(2)=4$,则当 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ 时,$[f(x_2)]_{min}=2e>[g(x_1)]_{max}=4$.因为 $\frac{g(x_1)}{k}\leqslant\frac{f(x_2)}{k+1}$ 恒成立,且 $k>0$,所以 $\frac{k}{k+1}\geqslant\frac{4}{2e}$,所以 $k\geqslant\frac{2}{e-2}$.

三、解答题

17.(1)**解**:因为 $f(x)=a\ln x+\frac{2}{\sqrt{x}}(x>1)$,

所以 $f'(x)=\frac{a}{x}-\frac{1}{x\sqrt{x}}=\frac{a\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}}$.

要使 $f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上不单调,

则 $f'(x)=0$ 在 $(1,+\infty)$ 上有解,

即 $a=\frac{1}{\sqrt{x}}$ 在 $(1,+\infty)$ 上有解,

所以 $0<a<1$,

所以实数 a 的取值范围是 $(0,1)$.

(2)**证明**:当 $a=1$ 时,要证明 $f(x)<\frac{x^2}{2}-x+3$,即证 $g(x)=\ln x+\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{x^2}{2}+x-3<0$.

$g'(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}}-(x-1)=\frac{(\sqrt{x}-1)(1-x^2-x\sqrt{x})}{x\sqrt{x}}$,

因为 $x>1$,所以 $\sqrt{x}-1>0$,$1-x^2-x\sqrt{x}<0$,所以 $g'(x)<0$,则 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减,所以 $g(x)<g(1)=-\frac{1}{2}<0$.故 $f(x)<\frac{x^2}{2}-x+3$.

18.**解**:(1)改进工艺后,每件纪念品的销售价为 $20(1+x)$ 元,月平均销售量为 $a(1-x^2)$ 件,月平均利润 $y=a(1-x^2)[20(1+x)-15]=5a(-4x^3-x^2+4x+1)(0<x<1)$.

(2)$y'=5a(-12x^2-2x+4)=-10a(2x-1)\cdot(3x+2)(0<x<1)$,

令 $y'=0$,得 $x=\frac{1}{2}$ 或 $x=-\frac{2}{3}$(舍去).

当 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 时,$y'>0$;

当 $x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ 时,$y'<0$.

当 $x=\frac{1}{2}$ 时,y 有最大值,此时销售价为 30 元.所以改进工艺后,该纪念品的销售价为 30 元时,使得旅游部门销售纪念品的月平均利润最大.

19.**解**:(1)因为 $f'(x)=-\frac{m}{e^x}+n$,

所以 $f'(0)=n-m$,即 $n-m=-3$.

又 $f(0)=m$,故切点坐标是 $(0,m)$,因为切点在直线 $y=-3x+2$ 上,所以 $m=2,n=-1$.

(2)因为 $f(x)=\frac{m}{e^x}+x$,所以 $f'(x)=\frac{e^x-m}{e^x}$.当 $m\leqslant 0$ 时,$f'(x)>0$,故函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增,令 $x_0=a<0$,此时 $f(x_0)<0$,符合题意.

当 $m>0$ 时,函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln m)$ 上单调递减,在 $(\ln m,+\infty)$ 上单调递增.①当 $\ln m<1$,即 $0<m<e$ 时,则函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln m)$ 上单调递减,在 $(\ln m,1]$ 上单调递增,$[f(x)]_{min}=f(\ln m)=\ln m+1<0$,解得 $0<m<\frac{1}{e}$.②当 $\ln m\geqslant 1$,即 $m\geqslant e$ 时,函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,1)$ 上单调递减,则函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,1)$ 上的最小值是 $f(1)=\frac{m}{e}+1<0$,解得 $m<-e$,无解.

综上,实数 m 的取值范围是 $\left(-\infty,\frac{1}{e}\right)$.

20.(1)**证明**:由 $h(x)=f(x)-g(x)=e^x-1-\sqrt{x}-x$,得 $h(1)=e-3<0$,$h(2)=e^2-3-\sqrt{2}>0$,所以函数 $h(x)$ 在区间 $(1,2)$ 上有零点.

(2)**解**:由(1)得 $h(x)=e^x-1-\sqrt{x}-x$.

由 $g(x)=\sqrt{x}+x$,知 $x\in[0,+\infty)$,而 $h(0)=0$,则 $x=0$ 为 $h(x)$ 的一个零点,又 $h(x)$ 在 $(1,2)$ 内有零点,因此 $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上至少有两个零点.因为 $h'(x)=e^x-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}-1$,记 $\varphi(x)=e^x-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}-1$,则 $\varphi'(x)=e^x+\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$.当 $x\in(0,+\infty)$ 时,$\varphi'(x)>0$,因此 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,则 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内至多只有一个零点,即 $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 至多有两个零点.所以 $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有两个零点,所以方程 $f(x)=g(x)$ 的根的个数为 2.

21.(1)**解**:$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,

$f'(x)=-\frac{1}{x^2}-1+\frac{a}{x}=-\frac{x^2-ax+1}{x^2}$.

令 $g(x)=x^2-ax+1$,显然当 $a\leqslant 0$ 时,$g(x)>0$,

即 $f'(x)<0$ 恒成立,此时函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减;

当 $a>0$ 时,令 $g(x)=0$,则 $\Delta=a^2-4$.

(i)若 $0<a\leqslant 2$ 时,$\Delta\leqslant 0$,即 $g(x)\geqslant 0$,所以 $f'(x)\leqslant 0$,此时 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减.

(ii)若 $a>2$,令 $g(x)=0$,

得 $x=\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}$,或 $x=\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$.

当 $x\in\left(0,\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)\cup\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2},+\infty\right)$ 时,$f'(x)<0$;

当 $x\in\left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$ 时,$f'(x)>0$.

所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$,$\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2},+\infty\right)$ 单调递减,在 $\left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$ 单调递增.

综上,当 $a\leqslant 2$ 时,$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减;当 $a>2$ 时,$f(x)$ 在 $\left(0,\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$,$\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2},+\infty\right)$ 单调递减,在 $\left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$ 单调递增.

(2)**证明**:由(1)知,$f(x)$ 存在两个极值点当且仅当 $a>2$.

因为 $f(x)$ 的两个极值点 x_1,x_2 满足 $x^2-ax+1=0$,所以 $x_1x_2=1$,不妨设 $x_1<x_2$,则 $x_2>1$.

因为 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=-\frac{1}{x_1x_2}-1+a\cdot\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}=-2+a\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}=-2+a\frac{-2\ln x_2}{\frac{1}{x_2}-x_2}$,

所以 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<a-2$ 等价于 $\frac{1}{x_2}-x_2+2\ln x_2<0$.

设函数 $h(x)=\frac{1}{x}-x+2\ln x$,由(1)知,$h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减,

又 $h(1)=0$,从而当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$h(x)<0$.所以 $\frac{1}{x_2}-x_2+2\ln x_2<0$,即 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<a-2$.

22.(1)**证明**:由题意知 $f(x)=a(x-1)+x\ln x+1$,所以 $f'(x)=a+1+\ln x$.

令 $f'(x)=a+1+\ln x=0$,得 $x=e^{-(a+1)}$.

显然,$x\in(0,e^{-(a+1)})$ 时,$f'(x)<0$,函数 $f(x)$ 单调递减;$x\in(e^{-(a+1)},+\infty)$ 时,$f'(x)>0$,函数 $f(x)$ 单调递增.

所以 $[f(x)]_{min}=f(e^{-(a+1)})=1-a-e^{-(a+1)}$.

令 $t(a)=[f(x)]_{min}$,则由 $t'(a)=-1+e^{-(a+1)}=0$,得 $a=-1$,当 $a\in(-\infty,-1)$ 时,$t'(a)>0$,函数 $t(a)$ 单调递增;$a\in(-1,+\infty)$ 时,$t'(a)<0$,函数 $t(a)$ 单调递减.

所以 $[t(a)]_{max}=t(-1)=1+1-1=1$,即结论成立.

(2)**解**:假设存在满足条件的整数 k,由题设化简可得 $k<\frac{x+x\ln x}{x-2}$,令 $h(x)=\frac{x+x\ln x}{x-2}$,

则 $h'(x)=\frac{x-4-2\ln x}{(x-2)^2}$.

令 $g(x)=x-4-2\ln x$.

又 $g'(x)=1-\frac{2}{x}$,所以 $x>2$ 时,$g'(x)>0$,$g(x)$ 单调递增,

因为 $g(8)=4-2\ln 8=\ln e^4-\ln 8^2<0$,$g(9)=5-2\ln 9=\ln e^5-\ln 9^2>0$,

设 $x-4-2\ln x=0$ 并记其零点为 x_0,故 $8<x_0<9$,且 $\ln x_0=\frac{x_0-4}{2}$.

所以当 $2<x<x_0$ 时,$g(x)<0$,即 $h'(x)<0$,$h(x)$ 单调递减;

当 $x>x_0$ 时,$g(x)>0$,即 $h'(x)>0$,$h(x)$ 单调递增.

所以 $[h(x)]_{min}=h(x_0)=\frac{x_0+x_0\cdot\frac{x_0-4}{2}}{x_0-2}=\frac{x_0}{2}$,

因此 $k<\frac{x_0}{2}$,由于 $k\in\mathbf{Z}$ 且 $8<x_0<9$,即 $4<\frac{x_0}{2}<\frac{9}{2}$,所以 k 的最大值为 4.

故存在满足条件的整数 k,且 k 的最大值为 4.

第5期

第 2~3 版同步周测参考答案

一、选择题

1~6.CACDAC　7~12.BBDDAA

二、填空题

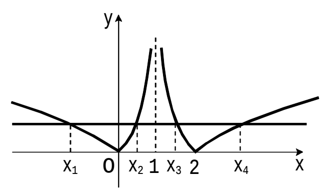
13.$\left(-\frac{1}{3},1\right)$

14.$(-\infty,0)$

15.2

16.2

提示:函数 $f(x)=|\log_a|x-1||(a>0$,且 $a\neq 1)$ 的图象如图所示.



(第 16 题图)

由 $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow|\log_a|x_1-1||=|\log_a|x_2-1||$,且 $|x_1-1|>1$,$0<|x_2-1|<1$,

所以必有 $\log_a|x_1-1|=-\log_a|x_2-1|$,

所以 $\log_a|x_1-1|+\log_a|x_2-1|=0\Rightarrow(1-x_1)(1-x_2)=1$,

所以 $x_1x_2-(x_1+x_2)+1=1\Rightarrow x_1x_2-(x_1+x_2)=0\Rightarrow\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=1$,即 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=1$.

同理,可得 $\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=1$.

所以 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=2$.

三、解答题

17.**解**:(1)原式 $=(\sqrt{3})^6\times(\sqrt[3]{2})^6-7\times\left[\left(\frac{4}{7}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}-2018^0=3^3\times 2^2-7\times\frac{4}{7}-1=103$.

(2)$2\log_3 2-\log_3\frac{32}{9}+\log_3 8-\log_3\frac{1}{81}=\log_3 4+\log_3\frac{9}{32}+\log_3 8-\log_3 3^{-4}=\log_3\left(4\times 8\times\frac{9}{32}\right)+4=2+4=6$.

18.**解**:(1)根据题意,$m\in\mathbf{N}_+$,则 $m^2+m=m(m+1)$ 为正偶数,所以 $\frac{1}{m^2+m}>0$,所以 $f(x)$ 的定义域为 $[0,+\infty)$,

所以幂函数 $f(x)=x^{\frac{1}{m^2+m}}$ 的单调递增区间为 $[0,+\infty)$,无单调递减区间.

(2)若该函数经过点 $(2,\sqrt{2})$,即 $\sqrt{2}=2^{\frac{1}{m^2+m}}$,解得 $m=1$,则 $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$.

若 $f(2-a)>f(a-1)$,则有 $2-a>a-1\geqslant 0$,解得 $1\leqslant a<\frac{3}{2}$,即实数 a 的取值范围为 $\left[1,\frac{3}{2}\right)$.

19.**解**:(1)因为函数 $y=c\left(\frac{1}{2}\right)^{mt}$($c,m$ 为常数)经过点 $(4,64)$,$(8,32)$,

所以 $\begin{cases}64=c\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{4m},\\32=c\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{8m},\end{cases}$

解得 $m=\frac{1}{4}$,$c=128$.

(2)由(1)得 $y=128\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}t}$,

所以 $128\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}t}\leqslant\frac{1}{2}$,解得 $t\geqslant 32$.

故至少排气 32 分钟,这个地下车库中的一氧化碳含量才能达到正常状态.

20.**解**:(1)因为 $f(x)$ 为偶函数,所以对任意的 $x\in\mathbf{R}$,都有 $f(x)=f(-x)$,

即 $a^{|x+b|}=a^{|-x+b|}$,

等价于 $|x+b|=|-x+b|$,所以 $b=0$.

(2)记 $h(x)=|x+b|=\begin{cases}x+b,x\geqslant -b,\\-x-b,x<-b.\end{cases}$

①当 $a>1$ 时,因为 $f(x)$ 在区间 $[2,+\infty)$ 上是增函数,所以 $h(x)$ 在区间 $[2,+\infty)$ 上也是增函数,

所以 $-b\leqslant 2$,所以 $b\geqslant -2$;

②当 $0<a<1$ 时,因为 $f(x)$ 在区间 $[2,+\infty)$ 上是增函数,

所以 $h(x)$ 在区间 $[2,+\infty)$ 上是减函数,但 $h(x)$ 在区间 $[-b,+\infty)$ 上是增函数,故不可能.

综上,$f(x)$ 在区间 $[2,+\infty)$ 上是增函数时,a、b 应满足的条件为 $a>1$,且 $b\geqslant -2$.

21.**解**:(1)$F(x)=2\log_a(x+1)+\log_a\frac{1}{1-x}$($a>0$ 且 $a\neq 1$),

由 $\begin{cases}x+1>0,\\1-x>0,\end{cases}$ 解得 $-1<x<1$,

所以函数 $F(x)$ 的定义域为 $(-1,1)$.

令 $F(x)=0$,

则 $2\log_a(x+1)+\log_a\frac{1}{1-x}=0$,(*)

方程等价于 $\log_a(x+1)^2=\log_a(1-x)$,

即 $(x+1)^2=1-x$,

解得 $x_1=0$,$x_2=-3$(舍去).

综上,函数 $F(x)$ 的定义域 D 为 $(-1,1)$,零点是 $x=0$.

(2)$m=2\log_a(x+1)+\log_a\frac{1}{1-x}=\log_a\left(1-x+\frac{4}{1-x}-4\right)(0\leqslant x<1)$,

则 $a^m=1-x+\frac{4}{1-x}-4$.

设 $1-x=t\in(0,1]$,

则函数 $y=t+\frac{4}{t}$ 在区间 $(0,1]$ 内是减函数,

当 $t=1$,即 $x=0$ 时,$y_{min}=5$,

所以 $a^m\geqslant 5-4=1$.

所以当 $a>1$ 时,$m\geqslant 0$,方程有解;

当 $0<a<1$ 时,$m\leqslant 0$,方程有解.

综上,当 $a>1$ 时,实数 m 的取值范围是 $[0,+\infty)$;当 $0<a<1$ 时,实数 m 的取值范围是 $(-\infty,0]$.

22.(1)**证明**:令 $\log_a x=t$,得 $x=a^t$,所以 $f(t)=\frac{a}{a^2-1}(a^t-a^{-t})$,

即 $f(x)=\frac{a}{a^2-1}(a^x-a^{-x})$,所以 $f'(x)=\frac{a}{a^2-1}(a^x\ln a+a^{-x}\ln a)=\frac{a\ln a}{a^2-1}(a^x+a^{-x})$.

①若 $0<a<1$,则 $a\ln a<0$,$a^2-1<0$,所以 $\frac{a\ln a}{a^2-1}>0$,

又 a^x+a^{-x} 始终大于 0,所以 $f'(x)>0$,$f(x)$ 在 R 上单调递增;

②若 $a>1$,则 $a\ln a>0$,$a^2-1>0$,所以 $\frac{a\ln a}{a^2-1}>0$,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增.

综上,$f(x)$ 在 R 上单调递增.

(2)**解**:假设存在实数 m 满足:当 $y=f(x)$ 的定义域为 $(-1,1)$ 时,$f(1-m)+f(1-m^2)<0$,

因为 $f(-x)=\frac{a}{a^2-1}(a^{-x}-a^x)=-f(x)$,所以 $f(x)$ 是 R 上的奇函数;

可得 $f(1-m^2)<-f(1-m)=f(m-1)$,由 $f(x)$ 为 R 上的增函数,即有 $-1<1-m^2<m-1<1$,

即为 $\begin{cases}-\sqrt{2}<m<\sqrt{2},\\m>1\text{或}m<-2,\\m<2,\end{cases}$ 解得 $1<m<\sqrt{2}$,

所以存在实数 m 满足:当 $y=f(x)$ 的定义域为 $(-1,1)$ 时,$f(1-m)+f(1-m^2)<0$,且 m 的取值范围是 $(1,\sqrt{2})$.

(3)**解**:因为 $f(x)$ 是 R 上的增函数,函数 $y=f(x)-4$ 恰好在 $(-\infty,2)$ 上取负值,

由 $x<2$,得 $f(x)-4<f(2)-4$,要使 $f(x)-4$ 的值恰为负数,则 $f(2)-4=0$,

即 $f(2)=\frac{a}{a^2-1}(a^2-a^{-2})=4$,即为 $a^2-4a+1=0$,解得 $a=2\pm\sqrt{3}$.

第 6 期

第2~3版同步周测参考答案

一、选择题

1~6.CCACCD　7~12.CACDCC

二、填空题

13.2

14.3

15.$\frac{1210}{3}$

16.-3

三、解答题

17.**解**:原方程可化为$(\lg a+\lg x)\cdot(\lg a+2\lg x)=4$,

即 $2(\lg x)^2+3\lg a\cdot\lg x+(\lg a)^2-4=0$.

令 $\lg x=t$,因为 $x>1$,所以 $t>0$,

则有 $2t^2+3\lg a\cdot t+(\lg a)^2-4=0$ 的解都是正数.

设 $f(t)=2t^2+3\lg a\cdot t+(\lg a)^2-4$,

则$\begin{cases}\Delta=(3\lg a)^2-8[(\lg a)^2-4]\geqslant0,\\ -\frac{3\lg a}{4}>0,\\ f(0)=(\lg a)^2-4>0,\end{cases}$

解得 $\lg a<-2$,所以 $0<a<\frac{1}{100}$,

所以实数 a 的取值范围是$\left(0,\frac{1}{100}\right)$.

18.**解**:(1)由题意,知 $b=4^x-2^{x+1}$.

因为 $4^x-2^{x+1}=(2^x)^2-2\times2^x=(2^x-1)^2-1\geqslant-1$,

所以当 $b\in[-1,+\infty)$时,方程有实数解.

(2)①当 $b=-1$ 时,$2^x=1$,所以此时方程有唯一解 $x=0$;

②当 $b>-1$ 时,因为$(2^x-1)^2=1+b\Rightarrow2^x=1\pm\sqrt{1+b}$,因为 $2^x>0$,$1+\sqrt{1+b}>0$,所以 $2^x=1+\sqrt{1+b}$ 的解为 $x=\log_2(1+\sqrt{1+b})$.

令 $1-\sqrt{1+b}>0\Rightarrow\sqrt{1+b}<1\Rightarrow-1<b<0$,

所以当$-1<b<0$ 时,$2^x=1-\sqrt{1+b}$ 的解为 $x=\log_2(1-\sqrt{1+b})$.

综上,得当$-1<b<0$ 时原方程有两解,$x=\log_2(1\pm\sqrt{1+b})$;当 $b\geqslant0$ 或 $b=-1$ 时,原方程有唯一解 $x=\log_2(1+\sqrt{1+b})$;当 $b<-1$ 时,原方程无解.

19.**解**:(1)当每张门票售价定为 100 元时,销售量可达到 $15-0.1\times100=5$ 万张.

令每张门票的浮动价格为$\frac{k}{5}(k>0)$元,

则每张门票供货价格为$\left(30+\frac{k}{5}\right)$元.

故旅游公司获得的总利润为 $5\times\left[100-\left(30+\frac{k}{5}\right)\right]=350-k=340$,解得 $k=10$.

所以 $f(x)=x-\left(30+\frac{10}{15-0.1x}\right)$,$x<150$,$x\in N$.

(2)由(1)可知:

$f(x)=x-\frac{100}{150-x}-30=-\left[(150-x)+\frac{100}{150-x}\right]+120\leqslant-2\sqrt{(150-x)\cdot\frac{100}{150-x}}+120=100$,当且仅当 $150-x=10$,解得 $x=140$ 时取等号,

因此每张门票售价定为 140 元时,每张门票所获利润最大,最大值为 100 元.

20.**解**:(1)$h(x)=\log_a(x-1)-\log_{\frac{1}{a}}(3-x)=\log_a(x-1)(3-x)$,

由$\begin{cases}x-1>0,\\3-x>0,\end{cases}$得 $1<x<3$,所以函数 $h(x)$的定义域为$(1,3)$.

令 $t=(x-1)(3-x)$,而 $x\in(1,3)$,

所以 $t\in(0,1]$.

当 $0<a<1$ 时,$\log_a t\geqslant0$,即 $h(x)\geqslant0$,

当 $a>1$ 时,$\log_a t\leqslant0$,即 $h(x)\leqslant0$,

所以当 $0<a<1$ 时,函数 $h(x)$的值域为$[0,+\infty)$;当 $a>1$ 时,函数 $h(x)$的值域为$(-\infty,0]$.

(2)由 $f(x)+g(x)\geqslant0$,得 $f(x)\geqslant-g(x)$,即 $\log_a(x-1)\geqslant\log_a(3-x)$,①

当 $0<a<1$ 时,要使不等式① 成立,

则$\begin{cases}x-1>0,\\3-x>0,\\x-1\leqslant3-x,\end{cases}$　即 $1<x\leqslant2$;

当 $a>1$ 时,要使不等式① 成立,

则$\begin{cases}x-1>0,\\3-x>0,\\x-1\geqslant3-x,\end{cases}$　即 $2\leqslant x<3$.

综上所述,当 $0<a<1$ 时,不等式 $f(x)+g(x)\geqslant0$ 中 x 的取值范围为$(1,2]$;当 $a>1$ 时,不等式 $f(x)+g(x)\geqslant0$ 中 x 的取值范围为$[2,3)$.

21.**解**:(1)当 $x\leqslant0$ 时,$f(x)+1=0$,所以 $2x+1+1=0$,所以 $x=-1$;

当 $x>0$ 时,$f(x)+1=0$,所以 $\lg x+1=0$,所以 $x=0.1$,所以 $y=f(x)+1$ 的零点是-1,0.1.

(2)当 $x\leqslant0$ 时,$f(x)\in(-\infty,1]$;当 $x>0$ 时,$f(x)\in(-\infty,+\infty)$,画出 $f(x)$的图象如图所示.令 $f(f(x))+a=0$,即 $f(f(x))=-a$,令 $f(x)=t$,则 $f(t)=-a$.

①当$-a>1$ 时,有唯一的 $t_1=f(x_1)>10$,此时有唯一解;

②当 $0<-a\leqslant1$,方程 $f(t)=-a$ 有两个解 t_1,t_2 且$-\frac{1}{2}<t_1=f(x_1)\leqslant0$,$1<t_2=f(x_2)\leqslant10$;

若$-\frac{1}{2}<t_1=f(x_1)\leqslant0$,有两解,$-\frac{3}{4}<x_1\leqslant-\frac{1}{2}$或$\frac{\sqrt{10}}{10}<x_1\leqslant1$;

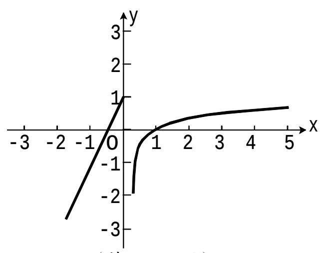
若 $1<t_2=f(x_2)\leqslant10$,有唯一解,$10<x_2\leqslant100$,共有 3 个解,所以$-1\leqslant a<0$;

③当$-a\leqslant0$ 时,方程 $f(t)=-a$,有两个解 t_1,t_2,且 $t_1=f(x_1)\leqslant-\frac{1}{2}$,$0<t_2=f(x_2)\leqslant1$,

若 $t_1=f(x_1)\leqslant-\frac{1}{2}$,有两解,$x_1\leqslant-\frac{3}{4}$或 $0<x_1\leqslant\frac{\sqrt{10}}{10}$;

若 $0<t_2=f(x_2)\leqslant1$,有两解,$-\frac{1}{2}<x_2\leqslant0$ 或 $1<x_2\leqslant10$,即共有 4 个解.

综上,实数 a 的取值范围是$[-1,0)$.



(第 21 题图)

22.**解**:(1)当 $a=1$ 时,$f(x)=x^3+x^2-x+m$,因为 $f(x)$有三个互不相同的零点,

所以方程 $x^3+x^2-x+m=0$ 有三个互不相同的实数根,即 $y=-x^3-x^2+x$ 与 $y=m$ 的图象有三个交点.

令 $g(x)=-x^3-x^2+x$,

则 $g'(x)=-3x^2-2x+1=-(3x-1)(x+1)$.

令 $g'(x)>0$,得$-1<x<\frac{1}{3}$;

令 $g'(x)<0$,得 $x<-1$,或 $x>\frac{1}{3}$.

所以 $g(x)$在$(-\infty,-1)$和$\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$上为减函数,在$\left(-1,\frac{1}{3}\right)$内为增函数,所以$[g(x)]_{极小值}=g(-1)=-1$,$[g(x)]_{极大值}=g\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{27}$,所以$-1<m<\frac{5}{27}$,

所以实数 m 的取值范围是$\left(-1,\frac{5}{27}\right)$.

(2)$f'(x)=3x^2+2ax-a^2$,由题设可知,方程 $3x^2+2ax-a^2=0(a>0)$在$[-1,1]$上没有实数根.

方程 $3x^2+2ax-a^2=0$ 的根为 $x_1=-a<0$,$x_2=\frac{a}{3}>0$.若方程 $f'(x)=0$ 在$[-1,1]$上没有实数根,则$-a<-1$,且$\frac{a}{3}>1$,解得 $a>3$.

所以实数 a 的取值范围为$(3,+\infty)$.

第 7 期

第2~3版同步周测参考答案

一、选择题

1~6.CABDCC　7~12.DDADDD

二、填空题

13.(-2,9)　14.1+e　15.-3

16.②③

提示:当 $a=1$ 时,$f(x)=e^x+\ln x$,易知函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,无最大值,故①错误;对于任意的 $a>0$,函数 $f(x)$是$(0,+\infty)$上的增函数,当 $x\to0$ 时,$e^x\to1$,$\ln x\to-\infty$,故 $f(x)\to-\infty$,故②正确,④错误;对于对于任意的 $a<0$,$f'(x)=e^x+\frac{a}{x}$,又 $f''(x)=e^x-\frac{a}{x^2}$,所以 $f''(x)>0$,所以 $f'(x)$在$(0,+\infty)$单调递增,当 $x\to+\infty$ 时,$f(x)\to+\infty$,当 $x\to0$ 时,$f(x)\to-\infty$,所以存在 $f'(x_0)=0$,当 $0<x<x_0$ 时,$f'(x)<0$,函数单调递减;当 $x>x_0$ 时,$f'(x)>0$,函数单调递增,所以$[f(x)]_{\min}=f(x_0)$,故③正确.

三、解答题

17.**解**:(1)化简,得 $f(x)=\frac{2e^x}{1-x}$.

因为 $f'(x)=\left(\frac{2e^x}{1-x}\right)'$

$=\frac{(2e^x)'(1-x)-2e^x(1-x)'}{(1-x)^2}$

$=\frac{2(2-x)e^x}{(1-x)^2}$,

所以 $f'(2)=0$.

(2)因为 $f'(x)=\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)'-x'+(\ln x)'$

$=-\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}-1+\frac{1}{x}$,

所以 $f'(1)=-\frac{3}{2}$.

18.**解**:$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$,$g'(x)=\frac{a}{x}(x>0)$.

由已知,得$\begin{cases}\sqrt{x}=a\ln x,\\ \frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{a}{x},\end{cases}$

解得 $a=\frac{e}{2}$,$x=e^2$.

所以两条曲线的交点坐标为(e^2,e),

切线的斜率 $k=f'(e^2)=\frac{1}{2e}$,

所以切线的方程为 $y-e=\frac{1}{2e}(x-e^2)$,

即$\frac{x}{2e}-y+\frac{e}{2}=0$.

19.(1)**解**:函数 $f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,$f'(x)=ae^x\ln x+\frac{a}{x}e^x-\frac{b}{x^2}e^{x-1}+\frac{b}{x}e^{x-1}$,

由题意可得 $f(1)=2$,$f'(1)=e$,

则$\begin{cases}b=2,\\ae-b+b=e,\end{cases}$解得 $a=1$,$b=2$.

(2)**证明**:由(1),知 $f(x)=e^x\ln x+\frac{2}{x}e^{x-1}$,

从而 $f(x)>1$ 等价于 $x\ln x>xe^{-x}-\frac{2}{e}$.

设函数 $g(x)=x\ln x$,则 $g'(x)=1+\ln x$,

所以当 $x\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$时,$g'(x)<0$;

当 $x\in\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$时,$g'(x)>0$.

故 $g(x)$在$\left(0,\frac{1}{e}\right)$上单调递减,

在$\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$上单调递增,

从而 $g(x)$在$(0,+\infty)$上的最小值为 $g\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$.

设函数 $h(x)=xe^{-x}-\frac{2}{e}$,

则 $h'(x)=e^{-x}(1-x)$.

所以当 $x\in(0,1)$时,$h'(x)>0$;

当 $x\in(1,+\infty)$时,$h'(x)<0$,

故 $h(x)$在$(0,1)$上单调递增,

在$(1,+\infty)$上单调递减,

从而 $h(x)$在$(0,+\infty)$上的最大值为 $h(1)=-\frac{1}{e}$.

综上,当 $x>0$ 时,$g(x)>h(x)$,即 $f(x)>1$.

20.**解**:(1)$f'(x)=ax^2+x-1$,由 $f(x)$与 $y=-3$ 切于点 $A(x_0,f(x_0))$,

则$\begin{cases}f(x_0)=\frac{1}{3}ax_0^3+\frac{1}{2}x_0^2-x_0-3=-3,\\f'(x_0)=ax_0^2+x_0-1=0,\end{cases}$

解得 $a=-\frac{3}{16}$,$x_0=4$.

(2)$F(x)=(ax^2+x-1)\cdot e^x$,

所以 $F'(x)=e^x[ax^2+(2a+1)x]$,

且 $F(0)=-1$.

①当 $a=0$ 时,$F'(x)=xe^x$,因为 $x\in(0,+\infty)$,所以 $F'(x)>0$,所以 $F(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,此时 $F(x)>-1$ 成立;

②当$-\frac{1}{2}<a<0$ 时,$F'(x)=e^x\cdot ax\left(x+\frac{2a+1}{a}\right)$,可知 $F(x)$在$\left(0,-\frac{2a+1}{a}\right)$上单调递增,在$\left(-\frac{2a+1}{a},+\infty\right)$上单调递减,此时 $F\left(-\frac{1}{a}\right)=-e^{-\frac{1}{a}}<-1$,不符合条件;

③当 $a=-\frac{1}{2}$时,$F'(x)=e^x\cdot\left(-\frac{1}{2}x^2\right)<0$ 恒成立,可知 $F(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减,此时 $F(x)<-1$ 成立,不符合条件;

④当 $a<-\frac{1}{2}$ 时,$F'(x)=e^x\cdot ax\left(x+\frac{2a+1}{a}\right)$,可知 $F(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减,此时 $F(x)<-1$ 成立,不符合条件;

⑤当 $a>0$ 时,$F'(x)=e^x\cdot ax\left(x+\frac{2a+1}{a}\right)$,可知 $F(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,此时 $F(x)>-1$ 成立.

综上所述,a 的取值范围是$[0,+\infty)$.

21.(1)**证明**:当 $a=1$时,$f(x)\geqslant1$,即 $e^x-x^2\geqslant1$,也就是 $e^x\geqslant1+x^2$,

两边同除 e^x可知,原式等价于$(x^2+1)\cdot e^{-x}-1\leqslant0$.

设函数 $g(x)=(x^2+1)e^{-x}-1$,则 $g'(x)=-(x^2-2x+1)e^{-x}=-(x-1)^2e^{-x}$.

当 $x\neq1$时,$g'(x)<0$,所以 $g(x)$在$(0,+\infty)$单调递减.

而 $g(0)=0$,故当 $x\geqslant0$时,$g(x)\leqslant0$,即 $f(x)\geqslant1$.

(2)由 $f(x)=0$,得 $a=\frac{e^x}{x^2}$,

所以 $f(x)$在$(0,+\infty)$上只有一个零点,等价于方程 $a=\frac{e^x}{x^2}$只有一个实根.

令 $g(x)=\frac{e^x}{x^2}$,则 $g'(x)=\frac{e^xx^2-2e^xx}{(x^2)^2}=\frac{e^x(x-2)}{x^3}$,

所以当 $x\in(0,2)$时,$g(x)$单调递减,

当 $x\in(2,+\infty)$时,$g(x)$单调递增,

而 $g(2)=\frac{e^2}{4}$,所以当且仅当 $a=\frac{e^2}{4}$时,$f(x)$在$(0,+\infty)$只有一个零点.

22.**解**:(1)由题意,函数 $f(x)=xe^x$,则 $g(x)=af(x)+e^x=axe^x+e^x$,

所以 $g'(x)=(ax+a+1)e^x$.

①若 $a=0$,$g'(x)=e^x$,$g'(x)>0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立,所以函数 $g(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增;

②若 $a>0$,当 $x>-\frac{a+1}{a}$时,$g'(x)>0$,函数 $g(x)$单调递增,

当 $x<-\frac{a+1}{a}$时,$g'(x)<0$,函数 $g(x)$单调递减;

③若 $a<0$,当 $x>-\frac{a+1}{a}$时,$g'(x)<0$,函数 $g(x)$单调递减;

当 $x<-\frac{a+1}{a}$时,$g'(x)>0$,函数 $g(x)$单调递增.

综上,当 $a=0$ 时,函数 $g(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增;

当 $a>0$ 时,函数 $g(x)$在$\left(-\infty,-\frac{a+1}{a}\right)$内单调递减,在$\left(-\frac{a+1}{a},+\infty\right)$内单调递增;

当 $a<0$ 时,函数 $g(x)$在$\left(-\infty,-\frac{a+1}{a}\right)$内单调递增,在$\left(-\frac{a+1}{a},+\infty\right)$内单调递减.

(2)由题可知,原命题等价于方程 $xe^x=x+2$ 在 $x\in[m,m+1]$上有解,

因为 $e^x>0$,所以 $x=0$ 不是方程的解,

所以原方程等价于 $e^x-\frac{2}{x}-1=0$,

令 $r(x)=e^x-\frac{2}{x}-1$,

因为 $r'(x)=e^x+\frac{2}{x^2}>0$ 对于 $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$恒成立,

所以 $r(x)$在$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$内单调递增.

又 $r(1)=e-3<0$,$r(2)=e^2-2>0$,$r(-3)=\frac{1}{e^3}-\frac{1}{3}<0$,$r(-2)=\frac{1}{e^2}>0$,

所以直线 $y=x+2$ 与曲线 $y=f(x)$的交点仅有两个,

且两交点的横坐标分别在区间$[1,2]$和$[-3,-2]$内,

所以整数 m 的所有可能的值为-3,1.