第 1 期
第 3~4 版同步周测参考答案

一、选择题

1~2.B　C

3.B

提示：由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，得 $c^2-c-2=0$，解得 $c=2$ 或 $c=-1$（舍去）.

4.B　5.A　6.C　7.D

8.D

提示：$\frac{b}{a}=\frac{\sin B}{\sin A}=\frac{\sin 2A}{\sin A}=\frac{2\sin A\cos A}{\sin A}=2\cos A$.

因为 $B=2A$，所以 $C=\pi-A-B=\pi-3A$.

又因为△ABC 为锐角三角形，所以 $0<\pi-3A<\frac{\pi}{2}$，所以 $\frac{\pi}{6}<A<\frac{\pi}{3}$.

又 $B=2A$，所以 $0<2A<\frac{\pi}{2}$，所以 $0<A<\frac{\pi}{4}$，所以 $\frac{\pi}{6}<A<\frac{\pi}{4}$，所以 $\cos A\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，所以 $2\cos A\in(\sqrt{2},\sqrt{3})$，故选 D.

9.C

10.B

提示：$\boldsymbol{p}/\!/\boldsymbol{q}\Rightarrow(a+c)(c-a)-b(b-a)=0$，即 $c^2-a^2-b^2+ab=0\Rightarrow\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{2}=\cos C$，又因为 $C\in(0,\pi)$，所以 $C=\frac{\pi}{3}$.

11.D

12.B

提示：因为 $3a\cos A=b\cos C+c\cos B$，所以 $3\sin A\cos A=\sin B\cos C+\sin C\cos B=\sin(B+C)=\sin A$，

又 $A\in(0,\pi)$，所以 $\sin A\neq0$，所以 $\cos A=\frac{1}{3}$.因为 $b+c=3$，所以 $c=3-b$.

所以 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+(3-b)^2-2b(3-b)\cdot\frac{1}{3}=\frac{8}{3}b^2-8b+9=\frac{8}{3}\left(b-\frac{3}{2}\right)^2+3\geqslant3$，所以 a 的最小值为 $\sqrt{3}$.

二、填空题

13.$\frac{\sqrt{69}}{12}$

提示：由正弦定理，得 $\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{5\sqrt{3}}{12}$.因为 $a>b$，所以 $A>B$，所以 $\cos B=\frac{\sqrt{69}}{12}$.

14.$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

提示：在△ABC 中，由 $b=\sqrt{ac}$ 得 $b^2=ac$，由正弦定理可得 $\sin^2B=\sin A\sin C$，又 $\sin B=\cos A$，$\sin C=1$，故 $\cos^2A=\sin A$，即 $\sin^2A+\sin A-1=0$，解得 $\sin A=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 或 $\sin A=\frac{-\sqrt{5}-1}{2}$（舍去）.

15.120°

16.45°

提示：由正弦定理，得 $a\sin A-c\sin C=(\sqrt{2}a-b)\sin B$，所以 $a^2-c^2=\sqrt{2}ab-b^2$，$c^2=a^2+b^2-\sqrt{2}ab=a^2+b^2-2ab\cos C$，所以 $\cos C=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$C=45°$.

三、解答题

17.**解**：由正弦定理，得

$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{6\sin30°}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

由 $b=6$，$a=2\sqrt{3}$，知 $b>a$，所以 $B>A$.

所以 $B=60°$或 $120°$.

(1)当 $B=60°$时，$C=180°-A-B=180°-30°-60°=90°$.

在 Rt△ABC 中，$C=90°$，$a=2\sqrt{3}$，$b=6$，则 $c=4\sqrt{3}$.

(2)当 $B=120°$时，$C=180°-A-B=180°-30°-120°=30°$，所以 $A=C$，则有 $a=c=2\sqrt{3}$.

18.**解**：由 $\frac{a^3+b^3-c^3}{a+b-c}=c^2$，

得 $a^3+b^3-c^3=c^2(a+b)-c^3$，

所以 $a^2+b^2-ab=c^2$，所以 $\cos C=\frac{1}{2}>0$，

又因为 $C\in(0°,180°)$，所以 $C=60°$.

由 $a\cos B=b\cos A$，得 $2R\sin A\cos B=2R\sin B\cos A$（$R$ 为△ABC 外接圆的半径），

所以 $\sin(A-B)=0$，

又因为 $A-B\in(-180°,180°)$，所以 $A-B=0°$，所以 $A=B=C=60°$，

所以△ABC 为等边三角形.

19.**解**：由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，因为 $A=2C$，所以 $\frac{a}{\sin2C}=\frac{c}{\sin C}$，

所以 $a=2c\cos C$.

又因为 $a+c=8$，所以 $\cos C=\frac{8-c}{2c}$，①

由余弦定理及 $a+c=8$，得

$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{a^2+4^2-c^2}{8a}=\frac{(8-c)^2+4^2-c^2}{8(8-c)}$

$=\frac{10-2c}{8-c}$.　②

由①②知 $\frac{8-c}{2c}=\frac{10-2c}{8-c}$，

整理得 $5c^2-36c+64=0$.

所以 $c=\frac{16}{5}$ 或 $c=4$(舍去).

所以 $a=8-c=\frac{24}{5}$，故 $a=\frac{24}{5}$，$c=\frac{16}{5}$.

20.**解**：在△ABD 中，由余弦定理，得 $AB^2=AD^2+BD^2-2AD\cdot BD\cos\angle BDA$.

设 $BD=x$，

则 $14^2=10^2+x^2-2\cdot10\cdot x\cos60°$.

化简，得 $x^2-10x-96=0$.

解得 $x=16$ 或 $x=-6$(舍去).

所以 $BD=6$.

因为 $AD\perp CD$，$\angle BDA=60°$，

所以 $\angle CDB=30°$.

在△BCD 中，由正弦定理，

得 $\frac{BC}{\sin\angle CDB}=\frac{BD}{\sin\angle BCD}$，

故 $BC=\frac{16\sin30°}{\sin135°}=8\sqrt{2}$.

21.**解**：(1)因为 $A(3,4)$，$B(0,0)$，所以 $|AB|=5$，$\sin B=\frac{4}{5}$.

当 $c=5$ 时，$|BC|=5$，$|AC|=2\sqrt{5}$.

由正弦定理，得 $\frac{|BC|}{\sin A}=\frac{|AC|}{\sin B}\Rightarrow\sin A=\frac{|BC|}{|AC|}\sin B=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

(2)已知 $A(3,4)$，$B(0,0)$，$C(c,0)$，

所以 $|AC|^2=(c-3)^2+4^2$，$|BC|^2=c^2$.

由余弦定理的推论，得

$\cos A=\frac{|AB|^2+|AC|^2-|BC|^2}{2|AB|\cdot|AC|}$，

若 A 是钝角，则 $\cos A<0\Rightarrow|AB|^2+|AC|^2-|BC|^2<0$，即 $5^2+(c-3)^2+4^2-c^2=50-6c<0$.

解得 $c>\frac{25}{3}$.

所以 c 的取值范围是 $\left(\frac{25}{3},+\infty\right)$.

22.**解**：(1)由 $\frac{\tan A}{\tan B}=\frac{2c-b}{b}$，结合正弦定理，得 $\frac{\sin A\cos B}{\cos A\sin B}=\frac{2\sin C-\sin B}{\sin B}$.

又 $\sin B\neq0$，

所以 $\sin A\cos B=2\sin C\cos A-\sin B\cos A$，

即 $\sin A\cos B+\sin B\cos A=2\sin C\cos A$，

即 $\sin(A+B)=2\sin C\cos A=\sin C$.

因为 $\sin C\neq0$，所以 $\cos A=\frac{1}{2}$.

又 $0<A<\pi$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

(2)由(1)知 $\cos A=\frac{1}{2}$，

所以 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2-bc$. ①

由 $\sin(B+C)=6\cos B\sin C=\sin A$，

得 $\frac{a}{c}=6\times\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，

即 $2a^2=3b^2-3c^2$.　②

由①②消去 a，得 $b^2+2bc-5c^2=0$，

即 $\left(\frac{b}{c}\right)^2+2\cdot\frac{b}{c}-5=0$，

解得 $\frac{b}{c}=-\sqrt{6}-1$（舍去），或 $\frac{b}{c}=\sqrt{6}-1$.

第 4 期
第 3~4 版同步周测参考答案

一、选择题

1.B　2.C　3.B　4.C

5.D

提示：分组求和，要分 $m=1$ 与 $m\neq1$ 两种情况讨论.

6.A

提示：由 $a_5=-8a_2$，$a_5>a_2$ 知 $a_1>0$，由 $a_5=-8a_2$，得 $a_1q^4=-8a_1q$，解得 $q=-2$.又因为 $|a_1|=1$，所以 $a_1=1$，所以 $a_n=(-2)^{n-1}$.

7.A

8.C

提示：如等比数列 $-1,-2,-4,-8,\cdots$，的公比 $q=2$，而该数列为递减数列，排除 A；如等比数列 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots$的公比 $q=\frac{1}{2}$，而该数列为递减数列，排除 B；如等比数列 $-1,1,-1,1,-1,\cdots$中 $a_1a_3a_5<0$，排除 D，故选 C.

9.A

提示：$a_5=a_1\times\frac{a_2}{a_1}\times\frac{a_3}{a_2}\times\frac{a_4}{a_3}\times\frac{a_5}{a_4}=a_1^5(-\sqrt{2})^{1+2+3+4}=(-\sqrt{2})^{10}=32$.

10.C

提示：若 $S_2=20$ 正确，则由 $a_1+a_2=S_2$，即 $8+8q=20$，得 $q=\frac{3}{2}$，则 $S_3=\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}=38$，$S_4=65$.若 $S_2=20$ 错误，则 S_3，S_4 正确，但这不可能.综上知，$S_3=36$ 算错了.

11.B　**提示**：设方程 $(x^2-ax+1)(x^2-bx+1)=0$ 的 4 个实数根依次为 m,mq,mq^2,mq^3.

由等比数列性质，不妨设 m,mq^3 为 $x^2-ax+1=0$ 的两个实数根，则 mq,mq^2 为方程 $x^2-bx+1=0$ 的两个根，由韦达定理，得 $m^2q^3=1$，$m+mq^3=a$，$mq+mq^2=b$，则 $m^2=\frac{1}{q^3}$，

故 $ab=(m+mq^3)(mq+mq^2)=m^2(1+q^3)\cdot(q+q^2)=\frac{1}{q^3}(1+q^3)(q+q^2)=q+\frac{1}{q}+q^2+\frac{1}{q^2}$.

设 $t=q+\frac{1}{q}$，则 $q^2+\frac{1}{q^2}=t^2-2$，因为 $q\in\left[\frac{1}{3},2\right]$，且 $t=q+\frac{1}{q}$ 在 $\left[\frac{1}{3},1\right]$ 上单调递减，在 $(1,2]$ 上单调递增，

所以 $t\in\left[2,\frac{10}{3}\right]$，则 $ab=t^2+t-2=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$，所以当 $t=2$ 时，ab 取到最小值 4；当 $t=\frac{10}{3}$ 时，ab 取到最大值 $\frac{112}{9}$，所以 ab 的取值范围是 $\left[4,\frac{112}{9}\right]$.故选 B.

12.B　**提示**：若 $x>1$，则 $0<\frac{1}{x}<1$.所以 $f(x)=x\ln x$，$f\left(\frac{1}{x}\right)=-x\ln x$，故 $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=0$ 对任意 $x>0$ 成立.因为 $\{a_n\}$ 是公比大于 0 的等比数列，且 $a_5a_6a_7=1$，所以 $a_6=1$.

故 $a_2a_{10}=a_3a_9=a_4a_8=a_5a_7=a_6=1$.

故 $f(a_2)+f(a_3)+\cdots+f(a_{10})$

$=[f(a_2)+f(a_{10})]+[f(a_3)+f(a_9)]+\cdots+[f(a_5)+f(a_7)]+f(a_6)=0$，

所以 $f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_{10})=f(a_1)=a_1$，

若 $a_1\geqslant1$，则 $a_1\ln a_1=a_1$，得 $a_1=e$；若 $0<a_1<1$，则 $\frac{\ln a_1}{a_1}<0$，所以 $\frac{\ln a_1}{a_1}=a_1$ 无解.

故选 B.

二、填空题

13.±2　14.$-\frac{1}{3}$

15.$\frac{1}{16}$　**提示**：由题意知，正方形的边长构成以 $\sqrt{2}$ 为首项，以 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 为公比的等比数列，现已知共得到 1023 个正方形，则有 $1+2+\cdots+2^{n-1}=1023$，所以 $n=10$，所以最小正方形的边长为 $\sqrt{2}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^9=\frac{1}{16}$.

16.T_{17}　**提示**：$a_9a_9a_{18}=a_9^3q^{2+5+17}=(a_1q^8)^3=a_9^3$，即 a_9 为定值，所以下标和为 18 的两项积为定值，可知 T_{17} 为定值.

三、解答题

17.**解**：在等比数列 $\{a_n\}$ 中，

因为 $a_3a_5=64$，即 $a_4^2=64$，得 $a_4=\pm8$.

当 $a_4=-8$ 时，$a_4(q^2-1)=24$，即 $q^2-1=-3$，此方程无解；

当 $a_4=8$ 时，$a_4(q^2-1)=24$，解得 $q=\pm2$.

所以，当 $q=2$ 时，$a_1=1$，$S_8=\frac{1-2^8}{1-2}=255$；

当 $q=-2$ 时，$a_1=-1$，

$S_8=\frac{-[1-(-2)^8]}{1+2}=\frac{255}{3}$.

18.**解**：(1)第 1 个正方形的面积为 $4cm^2$，第 2 个正方形的面积为 $2cm^2$，…，这是一个以 $a_1=4$ 为首项，$q=\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列.

所以第 10 个正方形的面积为 $a_{10}=a_1q^9=4\times\left(\frac{1}{2}\right)^9=\frac{1}{128}(cm^2)$.

(2)这 10 个正方形的面积之和为

$S_{10}=\frac{a_1-a_{10}q}{1-q}=\frac{4-2^{-8}}{1-2^{-1}}=8-\frac{1}{2^7}=\frac{1023}{128}(cm^2)$.

19.**解**：设这三个数分别为 $\frac{a}{q},a,aq$，

则 $\begin{cases}\frac{a}{q}\cdot a\cdot aq=64,\\ \frac{a}{q}+a+aq=14\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=4,\\ q=2,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=4,\\ q=\frac{1}{2}.\end{cases}$

故所求的三个数分别为 2,4,8 或 8,4,2.

20.**解**：(1)因为 $\{a_n\}$ 是等比数列，$a_1=1$，$a_2=a$，

所以 $a\neq0$，$a_n=a^{n-1}$.

又 $b_n=a_n\cdot a_{n+1}$，

则 $b_1=a_1\cdot a_2=a$，$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{a_{n+1}\cdot a_{n+2}}{a_n\cdot a_{n+1}}=\frac{a_{n+2}}{a_n}=\frac{a^{n+1}}{a^{n-1}}=a^2$，

即 $\{b_n\}$ 是以 a 为首项，a^2 为公比的等比数列.

所以，$S_n=\begin{cases}n, & a=1,\\ -n, & a=-1,\\ \frac{a(1-a^{2n})}{1-a^2}, & a\neq\pm1.\end{cases}$

(2)甲、乙两个同学说法都不正确，理由如下：

设 $\{b_n\}$ 的公式比为 q，则 $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{a_{n+1}\cdot a_{n+2}}{a_n\cdot a_{n+1}}=\frac{a_{n+2}}{a_n}=q$ 且 $a\neq0$，

又 $a_1=1$，$a_2=a$，$a_1,a_3,a_5\cdots,a_{2n-1},\cdots$是以 1 为首项，$q$ 为公比的等比数列；$a_2,a_4,a_6,\cdots,a_{2n},\cdots$是以 a 为首项，q 为公比的等比数列.

即 $\{a_n\}$ 为：$1,a,q,aq,q^2,aq^2,\cdots$，

当 $q=a^2$ 时，$\{a_n\}$ 是等比数列；当 $q\neq a^2$ 时，$\{a_n\}$ 不是等比数列.

21.**解**：(1)因为 $S_2=(k+1)S_1+1$，$a_1=1$，$a_2=3$，所以 $a_1+a_2=(k+1)a_1+1$，所以 $k=2$.

又因为 $S_{n+1}=3S_n+1$，$S_n=3S_{n-1}+1$（$n\geqslant2$），所以 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=3\cdot(S_n-S_{n-1})=3a_n$，

又因为 $a_2=3a_1$，$a_1=1$，

所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=3(n\in\mathbf{N}_+)$.

所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公比为 3 的等比数列，即 $a_n=3^{n-1}(n\in\mathbf{N}_+)$.

(2)由(1)可知，$S_n=\frac{1-3^n}{1-3}=\frac{3^n-1}{2}$，$2S_n+1=3^n$，所以 $b_n=n\cdot3^n$.

所以 $T_n=1\cdot3+2\cdot3^2+3\cdot3^3+\cdots+n\cdot3^n$，

$3T_n=1\cdot3^2+2\cdot3^3+3\cdot3^4+\cdots+(n-1)\cdot3^n+n\cdot3^{n+1}$，

两式相减，得

$-2T_n=3+3^2+3^3+\cdots+3^n-n\cdot3^{n+1}=\frac{3(1-3^n)}{1-3}-n\cdot3^{n+1}=\frac{3(3^n-1)}{2}-n\cdot3^{n+1}$，

所以 $T_n=\frac{1}{2}\left(n-\frac{1}{2}\right)\cdot3^{n+1}+\frac{3}{4}$.

22.(1)**解**：由 $S_n^2-(n^2+n-1)S_n-(n^2+n)=0$，得 $[S_n-(n^2+n)](S_n+1)=0$.

因为 $\{a_n\}$ 是正项数列，

所以 $S_n>0$，所以 $S_n=n^2+n$.

于是 $a_1=S_1=2$，$n\geqslant2$ 时，

$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+n-(n-1)^2-(n-1)=2n$.

当 $n=1$ 时，也满足上式，所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2n$.

(2)**证明**：由于 $a_n=2n$，$b_n=\frac{n+1}{(n+2)^2a_n^2}$，

则 $b_n=\frac{n+1}{4n^2(n+2)^2}=\frac{1}{16}\left[\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+2)^2}\right]$.

$T_n=\frac{1}{16}\times\left[1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^2}-\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+2)^2}\right]=\frac{1}{16}\times\left[1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{(n+2)^2}\right]<\frac{1}{16}\times\left(1+\frac{1}{2^2}\right)=\frac{5}{64}$.

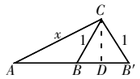
第 2 期
第 3~4 版章节测试参考答案

一、选择题

1.B　2.B　3.A　4.B
5.A　6.C　7.D　8.B
9.D

提示:结合下图可知,三角形有两解的条件为 $b>a$,且 $b\sin A<a$,

即 $x>1$,且 $x\sin 30°<1$,解得 $1<x<2$.



(第 9 题图)

10.A
11.C

提示:$\triangle ABC$ 中,$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\cdot\sin C$,

由余弦定理:$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$,

且 $2S=(a+b)^2-c^2$,

得 $ab\sin C=(a+b)^2-(a^2+b^2-2ab\cos C)$,

整理得 $\sin C-2\cos C=2$,

所以 $(\sin C-2\cos C)^2=4$.

所以 $\frac{(\sin C-2\cos C)^2}{\sin^2 C+\cos^2 C}=4$,化简可得 $3\tan^2 C+4\tan C=0$.

因为 $C\in(0,180°)$,所以 $\tan C=-\frac{4}{3}$.

12.B

提示:设 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c,则 $c+a=\frac{2\sqrt{3}}{3}b$.

由 $\sin C(\cos A-\sqrt{3})+\cos C\sin A=0$,可得 $\sin C\cos A+\cos C\sin A=\sqrt{3}\sin C$,

即 $\sin(C+A)=\sqrt{3}\sin C$,即 $\sin B=\sqrt{3}\cdot\sin C$,所以 $b=\sqrt{3}c$.所以 $a=c$.

所以 $\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}=\frac{c^2+c^2-3c^2}{2c^2}=-\frac{1}{2}$,可得 $B=120°$,$A=C=30°$.

由平面几何知识可知外心 O 在 $\triangle ABC$ 外部,且四边形 $ABCO$ 是平行四边形,所以 $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$.

又 $\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$,

所以 $x=-1$,$y=1$,则 $\frac{x}{y}=-1$.

二、填空题

13.$16\sqrt{2}$　14.$\frac{1}{2}$

15.$100\sqrt{6}$

16.4

提示:在 $\triangle ABC$ 中,$\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin A}=\frac{AB}{\sin C}$,$\frac{AC+BC}{\sin B+\sin A}=\frac{AB}{\sin C}$,

$AC+BC=2(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sin A+\sin B)$

$=4(\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

$=4\cos\frac{A-B}{2}\leqslant 4$,所以 $(AC+BC)_{\max}=4$.

三、解答题

17.**解**:(1)由 $a=c$,得 $C=A=75°$,

所以 $B=180°-75°-75°=30°$.

由正弦定理,得

$b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})\sin 30°}{\sin 75°}=2$.

(2)因为 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$,所以 $C=15°$;因为 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{1}{2}$,所以 $B=60°$.所以 $A=180°-60°-15°=105°$.

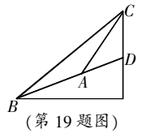
18.**解**:(1)因为 $a<b$,所以 $A<B$,故 A 是锐角.因为 $\cos B=-\frac{1}{7}$,所以 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$.

由正弦定理,得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$,所以 $\sin A=\frac{a\sin B}{b}=\frac{7\times\frac{4\sqrt{3}}{7}}{8}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,则 $A=60°$.

(2)由余弦定理,得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$,即 $64=49+c^2-2\times 7\times c\times\left(-\frac{1}{7}\right)$,

解得 $c=3$,或 $c=-5$(舍去),则 AC 边上的高 $h=c\sin A=3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

19.**解**:如图所示,由题意,得



(第 19 题图)

$\angle ABC=45°-30°=15°$,

$\angle DAC=60°-30°=30°$.

所以 $\angle BAC=150°$,$\angle ACB=15°$,

所以 $AC=AB=40$m,$\angle ADC=120°$,$\angle ACD=30°$.

在 $\triangle ACD$ 中,由正弦定理,得

$CD=\frac{\sin\angle CAD}{\sin\angle ADC}\cdot AC=\frac{\sin 30°}{\sin 120°}\cdot 40$

$=\frac{40\sqrt{3}}{3}$(m).

答:转播塔的高度为 $\frac{40\sqrt{3}}{3}$m.

20.**解**:(1)在 $\triangle ABC$ 中,由余弦定理的推论,得 $\cos C=\frac{AC^2+BC^2-AB^2}{2AC\cdot BC}=\frac{8^2+5^2-AB^2}{2\times 8\times 5}$;①

在 $\triangle ABD$ 中,由余弦定理的推论,得 $\cos D=\frac{AD^2+BD^2-AB^2}{2AD\cdot BD}=\frac{7^2+7^2-AB^2}{2\times 7\times 7}$,②

由 $\angle C=\angle D$,得 $\cos C=\cos D$,

解得 $AB=7$,所以 AB 的长度为 7 米.

(2)小李的设计使建造费用最低.

理由如下:

$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}AD\cdot BD\sin D$,$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BC\cdot\sin C$,因为 $AD\cdot BD>AC\cdot BC$,所以 $S_{\triangle ABD}>S_{\triangle ABC}$.

故选择 $\triangle ABC$ 建筑环境标志费用较低.

因为 $AD=BD=AB=7$,

所以 $\triangle ABD$ 是等边三角形,$\angle D=60°$.

故 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC\sin C=10\sqrt{3}$,

所以最低造价为

$5000\times 10\sqrt{3}=5000\sqrt{3}\approx 86\ 600$(元).

21.(1)**证明**:因为 $\lambda=\sqrt{3}$,所以 $a+b=\sqrt{3}c$,由正弦定理,得 $\sin A+\sin B=\sqrt{3}\sin C$.

因为 $C=\frac{\pi}{3}$,所以 $\sin B+\sin\left(\frac{2\pi}{3}-B\right)=\frac{3}{2}$,$\sin B+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\frac{1}{2}\sin B=\frac{3}{2}$,

所以 $\frac{3}{2}\sin B+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B=\frac{3}{2}$,

则 $\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$,从而 $B+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$ 或 $B+\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}$,$B=\frac{\pi}{6}$ 或 $B=\frac{\pi}{2}$.

若 $B=\frac{\pi}{6}$,则 $A=\frac{\pi}{2}$,$\triangle ABC$ 为直角三角形;若 $B=\frac{\pi}{2}$,$\triangle ABC$ 亦为直角三角形.

(2)**解**:若 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{9}{8}\lambda^2$,则 $\frac{1}{2}a\cdot b=\frac{9}{8}\lambda^2$,所以 $ab=\frac{9}{4}\lambda^2$.

又 $a+b=3\lambda$,由余弦定理,得 $a^2+b^2-c^2=2ab\cos C$,

即 $a^2+b^2-ab=c^2=9$,即 $(a+b)^2-3ab=9$,

故 $9\lambda^2-\frac{27}{4}\lambda^2=9$,$\frac{9}{4}\lambda^2=9$,$\lambda^2=4$,即 $\lambda=2$.

22.**解**:(1)连接 BD,在 $\triangle BCD$ 中,由余弦定理,得 $BD^2=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cdot\cos\angle BCD=(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2-2\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\cos 120°=9$,故 $BD=3$.因为 $BC=CD$,$\angle BCD=120°$,

所以 $\angle BDC=30°$,$\angle BDE=90°$.

所以在 Rt $\triangle BDE$ 中,$BE^2=BD^2+DE^2=3^2+(3\sqrt{3})^2=36$,故 $BE=6$(m).

(2)设 $\angle ABE=\alpha$,则 $\angle AEB=120°-\alpha$.

在 $\triangle ABE$ 中,由正弦定理,得

$\frac{AB}{\sin(120°-\alpha)}=\frac{AE}{\sin\alpha}=\frac{BE}{\sin 60°}=4\sqrt{3}$,

故 $AB=4\sqrt{3}\sin(120°-\alpha)$,

$AE=4\sqrt{3}\sin\alpha$,

$AB+AE=4\sqrt{3}[\sin(120°-\alpha)+\sin\alpha]$

$=4\sqrt{3}(\sin 120°\cos\alpha-\cos 120°\sin\alpha+\sin\alpha)$

$=4\sqrt{3}\left(\frac{3}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha\right)$

$=12\sin(\alpha+30°)$.

因为 $\triangle ABE$ 为锐角三角形,所以 $30°<\alpha<90°$,$60°<\alpha+30°<120°$,

$\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin(\alpha+30°)\leqslant 1$,

所以书架总长度 $AB+AE$ 的取值范围是 $(6\sqrt{3},12]$.

第 3 期
第 3~4 版同步周测参考答案

一、选择题

1.D　2.D　3.A　4.B
5.C　6.B　7.C
8.B

提示:由 $a_n=\begin{cases}S_1, & n=1,\\ S_n-S_{n-1}, & n\geqslant 2,\end{cases}$

得 $a_n=2n-10(n\in\mathbf{N}_+)$.由 $5<2k-10<8$,得 $7.5<k<9$,所以 $k=8$.

9.D

提示:$S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}$,所以 $\frac{S_n}{n}=\frac{a_1+a_n}{2}=-n$,所以 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 的前 11 项的和为 $-(1+2+3+\cdots+11)=-66$.

10.B

提示:钢管排列方式是从上到下各层钢管数组成了一个等差数列,最上面一层钢管数为 1,逐层增加 1 个.所以钢管总数为:$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

当 $n=19$ 时,$S_{19}=190$.当 $n=20$ 时,$S_{20}=210>200$.

所以 $n=19$ 时,剩余钢管根数最少,为 10 根.

11.D **提示**:设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,$S_n=An^2+Bn$,则 $X=An^2+Bn$,$Y=4An^2+2Bn$,$Z=16An^2+4Bn$,

于是 $8X+Z-6Y=8(An^2+Bn)+16An^2+4Bn-6(4An^2+2Bn)=0$,所以 $8X+Z=6Y$,因此D正确.

经过代入验证,可得 $2X+Z\neq 3Y$,$4X+Z\neq 4Y$,$2X+3Z\neq 7Y$,故选D.

12.C **提示**:因为 $S_{2018}>0$,$S_{2019}<0$,

所以 $\frac{2018(a_1+a_{2018})}{2}=\frac{2018(a_{1009}+a_{1010})}{2}>0$,$\frac{2019(a_1+a_{2019})}{2}=2019a_{1010}<0$,

所以 $a_{1009}+a_{1010}>0$,$a_{1010}<0$,所以 $a_{1009}>0$,$a_{1010}<0$,$|a_{1009}|>|a_{1010}|$,

由等差数列的单调性即可得出:此数列中绝对值最小的项为 a_{1010},故选C.

二、填空题

13.$a_n=\sqrt{n}(n\in\mathbf{N}_+)$

14.7525

15.2

16.①②③④ **提示**:因为 $S_6<S_7$,$S_6>S_8$,所以 $S_6<S_6+a_7$,$S_6>S_6+a_7+a_8$,所以 $a_7>0$,$a_7+a_8<0$,所以 $a_7>0$,$a_8<0$,所以①此数列的公差 $d<0$,正确;②因为 $a_7+a_8+a_9<0$,所以 $S_9<S_6$,正确;③$S_{14}=\frac{14(a_1+a_{14})}{2}=7(a_7+a_8)<0$,因此正确;④因为 $a_7>0$,$a_8<0$,$d<0$,所以 S_7 一定是 S_n 中的最大值,正确.

三、解答题

17.**解**:在等差数列 $\{a_n\}$ 中,有

$\begin{cases}a_1+a_2+\cdots+a_6=48,\\ a_{18}+a_{17}+\cdots+a_{13}=192,\end{cases}$

相加,得 $(a_1+a_{18})+\cdots+(a_6+a_{13})=240$.

所以 $6(a_1+a_{18})=240$,所以 $a_1+a_{18}=40$,

所以 $S_{18}=\frac{(a_1+a_{18})\times 18}{2}=360$.

18.**解**:(1)因为 $(1,-10)$,$(3,-2)$ 是等差数列 $\{a_n\}$ 图象上的两点,所以 $a_1=-10$,$a_3=-2$.

由 $a_3=a_1+2d=-10+2d=-2$,解得 $d=4$,

所以 $a_n=4n-14$.

(2)因为一次函数 $y=4x-14$ 是增函数,所以数列 $\{a_n\}$ 是递增数列.

19.**解**:(1)依题意,数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{12}$ 是首项为 20,公差为 15 的等差数列,所以 $a_n=20+15(n-1)=15n+5(1\leqslant n\leqslant 12)$,且 $a_{12}=15\times 12+5=185$;

$a_{13},a_{14},a_{15},\cdots,a_{30}$ 是首项为 $a_{13}=a_{12}-10=175$,公差为 -10 的等差数列,所以 $a_n=175+(n-13)\cdot(-10)=-10n+305(13\leqslant n\leqslant 30)$.

综上,

$a_n=\begin{cases}15n+5(1\leqslant n\leqslant 12,n\in\mathbf{N}_+),\\ -10n+305(13\leqslant n\leqslant 30,n\in\mathbf{N}_+).\end{cases}$

(2)6 月 1 日到 12 日的销售量为 $\frac{12\times(20+185)}{2}=1230$(件),

13 日到 30 日的销售量为 $18\times 175+\frac{18\times 17\times(-10)}{2}=1620$(件),

故 6 月份的总销售量为 $1230+1620=2850$(件).

20.**解**:(1)当 $n=1$ 时,$a_1=S_1=2-30=-28$;

当 $n\geqslant 2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=2n^2-30n-[2\cdot(n-1)^2-30(n-1)]=4n-32$.

当 $n=1$ 时,上式成立.所以 $a_n=4n-32(n\in\mathbf{N}_+)$.

(2)$S_n=2n^2-30n=2\left(n-\frac{15}{2}\right)^2-\frac{225}{2}$.所以当 $n=7$ 或 8 时,S_n 取得最小值.

21.(1)**解**:设 $f(n)=\frac{9n^2-9n+2}{9n^2-1}=\frac{(3n-1)(3n-2)}{(3n-1)(3n+1)}=\frac{3n-2}{3n+1}$.令 $n=10$,得第 10 项 $a_{10}=f(10)=\frac{28}{31}$.

(2)**解**:令 $\frac{3n-2}{3n+1}=\frac{98}{101}$,得 $9n=300$.此方程无正整数解,所以 $\frac{98}{101}$ 不是该数列中的项.

(3)**证明**:因为 $a_n=\frac{3n-2}{3n+1}=\frac{3n+1-3}{3n+1}=1-\frac{3}{3n+1}$,

又 $n\in\mathbf{N}_+$,所以 $0<\frac{3}{3n+1}<1$,所以 $0<a_n<1$.所以数列中的各项都在区间 $(0,1)$ 内.

(4)**解**:令 $\frac{1}{3}<a_n=\frac{3n-2}{3n+1}<\frac{2}{3}$,则 $\begin{cases}3n+1<9n-6,\\ 9n-6<6n+2,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}n>\frac{7}{6},\\ n<\frac{8}{3},\end{cases}$ 所以 $\frac{7}{6}<n<\frac{8}{3}$.

又因为 $n\in\mathbf{N}_+$,所以当且仅当 $n=2$ 时,上式成立,故区间 $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ 上有数列中的项,且只有一项为 $a_2=\frac{4}{7}$.

22.**证明**:(1)因为 $a_{n+1}=a_n+2^n+1$,所以 $(a_{n+1}-2^{n+1})-(a_n-2^n)=a_{n+1}-a_n-2^n=1$,

又因为 $a_1=2$,所以 $a_1-2=0$,所以数列 $\{a_n-2^n\}$ 是首项为0,公差为1的等差数列.

(2)由(1)知,$a_n-2^n=n-1$,所以 $a_n+1-n=2^n$,所以 $b_n=\log_2(a_n+1-n)=\log_2 2^n=n$.

所以 $\frac{1}{b_1b_3}+\frac{1}{b_2b_4}+\frac{1}{b_3b_5}+\cdots+\frac{1}{b_n\cdot b_{n+2}}$

$=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right]$

$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$.

因为 $n\in\mathbf{N}_+$,所以 $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)>0$,所以 $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)<\frac{3}{4}$,所以 $\frac{1}{b_1b_3}+\frac{1}{b_2b_4}+\frac{1}{b_3b_5}+\cdots+\frac{1}{b_n\cdot b_{n+2}}<\frac{3}{4}$.