第8期

第2,3版章节测试题参考答案

一、选择题

1.C

2.C

3.D

提示：$\left(i-\frac{1}{i}\right)^6=(i-i^3)^6=(2i)^6=-64$.

4.B

5.A

提示：由$\frac{1-i}{1+i}=-i$,得$\overrightarrow{OA}=(0,-1)$,$\overrightarrow{OB}=(1,-\sqrt{3})$.

所以$|\overrightarrow{OA}|=1$,$|\overrightarrow{OB}|=2$,$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\sqrt{3}$.

所以$\cos\angle AOB=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

又$0\leqslant\theta\leqslant\pi$,所以$\theta=\frac{\pi}{6}$.

6.D

7.C

8.C

提示：因为$z=\frac{1-i}{1+i}+2i=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}+2i=\frac{-2i}{2}+2i=i$，所以$|z|=1$.故选C.

9.C

提示：$\frac{a}{b}=\frac{3+2i}{4+xi}=\frac{(3+2i)(4-xi)}{16+x^2}=\frac{12+2x}{16+x^2}+\frac{8-3x}{16+x^2}\cdot i\in\mathbf{R}$，所以$\frac{8-3x}{16+x^2}=0$，所以$x=\frac{8}{3}$.

10.B

提示：$\overrightarrow{BA}$对应的复数为$-1+i$,$\overrightarrow{BC}$对应的复数为$3+2i$，因为$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$，

所以$\overrightarrow{BD}$对应的复数为$(-1+i)+(3+2i)=2+3i$,所以BD的长为$\sqrt{13}$.

11.A

提示：设$z=x+yi(x,y\in\mathbf{R})$,则$\bar{z}\cdot i=(x-yi)\cdot i=y+xi=-1+2i$，所以$y=-1,x=2$,故$z=2-i$.故选A.

12.D

提示：由条件知$A=\{-2,-1,0,1,2\}$,

若$z\in\mathbf{R}$,则$a^2-a-2=0$,所以$a=-1$或2,所以$p_1=\frac{2}{5}$；

若$z=0$，则$\begin{cases}a^2-1=0,\\a^2-a-2=0,\end{cases}$所以$a=-1$，所以$p_3=\frac{1}{5}$；

若z为虚数，则$a^2-a-2\neq0$，所以$a\neq-1$且$a\neq2$,

所以$p_2=\frac{3}{5}$；

若z为纯虚数,则$\begin{cases}a^2-1=0,\\a^2-a-2\neq0,\end{cases}$所以$a=1$,所以$p_4=\frac{1}{5}$.

所以$p_3=p_4<p_1<p_2$.

二、填空题

13.5

提示：复数$3-5i,1-i$和$-2+ai$在复平面内对应的点分别为$(3,-5),(1,-1),(-2,a)$，所以由三点共线的条件可得$\frac{-1-(-5)}{1-3}=\frac{a-(-1)}{-2-1}$,解得$a=5$.

14.$\frac{9}{2}$

提示：把$x=1+2i$代入$x^2-mx+2n=0$中,得$(1+2i)^2-m(1+2i)+2n=0$,即$1-4+4i-m-2mi+2n=0$，所以$(2n-m-3)+(4-2m)i=0$，

根据复数相等的充要条件，

得$\begin{cases}-3-m+2n=0,\\4-2m=0,\end{cases}$即$\begin{cases}n=\frac{5}{2},\\m=2,\end{cases}$所以$m+n=\frac{5}{2}+2=\frac{9}{2}$.

15.0

提示：设$z=m+ni(m,n\in\mathbf{R})$,

则$\bar{z}=m-ni$.

所以$b=z\cdot\bar{z}=m^2+n^2$,

$a=\frac{z^2-\bar{z}^2}{2i}=\frac{4mni}{2i}=2mn$.

故$a-b=2mn-(m^2+n^2)=-(m-n)^2\leqslant0$,

即$a-b$的最大值是0.

16.四

三、解答题

17.**解**：因为$z=1+i$,所以$z^2+az+b=(a+2)i+a+b$,$z^2-z+1=i$，所以$\frac{z^2+az+b}{z^2-z+1}=\frac{a+b+(a+2)i}{i}=(a+2)-(a+b)i$.

又$\frac{z^2+az+b}{z^2-z+1}=1-i$,所以$\begin{cases}a+2=1,\\-(a+b)=-1,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=-1,\\b=2.\end{cases}$

18.**解**：设原方程的一个实根为$t=t_0$,则有$(t_0^2+2t_0+2xy)+(t_0+x-y)i=0$.

根据复数相等的充要条件有

$\begin{cases}t_0^2+2t_0+2xy=0,①\\t_0+x-y=0,②\end{cases}$

把②代入①中消去t_0,得$(y-x)^2+2(y-x)+2xy=0$,

即$(x-1)^2+(y+1)^2=2$.

故所求点的轨迹方程为$(x-1)^2+(y+1)^2=2$.

19.**解**：(1)因为$z\in\mathbf{R}$,所以$m^2+2m-3=0$且$m-1\neq0$，解得$m=-3$.

(2)因为z是纯虚数,

所以$\begin{cases}\frac{m(m+2)}{m-1}=0,\\m^2+2m-3\neq0,\end{cases}$

解得$m=0$,或$m=-2$.

(3)因为z对应的点位于复平面第二象限,所以$\begin{cases}\frac{m(m+2)}{m-1}<0,\\m^2+2m-3>0,\end{cases}$

解得$m<-3$.

所以$m\in(-\infty,3)$.

(4)因为z对应的点在直线$x+y+3=0$上,所以$\frac{m(m+2)}{m-1}+(m^2+2m-3)+3=0$,

解得$m=0$,或$m=-2$.

20.**解**：因为$4(a+bi)+2(a-bi)=3\sqrt{3}+i$,

所以$6a+2bi=3\sqrt{3}+i$,

所以$\begin{cases}6a=3\sqrt{3},\\2b=1,\end{cases}$所以$\begin{cases}a=\frac{\sqrt{3}}{2},\\b=\frac{1}{2}.\end{cases}$

所以$z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$,

所以$z-\omega=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)-(\sin\theta-i\cos\theta)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin\theta\right)+\left(\frac{1}{2}+\cos\theta\right)i$,

所以$|z-\omega|$

$=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin\theta\right)^2+\left(\frac{1}{2}+\cos\theta\right)^2}$

$=\sqrt{2-\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta}$

$=\sqrt{2-2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta\right)}$

$=\sqrt{2-2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)}$,

因为$-1\leqslant\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)\leqslant1$,所以$0\leqslant2-2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)\leqslant4$,

所以$0\leqslant|z-\omega|\leqslant2$，故所求得$z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$,$|z-\omega|$的取值范围是$[0,2]$.

21.**解**：因为$z=\frac{(-1+3i)(1-i)-(1+3i)}{i}=\frac{1+i}{i}=1-i$,所以$|z|=\sqrt{2}$.又$\left|\frac{\omega}{z}\right|=\frac{|\omega|}{|z|}\leqslant\sqrt{2}$,所以$|\omega|\leqslant2$.

而$\omega=z+ai=(1-i)+ai=1+(a-1)i$,$a\in\mathbf{R}$,

则$\sqrt{1^2+(a-1)^2}\leqslant2\Rightarrow(a-1)^2\leqslant3$,

所以$-\sqrt{3}\leqslant a-1\leqslant\sqrt{3}$,$1-\sqrt{3}\leqslant a\leqslant1+\sqrt{3}$．即$a$的取值范围为$[1-\sqrt{3},1+\sqrt{3}]$.

22.(1)**解**：设$z_1=a+bi(a,b\in\mathbf{R}$且$b\neq0)$，则$z_2=z_1+\frac{1}{z_1}=a+bi+\frac{1}{a+bi}=\left(a+\frac{a}{a^2+b^2}\right)+\left(b-\frac{b}{a^2+b^2}\right)i$.

因为z_2是实数,$b\neq0$，于是有$a^2+b^2=1$,即$|z_1|=1$,还可得$z_2=2a$.

由$-1\leqslant z_2\leqslant1$，得$-1\leqslant2a\leqslant1$，解得$-\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$,即$z_1$的实部的取值范围是$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

(2)**证明**：$\omega=\frac{1-z_1}{1+z_1}=\frac{1-a-bi}{1+a+bi}=\frac{1-a^2-b^2-2bi}{(1+a)^2+b^2}=-\frac{b}{a+1}i$.

因为$a\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$,$b\neq0$，所以$\omega$为纯虚数.

第5期

第3版同步周测题参考答案

一、选择题

1.B 2.B 3.B 4.D

5.C

提示：因为$b-c=1+x-\frac{1}{1-x}=\frac{-x^2}{1-x}<0$,所以$b<c$.又因为$b=1+x>\sqrt{2x}=a$,所以$a<b<c$.

6.A

7.A

提示：$y=\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin2x$,所以函数的周期为$\pi$,且为奇函数.故选A.

8.B

提示：直接由等差中项，等比中项的定义代入即可,或特值代入验证.

9.C

提示：要证$\sqrt{b^2-ac}<\sqrt{3}a$,只需证$b^2-ac<3a^2$,只需证$(-a-c)^2-ac<3a^2$,即证$(a+c+a)(a-c)>0$,亦即证$(a-b)(a-c)>0$.故选C.

10.C

提示：由已知,得"$\exists x\in[1,2]$,$\lambda>2x+\frac{1}{x}$"是假命题,故$\forall x\in[1,2]$,$\lambda\leqslant2x+\frac{1}{x}$恒成立.令$f(x)=2x+\frac{1}{x}$,$x\in[1,2]$,则$f'(x)=2-\frac{1}{x^2}=\frac{2}{x^2}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)>0$,故$f(x)$在$[1,2]$上单调递增,从而$[f(x)]_{\min}=f(1)=3$,所以$\lambda\leqslant3$.故选C.

11.C

提示：若$f(x)$的图象关于$x=a$对称,则$f(a+x)=f(a-x)$,故$f'(a+x)=-f'(a-x)$,从而$f'(x)$的图象关于点$(a,0)$对称.以上步步可逆,所以"$f'(x)$的图象关于点$(a,0)$对称"是"$f(x)$的图象关于$x=a$对称"的充要条件.

12.B

提示：将施行变换的各数依次记作$a_i(i=1,2,\cdots,8)$,则$a_i\in\mathbf{N}_+$,且$a_8=1$,则$a_7=2\Rightarrow a_6=4\Rightarrow a_5=8$或$1\Rightarrow a_4=16$或$2\Rightarrow a_3=32$,或5或$4\Rightarrow a_2=64$,或10,或8或$1\Rightarrow a_1=128$,或21,或20,或3,或16或2.故选B.

二、填空题

13.函数$f(x)=4x^2-2(p-2)x-2p^2-p+1$在区间$[-1,1]$上恒小于等于0

14.④

提示：因为$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$,所以$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}$,所以$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$,所以四边形$ABCD$为平行四边形.

15.(10,5)

提示：设(△,□)为(a,b)，则$30-a=4b$,即$a+4b=30$,$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\cdot\frac{a+4b}{30}=\frac{5+\frac{4b}{a}+\frac{a}{b}}{30}\geqslant\frac{5+4}{30}=\frac{3}{10}$，当且仅当$\frac{4b}{a}=\frac{a}{b}$，即$a=2b$时等号成立,此时$a=10,b=5$.

16.$AC\perp BD$

提示：从结论出发,找一个使$A_1C\perp B_1D_1$成立的充分条件,可以是:$AC\perp BD$或四边形$ABCD$为正方形等.

三、解答题

17.**证明**：左边$=(\sin\theta+\sin^2\theta+\cos\theta+\cos^2\theta)\left[\sqrt{2}\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{4}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{4}\right)-1\right]=(\sin\theta+\cos\theta+1)(\sin\theta+\cos\theta-1)=(\sin\theta+\cos\theta)^2-1=2\sin\theta\cos\theta=\sin2\theta=$右边,所以原等式成立.

18.**证明**：假设方程$f(x)=0$在区间$[a,b]$上至少有两个不同的实数根α,β,

即$f(\alpha)=f(\beta)=0$,不妨设$\alpha<\beta$.

由于函数$f(x)$在区间$[a,b]$上是增函数,故$f(\alpha)<f(\beta)$,这与$f(\alpha)=f(\beta)=0$矛盾.

所以方程$f(x)=0$在区间$[a,b]$上至多只有一个实数根.

19.**解**：上述解法中,对$ab\leqslant\frac{1}{4}$的证明是错误的.因为$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$成立的条件是$a\geqslant0,b\geqslant0$,而原题条件是$a\geqslant-\frac{1}{2}$，$b\geqslant-\frac{1}{2}$,不满足上述条件.

正确解答为:在错解中,得$\sqrt{2a+1}\cdot\sqrt{2b+1}\leqslant2$.

因为$a\geqslant-\frac{1}{2}$,$b\geqslant-\frac{1}{2}$,所以$2a+1\geqslant0,2b+1\geqslant0$.

所以$\sqrt{2a+1}\cdot\sqrt{2b+1}\leqslant\frac{(2a+1)+(2b+1)}{2}=\frac{2(a+b+1)}{2}=2$,即$\sqrt{2a+1}\cdot\sqrt{2b+1}\leqslant2$成立,

因此原不等式成立.

20.**证明**：要证$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}=1$,

只需证$\frac{a^2+ac+b^2+bc}{ab+bc+ac+c^2}=1$,

即证$a^2+b^2-c^2=ab$.

在△ABC中,

因为$A+B=120°$,

所以$C=60°$.

又根据余弦定理,

得$a^2+b^2-c^2=2ab\cdot\cos60°=ab$.

所以原式成立.

21.**证明**：(1)要证$\sqrt{a_1}+\sqrt{a_3}<2\sqrt{a_2}$,

只要证$(\sqrt{a_1}+\sqrt{a_3})^2<(2\sqrt{a_2})^2$,

即证$a_1+a_3+2\sqrt{a_1a_3}<4a_2$.

因为$\{a_n\}$是等差数列,

所以$a_1+a_3=2a_2$,

所以只要证$\sqrt{a_1a_3}<a_2$,

即证$a_1a_3<a_2^2=\left(\frac{a_1+a_3}{2}\right)^2$.

结合基本不等式可知上式显然成立,所以$\sqrt{a_1}+\sqrt{a_3}<2\sqrt{a_2}$.

(2)假设$1-a_n,1-a_{n+1},1-a_{n+2}$成等比数列,则$(1-a_{n+1})^2=(1-a_n)(1-a_{n+2})$,即$1-2a_{n+1}+a_{n+1}^2=1-(a_n+a_{n+2})+a_na_{n+2}$,(*)

因为$\{a_n\}$是等比数列,所以$a_{n+1}^2=a_na_{n+2}$,代入(*)式,得$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$,

所以等比数列$\{a_n\}$又是等差数列.

所以$\{a_n\}$是常数列,与已知相矛盾,故假设不成立.所以$1-a_n,1-a_{n+1},1-a_{n+2}$不可能成等比数列.

22.(1)**证明**：由$f(a)+f(b)=0$,得$\lg\frac{1-a}{1+a}+\lg\frac{1-b}{1+b}=0$,$\lg\left(\frac{1-a}{1+a}\cdot\frac{1-b}{1+b}\right)=0$,

$\frac{1-a}{1+a}\cdot\frac{1-b}{1+b}=1$,化简得$a+b=0$.

(2)**解**：由已知,得$f\left(\frac{1}{2}\right)=\lg\frac{1}{3}$,$f\left(\frac{1}{3}\right)=\lg\frac{1}{2}$,$f(x_0)=\lg\frac{1-x_0}{1+x_0}$,代入$f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)=f(x_0)$中,解得$x_0=\frac{5}{7}$.

(3)**解**：假设存在x_3,使得$f(x_1)+f(x_2)=f(x_3)$,

则$\lg\left(\frac{1-x_1}{1+x_1}\cdot\frac{1-x_2}{1+x_2}\right)=\lg\frac{1-x_3}{1+x_3}$,解得$x_3=\frac{x_1+x_2}{1+x_1x_2}$.下面证明$\frac{x_1+x_2}{1+x_1x_2}\in(-1,1)$.

因为$x_1,x_2\in(-1,1)$,所以$1+x_1x_2>0$.

要证$\frac{x_1+x_2}{1+x_1x_2}<1$,即证$x_1+x_2<1+x_1x_2$,

只要证$(x_1-1)(x_2-1)>0$.显然$x_1-1<0,x_2-1<0$,所以上式成立,所以$\frac{x_1+x_2}{1+x_1x_2}<1$.

同理可证$\frac{x_1+x_2}{1+x_1x_2}>-1$.

所以存在$x_3=\frac{x_1+x_2}{1+x_1x_2}$满足题意.

第6期

第2~3版章节测试题参考答案

一、选择题

1.B

提示：A，C，D是归纳推理，B是演绎推理，故选B.

2.D

提示：观察可知，末位数字依次是3，9，7，1，以4为周期进行循环，又$2018=4\times504+2$，所以3^{2018}的末位数字为9.

3.C

提示：正三角形的边对应正四面体的面，所以边的中点对应的就是正三角形的中心.

4.A

5.B

提示："a,b至少有一个能被5整除"的反面是"a,b都不能被5整除".

6.A

提示：由题意知，$f(x)$在$(0,+\infty)$上为减函数，在A、B、C、D四选项中，由基本初等函数性质知，A在$(0,+\infty)$上是减函数，故选A.

7.D

提示：由已知等式，得$\dfrac{\tan\frac{\pi}{5}+\frac{b}{a}}{1-\frac{b}{a}\tan\frac{\pi}{5}}=\tan\dfrac{8\pi}{15}$，设$\tan\theta=\dfrac{b}{a}$，则有$\tan\left(\dfrac{\pi}{5}+\theta\right)=\tan\dfrac{8\pi}{15}$，所以$\dfrac{\pi}{5}+\theta=k\pi+\dfrac{8\pi}{15}(k\in\mathbf{Z})$，得$\theta=k\pi+\dfrac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$.所以$\tan\theta=\tan\left(k\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$，即$\dfrac{b}{a}=\sqrt{3}$.

8.C

提示：垂直于同一个平面的两条直线平行.

9.A

提示：只有③不一定成立.

10.B

提示：因为α,β是锐角三角形的两个内角，所以$\alpha+\beta>\dfrac{\pi}{2}$，所以$0<\dfrac{\pi}{2}-\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$，$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)<\sin\beta$，即$0<\cos\alpha<\sin\beta<1$.因为函数$f(x)$在$[-1,1]$上是减函数，所以$f(\cos\alpha)>f(\sin\beta)$.

11.A

提示：不妨设$x_1-2<0,x_2-2>0$，则$x_1<2,x_2>2$，所以$2<x_2<4-x_1$，

所以$f(x_2)<f(4-x_1)$，即$-f(x_2)>-f(4-x_1)$，从而$-f(x_2)>-f(4-x_1)=f(x_1)$，$f(x_1)+f(x_2)<0$.

12.C

二、填空题

13.同角的补角相等

14.$(a-b)(a^n+a^{n-1}b+\cdots+ab^{n-1}+b^n)=a^{n+1}-b^{n+1}$

15.$\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

16.962

提示：观察所给前4个等式右边第一项的系数，知$2=2^1,8=2^3,32=2^5,128=2^7$，由此可推导出$m=2^9=512$.

再观察发现，各式右边每项系数的和均为1，则$m+n+p-1280+1120-1=1$，得$m+n+p=162$.

又观察每式展开的2次幂系数有依次正负相间的规律，得p应为正值，现只考察2，8，18，32，p这几个数的规律，发现每项与前项的差成等差数列6，10，14，…，则$p=32+18=50$.将$m=512$，$p=50$，代入$m+n+p=162$，得$n=-400$，从而得$m-n+p=962$.

三、解答题

17.**证明**：因为a，b，c为正实数，由基本不等式，得

$\dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{b^3}+\dfrac{1}{c^3}\geqslant3\sqrt[3]{\dfrac{1}{a^3}\cdot\dfrac{1}{b^3}\cdot\dfrac{1}{c^3}}$，

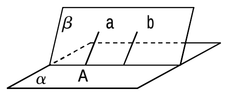
即$\dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{b^3}+\dfrac{1}{c^3}\geqslant\dfrac{3}{abc}$，

所以$\dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{b^3}+\dfrac{1}{c^3}+abc\geqslant\dfrac{3}{abc}+abc$.

又$\dfrac{3}{abc}+abc\geqslant2\sqrt{\dfrac{3}{abc}\cdot abc}=2\sqrt{3}$，

所以$\dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{b^3}+\dfrac{1}{c^3}+abc\geqslant2\sqrt{3}$.

18.**证明**：原命题可用数学语言表述为：已知$a/\!/b$，直线$a\cap$平面$\alpha=A$，如图所示，则直线b和平面α相交.



（第18题图）

假设b与平面α不相交，

则$b\subset\alpha$，或$b/\!/\alpha$.

(1)若$b\subset\alpha$，因为$a/\!/b$，$a\not\subset\alpha$，

所以$a/\!/\alpha$，这与$a\cap\alpha=A$相矛盾.

(2)若$b/\!/\alpha$，因为$a/\!/b$，所以a和b可确定一个平面β，显然平面α与平面β相交.

设$\alpha\cap\beta=c$，因为$b/\!/\alpha$，所以$b/\!/c$.

又$a/\!/b$，所以$a/\!/c$，且$a\not\subset\alpha,c\subset\alpha$.

故$a/\!/\alpha$，这与$a\cap\alpha=A$矛盾.

根据(1)(2)，可知假设不成立.故直线b与平面α相交，原命题得证.

19.**证明**：要证原式，只要证$\dfrac{a+b+c}{a+b}+\dfrac{a+b+c}{b+c}=3$，即证$\dfrac{c}{a+b}+\dfrac{a}{b+c}=1$，

即只要证$\dfrac{bc+c^2+a^2+ab}{ab+b^2+ac+bc}=1$.

易知$A+C=2B$，则$B=60°$，$b^2=a^2+c^2-ac$，

所以$\dfrac{bc+c^2+a^2+ab}{ab+b^2+ac+bc}$

$=\dfrac{bc+c^2+a^2+ab}{ab+a^2+c^2-ac+ac+bc}$

$=\dfrac{bc+c^2+a^2+ab}{ab+a^2+c^2+bc}=1$.

所以原等式成立.

20.**解**：根据类比猜想得出$S^2_{AA_1C_1C}=S^2_{ABB_1A_1}+S^2_{BCC_1B_1}-2S_{ABB_1A_1}\cdot S_{BCC_1B_1}\cdot\cos\theta$，其中$\theta$为侧面$ABB_1A_1$与$BCC_1B_1$所成的二面角的平面角.

证明如下：作斜三棱柱ABC-$A_1B_1C_1$的直截面DEF，D，E，F分别在棱AA_1，CC_1，BB_1上，则$\angle DFE$为平面ABB_1A_1与平面BCC_1B_1所成的角，设为θ.在$\triangle DEF$中有余弦定理：$DE^2=DF^2+EF^2-2DF\cdot EF\cos\theta$，

等式左右两边同乘以AA_1^2，得

$DE^2\cdot AA_1^2=DF^2\cdot AA_1^2+EF^2\cdot AA_1^2-2DF\cdot AA_1\cdot EF\cdot AA_1\cos\theta$，

即$S^2_{AA_1C_1C}=S^2_{ABB_1A_1}+S^2_{BCC_1B_1}-2S_{ABB_1A_1}\cdot S_{BCC_1B_1}\cdot\cos\theta$.

21.**证明**：要证明$\dfrac{a}{a+m}+\dfrac{b}{b+m}>\dfrac{c}{c+m}$，只需证明$\dfrac{a}{a+m}+\dfrac{b}{b+m}-\dfrac{c}{c+m}>0$即可.

因为$\dfrac{a}{a+m}+\dfrac{b}{b+m}-\dfrac{c}{c+m}=\dfrac{a(b+m)(c+m)+b(a+m)(c+m)-c(a+m)(b+m)}{(a+m)(b+m)(c+m)}$，

因为$a>0,b>0,c>0,m>0$，

所以$(a+m)(b+m)(c+m)>0$，

因为$a(b+m)(c+m)+b(a+m)(c+m)-c(a+m)(b+m)=abc+abm+acm+am^2+abc+abm+bcm+bm^2-abc-bcm-acm-cm^2=2abm+am^2+abc+bm^2-cm^2=2abm+abc+(a+b-c)m^2$，

因为$\triangle ABC$中任意两边之和大于第三边，

所以$a+b-c>0$，所以$(a+b-c)m^2>0$，

所以$2abm+abc+(a+b-c)m^2>0$，

所以$\dfrac{a}{S+m}+\dfrac{b}{b+m}>\dfrac{c}{c+m}$.

22.**解**：$\triangle ABC$是锐角三角形.

因为$c^n=a^n+b^n(n>2)$，所以$c>a,c>b$，由c是$\triangle ABC$的最大边，所以要证$\triangle ABC$是锐角三角形，只需证角C为锐角，即证$\cos C>0$.

因为$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，

所以要证$\cos C>0$，

只要证$a^2+b^2>c^2$，　①

注意到条件：$a^n+b^n=c^n$，

于是将①等价变形为：

$(a^2+b^2)c^{n-2}>c^n$.　②

因为$c>a,c>b,n>2$，

所以$c^{n-2}>a^{n-2},c^{n-2}>b^{n-2}$，

即$c^{n-2}-a^{n-2}>0,c^{n-2}-b^{n-2}>0$，

从而$(a^2+b^2)c^{n-2}-c^n=(a^2+b^2)c^{n-2}-a^n-b^n=a^2(c^{n-2}-a^{n-2})+b^2(c^{n-2}-b^{n-2})>0$，

这说明②式成立，从而①式也成立.

故$\cos C>0$，C是锐角，所以$\triangle ABC$为锐角三角形.

第7期

第3版同步周测题参考答案

一、选择题

1.B

2.D

3.A

提示：$z=(1-2i)+(3+i)=4-i$，所以$\bar{z}=4+i$.故选A.

4.C

提示：$|z|=\sqrt{\left(\sin\dfrac{\pi}{3}\right)^2+\left(\cos\dfrac{\pi}{3}\right)^2}=1$，故选C.

5.B

6.A

提示：$|AB|=|2i-1|=\sqrt{5}$，$|AC|=|4+2i|=\sqrt{20}$，$|BC|=5$，所以$|BC|^2=|AB|^2+|AC|^2$.故选A.

7.B

8.B

9.B

10.C

提示：设$z=x+yi(x,y\in\mathbf{R})$.

由已知，得$x^2+y^2+i(2yi)\leqslant0$，

即$x^2+y^2-2y\leqslant0$，即$x^2+(y-1)^2\leqslant1$.

故选C.

11.C

提示：$z^2=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$，$z^3=-1$，$z^4=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$，$z^5=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$，$z^6=1$，所以原式$=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)+(-1+\sqrt{3}i)+(-3)+(-2-2\sqrt{3}i)+\left(\dfrac{5}{2}-\dfrac{5\sqrt{3}}{2}i\right)+6=3-3\sqrt{3}i=6\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=6\bar{z}$.

12.A

提示：设$z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，所以$|2z+1|=\sqrt{(2a+1)^2+4b^2}$，

$|z-i|=\sqrt{a^2+(b-1)^2}$，所以$\sqrt{(2a+1)^2+4b^2}=\sqrt{a^2+(b-1)^2}$，整理得：$a^2+b^2+\dfrac{4}{3}a+\dfrac{2}{3}b=0$，所以$z$对应的点的轨迹是圆.

故选A.

二、填空题

13.2

提示：$z_1+z_2=(\sqrt{3m-1}-2mi)+(-m+m^2i)$

$=(\sqrt{3m-1}-m)+(m^2-2m)i$.

因为$z_1+z_2>0$，

所以z_1+z_2为实数且大于0，

所以$\begin{cases}\sqrt{3m-1}-m>0,\\m^2-2m=0,\\3m-1\geqslant0,\end{cases}$

解得$m=2$.

14.2

15.1

提示：复数z_1和z_2在复平面内对应的点A的坐标为$(1,1)$，B的坐标为$(-1,1)$，所以$S_{\triangle AOB}=\dfrac{1}{2}\times2\times1=1$.

16.$\dfrac{1}{6}$

提示：设掷两颗骰子共有36种结果.因为$(m+ni)^2=m^2-n^2+2mni$，所以要使复数$(m+ni)^2$为纯虚数，则有$m^2-n^2=0$，即$m=n$，共有6种结果，所以复数$(m+ni)^2$为纯虚数的概率为$\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$.

三、解答题

17.**解**：(1)$\dfrac{1-\sqrt{3}i}{(\sqrt{3}+i)^2}=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2+2\sqrt{3}i}$

$=\dfrac{(1-\sqrt{3}i)^2}{2(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)}$

$=-\dfrac{1}{4}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}i$.

(2)$\dfrac{(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^3(4+5i)}{(5-4i)(1-i)}$

$=\dfrac{2\sqrt{2}(1+i)^2(1+i)(4+5i)}{(5-4i)(1-i)}$

$=\dfrac{2\sqrt{2}\cdot2i\cdot2i(4+5i)(5+4i)}{(5-4i)(5+4i)(1-i)(1+i)}$

$=\dfrac{-8\sqrt{2}\times41i}{41\times2}=-4\sqrt{2}i$.

18.**解**：(1)要使复数z对应点在x轴下方，则$m^2-2m-15<0$，解得$-3<m<5$.

(2)要使复数z对应点在第四象限，则$\begin{cases}m^2+5m+6>0,\\m^2-2m-15<0,\end{cases}$解得$-2<m<5$.

(3)要使复数z对应点在直线$x+y+4=0$上，则$(m^2+5m+6)+(m^2-2m-15)+4=0$，解得$m=1$，或$m=-\dfrac{5}{2}$.

19.**解**：(1)因为$z=\cos A+i\sin A$，所以$z+1=1+\cos A+i\sin A$.

所以$|z+1|=\sqrt{(1+\cos A)^2+\sin^2A}=\sqrt{2+2\cos A}$.

因为$|z+1|=1$.所以$2+2\cos A=1$.所以$\cos A=-\dfrac{1}{2}$.又$0<A<180°$，所以$A=120°$.

所以$\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.所以复数$z=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

(2)由正弦定理，得$a=2R\cdot\sin A$，$b=2R\cdot\sin B$，$c=2R\cdot\sin C$（其中R为$\triangle ABC$外接圆的半径），

所以原式$=\dfrac{\sin B-\sin C}{\sin A\cdot\cos(60°+C)}$.

因为$B=180°-A-C=60°-C$，

所以原式$=\dfrac{\sin(60°-C)-\sin C}{\sin120°\cdot\cos(60°+C)}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C-\frac{3}{2}\sin C}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos(60°+C)}=\dfrac{\cos C-\sqrt{3}\sin C}{\cos(60°+C)}=\dfrac{2\cos(60°+C)}{\cos(60°+C)}=2$，

即$\dfrac{b-c}{a\cos(60°+C)}$的值为2.

20.**解**：因为$(x+\sqrt{3}i)^3=\log_{\sqrt{2}}\dfrac{1}{2^4}=-8$，所以$\left(\dfrac{x+\sqrt{3}i}{-2}\right)^3=1$，

所以$\dfrac{x+\sqrt{3}i}{-2}=1$或$\dfrac{x+\sqrt{3}i}{-2}=\omega$或$\dfrac{x+\sqrt{3}i}{-2}=\bar{\omega}\left(其中\ \omega=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$.

若$x+\sqrt{3}i=-2$，则$x\notin\mathbf{R}$.

若$x+\sqrt{3}i=-2\omega=1-\sqrt{3}i$，则$x\notin\mathbf{R}$.

若$x+\sqrt{3}i=-2\bar{\omega}=1+\sqrt{3}i$，则$x=1$.

综上可知，存在满足题意的实数x且$x=1$.

21.**解**：依题意得z_1+z_2为实数，因为$z_1+z_2=\dfrac{3}{a+5}+\dfrac{2}{1-a}+[(a^2-10)+(2a-5)]i$，

所以$\begin{cases}a^2+2a-15=0,\\a+5\neq0,\\1-a\neq0.\end{cases}$所以$a=3$.此时$z_1=\dfrac{3}{8}-i$，$z_2=-1+i$，

即$\overrightarrow{OZ_1}=\left(\dfrac{3}{8},-1\right)$，$\overrightarrow{OZ_2}=(-1,1)$.

所以$\overrightarrow{OZ_1}\cdot\overrightarrow{OZ_2}=\dfrac{3}{8}\times(-1)+(-1)\times1=-\dfrac{11}{8}$.

22.**解**：由题意，得$z_1=\dfrac{-1+5i}{1+i}=2+3i$，

于是$|z_1-\overline{z_2}|=|4-a+2i|$

$=\sqrt{(4-a)^2+4}$，$|z_1|=\sqrt{13}$.

由$\sqrt{(4-a)^2+4}<\sqrt{13}$，

得$a^2-8a+7<0$，解得$1<a<7$.

所以实数a的取值范围是$(1,7)$.