第 28 期

第 2~3 版专题检测题参考答案

一、选择题

1~6.BBCBBD　7~12.BBBBCB

二、填空题

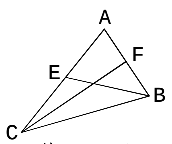
13.$\frac{4\sqrt{5}}{5}$　14.$2-\sqrt{3}$　15.$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

16.$\left(\frac{1}{4},\frac{7}{8}\right)$

提示: 因为 $3\sin C=2\sin B$,所以 $3AB=2AC$,所以 $AC=\frac{3}{2}AB$. 又因为点 E,F 分别是 AC,AB 的中点,所以 $AE=\frac{1}{2}AC,AF=\frac{1}{2}AB$.在 $\triangle ABE$ 中,由余弦定理,得 $BE^2=AB^2+AE^2-2AB\cdot AE\cos A=AB^2+\left(\frac{3}{4}AB\right)^2-2AB\times\frac{3}{4}AB\times\cos A=\frac{25}{16}AB^2-\frac{3}{2}AB^2\cos A$.在 $\triangle ACF$ 中,由余弦定理,得 $CF^2=AF^2+AC^2-2AF\cdot AC\cos A=\left(\frac{1}{2}AB\right)^2+\left(\frac{3}{2}AB\right)^2-2\times\frac{1}{2}AB\times\frac{3}{2}AB\times\cos A=\frac{5}{2}AB^2-\frac{3}{2}AB^2\cos A$.所以

$$\frac{BE}{CF}=\sqrt{\frac{\frac{25}{16}AB^2-\frac{3}{2}AB^2\cos A}{\frac{5}{2}AB^2-\frac{3}{2}AB^2\cos A}}=\sqrt{1-\frac{15}{40-24\cos A}}.$$

因为 $A\in(0,\pi)$,所以 $\cos A\in(-1,1)$,所以 $\frac{15}{40-24\cos A}\in\left(\frac{15}{64},\frac{15}{16}\right)$,所以 $\frac{BE}{CF}=\sqrt{1-\frac{15}{40-24\cos A}}\in\left(\frac{1}{4},\frac{7}{8}\right)$.



(第 16 题图)

三、解答题

17.**解:**(1)在 $\triangle ADC$ 中,

因为 $AD=1,AC=2,DC=\frac{1}{2}BC=2$,

所以由余弦定理的推论,得

$$\cos C=\frac{AC^2+DC^2-AD^2}{2AC\cdot DC}=\frac{2^2+2^2-1^2}{2\times2\times2}=\frac{7}{8}.$$

在 $\triangle ABC$ 中,由余弦定理,得

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=4^2+2^2-2\times4\times2\times\frac{7}{8}=6$,

所以 $c=\sqrt{6}$.

(2)因为 AD 为边 BC 上的中线,

所以 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$,

所以 $c^2=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}c^2+\frac{1}{2}cb\cos A$,

所以 $c=b\cos A$.所以 $AB\perp BC$,所以 $B=90°$.

18.**解:**(1)$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=2\sin\frac{A}{2}-\left(2\cos^2\frac{B+C}{2}-1\right)=2\sin\frac{A}{2}-\cos(B+C)$.因为 $A+B+C=\pi$,所以 $B+C=\pi-A$,于是 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=2\sin\frac{A}{2}+\cos A=-2\sin^2\frac{A}{2}+2\sin\frac{A}{2}+1=-2\left(\sin\frac{A}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}$.因为 $\frac{A}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,所以当且仅当 $\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}$,即 $A=\frac{\pi}{3}$ 时,$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}$ 取得最大值 $\frac{3}{2}$.故 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}$ 取得最大值时,$A=\frac{\pi}{3}$.

(2)设角 A,B,C 所对的边长分别为 a,b,c,由余弦定理,得 $b^2+c^2-a^2=2bc\cos A$,即 $bc+4=b^2+c^2\geqslant2bc$,所以 $bc\leqslant4$,当且仅当 $b=c=2$ 时取等号.又 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{4}bc\leqslant\sqrt{3}$,故当且仅当 $a=b=c=2$ 时,$\triangle ABC$ 的面积最大,最大值为 $\sqrt{3}$.

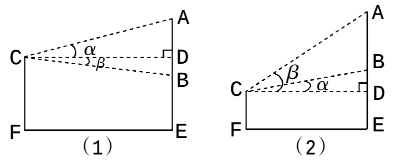
19.(1)**证明:** 因为 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$,所以 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=2$,即 $\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=2$,因为 $\boldsymbol{a}^2=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$,$\boldsymbol{b}^2=\cos^2\beta+\sin^2\beta=1$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,所以 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

(2)**解:** 因为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(\cos\alpha+\cos\beta,\sin\alpha+\sin\beta)=(0,1)$,所以 $\begin{cases}\cos\alpha+\cos\beta=0,①\\\sin\alpha+\sin\beta=1,②\end{cases}$

由①²+②²,得 $\cos(\beta-\alpha)=-\frac{1}{2}$.因为 $0<\alpha<\beta<\pi$,所以 $0<\beta-\alpha<\pi$,所以 $\beta-\alpha=\frac{2\pi}{3}$,即 $\beta=\alpha+\frac{2\pi}{3}$,代入②得 $\sin\alpha+\sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)=1$,整理得 $\frac{1}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha=1$,即 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=1$.因为 $0<\alpha<\pi$,所以 $\frac{\pi}{3}<\alpha+\frac{\pi}{3}<\frac{4\pi}{3}$,所以 $\alpha+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$,所以 $\alpha=\frac{\pi}{6}$,$\beta=\alpha+\frac{2\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}$.

20.**解:**(1)如图(1)所示,由题意知,$\tan\alpha=\frac{4-h}{4}$,$\tan\beta=\frac{h-2}{4}$,所以 $\tan\theta=\tan(\alpha+\beta)=\frac{\frac{4-h}{4}+\frac{h-2}{4}}{1-\frac{4-h}{4}\cdot\frac{h-2}{4}}=\frac{8}{(h-3)^2+15}$,$2<h<4$.当 $h=3$ 时,$\tan\theta$ 取得最大值为 $\frac{8}{15}$.因为函数 $y=\tan\theta$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上是增函数,所以当 $h=3$ 时 θ 取得最大值.

(2)如图(2)所示,由题意知,$\tan\alpha=\frac{2-1.5}{x}$,$\tan\beta=\frac{4-1.5}{x}$,所以 $\tan\theta=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\frac{2.5}{x}-\frac{0.5}{x}}{1+\frac{2.5}{x}\cdot\frac{0.5}{x}}=\frac{2}{x+\frac{5}{4x}}\leqslant\frac{2}{\sqrt{5}}$,$0<x<4$,当且仅当 $x=\frac{\sqrt{5}}{2}$ 时,等号成立,所以 $x=\frac{\sqrt{5}}{2}$ 时,视角 θ 取得最大值.



(第 20 题图)

21.**解:**(1)由 $a\cos A=b\cos B$ 及正弦定理,可得 $\sin A\cos A=\sin B\cos B$,即 $\sin2A=\sin2B$,又 $A\in(0,\pi)$,$B\in(0,\pi)$,所以 $A=B$ 或 $A+B=\frac{\pi}{2}$.因为 $C=\frac{\pi}{3}$,所以 $A+B=\frac{2\pi}{3}$,与 $A+B=\frac{\pi}{2}$ 矛盾,所以 $A=B$,所以 $B=\frac{\pi}{3}$.

(2)由题设,在 $Rt\triangle PMB$ 中,$PM=PB\cdot\sin\angle PBM=2\sin\alpha$;在 $Rt\triangle PNB$ 中,$PN=PB\cdot\sin\angle PBN=PB\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}-\angle PBA\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$,$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$,所以 $PM+PN=2\sin\alpha+2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha=2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$. 因为 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$,所以 $\alpha+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$,故当 $\alpha+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$,即 $\alpha=\frac{\pi}{6}$ 时,$PM+PN$ 取得最大值 2.

22.**解:**(1)由已知得 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\left(k\sin\frac{x}{3},\cos^2\frac{x}{3}\right)\cdot\left(\cos\frac{x}{3},-k\right)=k\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}-k\cos^2\frac{x}{3}=\frac{1}{2}k\sin\frac{2x}{3}-k\cdot\frac{1+\cos\frac{2x}{3}}{2}=\frac{k}{2}\left(\sin\frac{2x}{3}-\cos\frac{2x}{3}\right)-\frac{k}{2}=\frac{\sqrt{2}k}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{2x}{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{2x}{3}\right)-\frac{k}{2}=\frac{\sqrt{2}k}{2}\sin\left(\frac{2x}{3}-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{k}{2}$.因为 $x\in\mathbf{R}$,$k>0$,所以 $f(x)$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{2}-1}{2}k=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$,所以 $k=1$.

(2)由(1)知,$f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{2x}{3}-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}$,所以 $f(A)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{2A}{3}-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}=0$,化简,得 $\sin\left(\frac{2A}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.因为 $\frac{\pi}{2}<A<\pi$,所以 $\frac{\pi}{12}<\frac{2A}{3}-\frac{\pi}{4}<\frac{5\pi}{12}$,则 $\frac{2A}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$,解得 $A=\frac{3\pi}{4}$.因为 $\cos A=-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b^2+c^2-40}{2bc}$,所以 $b^2+c^2+\sqrt{2}bc=40$,则 $b^2+c^2+\sqrt{2}bc=40\geqslant2bc+\sqrt{2}bc$,所以 $bc\leqslant\frac{40}{2+\sqrt{2}}=20(2-\sqrt{2})$,则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}bc\geqslant20(1-\sqrt{2})$,所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 的最小值为 $20(1-\sqrt{2})$.

第 25 期

第 2~3 版专题检测题参考答案

一、选择题

1~6.CDABBD　7~12.DAAABB

二、填空题

13.$\sqrt{3}$　14.$-\frac{9}{7}$　15.2

16.②③④

提示: 将函数 $f(x)=\sqrt{3}\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-1$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度,得到 $y=\sqrt{3}\cos\left[2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{3}\right]-1=\sqrt{3}\cos(2x+\pi)-1=-\sqrt{3}\cos2x-1$ 的图象;

再向上平移 1 个单位长度,得到函数 $g(x)=-\sqrt{3}\cos2x$ 的图象.

对于函数 $g(x)$:

它的最大值为 $\sqrt{3}$,

因为当 $x=-\frac{\pi}{3}$ 时,$g(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$,不是最值,所以 $g(x)$ 的图象不关于直线 $x=-\frac{\pi}{3}$ 对称,故排除①;

因为 $g(x)$ 为偶函数,所以它的图象关于 y 轴对称,故②正确;

$g(x)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2}=\pi$,故③正确;

因为当 $x=\frac{\pi}{4}$ 时,$g(x)=0$,所以函数 $g(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{4},0\right)$ 对称,故④正确;

因为在 $\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$ 上,$2x\in\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)$,$g(x)$ 不是单调函数,所以排除⑤.故答案为:②③④.

三、解答题

17.**解:**(1)

$$f(\alpha)=\frac{\sin(2\pi-\alpha)\cos(\pi+\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos(\pi-\alpha)\sin(3\pi-\alpha)\cos(-\pi-\alpha)}=\frac{-\sin\alpha(-\cos\alpha)(-\sin\alpha)}{(-\cos\alpha)\sin\alpha(-\cos\alpha)}=-\tan\alpha.$$

(2)由 $\cos\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)=-\sin\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,

得 $\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

因为 α 是第三象限角,

所以 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{8}{9}}=-\frac{1}{3}$.

所以 $f(\alpha)=-\tan\alpha=-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-2\sqrt{2}$.

18.**解:**(1)因为 $g(x)=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos x-\sin x$,所以 $F(x)=(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)+(\cos x+\sin x)^2=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+1$,所以函数 $F(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.又由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant2x+\frac{\pi}{4}\leqslant2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,得 $k\pi-\frac{3\pi}{8}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{8}(k\in\mathbf{Z})$,所以函数 $F(x)$ 的单调递增区间为 $\left[k\pi-\frac{3\pi}{8},k\pi+\frac{\pi}{8}\right](k\in\mathbf{Z})$.

(2)由题意知 $\cos x+\sin x=2(\cos x-\sin x)$,所以 $\tan x=\frac{1}{3}$,所以 $\frac{1+\sin^2x}{\cos^2x-\sin x\cos x}=\frac{\cos^2x+2\sin^2x}{\cos^2x-\sin x\cos x}=\frac{1+2\tan^2x}{1-\tan x}=\frac{11}{6}$.

19.**解:**(1)因为 $f(x)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\cos2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2x+(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x)=\frac{1}{2}\cos2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin2x-\cos2x=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$,所以最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$. 由 $2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z$,得 $x=\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2},k\in Z$,所以 $f(x)$ 图象的对称轴方程为 $x=\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2},k\in Z$.

(2)因为 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$,所以 $2x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}\right]$,所以当 $2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$,即 $x=\frac{\pi}{3}$ 时,$[f(x)]_{max}=1$;当 $2x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{2}$,即 $x=-\frac{\pi}{6}$ 时,$[f(x)]_{min}=-1$.

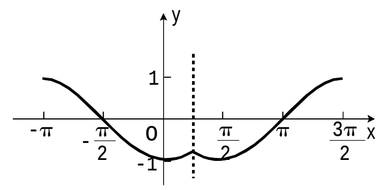
20.**解:**(1)$f(x)=\sin\omega x+\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\omega x-\cos\omega x$.当 $\omega=\frac{1}{2}$ 时,$f(x)=\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}=\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$,而 $-1\leqslant\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\leqslant1$,所以 $f(x)$ 的最大值为 $\sqrt{2}$,此时 $\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$,即 $x=\frac{3\pi}{2}+4k\pi,k\in Z$,所以 $f(x)$ 取最大值时,相应的 x 的集合为 $\left\{x\middle|x=\frac{3\pi}{2}+4k\pi,k\in Z\right\}$.

(2)依题意 $f\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\omega\pi}{8}-\frac{\pi}{4}\right)=0$,即 $\frac{\omega\pi}{8}-\frac{\pi}{4}=k\pi,k\in Z$,整理,得 $\omega=8k+2$,$k\in Z$,又 $0<\omega<10$,所以 $0<8k+2<10$,所以 $-\frac{1}{4}<k<1$,而 $k\in Z$,所以 $k=0,\omega=2$,所以 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$,所以 $f(x)$ 的最小周期为 π.

21.**解:**(1)$a=x=100$,则 $BF=150-100=50$,所以 $AF=150+50-100=100$,所以 $AF=DF$,所以 $\angle ADF=\frac{\pi}{4}$,因为 $\tan\angle BDF=\frac{50}{100}=\frac{1}{2}$,所以 $\tan\theta=\tan(\angle ADF-\angle BDF)=\frac{1-\frac{1}{2}}{1+1\times\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$.

(2)因为 $BF=150-a,AF=200-a$,所以 $\tan\angle ADF=\frac{AF}{DF}=\frac{200-a}{x}$,$\tan\angle BDF=\frac{BF}{DF}=\frac{150-a}{x}$,所以 $\tan\theta=\tan(\angle ADF-\angle BDF)=\frac{\frac{200-a}{x}-\frac{150-a}{x}}{1+\frac{(200-a)(150-a)}{x^2}}=\frac{50x}{x^2+(200-a)(150-a)}=\frac{1}{3}$,所以 $x^2-150x=350a-a^2-30000$.因为 $50\leqslant a\leqslant100$,而 $y=350a-a^2-30000$ 在 $[50,100]$ 上单调递增,所以 $-15000\leqslant y\leqslant-5000$,所以 $-15000\leqslant x^2-150x\leqslant-5000$,解得 $50\leqslant x\leqslant100$,因为 $x\geqslant60$,所以 $60\leqslant x\leqslant100$,故无人机 D 与大楼的水平距离 x 的取值范围为 $[60,100]$.

22.**解:**(1)$y=f(x)$ 的图象如图所示.



(第 22 题图)

(2)任取 $x\in\left[-\pi,\frac{\pi}{4}\right]$,则 $\frac{\pi}{2}-x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right]$,因为函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 对称,所以 $f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$,又当 $x\geqslant\frac{\pi}{4}$ 时,$f(x)=-\sin x$,则 $f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\cos x$,即 $f(x)=\begin{cases}-\cos x,x\in\left[-\pi,\frac{\pi}{4}\right),\\-\sin x,x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right].\end{cases}$

(3)当 $a=-1$ 时,$f(x)=a$ 的两根为 $0,\frac{\pi}{2}$,则 $M_a=\frac{\pi}{2}$;当 $a\in\left(-1,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 时,$f(x)=a$ 的四根满足 $x_1<x_2<\frac{\pi}{4}<x_3<x_4$,由对称性,得 $x_1+x_2=0,x_3+x_4=\pi$,则 $M_a=\pi$;

当 $a=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时,$f(x)=a$ 的三根满足 $x_1<x_2=\frac{\pi}{4}<x_3$,由对称性,得 $x_1+x_3=\frac{\pi}{2}$,则 $M_a=\frac{3\pi}{4}$;当 $a\in\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$ 时,$f(x)=a$ 两根满足 $x_1<\frac{\pi}{4}<x_2$,由对称性,得 $M_a=\frac{\pi}{2}$.

综上,当 $a\in\left(-1,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 时,$M_a=\pi$;当 $a=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时,$M_a=\frac{3\pi}{4}$;当 $a\in\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]\cup\{-1\}$ 时,$M_a=\frac{\pi}{2}$.

第 26 期

第 2~3 版专题检测题参考答案

一、选择题

1~6.DBBBDB　　7~12.BADBAD

二、填空题

13.$\frac{1}{6}$

14.$\sqrt{7}\pi$

15.$\frac{\pi}{96-\pi}$

16.①②④⑤

提示:对于①,由图可得 $A_1D∥B_1C$,$A_1B∥D_1C$,所以平面 A_1BD∥平面 CB_1D_1,故①正确;对于②,因为 A_1-ABD 为正四面体,故 $AA_1\perp BD$,所以 $BB_1\perp BD$,则四边形 BDD_1B_1 为正方形,故②正确;对于③,A_1-BDD_1B_1 是正四棱锥,所有棱长均相等,A 到平面 BDD_1B_1 的距离等于 A_1 到平面 BDD_1B_1 的距离,等于 A_1 到 BDD_1B_1 中心的距离,为 $\frac{\sqrt{2}}{2}a$,故③错误;对于④,三棱锥 C_1-A_1BD 为正三棱锥,对棱互相垂直,则 A_1 在平面 BDC_1 上的射影为△BDC_1 的垂心,故④正确;对于⑤,A_1-ABD 占整体的 $\frac{1}{6}$,A_1-BDD_1B_1 占整体的 $\frac{1}{3}$,BDC-$B_1D_1C_1$ 占整体的 $\frac{1}{2}$,故⑤正确.

三、解答题

17.**证明**:(1)因为底面 ABCD 是菱形,所以 $AC\perp BD$.

因为 $AC\perp PD$,$PD\cap BD=D$,所以 $AC\perp$ 平面 PBD.

(2)由(1),可知 $AC\perp BD$.因为平面 PAC⊥平面 ABCD,平面 PAC∩平面 ABCD=AC,BD⊂平面ABCD,所以BD⊥平面 PAC.

因为 PO⊂平面 PAC,所以 $BD\perp PO$.

因为底面 ABCD 是菱形,所以 BO=DO,所以 PB=PD.

18.**证明**:(1)由题意知,E 为 B_1C 的中点,又 D 为 AB_1 的中点,所以 DE∥AC.

又因为 DE⊄平面 AA_1C_1C,AC⊂平面 AA_1C_1C,

所以DE∥平面 AA_1C_1C.

(2)因为三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 是直三棱柱,所以 $CC_1\perp$ 平面 ABC.因为 AC⊂平面 ABC,所以 $AC\perp CC_1$.

又因为 $AC\perp BC$,CC_1⊂平面 BCC_1B_1,BC⊂平面 BCC_1B_1,$BC\cap CC_1=C$,所以 AC⊥平面 BCC_1B_1.

又因为 BC_1⊂平面 BCC_1B_1,所以 $BC_1\perp AC$.

因为 $BC=CC_1$,所以矩形 BCC_1B_1 是正方形,所以 $BC_1\perp B_1C$.

因为 AC,B_1C⊂平面 B_1AC,$AC\cap B_1C=C$,所以 $BC_1\perp$ 平面 B_1AC.

又因为 AB_1⊂平面 B_1AC,所以 $BC_1\perp AB_1$.

19.(1)**证明**:因为平面 $ABCD\perp$ 平面 ABE,平面 $ABCD\cap$ 平面 $ABE=AB$,$BC\perp AB$,$BC\subset$ 平面 $ABCD$,所以 $BC\perp$ 平面 ABE.

因为 $AE\subset$ 平面 ABE,所以 $BC\perp AE$.因为点 E 在以 AB 为直径的半圆上,所以 $AE\perp BE$.

因为 $BE\cap BC=B$,BC,$BE\subset$ 平面 BCE,

所以 $AE\perp$ 平面 BCE.

因为 $CE\subset$ 平面 BCE,所以 $AE\perp CE$.

(2)①**证明**:由题意知,平面 $ABE\cap$ 平面 $CED=EF$.因为 $AB∥CD$,$AB\not\subset$ 平面 CED,$CD\subset$ 平面 CED,所以 AB∥平面 CED.

因为 $AB\subset$ 平面 ABE,平面 $ABE\cap$ 平面 $CED=EF$,所以 $AB∥EF$.

②**解**:如图,取 AB 中点 O,EF 的中点 O',连接 OF,OO'.

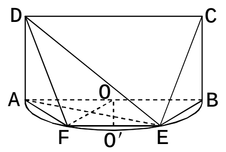
在 Rt△$OO'F$ 中,$OF=1$,$O'F=\frac{1}{2}$,

所以 $OO'=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因为 $BC\perp$ 平面 ABE,$AD∥BC$,

所以 $AD\perp$ 平面 ABE,

所以 $V_{E-ADF}=V_{D-AEF}=\frac{1}{3}S_{\triangle AEF}\cdot AD=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}EF\cdot OO'\cdot AD=\frac{\sqrt{3}}{12}$.



(第 19 题图)

20.(1)**证明**:因为 $MA\perp$ 平面 $ABCD$,$PD∥MA$,所以 $PD\perp$ 平面 $ABCD$.

又因为 $BC\subset$ 平面 $ABCD$,所以 $PD\perp BC$.因为四边形 $ABCD$ 为正方形,所以 $BC\perp DC$.又因为 $PD\cap DC=D$,所以 $BC\perp$ 平面 PDC.

在△PBC 中,因为 G,F 分别为 PB,PC 的中点,所以 $GF∥BC$.所以 $GF\perp$ 平面 PDC.

又因为 $GF\subset$ 平面 EFG,所以平面 $EFG\perp$ 平面 PDC.

(2)**解**:因为 $PD\perp$ 平面 $ABCD$,四边形 $ABCD$ 为正方形,不妨设 $MA=1$,则 $PD=AD=2$,所以 $V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}\cdot PD=\frac{1}{3}\times4\times2=\frac{8}{3}$.

因为 $MA\perp$ 平面 $ABCD$,$AB\subset$ 平面 $ABCD$,所以 $MA\perp AB$.又因为四边形 $ABCD$ 为正方形,所以 $AD\perp AB$.又因为 $AD\cap MA=A$,所以 $AB\perp$ 平面 $MADP$.

因为 $MA∥PD$,所以 $S_{\triangle AMP}=\frac{1}{2}AM\cdot AD=1$,

所以 $V_{P-MAB}=V_{B-PAM}=\frac{1}{3}S_{\triangle PAM}\cdot AB=\frac{1}{3}\times1\times2=\frac{2}{3}$.

所以 $V_{P-MAB}:V_{P-ABCD}=1:4$.

21.(1)**证明**:由题设知,平面 $CMD\perp$ 平面 $ABCD$,交线为 CD.

因为 $BC\perp CD$,$BC\subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $BC\perp$ 平面 CMD,故 $BC\perp DM$.

因为 M 为 $\overset{\frown}{CD}$ 上异于 C,D 的点,

且 DC 为直径,所以 $DM\perp CM$.

又 $BC\cap CM=C$,所以 $DM\perp$ 平面 BMC.

而 $DM\subset$ 平面 AMD,

所以平面 $AMD\perp$ 平面 BMC.

(2)**解**:当 P 为 AM 的中点时,MC∥平面 PBD.

证明如下:如图,连接 AC 交 BD 于 O.

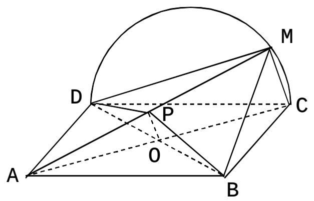
因为 $ABCD$ 为矩形,所以 O 为 AC 中点.

连接 OP,因为 P 为 AM 中点,

所以 $MC∥OP$.

$MC\not\subset$ 平面 PBD,$OP\subset$ 平面 PBD,

所以 MC∥平面 PBD.



(第 21 题图)

22.(1)**证明**:因为侧棱 $DD_1\perp$ 底面 ABCD,AB⊂底面ABCD,

所以$DD_1\perp AB$.在梯形 ABCD 中,

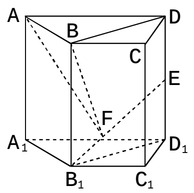
因为 AD=2,BC=DC=1,$AD\perp DC$,

所以 $AB=BD=\sqrt{2}$,

所以 $AB^2+BD^2=AD^2$,所以 $BD\perp AB$.

又 $BD\cap DD_1=D$,所以 $AB\perp$ 平面 BDD_1B_1,

又 B_1E⊂平面 BDD_1B_1,所以 $B_1E\perp AB$.



(第 22 题图)

(2)**解**:如图,连接 BF,由(1)知,直线 AF 在平面 BDD_1B_1 内的射影为直线 BF,

所以∠AFB 是直线 AF 与平面 BDD_1B_1 所成的角.

在矩形 BDD_1B_1 中,$B_1E=\sqrt{3}$,

在 Rt△B_1D_1E 中,$\cos\angle B_1ED_1=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

故在△BB_1F 中,

$$BF=\sqrt{BB_1^2+\left(\frac{B_1E}{3}\right)^2-2BB_1\cdot\frac{B_1E}{3}\cdot\cos\angle BB_1E}$$

$$=\sqrt{4+\frac{1}{3}-2\times2\times\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}}=\sqrt{3}.$$

所以在 Rt△ABF 中,$AF=\sqrt{AB^2+BF^2}=\sqrt{5}$,

所以直线 AF 与平面 BDD_1B_1 所成角的正弦值为 $\sin\angle AFB=\frac{AB}{AF}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$.

第 27 期

第 2~3 版专题检测题参考答案

一、选择题

1~6.DABCCC　7~12.ABDDAB

二、填空题

13.$\left(\frac{1}{2},1\right]$　14.ln2　15.(0,1)

16.②④

提示:因为函数 $f(x)$ 对其定义域内的任意 x_1,x_2,当 $f(x_1)=f(x_2)$ 时总有 $x_1=x_2$,则称 $f(x)$ 为紧密函数,所以紧密函数 $f(x)$ 的自变量与函数值是一一映射,单调函数一定是紧密函数,但紧密函数不一定是单调的,故①错误;$f(x)=\frac{x^2+2x+a}{x}(x>0)$ 可化为 $f(x)=x+\frac{a}{x}+2(x>0)$,所以 $f(x)(x>0)$ 在 $a<0$ 时是单调递增函数,故一定是紧密函数,故②正确;函数 $f(x)=\begin{cases}\log_3x,x\geqslant2,\\2-x,x<2\end{cases}$ 不是一一映射,所以该函数不是紧密函数,故③错误;若函数 $f(x)$ 为定义域内的紧密函数,$x_1\neq x_2$,则 $f(x_1)\neq f(x_2)$,故④正确;函数 $f(x)=x^3$ 是紧密函数且在定义域内存在导数,则其导函数 $f'(x)=3x^2$ 在定义域内的值可以为零,故⑤错误.

三、解答题

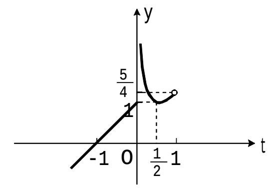
17.**解**:令 $x-3=u$,则 $x=u+3$,于是 $f(u)=\log_a\frac{3+u}{3-u}(a>0,a\neq1,-3<u<3)$,所以 $f(x)=\log_a\frac{3+x}{3-x}(a>0,a\neq1,-3<x<3)$.

(1)因为 $f(-x)+f(x)=\log_a\frac{3-x}{3+x}+\log_a\frac{3+x}{3-x}=\log_a1=0$,所以 $f(-x)=-f(x)$,又定义域 $(-3,3)$ 关于原点对称,所以 $f(x)$ 是奇函数.

(2)令 $t=\frac{3+x}{3-x}=-1-\frac{6}{x-3}$,则 t 在 $(-3,3)$ 上是增函数.当 $0<a<1$ 时,函数 $y=\log_at$ 是减函数,所以 $f(x)=\log_a\frac{3+x}{3-x}(0<a<1)$ 在 $(-3,3)$ 上是减函数,即函数 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(-3,3)$.

18.**解**:(1)由题意,知 $g(f(1))=g(-3)=-3+1=-2$.

(2)令 $f(x)=t$,则原方程化为 $g(t)=a$,易知方程 $f(x)=t$ 在 $t\in(-\infty,1)$ 内有 2 个不同的解,则原方程有 4 个解等价于函数 $y=g(t)(t<1)$ 与 $y=a$ 的图象有 2 个不同的交点.作出函数 $y=g(t)(t<1)$ 的图象,由图象可知,当 $1\leqslant a<\frac{5}{4}$ 时,函数 $y=g(t)(t<1)$ 与 $y=a$ 有 2 个不同的交点,即所求 a 的取值范围是 $\left[1,\frac{5}{4}\right)$.



(第 18 题图)

19.**解**:(1)当 $a=\frac{1}{2}$ 时,$f(x)=x(e^x-1)-\frac{1}{2}x^2$,$f'(x)=e^x-1+xe^x-x=(e^x-1)(x+1)$.当 $x\in(-\infty,-1)$ 时,$f'(x)>0$;当 $x\in(-1,0)$ 时,$f'(x)<0$;当 $x\in(0,+\infty)$ 时,$f'(x)>0$.故 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty,-1)$,$(0,+\infty)$,单调递减区间是 $(-1,0)$.

(2)$f(x)=x(e^x-1-ax)$.令 $g(x)=e^x-1-ax$,则 $g'(x)=e^x-a$,若 $a\leqslant1$,则当 $x\in(0,+\infty)$ 时,$g'(x)>0$,$g(x)$ 为增函数,而 $g(0)=0$,从而当 $x\geqslant0$ 时,$g(x)\geqslant0$,即 $f(x)\geqslant0$.若 $a>1$,则当 $x\in(0,\ln a)$ 时,$g'(x)<0$,$g(x)$ 为减函数,而 $g(0)=0$,从而当 $x\in(0,\ln a)$ 时,$g(x)<0$,即 $f(x)<0$,不合题意.

综上,a 的取值范围为 $(-\infty,1]$.

20.**解**:(1)函数 $f(x)=e^x+x$ 的导数为 $f'(x)=e^x+1$,可得曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线斜率为 $f'(0)=2$,且 $f(0)=1$,所以所求切线的方程为 $y=2x+1$.

(2)若 $ax\leqslant f(x)$ 对 $x\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$ 恒成立,

即 $a\leqslant\frac{e^x+x}{x}$ 对 $x\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$ 恒成立,

即 $a-1\leqslant\left(\frac{e^x}{x}\right)_{\min}$,$x\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.

设 $g(x)=\frac{e^x}{x}$,可得 $g'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$,

可得 $x>1$ 时,$g'(x)>0$,$g(x)$ 单调递增;

$\frac{1}{2}\leqslant x<1$ 时,$g'(x)<0$,$g(x)$ 单调递减.

所以 $x=1$ 时,$g(x)$ 取得极小值也是最小值 $g(1)=e$,则 $a-1\leqslant e$,可得 $a\leqslant1+e$.即 a 的取值范围是 $(-\infty,1+e]$.

21.(1)**解**:$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,$f'(x)=ae^x-\frac{1}{x}$.

由题设知,$f'(2)=0$,所以 $a=\frac{1}{2e^2}$.

从而 $f(x)=\frac{1}{2e^2}e^x-\ln x-1$,

$f'(x)=\frac{1}{2e^2}e^x-\frac{1}{x}$.

当 $0<x<2$ 时,$f'(x)<0$;当 $x>2$ 时,$f'(x)>0$.

所以 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 单调递减,在 $(2,+\infty)$ 单调递增.

(2)**证明**:当 $a\geqslant\frac{1}{e}$ 时,$f(x)\geqslant\frac{e^x}{e}-\ln x-1$.

设 $g(x)=\frac{e^x}{e}-\ln x-1$,则 $g'(x)=\frac{e^x}{e}-\frac{1}{x}$.

当 $0<x<1$ 时,$g'(x)<0$;当 $x>1$ 时,$g'(x)>0$.

所以 $x=1$ 是 $g(x)$ 的极小值点,也是最小值点.

故当 $x>0$ 时,$g(x)\geqslant g(1)=0$.

因此,当 $a\geqslant\frac{1}{e}$ 时,$f(x)\geqslant0$.

22.(1)**解**:因为 $x>0$,所以 $-x<0$,

所以 $f(-x)+f(x)=x^3+x^2+e^x-ax$,

由题意,$x^3+x^2+e^x-ax=e^x-3$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上有实数解,等价于 $a=x^2+x+\frac{3}{x}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上有实数解.

记 $g(x)=x^2+x+\frac{3}{x}(x>0)$,

则 $g'(x)=2x+1-\frac{3}{x^2}=\frac{2x^3+x^2-3}{x^2}=\frac{(x-1)(2x^2+3x+3)}{x^2}$,

令 $g'(x)=0$,因为 $x>0$,

所以 $2x^2+3x+3>0$,故解得 $x=1$.

当 $x\in(0,1)$ 时,$g'(x)<0$;

当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$g'(x)>0$,

所以函数 $g(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递减,

在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增,

故函数 $g(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值也是最小值 $g(1)=5$.

要使方程 $a=g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上有解,当且仅当 $a\geqslant5$.

综上,实数 a 的取值范围为 $[5,+\infty)$.

(2)**证明**:由题意知,

当 $x\geqslant0$ 时,$f'(x)=e^x-a$.

当 $a\leqslant0$ 时,$f'(x)>0$,

此时函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增,

由 $f(m)=f(n)$,可得 $m=n$,

与条件 $|m-n|\geqslant1$ 矛盾,所以 $a>0$.

令 $f'(x)=0$,解得 $x=\ln a$,

当 $x\in(0,\ln a)$ 时,$f'(x)<0$;

当 $x\in(\ln a,+\infty)$ 时,$f'(x)>0$,

所以函数 $f(x)$ 在 $(0,\ln a)$ 上单调递减,

在 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增.

若存在 $m,n\in[0,2]$,$f(m)=f(n)$,

则 $\ln a$ 介于 m,n 之间,

不妨设 $0\leqslant m<\ln a<n\leqslant2$,

因为 $f(x)$ 在 $(m,\ln a)$ 上单调递减,

在 $(\ln a,n)$ 上单调递增,且 $f(m)=f(n)$,

所以当 $m\leqslant x\leqslant n$ 时,$f(x)\leqslant f(m)=f(n)$,

由 $0\leqslant m<n\leqslant2$,$|m-n|\geqslant1$,

可得 $1\in[m,n]$,故 $f(1)\leqslant f(m)=f(n)$,

又 $f(x)$ 在 $(m,\ln a)$ 上单调递减,

且 $0\leqslant m<\ln a$,所以 $f(m)\leqslant f(0)$.

所以 $f(1)\leqslant f(0)$,同理 $f(1)\leqslant f(2)$.

即 $\begin{cases}e-a\leqslant1,\\e-a\leqslant e^2-2a,\end{cases}$ 解得 $e-1\leqslant a\leqslant e^2-e$,

所以 $1\leqslant\frac{a}{e-1}\leqslant e$.