第 36 期

第 2~3 版专题检测题参考答案

一、选择题

1~6.CDABCB 7~12.ABBDCD

二、填空题

13.$-\frac{1}{3}$ 14.$\left(0,\frac{1}{2}\right]$ 15.$2\sqrt{3}$

16.$\frac{2}{3}\sqrt{3}$或 2

三、解答题

17.解:$f(x)\le g(x)$,$a+\sqrt{-x^2-4x}\le\frac{4}{3}x+1$,$\sqrt{-x^2-4x}\le\frac{4}{3}x+1-a$.

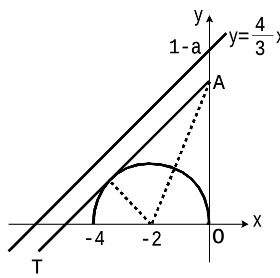
令 $y=\sqrt{-x^2-4x}$,①

$y=\frac{4}{3}x+1-a$,②

①式变形,得$(x+2)^2+y^2=4(y\geq0)$,即表示以$(-2,0)$为圆心,2为半径的圆的上半个圆;

②表示斜率为$\frac{4}{3}$,纵截距为$1-a$的平行直线系.如下图,设上述平行直线系中与圆相切的直线为AT,其倾斜角为α,则有$\tan\alpha=\frac{4}{3}$,$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$,即$\sin\alpha=\frac{4}{5}$,$\cos\alpha=\frac{3}{5}$,

$|OA|=2\tan\left(\frac{90°+\alpha}{2}\right)=2\cdot\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}=6$.要使$f(x)\le g(x)$在$x\in[-4,0]$时恒成立,则②所表示的直线应该在直线AT的上方或与它重合,故有$1-a\geq6$,所以$a\le-5$.所以实数a的取值范围是$(-\infty,-5]$.



(第 17 题图)

18.解:(1)由$AP=x$,则$CP=2-x(0<x<2)$,所以AB对点P的承重强度为:

$y_1=0.2\cdot\frac{2\times5}{x^2}=\frac{2}{x^2}$,$x\in(0,2)$;

CD 对点 P 的承重强度为:

$y_2=0.2\cdot\frac{2\times5}{(2-x)^2}=\frac{2}{(2-x)^2}$,$x\in(0,2)$.

(2)由题意知,AB、CD对点P的承重强度之和为:$L(x)=y_1+y_2=2\left[\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(2-x)^2}\right]$,$x\in(0,2)$.

记$f(x)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(2-x)^2}$,

则$f'(x)=-\frac{2}{x^3}+\frac{2}{(2-x)^3}$.

令$f'(x)=0$,解得$x=1$,

当$x\in(0,1)$时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减;

当$x\in(1,2)$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增.

所以$x=1$时,$f(x)$取到最小值,$L(x)$也取得最小值,最小值为4.

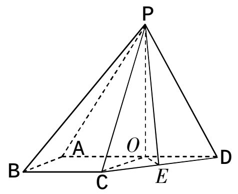
即$AP=1$km时,两索塔对桥面P处的"承重强度"之和最小,最小值为4.

19.(1)证明:四棱锥$P-ABCD$中,因为$\angle BAD=\angle ABC=90°$,所以$BC\parallel AD$.因为$AD\subset$平面$PAD$,$BC\not\subset$平面$PAD$,所以直线$BC\parallel$平面$PAD$.

(2)解:如下图所示,取AD中点O,CD中点E,连接PO,OC,OE,PE,则$PO\perp AD$,$OE\perp CD$.因为平面PAD⊥平面ABCD,所以PO⊥平面ABCD.设$AD=2x$,则$AB=BC=x$,$CD=\sqrt{2}x$,$OE=\frac{\sqrt{2}}{2}x$,$PO=\sqrt{3}x$,

$PE=\sqrt{PO^2+OE^2}=\frac{\sqrt{7}x}{\sqrt{2}}$.因为△PCD的面积为$2\sqrt{7}$,所以$\frac{1}{2}PE\cdot CD=2\sqrt{7}$,所以$\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}x\cdot\sqrt{2}x=2\sqrt{7}$,解得$x=2$,所以$PO=2\sqrt{3}$.

则$V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}(BC+AD)\times AB\times PO=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times(2+4)\times2\times2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$.



(第 19 题图)

20.解:(1)当$0\le x\le200$时,$y=0.5x$;

当$200<x\le400$时,

$y=0.5\times200+0.8\times(x-200)=0.8x-60$;

当$x>400$时,

$y=0.5\times200+0.8\times200+1.0\times(x-400)=x-140$.

所以y与x之间的函数解析式为:

$$y=\begin{cases}0.5x,0\le x\le200,\\0.8x-60,200<x\le400,\\x-140,x>400.\end{cases}$$

(2)由(1)可知:当$y=260$时,$x=400$,则$P(x\le400)=0.80$.

结合频率分布直方图可知:

$0.1+2\times100B+0.3=0.8$,$100A+0.05=0.2$,

所以$A=0.0015$,$B=0.0020$.

(3)由题意可知x可取50,150,250,350,450,550.

当$x=50$时,$y=0.5\times50=25$,

所以$P(y=25)=0.1$;

当$x=150$时,$y=0.5\times150=75$,

所以$P(y=75)=0.2$;

当$x=250$时,$y=0.8\times250-60=140$,

所以$P(y=140)=0.3$;

当$x=350$时,$y=0.8\times350-60=220$,

所以$P(y=220)=0.2$;

当$x=450$时,

$y=450-140=310$,

所以$P(y=310)=0.15$;

当$x=550$时,

$y=550-140=410$,

所以$P(y=410)=0.05$.

故$\bar{y}=25\times0.1+75\times0.2+140\times0.3+220\times0.2+310\times0.15+410\times0.05=170.5$.

所以,估计1月份该市居民用户平均用电费用为170.5元.

21.(1)证明:$f'(x)=a^x\ln a+2x-\ln a=(a^x-1)\ln a+2x$.

因为$a>1$,$x<0$,

所以$a^x-1<0$,$\ln a>0$,$2x<0$.

所以当$x\in(-\infty,0)$时,$f'(x)<0$,

所以$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减.

(2)解:易知当$x\in(0,+\infty)$时,$f'(x)>0$,$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,则$f(0)=1$为$f(x)$的最小值.

$|f(x)-t|-1=0\Rightarrow f(x)=t+1$,或$f(x)=t-1$,

要使函数$y=|f(x)-t|-1$有四个零点,需$t+1>1$且$t-1>1$,所以$t>2$.所以t的取值范围为$(2,+\infty)$.

(3)解:因为$a>1$,所以$f(1)=a+1-\ln a>f(-1)=\frac{1}{a}+1+\ln a>f(0)=1$.

又因为$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减,在$(0,+\infty)$上单调递增,所以对$\forall x_1,x_2\in[-1,1]$,$|f(x_1)-f(x_2)|\le|f(1)-f(0)|=a-\ln a$.要使对$\forall x_1,x_2\in[-1,1]$,$|f(x_1)-f(x_2)|\le e-1$恒成立,只要$a-\ln a\le e-1$成立即可.

设$h(a)=a-\ln a(a>1)$,易知$h'(a)=1-\frac{1}{a}>0$,函数$h(a)$在$(1,+\infty)$上为增函数,而$h(e)=e-1$,所以由$h(a)\le h(e)$,得$1<a\le e$.所以a的取值范围为$(1,e]$.

22.解:(1)由题意,可得$c=1$.

因为$\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$,

所以$a=2$,所以$b^2=a^2-c^2=3$,

所以椭圆C的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

所以椭圆C的右顶点为$A(2,0)$,

代入圆F的方程,可得$r^2=1$,

所以圆F的方程为$(x-1)^2+y^2=1$.

(2)假设存在直线l满足题意,

由(1)可得OA是圆F的直径,

所以OP⊥AB.

由点P是AB的中点,

可得$|OB|=|OA|=2$.

设点$B(x_1,y_1)$,

则由题意可得$\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{3}=1$.

因为直线l的斜率不为0,所以$x_1^2<4$,

所以$|OB|^2=x_1^2+y_1^2=x_1^2+3\left(1-\frac{x_1^2}{4}\right)=3+\frac{x_1^2}{4}<4$,

这与$|OB|=|OA|$矛盾,所以不存在满足条件的直线l.

第 33 期

第 2~3 版专题检测题参考答案

一、选择题

1~6.CBAACA 7~12.CADACB

二、填空题

13.$115_{(8)}$

14.1

15.6

16.$\frac{1}{2}$

三、解答题

17.解:(1)由已知得$\bar{z}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2}$,

所以$\bar{z}^2+\bar{z}+1=\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2}\right)^2-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2}+1=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}i}{2}-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2}+1=0$.

(2)因为$z^3=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2}\right)^3=1$,

所以$S_{2019}=1+z+z^2+\cdots+z^{2018}=\frac{1\times(1-z^{2019})}{1-z}=\frac{1-(z^3)^{673}}{1-z}=0$.

18.(1)证明:对$F(x)$求导数,

得$F'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$.

因为$f'(x)>\frac{f(x)}{x}$,$x>0$,所以$xf'(x)>f(x)$,即$xf'(x)-f(x)>0$,所以$F'(x)>0$.

故$F(x)=\frac{f(x)}{x}$在$(0,+\infty)$上是增函数.

(2)证明:因为$x_1>0$,$x_2>0$,

所以$0<x_1<x_1+x_2$.

由(1),知$F(x)=\frac{f(x)}{x}$在$(0,+\infty)$上是增函数.

所以$F(x_1)<F(x_1+x_2)$,

即$\frac{f(x_1)}{x_1}<\frac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}$.

因为$x_1>0$,所以$f(x_1)<\frac{x_1}{x_1+x_2}f(x_1+x_2)$.

同理,可得$f(x_2)<\frac{x_2}{x_1+x_2}f(x_1+x_2)$.

以上两式相加,

得$f(x_1)+f(x_2)<f(x_1+x_2)$.

(3)解:(2)中结论的推广形式为:

设$x_1,x_2,\cdots,x_n\in(0,+\infty)$,其中$n\geq2$,则$f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)<f(x_1+x_2+\cdots+x_n)$.

证明如下:

因为$x_1>0,x_2>0,\cdots,x_n>0$,

所以$0<x_1<x_1+x_2+\cdots+x_n$.

由(1),知$F(x)=\frac{f(x)}{x}$在$(0,+\infty)$上是增函数,

所以$F(x_1)<F(x_1+x_2+\cdots+x_n)$,

即$\frac{f(x_1)}{x_1}<\frac{f(x_1+x_2+\cdots+x_n)}{x_1+x_2+\cdots+x_n}$.

因为$x_1>0$,

所以$f(x_1)<\frac{x_1}{x_1+x_2+\cdots+x_n}f(x_1+x_2+\cdots+x_n)$.

同理,可得

$f(x_2)<\frac{x_2}{x_1+x_2+\cdots+x_n}f(x_1+x_2+\cdots+x_n)$,

$f(x_3)<\frac{x_3}{x_1+x_2+\cdots+x_n}f(x_1+x_2+\cdots+x_n)$,

…

$f(x_n)<\frac{x_n}{x_1+x_2+\cdots+x_n}f(x_1+x_2+\cdots+x_n)$.

以上n个不等式相加,得$f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)<f(x_1+x_2+\cdots+x_n)$.

19.证明:(1)因为$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+b+2\sqrt{ab}$,$(\sqrt{c}+\sqrt{d})^2=c+d+2\sqrt{cd}$,

又a,b,c,d均为正数,且$a+b=c+d$,$ab>cd$,所以$\sqrt{ab}>\sqrt{cd}$,

所以$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2>(\sqrt{c}+\sqrt{d})^2$,

所以$\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}+\sqrt{d}$.

(2)①若$\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}+\sqrt{d}$,

则$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2>(\sqrt{c}+\sqrt{d})^2$,

即$a+b+2\sqrt{ab}>c+d+2\sqrt{cd}$.

由$a+b=c+d$,得$ab>cd$,

又$(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$,

$(c-d)^2=(c+d)^2-4cd$,

所以$(a-b)^2<(c-d)^2$,

所以$|a-b|<|c-d|$;

②若$|a-b|<|c-d|$,

则$(a-b)^2<(c-d)^2$,

即有$(a+b)^2-4ab<(c+d)^2-4cd$,

由$a+b=c+d$,得$ab>cd$,

则有$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2>(\sqrt{c}+\sqrt{d})^2$,

所以$\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}+\sqrt{d}$.

综上,$\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}+\sqrt{d}$是$|a-b|<|c-d|$的充要条件.

20.(1)证明:因为△PAB中,$PA\perp PB$,点P在斜边AB上的射影为点H,

所以$\frac{1}{2}PA\cdot PB=\frac{1}{2}AB\cdot PH$,

所以$AB=\frac{PA\cdot PB}{PH}$.

由勾股定理,得$PA^2+PB^2=AB^2$,

所以$PA^2+PB^2=\frac{PA^2\cdot PB^2}{PH^2}$,

所以$\frac{1}{PH^2}=\frac{PA^2+PB^2}{PA^2\cdot PB^2}=\frac{1}{PA^2}+\frac{1}{PB^2}$.

(2)解:猜想:$\frac{1}{PH^2}=\frac{1}{PA^2}+\frac{1}{PB^2}+\frac{1}{PC^2}$.

证明如下:

连接AH并延长,交BC于点M,连接PM(如图),因为$PA\perp PB$,$PA\perp PC$,$PB\cap PC=P$,

所以PA⊥平面PBC,又PM⊂平面PBC,所以$PA\perp PM$,又PH⊥平面ABC,AM⊂平面ABC,所以$PH\perp AM$.

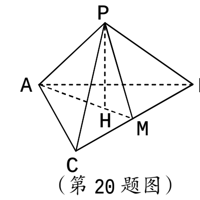
在直角三角形APM中,由(1)中结论,$\frac{1}{PH^2}=\frac{1}{PA^2}+\frac{1}{PM^2}$.

因为PA⊥平面PBC,所以$PA\perp BC$,又PH⊥平面ABC,所以$PH\perp BC$,而$PH\cap PA=P$,PH,PA⊂平面PAM,所以BC⊥平面PAM,$BC\perp PM$.

又$PB\perp PC$,由(1)中结论,

得$\frac{1}{PM^2}=\frac{1}{PC^2}+\frac{1}{PB^2}$.

所以$\frac{1}{PH^2}=\frac{1}{PA^2}+\frac{1}{PB^2}+\frac{1}{PC^2}$.



(第 20 题图)

21.(1)证明:①$\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan x+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan x\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{1+\tan x}{1-\tan x}$.

②假设T是函数$f(x)=\tan x$的一个周期,且$0<T<\pi$,则对任意$x\ne\frac{\pi}{2}+k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,有$\tan(x+T)=\tan x$,令$x=0$得$\tan T=0$,而当$0<T<\pi$时,$\tan T\ne0$恒成立或$\tan T$无意义,矛盾,所以假设不成立,原命题成立.

(2)解:由(1)可类比出函数$f(x)$是周期函数,它的最小正周期是4a.

证明:因为$f(x+2a)=f(x+a+a)=\frac{1+f(x+a)}{1-f(x+a)}=\frac{1+\frac{1+f(x)}{1-f(x)}}{1-\frac{1+f(x)}{1-f(x)}}=-\frac{1}{f(x)}$,

所以$f(x+4a)=f[(x+2a)+2a]=-\frac{1}{f(x+2a)}=-\frac{1}{-\frac{1}{f(x)}}=f(x)$.

所以$f(x)$是以4a为最小正周期的周期函数.

22.(1)解:当$a=2$时,$f(x)=x^2-2x+\ln(x+1)$,$f'(x)=2x-2+\frac{1}{x+1}=\frac{2x^2-1}{x+1}$,

令$f'(x)=0$,得$x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

又$x>-1$,所以当$x\in\left(-1,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$时,$f'(x)>0$;当$x\in\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$时,$f'(x)<0$,所以函数$f(x)$的极大值点为$x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,极小值点为$x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2)解:因为$f'(x)=2x-a+\frac{1}{x+1}$,由$f'(x)>x$,得$2x-a+\frac{1}{x+1}>x$,即$a<x+\frac{1}{x+1}$$(0<x<1)$,所以问题等价为在区间$(0,1)$上恒有$a<x+\frac{1}{x+1}$.又$x+\frac{1}{x+1}=x+1+\frac{1}{x+1}-1>1$,所以$a\le1$.所以实数a的取值范围是$(-\infty,1]$.

⑨ 第 34 期

第 2~3 版专题检测题参考答案

一、选择题

1~6.AAABBA　7~12.DCDBCD

二、填空题

13.$\frac{8}{5}$　14.平行四边形　15.$\frac{21}{4}$

16.①②③④

三、解答题

17.**解**:(1)因为 $m=(2\sin B,\sqrt{3})$,$n=\left(2\cos^2\frac{B}{2}-1,\cos 2B\right)$,$m\perp n$,所以 $2\sin B\cdot\left(2\cos^2\frac{B}{2}-1\right)+\sqrt{3}\cos 2B=0$,即 $\sin 2B=-\sqrt{3}\cdot\cos 2B$,所以 $\tan 2B=-\sqrt{3}$,又 B 为锐角,所以 $2B\in(0,\pi)$,所以 $2B=\frac{2\pi}{3}$,所以 $B=\frac{\pi}{3}$,所以 $f(x)=\sin 2x\cos B-\cos 2x\sin B=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

令 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in Z)$,

解得 $k\pi-\frac{\pi}{12}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{5\pi}{12}(k\in Z)$.

所以函数 f(x)的单调递增区间是 $\left[k\pi-\frac{\pi}{12},k\pi+\frac{5\pi}{12}\right](k\in Z)$,又由 $2x-\frac{\pi}{3}=k\pi(k\in Z)$,得 $x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}(k\in Z)$,

所以函数 f(x)的对称中心为

$\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},0\right)(k\in Z)$.

(2)由(1)知 $B=\frac{\pi}{3}$,又 b=4,由余弦定理,得 $16=a^2+c^2-ac$,因为 $a^2+c^2\geqslant 2ac$,所以 $ac\leqslant 16$(当且仅当 a=c=4 时,等号成立),所以△ABC 的面积 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B\leqslant 4\sqrt{3}$(当且仅当 a=c=4 时,等号成立),所以△ABC 的面积的最大值为 $4\sqrt{3}$.

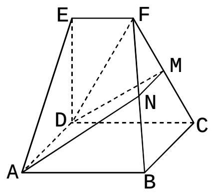
18.(1)**证明**:因为底面 ABCD 为矩形,所以 $CD\perp AD$.又因为 $CD\perp EA$,$AD\cap EA=A$,所以 $CD\perp$平面 EAD.所以 $CD\perp ED$.

(2)**证明**:因为底面 ABCD 为矩形,所以 AD∥BC.因为 AD⊄平面 FBC,BC⊂平面 FBC,所以 AD∥平面 FBC.又因为平面 ADMN∩平面 FBC=MN,所以 AD∥MN.

(3)**解**:平面 ADMN 与平面 BCF 可以垂直.证明如下:

连接 DF.

因为 $AD\perp ED$,$AD\perp CD$,$ED\cap CD=D$,所以 $AD\perp$平面 CDEF,所以 $AD\perp DM$.因为 AD∥MN,所以 $DM\perp MN$.因为平面 ADMN∩平面 FBC=MN,若使平面 ADMN⊥平面 BCF,则需 $DM\perp$平面 BCF,即 $DM\perp FC$.在梯形 CDEF 中,因为 EF∥CD,$DE\perp CD$,$CD=2EF=2$,$ED=\sqrt{3}$,所以 DF=DC=2.所以若使 $DM\perp FC$ 能成立,则 M 为 FC 的中点.所以 $\frac{FM}{FC}=\frac{1}{2}$.



(第 18 题图)

19.**解**:(1)由已知 $S_n=2a_n-a_1$,有 $a_n=S_n-S_{n-1}=2a_n-2a_{n-1}(n\geqslant 2)$,即 $a_n=2a_{n-1}(n\geqslant 2)$.从而 $a_2=2a_1$,$a_3=2a_2=4a_1$.又因为 a_1,a_2+1,a_3 成等差数列,所以 $a_1+a_3=2(a_2+1)$.所以 $a_1+4a_1=2(2a_1+1)$,解得 $a_1=2$.所以数列$\{a_n\}$是首项为 2,公比为 2 的等比数列.故 $a_n=2^n(n\in N_+)$.

(2)由(1)得 $\frac{1}{a_n}=\frac{1}{2^n}$,所以 $T_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}$.由 $|T_n-1|<\frac{1}{1000}$,得 $\left|1-\frac{1}{2^n}-1\right|<\frac{1}{1000}$,即 $2^n>1000$.因为 $2^9=512<1000<1024=2^{10}$,所以 $n\geqslant 10$.于是,使 $|T_n-1|<\frac{1}{1000}$ 成立的 n 的最小值为 10.

20.**解**:(1)由已知,得 $f(x)=\cos x\cdot\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)-\sqrt{3}\cos^2x+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{2}\sin x\cdot\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos^2x+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{4}(1+\cos 2x)+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\cos 2x=\frac{1}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.所以 f(x)的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

(2)因为 $x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$,所以 $2x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{5}{6}\pi,\frac{\pi}{6}\right]$.所以 $\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\in\left[-1,\frac{1}{2}\right]$,所以 $f(x)\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right]$.所以 f(x)在闭区间$\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$上的最大值为 $\frac{1}{4}$,最小值为 $-\frac{1}{2}$.

21.(1)**解**:$f'(x)=\frac{1}{x}-2a$,因为 f(x)的图象在 x=1 处的切线平行于直线 $x+y-2=0$,所以 $f'(1)=1-2a=-1$,即 a=1.所以 $f(x)=\ln x-2x$,$f'(x)=\frac{1}{x}-2$.令 $f'(x)=0$,得 $x=\frac{1}{2}$.当 $0<x<\frac{1}{2}$时,$f'(x)>0$;当 $x>\frac{1}{2}$时,$f'(x)<0$,所以 f(x)在$\left(0,\frac{1}{2}\right]$上单调递增,在$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$上单调递减,所以 f(x)的最大值为 $f\left(\frac{1}{2}\right)=-1-\ln 2$.

(2)**证明**:$g(x)=\ln x-2ax+\frac{1}{2}x^2$,$g'(x)=x+\frac{1}{x}-2a=\frac{x^2-2ax+1}{x}$.令 $g'(x)=0$,得 $x^2-2ax+1=0$.①当 $\Delta=4a^2-4\leqslant 0$,即 $-1\leqslant a\leqslant 1$ 时,$x^2-2ax+1\geqslant 0$ 恒成立,即 $g'(x)\geqslant 0$,所以 g(x)在$(0,+\infty)$上单调递增,所以 g(x)无极值点,不符合题意;②当 $\Delta=4a^2-4>0$,即 a>1,或 a<-1 时,方程 $g'(x)=0$ 有两解 x_1,x_0,因为 x_0是 g(x)的极大值点,所以 $0<x_0<x_1$,又 $x_1x_0=1$,$x_1+x_0=2a>0$,所以 $a>1$,$0<x_0<1$.又 $g'(x_0)=x_0+\frac{1}{x_0}-2a=0$,所以 $a=\frac{x_0^2+1}{2x_0}$.所以 $x_0f(x_0)+1+ax_0^2=x_0\ln x_0-\frac{x_0^3+x_0}{2}+1$.设 $h(x)=x\ln x-\frac{x^3+x}{2}+1(x\in(0,1))$,则 $h'(x)=-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}+\ln x$,$h''(x)=-3x+\frac{1}{x}=\frac{1-3x^2}{x}$,所以当 $0<x<\frac{\sqrt{3}}{3}$时,$h''(x)>0$;当 $\frac{\sqrt{3}}{3}<x<1$ 时,$h''(x)<0$.所以 $h'(x)$在$\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$上单调递增,在$\left(\frac{\sqrt{3}}{3},1\right)$上单调递减,

所以 $h'(x)\leqslant h'\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\ln\frac{\sqrt{3}}{3}<0$,

所以 h(x)在(0,1)上单调递减,

所以 $h(x_0)>h(1)=0$,

即 $x_0\ln x_0-\frac{x_0^3+x_0}{2}+1>0$,

所以 $x_0f(x_0)+1+ax_0^2>0$.

22.(1)**解**:椭圆 $E:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b^2}=1(0<b<2)$,所以长半轴长 a=2,又由向量$\overrightarrow{BF_1}$与$\overrightarrow{BF_2}$的夹角为$\frac{2\pi}{3}$,

可得 $|BF_1|=|BF_2|=a=\frac{b}{\cos\frac{\pi}{3}}=2b=2$,

即 b=1,

所以椭圆 E 的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)**解**:设 P(m,n),则 $\frac{m^2}{4}+n^2=1$,即 $n^2=1-\frac{m^2}{4}$,又$\overrightarrow{PQ}=(1-m,-n)$,$\overrightarrow{PO}=(-m,-n)$,

所以$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PO}=(1-m,-n)\cdot(-m,-n)=m^2-m+n^2=\frac{3}{4}m^2-m+1=\frac{3}{4}\left(m-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}$,

由 $-2\leqslant m\leqslant 2$,可得 $m=\frac{2}{3}$时,$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PO}$取得最小值$\frac{2}{3}$;m=-2 时,$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PO}$取得最大值 6.

(3)**证明**:当直线 l 的斜率不存在时,设 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,

由 $k_{BM}+k_{BN}=\frac{y_1-1}{x_1}+\frac{y_2-1}{x_2}=\frac{(y_1-1)x_2+(y_2-1)x_1}{x_1x_2}=1$,

$x_1=x_2$,$y_1=-y_2$,得 $x_1=-2$,此时 M,N 重合,不符合题意;

设不经过点 B 的直线 l 方程为 $y=kx+t$,$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,由$\begin{cases}y=kx+t,\\x^2+4y^2=4,\end{cases}$

得$(1+4k^2)x^2+8ktx+4t^2-4=0$,

$x_1+x_2=-\frac{8kt}{1+4k^2}$,$x_1x_2=\frac{4t^2-4}{1+4k^2}$,

$k_{BM}+k_{BN}=\frac{y_1-1}{x_1}+\frac{y_2-1}{x_2}=\frac{(y_1-1)x_2+(y_2-1)x_1}{x_1x_2}=1$,

$\Rightarrow(kx_1-1+t)x_2+(kx_2-1+t)x_1=x_1x_2$

$\Rightarrow(2k-1)x_1x_2+(t-1)(x_1+x_2)=0$

$\Rightarrow(t-1)(2k-t-1)=0$,

因为 $t\neq 1$,所以 $t=2k-1$,

所以 $y=k(x+2)-1$,

所以直线 l 必过定点(-2,-1).

第 35 期

第 2~3 版专题检测题参考答案

一、选择题

1~6.DCDCCA　7~12.BCDADC

二、填空题

13.$2\sqrt{6}$　14.$64\pi\mathrm{cm}^2$　15.$\frac{2}{5}$

16.①②④

三、解答题

17.**解**:(1)因为向量 $m=(\sin A,\sin B)$,$n=(\cos B,\cos A)$且 $m\cdot n=\sin 2C$,所以 $\sin A\cos B+\sin B\cos A=\sin(A+B)=\sin C=\sin 2C=2\sin C\cos C$,因为 $\sin C\neq 0$,所以 $\cos C=\frac{1}{2}$,因为 C 为三角形内角,所以 $C=\frac{\pi}{3}$.

(2)因为 $\sin A+\sin B=\sqrt{3}\sin C$,由正弦定理,得 $a+b=\sqrt{3}c$.

由 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{\sqrt{3}}{4}ab=6\sqrt{3}$,

得 ab=24.

由余弦定理,得

$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos C}=\sqrt{a^2+b^2-ab}=\sqrt{(a+b)^2-3ab}=\sqrt{3c^2-3\times 24}$,

解得 c=6,或 c=-6(舍去).

所以边 c 的长为 6.

18.(1)**证明**:因为四边形 ABCD 是菱形,所以 BC∥AD.

因为 BC⊄平面 ADE,AD⊂平面 ADE,所以 BC∥平面 ADE.

因为四边形 BDEF 是矩形,

所以 BF∥DE.

因为 BF⊄平面 ADE,DE⊂平面 ADE,所以 BF∥平面 ADE.

又 BC,BF⊂平面 BCF,

且 BC∩BF=B,

所以平面 BCF∥平面 AED.

(2)**解**:连接 AC,交 BD 于点 O.

因为四边形 ABCD 是菱形,

所以 $AO\perp BD$.

又因为 $ED\perp$平面 ABCD,AO⊂平面 ABCD,所以 $AO\perp ED$.

因为 BD∩ED=D,

所以 $AO\perp$平面 BDEF.

所以 AO 是四棱锥 A-BDEF 的高.

因为 AB=AD,$\angle BAD=\frac{\pi}{3}$,

所以 BF=BD=AB=a,

所以 $AO=\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

所以四棱锥 A-BDEF 的体积

$V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}a\cdot a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{6}a^3$.

19.**证明**:(1)由 $a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n$,

得 $a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)$,

因为 $a_1=1$,$a_2=3$,所以 $a_2-a_1=2$,

所以$\{a_{n+1}-a_n\}$是首项为 2,公比为 2 的等比数列.

所以 $a_{n+1}-a_n=2\times 2^{n-1}=2^n$,

则 $a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})=1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=\frac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$.

(2)$b_n=\log_2(a_n+1)=\log_2 2^n=n$,$S_n=\frac{n(n+1)}{2}$,$\frac{1}{S_n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$,

所以 $\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}+\cdots+\frac{1}{S_n}=2\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)<2$.

20.**解**:(1)设曲线 AF 所在抛物线的方程为 $y=ax^2(a>0)$,

因为抛物线过点 F(2,4),

所以 $4=a\times 2^2$,得 a=1.

所以曲线 AF 所在抛物线的方程为 $y=x^2$.

(2)按(1)的直角坐标系,

则 E(0,4),C(2,6),

所以 EC 所在直线的方程为 y=x+4.

设 $P(x,x^2)(0<x<2)$,

则 $PO=x$,$OE=4-x^2$,$PR=4+x-x^2$,

所以公园的面积 $S=\frac{1}{2}(4-x^2+4+x-x^2)\cdot x=-x^3+\frac{1}{2}x^2+4x(0<x<2)$,

所以 $S'=-3x^2+x+4$.

令 S′=0,得 $x=\frac{4}{3}$,或 x=-1(舍去),

当 x 变化时,S′和 S 的变化情况如下表:

x	$\left(0,\frac{4}{3}\right)$	$\frac{4}{3}$	$\left(\frac{4}{3},2\right)$
S′	+	0	-
S	↗	极大值 $\frac{104}{27}$	↘

当 $x=\frac{4}{3}$时,S 取得最大值$\frac{104}{27}$.

故公园的最大面积为$\frac{104}{27}\mathrm{km}^2$.

21.**解**:(1)因为直线 y=bx+2 与圆 $x^2+y^2=2$ 相切,所以 $\frac{2}{\sqrt{b^2+1}}=\sqrt{2}$,解得 b=1.因为椭圆的离心率 $e=\frac{\sqrt{6}}{3}$,所以 $\frac{a^2-1}{a^2}=\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2$,解得 $a^2=3$,所以所求椭圆的方程是$\frac{x^2}{3}+y^2=1$.

(2)直线 y=kx+2 代入椭圆方程,

消去 y,可得$(1+3k^2)x^2+12kx+9=0$,

所以 $\Delta=36k^2-36>0$,

所以 k>1,或 k<-1.

设 $C(x_1,y_1)$,$D(x_2,y_2)$,

则有 $x_1+x_2=-\frac{12k}{1+3k^2}$,$x_1x_2=\frac{9}{1+3k^2}$.

若以 CD 为直径的圆过点 E,

则 $EC\perp ED$,

因为$\overrightarrow{EC}=(x_1-1,y_1)$,$\overrightarrow{ED}=(x_2-1,y_2)$,

所以$\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{ED}=(x_1-1)(x_2-1)+y_1y_2=0$,

所以$(1+k^2)x_1x_2+(2k-1)(x_1+x_2)+5=0$,

所以$(1+k^2)\times\frac{9}{1+3k^2}+(2k-1)\times\left(-\frac{12k}{1+3k^2}\right)+5=0$,解得 $k=-\frac{7}{6}<-1$,

所以存在实数 $k=-\frac{7}{6}$,使得以 CD 为直径的圆过定点 E.

22.(1)**解**:$f'(x)=e^{-x}(1-x)$.由 $f'(x)>0$,得 x<1;由 $f'(x)<0$,得 x>1.所以 f(x)的单调递增区间是$(-\infty,1)$,单调递减区间是$(1,+\infty)$.

函数 f(x)在 x=1 处取得极大值 $f(1)=\frac{1}{e}$,无极小值.

(2)**证明**:因为函数 y=g(x)的图象与函数 y=f(x)的图象关于直线 x=1 对称,所以 $g(x)=f(2-x)=(2-x)e^{x-2}$.

令 F(x)=f(x)-g(x),

则 $F(x)=xe^{-x}+(x-2)e^{x-2}$,

所以 $F'(x)=(x-1)(e^{2x-2}-1)\cdot e^{-x}$.

因为 x>1,所以 F′(x)>0,

所以 F(x)在$(1,+\infty)$内单调递增,

所以 F(x)>F(1)=0,

所以 f(x)>g(x).