第 32 期

第 2~3 版专题检测题参考答案

一、选择题

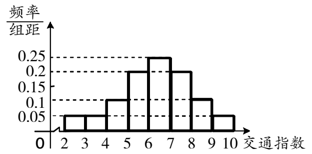
1~6.ADBCCC　7~12.ADCBCC

二、填空题

13.$-\frac{5}{2}$　14.95%　15.$1-\frac{\pi}{10}$　16.9

三.解答题

17.**解**:(1)补全直方图如图:



(第 17 题图)

由直方图可知:(0.1+0.2)×1×20=6,(0.25+0.2)×1×20=9,(0.1+0.05)×1×20=3.

所以这 20 个路段中,轻度拥堵、中度拥堵、严重拥堵的路段分别为 6 个、9 个、3 个.

(2)由(1)知拥堵路段共有 6+9+3=18 个,按分层抽样从 18 个路段中选出 6 个,每种情况分别有:$\frac{6}{18}\times6=2$,$\frac{6}{18}\times9=3$,$\frac{6}{18}\times3=1$,即这三个级别路段中分别抽取的个数为 2,3,1.

(3)记(2)中选取的 2 个轻度拥堵路段为 A_1,A_2,选取的 3 个中度拥堵路段为 B_1,B_2,B_3,选取的 1 个严重拥堵路段为 C_1,则从 6 个路段选取 2 个路段的可能情况如下:

(A_1,A_2),(A_1,B_1),(A_1,B_2),(A_1,B_3),(A_1,C_1),(A_2,B_1),(A_2,B_2),(A_2,B_3),(A_2,C_1),(B_1,B_2),(B_1,B_3),(B_1,C_1),(B_2,B_3),(B_2,C_1),(B_3,C_1),共 15 种可能.

其中至少有 1 个轻度拥堵的有:(A_1,A_2),(A_1,B_1),(A_1,B_2),(A_1,B_3),(A_1,C_1),(A_2,B_1),(A_2,B_2),(A_2,B_3),(A_2,C_1),共 9 种可能.所以所选 2 个路段中至少 1 个路段为轻度拥堵的概率为 $\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$.

18.**解**:(1)由所给数据计算得

$\bar{x}=\frac{1}{5}\times(1+2+3+4+5)=3$,

$\bar{y}=\frac{1}{5}\times(3.3+3.6+3.9+4.4+4.8)=4$,

$\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2=10$,$\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=3.8$,

所以 $\hat{b}=\frac{3.8}{10}=0.38$,

所以 $\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=4-0.38\times3=2.86$,

所以所求线性回归方程为 $\hat{y}=0.38x+2.86$.

(2)由(1)知:下一年的教育投资约为 0.38×6+2.86=5.14(百万元).

19.**解**:(1)设 A 表示事件“甲同学选周三的活动”,B 表示事件“乙同学选周三的活动”,则 $P(A)=\frac{C_2^1}{C_3^2}=\frac{2}{3}$,$P(B)=\frac{C_4^2}{C_5^3}=\frac{3}{5}$.

因为事件 A,B 相互独立,所以甲同学选周三的活动且乙同学未选周三的活动的概率 $P(A\bar{B})=P(A)P(\bar{B})=\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{3}{5}\right)=\frac{4}{15}$.

(2)设 C 表示事件“丙同学选周三的活动”,则 $P(C)=\frac{C_4^2}{C_5^3}=\frac{3}{5}$.X 的可能取值为 0,1,2,3.

$P(X=0)=P(\bar{A}\cdot\bar{B}\cdot\bar{C})=\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{75}$,

$P(X=1)=P(A\bar{B}\bar{C})+P(\bar{A}B\bar{C})+P(\bar{A}\,\bar{B}C)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{4}{15}$,

$P(X=2)=P(AB\bar{C})+P(A\bar{B}C)+P(\bar{A}BC)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{11}{25}$,

$P(X=3)=P(ABC)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{25}$.

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{4}{75}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{11}{25}$	$\frac{6}{25}$

X 的均值 $E(X)=0\times\frac{4}{75}+1\times\frac{20}{75}+2\times\frac{33}{75}+3\times\frac{18}{75}=\frac{28}{15}$.

20.**解**:(1)由题意知,$P=\frac{25+20}{50}=\frac{9}{10}$.

(2)由题意知,X 的可能取值分别为 0,1,2.

则 $P(X=0)=\frac{C_5^2+C_{25}^2+C_{20}^2}{C_{50}^2}=\frac{20}{49}$,$P(X=1)=\frac{C_5^1C_{25}^1+C_{20}^1C_{25}^1}{C_{50}^2}=\frac{25}{49}$,$P(X=2)=\frac{C_5^1C_{20}^1}{C_{50}^2}=\frac{4}{49}$,

从而 X 的分布列为:

X	0	1	2
P	$\frac{20}{49}$	$\frac{25}{49}$	$\frac{4}{49}$

数学期望为 $E(X)=0\times\frac{20}{49}+1\times\frac{25}{49}+2\times\frac{4}{49}=\frac{33}{49}$.

(3)所调查的 50 名学生中物理、化学、生物选考两科目的学生有 25 名,相应的频率为 $P_1=\frac{25}{50}=\frac{1}{2}$,由题意知,$Y\sim B\left(4,\frac{1}{2}\right)$,所以事件“$Y\geqslant3$”的概率为 $P(Y\geqslant3)=C_4^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(1-\frac{1}{2}\right)+C_4^4\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{5}{16}$.

21.**解**:(1)第二种生产方式的效率更高.

理由如下:

(i)由茎叶图可知:用第一种生产方式的工人中,有 75%的工人完成生产任务所需时间至少 80 分钟,用第二种生产方式的工人中,有 75%的工人完成生产任务所需时间至多 79 分钟.因此第二种生产方式的效率更高.

(ii)由茎叶图可知:用第一种生产方式的工人完成生产任务所需时间的中位数为 85.5 分钟,用第二种生产方式的工人完成生产任务所需时间的中位数为 73.5 分钟.因此第二种生产方式的效率更高.

(iii)由茎叶图可知:用第一种生产方式的工人完成生产任务平均所需时间高于 80 分钟;用第二种生产方式的工人完成生产任务平均所需时间低于 80 分钟,因此第二种生产方式的效率更高.

(iv)由茎叶图可知:用第一种生产方式的工人完成生产任务所需时间分布在茎 8 上的最多,关于茎 8 大致呈对称分布;用第二种生产方式的工人完成生产任务所需时间分布在茎 7 上的最多,关于茎 7 大致呈对称分布,又用两种生产方式的工人完成生产任务所需时间分布的区间相同,故可以认为用第二种生产方式完成生产任务所需的时间比用第一种生产方式完成生产任务所需的时间更少,因此第二种生产方式的效率更高.

(以上给出了 4 种理由,考生答出其中任意一种或其他合理理由均可得分.)

(2)由茎叶图知 $m=\frac{79+81}{2}=80$.

列联表如下:

	超过 m	不超过 m
第一种生产方式	15	5
第二种生产方式	5	15

(3)由列联表,得 K^2 的观测值为 $k=\frac{40\times(15\times15-5\times5)^2}{20\times20\times20\times20}=10>6.635$,所以有99%的把握认为两种生产方式的效率有差异.

22.**解**:(1)由题意可知 X 的可能取值为 $0.9a,0.8a,0.7a,a,1.1a,1.3a$.

由统计数据可知:

$P(X=0.9a)=\frac{1}{6}$,$P(X=0.8a)=\frac{1}{12}$,

$P(X=0.7a)=\frac{1}{12}$,$P(X=a)=\frac{1}{3}$,

$P(X=1.1a)=\frac{1}{4}$,$P(X=1.3a)=\frac{1}{12}$.

所以 X 的分布列为:

X	0.9a	0.8a	0.7a	a	1.1a	1.3a
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

所以 $E(X)=0.9a\times\frac{1}{6}+0.8a\times\frac{1}{12}+0.7a\times\frac{1}{12}+a\times\frac{1}{3}+1.1a\times\frac{1}{4}+1.3a\times\frac{1}{12}=\frac{11.9a}{12}=\frac{11305}{12}\approx942$.

(2)①由统计数据可知任意一辆该品牌车龄已满三年的二手车为事故车的概率为 $\frac{15+5}{60}=\frac{1}{3}$,三辆车中至多有一辆事故车的概率为 $P=\left(1-\frac{1}{3}\right)^3+C_3^1\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{20}{27}$.

②设 Y 为该销售商购进并销售一辆二手车的利润,Y 的可能取值为 -5000,10000.

所以 Y 的分布列为:

Y	-5000	10000
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

所以 $E(Y)=-5000\times\frac{1}{3}+10000\times\frac{2}{3}=5000$.

所以该销售商一次购进 100 辆该品牌车龄已满三年的二手车获得利润的期望值为 $100E(Y)=50$ 万元.

第 29 期

第 2~3 版专题检测题参考答案

一、选择题

1~6.CCCDCC　7~12.DCDBDB

二、填空题

13.20　14.-9 或-4

15.136　16.$\left[\frac{7}{3},\frac{12}{5}\right]$

三、解答题

17.**解**:(1)设$\{a_n\}$的公比为 q,由题设得 $a_n=q^{n-1}$.因为 $a_5=4a_3$,所以 $q^4=4q^2$,解得 $q=0$(舍去),或 $q=-2$,或 $q=2$.故 $a_n=(-2)^{n-1}$ 或 $a_n=2^{n-1}$.

(2)若 $a_n=(-2)^{n-1}$,则 $S_n=\frac{1\times[1-(-2)^n]}{1-(-2)}=\frac{1-(-2)^n}{3}$.由 $S_m=63$,得 $\frac{1-(-2)^m}{3}=63$,所以$(-2)^m=-188$,此方程没有正整数解.若 $a_n=2^{n-1}$,则 $S_n=\frac{1\times(1-2^n)}{1-2}=2^n-1$.由 $S_m=63$,得 $2^m=64$,解得 $m=6$.

综上,$m=6$.

18.**解**:(1)设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q,

由题意知 $a_1=\frac{1}{2}$,

因为 S_1+a_1,S_2+a_2,S_3+a_3 成等差数列,

所以 $2(S_2+a_2)=S_1+a_1+S_3+a_3$,

变形得 $S_2-S_1+2a_2=a_1+S_3-S_2+a_3$,

即得 $3a_2=a_1+2a_3$,

所以 $\frac{3}{2}q=\frac{1}{2}+q^2$,

解得 $q=1$,或 $q=\frac{1}{2}$.

又数列$\{a_n\}$为递减数列,

所以 $q=\frac{1}{2}$,

所以 $a_n=a_1q^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

(2)因为 $b_n=a_n\log_2a_n=-n\left(\frac{1}{2}\right)^n$,

所以 $T_n=-\left[1\times\frac{1}{2}+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+(n-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+n\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$,

于是 $\frac{1}{2}T_n=-\left[1\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n+n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$,

两式相减,得

$\frac{1}{2}T_n=-\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n-n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]=-\frac{\frac{1}{2}\times\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}+n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$,

所以 $T_n=\frac{n+2}{2^n}-2$.

19.**解**:(1)当 $a_1=3$ 时,不合题意;

当 $a_1=2$ 时,当且仅当 $a_2=6,a_3=18$ 时,符合题意;当 $a_1=10$ 时,不合题意.

因此 $a_1=2,a_2=6,a_3=18$,

所以$\{a_n\}$的公比 $q=3$.

所以 $a_n=2\cdot3^{n-1}(n\in\mathbf{N}_+)$.

(2)由(1)得

$b_n=a_n+(-1)^n\ln a_n=2\cdot3^{n-1}+(-1)^n\ln(2\cdot3^{n-1})=2\cdot3^{n-1}+(-1)^n[\ln2+(n-1)\ln3]=2\cdot3^{n-1}+(-1)^n\cdot(\ln2-\ln3)+(-1)^nn\ln3$,

所以 $S_n=2(1+3+\cdots+3^{n-1})+[-1+1-1+\cdots+(-1)^n]\cdot(\ln2-\ln3)+[-1+2-3+\cdots+(-1)^nn]\ln3$.

①当 n 为偶数时,

$S_n=2\times\frac{1-3^n}{1-3}+\frac{n}{2}\cdot\ln3=3^n+\frac{n}{2}\cdot\ln3-1$;

②当 n 为奇数时,$S_n=2\times\frac{1-3^n}{1-3}-(\ln2-\ln3)+\left(\frac{n-1}{2}-n\right)\ln3=3^n-\frac{n-1}{2}\cdot\ln3-\ln2-1$.

综上所述,

$$S_n=\begin{cases}3^n+\frac{n}{2}\cdot\ln3-1,n\text{ 为偶数},\\3^n-\frac{n-1}{2}\cdot\ln3-\ln2-1,n\text{ 为奇数}.\end{cases}$$

20.(1)**解**:因为$|f(x)|=2$,

所以 $\frac{\pi}{2}x=k\pi+\frac{\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$,

所以 $x=2k+1$,$k\in\mathbf{Z}$.

又因为 $x>0$,所以 $a_n=2n-1(n\in\mathbf{N}_+)$.

(2)**证明**:因为 $b_n=\frac{1}{a_{n+1}^2}=\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{1}{4n^2+4n+1}<\frac{1}{4n^2+4n}=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$,

所以 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n<\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{4(n+1)}<\frac{1}{4}$,

所以 $T_n<\frac{1}{4}$.

21.**解**:(1)由题意,知

$a_n=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{4}\right)^n(n\in\mathbf{N}_+)$,

所以 $b_n=3\log_{\frac{1}{4}}a_n-2=3\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{4}\right)^n-2=3n-2(n\in\mathbf{N}_+)$,

所以 $c_n=(3n-2)\times\left(\frac{1}{4}\right)^n(n\in\mathbf{N}_+)$,

所以 $S_n=1\times\frac{1}{4}+4\times\left(\frac{1}{4}\right)^2+7\times\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots+(3n-5)\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}+(3n-2)\times\left(\frac{1}{4}\right)^n$,

于是 $\frac{1}{4}S_n=1\times\left(\frac{1}{4}\right)^2+4\times\left(\frac{1}{4}\right)^3+7\times\left(\frac{1}{4}\right)^4+\cdots+(3n-5)\times\left(\frac{1}{4}\right)^n+(3n-2)\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$,

两式相减,得

$\frac{3}{4}S_n=\frac{1}{4}+3\left[\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]-(3n-2)\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}=\frac{1}{2}-(3n+2)\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$,

所以 $S_n=\frac{2}{3}-\frac{3n+2}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n(n\in\mathbf{N}_+)$.

(2)因为 $c_{n+1}-c_n=(3n+1)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}-(3n-2)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n=9(1-n)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}(n\in\mathbf{N}_+)$,

所以当 $n=1$ 时,$c_2=c_1=\frac{1}{4}$;

当 $n\geqslant2$ 时,$c_{n+1}<c_n$,

即 $c_1=c_2>c_3>c_4>\cdots>c_n$,

所以 c_n 的最大值是 $\frac{1}{4}$.

又 $c_n\leqslant\frac{1}{4}m^2+m-1$ 对一切正整数 n 恒成立,

所以 $\frac{1}{4}m^2+m-1\geqslant\frac{1}{4}$,

即 $m^2+4m-5\geqslant0$,

解得 $m\geqslant1$,或 $m\leqslant-5$.

所以实数 m 的取值范围是$(-\infty,-5]\cup[1,+\infty)$.

22.(1)**解**:由 $\lambda=0,\mu=-2$,有 $a_{n+1}a_n=2a_n^2(n\in\mathbf{N}_+)$.若存在某个 $n_0\in\mathbf{N}_+$,使得 $a_{n_0}=0$,则由上述递推公式易得 $a_{n_0+1}=0$,重复上述过程可得 $a_1=0$,此与 $a_1=3$ 矛盾,所以对任意 $n\in\mathbf{N}_+$,$a_n\neq0$.

从而 $a_{n+1}=2a_n(n\in\mathbf{N}_+)$,即$\{a_n\}$是一个首项为 3,公比 $q=2$ 的等比数列,故 $a_n=a_1q^{n-1}=3\cdot2^{n-1}$.

(2)**证明**:由 $\lambda=\frac{1}{k_0}$,$\mu=-1$,数列$\{a_n\}$的递推关系式变为 $a_{n+1}a_n+\frac{1}{k_0}a_{n+1}-a_n^2=0$,变形为 $a_{n+1}\left(a_n+\frac{1}{k_0}\right)=a_n^2(n\in\mathbf{N}_+)$.由上式及 $a_1=3$,归纳可得 $3=a_1>a_2>\cdots>a_n>a_{n+1}>\cdots>0$.

因为 $a_{n+1}=\frac{a_n^2}{a_n+\frac{1}{k_0}}=\frac{a_n^2-\frac{1}{k_0^2}+\frac{1}{k_0^2}}{a_n+\frac{1}{k_0}}=a_n-\frac{1}{k_0}+\frac{1}{k_0}\cdot\frac{1}{k_0a_n+1}$,所以对 $n=1,2,\cdots,k_0$ 求和,得

$a_{k_0+1}=a_1+(a_2-a_1)+\cdots+(a_{k_0+1}-a_{k_0})=a_1-k_0\cdot\frac{1}{k_0}+\frac{1}{k_0}\cdot\left(\frac{1}{k_0a_1+1}+\frac{1}{k_0a_2+1}+\cdots+\frac{1}{k_0a_{k_0}+1}\right)$

$>2+\frac{1}{k_0}\cdot\left(\underbrace{\frac{1}{3k_0+1}+\frac{1}{3k_0+1}+\cdots+\frac{1}{3k_0+1}}_{k_0\text{个}}\right)$

$=2+\frac{1}{3k_0+1}$.

另一方面,由上已证的不等式知 $a_1>a_2>\cdots>a_{k_0}>a_{k_0+1}>2$,得

$a_{k_0+1}=a_1-k_0\cdot\frac{1}{k_0}+\frac{1}{k_0}\cdot\left(\frac{1}{k_0a_1+1}+\frac{1}{k_0a_2+1}+\cdots+\frac{1}{k_0a_{k_0}+1}\right)<2+\frac{1}{k_0}\cdot\left(\underbrace{\frac{1}{2k_0+1}+\frac{1}{2k_0+1}+\cdots+\frac{1}{2k_0+1}}_{k_0\text{个}}\right)=2+\frac{1}{2k_0+1}$.

综上,$2+\frac{1}{3k_0+1}<a_{k_0+1}<2+\frac{1}{2k_0+1}$.

第 30 期

第 2~3 版专题检测题参考答案

一、选择题

1~6.ABABAA　7~12.CBBACB

二、填空题

13.3　14.$4+\frac{4\sqrt{2}}{3}$

15.$\sqrt{34}+1$　16.$[-2,4]$

三.解答题

17.**解**:(1)由$\sqrt{ab}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant\frac{2}{\sqrt{ab}}$,得 $ab\geqslant2$,当且仅当 $a=b=\sqrt{2}$ 时取等号,故 $a^3+b^3\geqslant2\sqrt{a^3b^3}\geqslant4\sqrt{2}$,当且仅当 $a=b=\sqrt{2}$ 时取等号.所以 a^3+b^3 的最小值为 $4\sqrt{2}$.

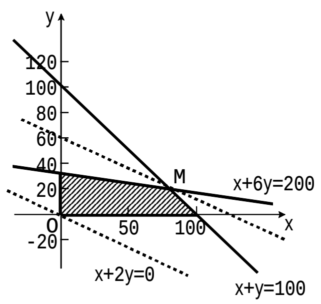
(2)由(1)知,$2a+3b\geqslant2\sqrt{6}\cdot\sqrt{ab}\geqslant4\sqrt{3}$,由于 $4\sqrt{3}>6$,从而不存在 a,b,使得 $2a+3b=6$.

18.**解**:设投放 A 型号单车 x 辆,B 型号单车 y 辆,单车公司可获得的总收入为 z 元.

则有$\begin{cases}x+y\leqslant100,\\400x+2400y\leqslant80000,\\x\geqslant0,x\in\mathbf{Z},\\y\geqslant0,y\in\mathbf{Z},\end{cases}$

即$\begin{cases}x+y\leqslant100,\\x+6y\leqslant200,\\x\geqslant0,x\in\mathbf{Z},\\y\geqslant0,y\in\mathbf{Z},\end{cases}$①

且 $z=2\times0.5x+2y=x+2y$,画出不等式组①表示的平面区域,如图所示.



(第 18 题图)

联立$\begin{cases}x+y=100,\\x+6y=200,\end{cases}$得$\begin{cases}x=80,\\y=20,\end{cases}$

因此 M(80,20).

当平行直线系 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{z}{2}$ 过点 M 时,截距最大,即 z 最大,

所以当 $x=80$,$y=20$ 时,z 取得最大值,其最大值 $z=80+2\times20=120$.

答:公司投放 A 型号单车 80 辆,B 型号单车 20 辆才能使每天获得的总收入最多,最多为 120 元.

19.**解**:(1)当 $a=1$ 时,$f(x)=|x+1|-|x-1|$,

即$f(x)=\begin{cases}-2,x\leqslant-1,\\2x,-1<x<1,\\2,x\geqslant1.\end{cases}$

故不等式 $f(x)>1$ 的解集为$\left\{x\middle|x>\frac{1}{2}\right\}$.

(2)当 $x\in(0,1)$时$|x+1|-|ax-1|>x$ 成立等价于当 $x\in(0,1)$时$|ax-1|<1$ 恒成立.

即$-1<ax-1<1$ 恒成立.

当 $ax-1>-1$ 时,得 $ax>0$ 恒成立,

所以 $a>0$;

当 $ax-1<1$ 时,得 $ax<2$,

也就是 $a<\frac{2}{x}$恒成立,又 $x\in(0,1)$,

所以$\frac{2}{x}>2$,所以 $a\leqslant2$.

综上,a 的取值范围为$(0,2]$.

20.**解**:由题意,知 P、Q 关于原点对称.设 $Q(x,y)$是函数 $y=g(x)$图象上任一点,则 $P(-x,-y)$是函数 $f(x)=\log_a(x+1)$图象上的点,所以$-y=\log_a(-x+1)$,

所以 $g(x)=-\log_a(1-x)$.

(1)当 $0<a<1$ 时,由 $2f(x)+g(x)\geqslant0$,得 $2\log_a(x+1)-\log_a(1-x)\geqslant0$,

所以$\begin{cases}1+x>0,\\1-x>0,\\(1+x)^2\leqslant1-x\end{cases}$　$\Leftrightarrow-1<x\leqslant0$.

所以 $0<a<1$ 时,不等式 $2f(x)+g(x)\geqslant0$ 的解集为$\{x|-1<x\leqslant0\}$.

(2)$y=2f(x)+g(x)=2\log_a(1+x)-\log_a(1-x)$.因为 $a>1$,当 $x\in[0,1)$时,$2f(x)+g(x)\geqslant m$ 恒成立,得 $\log_a\frac{(x+1)^2}{1-x}\geqslant m$ 恒成立,即 $\log_a\frac{(x+1)^2}{1-x}\geqslant\log_a a^m$ 恒成立,所以 $a^m\leqslant\frac{(x+1)^2}{1-x}$恒成立.

设 $\varphi(x)=\frac{(x+1)^2}{1-x}=(1-x)+\frac{4}{1-x}-4(0\leqslant x<1)$,易证得 $\varphi(x)$在$[0,1)$上是增函数,

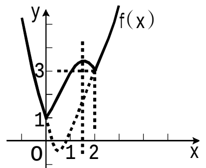
所以$[\varphi(x)]_{\min}=\varphi(0)=1$,所以 $a^m\leqslant1=a^0$,

所以 $m\leqslant0$.

所以实数 m 的取值范围是$(-\infty,0]$.

21.**解**:(1)当 $a=1$ 时,因为 $f(x)=|x^2-2x|+x+1=\begin{cases}x^2-x+1,x<0,\\-x^2+3x+1,0\leqslant x\leqslant2,\\x^2-x+1,x>2,\end{cases}$

画出函数 $f(x)$的图象,如图所示:



(第 21 题图)

故当 $x=0$ 时,$f(x)$的最小值为 1.

(2)若任意 $x\in[-1,2]$,使得 $f(x)\geqslant|x|$ 恒成立,

即对任意 $x\in[-1,2]$,$|x^2-2x|+ax+a-|x|\geqslant0$ 恒成立.

令 $g(x)=|x^2-2x|+ax+a-|x|=\begin{cases}x^2+(a-1)x+a,x<0,\\-x^2+(a+1)x+a,0\leqslant x\leqslant2,\\x^2+(a-3)x+a,x>2,\end{cases}$

所以当 $x\in[-1,2]$时,$g(x)\geqslant0$ 恒成立.

若 $x=-1$ 时,则 $g(x)=2\geqslant0$;

若 $x\in(-1,0)$,

则 $g(x)=x^2+(a-1)x+a\geqslant0$,

即 $a\geqslant\frac{x-x^2}{x+1}$,此时,$\frac{x-x^2}{x+1}<0$,

若 $x=0$,则 $g(x)=-x^2+(a+1)x+a=a\geqslant0$,

即 $a\geqslant0$;

若 $x\in(0,2]$,

则 $g(x)=-x^2+(a+1)x+a\geqslant0$,

即 $a\geqslant\frac{x^2-x}{x+1}=\frac{(x+1)^2-3(x+1)+2}{x+1}=(x+1)-3+\frac{2}{x+1}$,

由于 $m(x)=(x+1)-3+\frac{2}{x+1}$在$(0,\sqrt{2}-1)$上单调递减,在$[\sqrt{2}-1,2]$上单调递增,

$m(0)=0$,$m(2)=\frac{2}{3}$,故 $m(x)$在$(0,2]$上的最大值为$\frac{2}{3}$,所以 $a\geqslant\frac{2}{3}$.

综上可得,实数 a 的取值范围是$\left[\frac{2}{3},+\infty\right)$.

22.(1)**解**:因为 $f(x)=x\ln x$,所以 $f'(x)=\ln x+1(x>0)$,令 $f'(x)=0$,得 $x=\frac{1}{e}$.

所以当 $x\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$时,$f'(x)<0$,所以 $f(x)$在$\left(0,\frac{1}{e}\right)$上单调递减;当 $x\in\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$时,$f'(x)>0$,所以 $f(x)$在$\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$上单调递增.所以函数 $f(x)$的单调递增区间为$\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$,单调递减区间为$\left(0,\frac{1}{e}\right)$.

(2)**证明**:当 $0<x\leqslant1$ 时,$f(x)\leqslant0$,又 $t>0$,令 $h(x)=f(x)-t$,$x\in[1,+\infty)$,由(1)知 $h(x)$在区间$[1,+\infty)$上为增函数,$h(1)=-t<0$,$h(e^t)=t(e^t-1)>0$,所以存在唯一的 m,使 $t=f(m)$成立.

(3)**证明**:因为 $m=g(t)$且由(2)知 $t=f(m)$,$t>0$,

当 $t>e$ 时,若 $m=g(t)\leqslant e$,则由 $f(m)$的单调性有 $t=f(m)\leqslant f(e)=e$,矛盾,所以 $m>e$.

又$\frac{\ln(g(t))}{\ln t}=\frac{\ln m}{\ln(f(m))}=\frac{\ln m}{\ln(m\ln m)}=\frac{\ln m}{\ln m+\ln(\ln m)}=\frac{u}{u+\ln u}$,其中 $u=\ln m$,$u>1$,要使$\frac{7}{10}<\frac{\ln(g(t))}{\ln t}<1$ 成立,只需 $0<\ln u<\frac{3}{7}u$.

令 $F(u)=\ln u-\frac{3}{7}u$,$u>1$,$F'(u)=\frac{1}{u}-\frac{3}{7}$,当 $1<u<\frac{7}{3}$时,$F'(u)>0$,$F(u)$单调递增;当 $u>\frac{7}{3}$时,$F'(u)<0$,$F(u)$单调递减.

所以对 $u>1$,$F(u)\leqslant F\left(\frac{7}{3}\right)<0$,即 $\ln u<\frac{3}{7}u$ 成立.

综上,当 $t>e$ 时,$\frac{7}{10}<\frac{\ln(g(t))}{\ln t}<1$ 成立.

第 31 期

第 2~3 版专题检测题参考答案

一、选择题

1~6.CADDAC　7~12.DCDACA

二、填空题

13.$x^2=-2y$　14.$\frac{1}{2}$

15.$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}=1$　16.2

三、解答题

17.**解**:(1)设圆 C 的方程为$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2(R>0)$,由题意,知点$(1,-1)$在直线 CM 上,所以$\frac{b+1}{a-1}=\frac{-2+1}{2-1}$,所以 $b=-a$,

注意到点 C 在坐标轴上,所以 $a=b=0$,$R^2=(1-0)^2+(-1-0)^2=2$,所以圆 C 的方程为 $x^2+y^2=2$.

(2)因为点 C 到直线 l 的距离 $d=\frac{|-5|}{\sqrt{9+16}}=1$,所以$|AB|=2\sqrt{R^2-d^2}=2$,

注意到弦 AB 的长为一定值, 所以要使 S 最大,即在圆 C 上找到距离直线 l 最远的点,结合圆的性质可知,当点 E 是垂直于 AB 的直径上距离弦 AB 较远的端点时,点 E 距离 l 最远,故点 E 到弦 AB 的最大距离 $h=R+d=\sqrt{2}+1$,此时 $S_{max}=\frac{1}{2}|AB|\cdot h=\sqrt{2}+1$.

18.**解**:(1)由题意得 $F(1,0)$,l 的方程为 $y=k(x-1)(k>0)$.

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,

由$\begin{cases}y=k(x-1),\\y^2=4x,\end{cases}$

得 $k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$.

$\Delta=16k^2+16>0$,故 $x_1+x_2=\frac{2k^2+4}{k^2}$.

所以$|AB|=|AF|+|BF|=(x_1+1)+(x_2+1)=\frac{4k^2+4}{k^2}$.

由题设知$\frac{4k^2+4}{k^2}=8$,

解得 $k=-1$(舍去),或 $k=1$.

因此,l 的方程为 $y=x-1$.

(2)由(1)得$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{k^2+2}{k^2}=3$,

所以 AB 的中点坐标为$(3,2)$,

所以 AB 的垂直平分线方程为 $y-2=-(x-3)$,即 $y=-x+5$.

设所求圆的圆心坐标为(x_0,y_0),

则$\begin{cases}y_0=-x_0+5,\\(x_0+1)^2=\frac{(y_0-x_0+1)^2}{2}+16,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x_0=3,\\y_0=2,\end{cases}$或$\begin{cases}x_0=11,\\y_0=-6.\end{cases}$

因此,所求圆的方程为$(x-3)^2+(y-2)^2=16$,或$(x-11)^2+(y+6)^2=144$.

19.**解**:(1)因为$\begin{cases}x=2+t\cos\alpha,\\y=t\sin\alpha\end{cases}$($t$ 为参数,α 为倾斜角,且 $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$),所以$\frac{y}{x-2}=\frac{t\sin\alpha}{t\cos\alpha}=\tan\alpha$,所以直线 l 的一般方程为 $x\tan\alpha-y-2\tan\alpha=0$.

直线 l 通过的定点 P 的坐标为$(2,0)$.

(2)因为直线 l 的参数方程为$\begin{cases}x=2+t\cos\alpha,\\y=t\sin\alpha,\end{cases}$

椭圆方程为$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$,右焦点坐标为 $P(2,0)$,

所以 $3(2+t\cos\alpha)^2+4(t\sin\alpha)^2-48=0$,即$(3+\sin^2\alpha)t^2+12\cos\alpha\cdot t-36=0$.因为直线 l 过椭圆的右焦点,所以直线 l 恒与椭圆有两个交点,所以$|PA||PB|=\frac{36}{3+\sin^2\alpha}$.

因为 $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$,且 $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$,

所以 $0\leqslant\sin^2\alpha<1$,

所以$|PA||PB|\leqslant\frac{36}{3+0}=12$,

所以$|PA||PB|$的最大值为 12.

20.(1)**证明**:设$C(x,y)$,由$\overrightarrow{OC}=t\overrightarrow{OM}+(1-t)\overrightarrow{ON}(t\in\mathbf{R})$,得$(x,y)=t(1,-3)+(1-t)(5,1)$,故点 C 的轨迹方程是 $y=x-4$.联立$\begin{cases}y^2=4x,\\y=4-x,\end{cases}$消去 y,得 $x^2-12x+16=0$.设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $x_1x_2=16$,$x_1+x_2=12$.所以 $y_1y_2=(x_1-4)(x_2-4)=x_1x_2-4(x_1+x_2)+16=-16$, 所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=0$,故$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$.

(2)**解**:由题意知,弦 DE 所在的直线的斜率不为零. 故设弦 DE 所在的直线方程为:$x=ky+m$,代入 $y^2=4x$,得 $y^2-4ky-4m=0$,设 $D(x_3,y_3)$,$E(x_4,y_4)$,所以 $y_3+y_4=4k$,$y_3y_4=-4m$.

若以弦 DE 为直径的圆都过原点,则 $OD\perp OE$,所以 $x_3x_4+y_3y_4=0$.

即$\frac{y_3^2}{4}\times\frac{y_4^2}{4}+y_3y_4=m^2-4m=0$,

解得 $m=0$ (不合题意,舍去)或 $m=4$.

所以存在点 $P(4,0)$,使得过 P 点任作抛物线 $y^2=4x$ 的一条弦,以该弦为直径的圆都过原点.

设弦 DE 的中点为 $M(x,y)$,则 $x=\frac{x_3+x_4}{2}=\frac{ky_3+4+ky_4+4}{2}=2k^2+4$,$y=\frac{y_3+y_4}{2}=2k$,消去 k,得 $y^2=2x-8$.

所以弦 DE 的中点 M 的轨迹方程为 $y^2=2x-8$,即圆心的轨迹方程为 $y^2=2x-8$.

21.(1)**解**:因为椭圆 C 过点 $P\left(1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,所以$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{2b^2}=1$.①

因为$\overrightarrow{PF_2}=2\overrightarrow{QO}$,所以 $PF_2\perp F_1F_2$,

所以 $c=1$,所以 $a^2-b^2=1$.②

由①②得 $a^2=2$,$b^2=1$,所以椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

(2)**证明**:当直线 AB 的斜率不存在时,设 $A(x_0,y_0)$,则 $B(x_0,-y_0)$.由 $k_1+k_2=2$,得$\frac{y_0-1}{x_0}+\frac{-y_0-1}{x_0}=2$,得 $x_0=-1$.

当直线 AB 的斜率存在时,设 AB的方程为 $y=kx+m(m\neq1)$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,由$\begin{cases}\frac{x^2}{2}+y^2=1,\\y=kx+m,\end{cases}$得$(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-2=0$,

得 $x_1+x_2=\frac{-4km}{1+2k^2}$,$x_1\cdot x_2=\frac{2m^2-2}{1+2k^2}$,

所以 $k_1+k_2=2\Rightarrow\frac{y_1-1}{x_1}+\frac{y_2-1}{x_2}=2\Rightarrow\frac{(kx_2+m-1)x_1+(kx_1+m-1)x_2}{x_1x_2}=2$,

即$(2-2k)x_2x_1=(m-1)(x_2+x_1)\Rightarrow(2-2k)(2m^2-2)=(m-1)(-4km)$,

由 $m\neq1$,$(1-k)(m+1)=-km\Rightarrow k=m+1$,

即 $y=kx+m=(m+1)x+m\Rightarrow m(x+1)=y-x$,

故直线 AB 过定点$(-1,-1)$.

22.(1)**解**:因为 $F_2(2,0)$,$F_3(-6,0)$,

所以$\begin{cases}a^2+b^2=36,\\a^2-b^2=4,\end{cases}$解得$\begin{cases}a^2=20,\\b^2=16,\end{cases}$

则曲线 Γ 的方程为$\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{16}=1(y\leqslant0)$和$\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{16}=1(y>0)$.

(2)**证明**:曲线 C_2 的渐近线为 $y=\pm\frac{b}{a}x$,

设直线 l:$y=\frac{b}{a}(x-m)$,

代入 C_1:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,

化为 $2x^2-2mx+(m^2-a^2)=0$,

$\Delta=4m^2-8(m^2-a^2)>0$,

解得$-\sqrt{2}a<m<\sqrt{2}a$.

又由数形结合知 $a\leqslant m<\sqrt{2}a$.

设点 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$M(x_0,y_0)$,

则 $x_1+x_2=m$,

所以 $x_0=\frac{m}{2}$,$y_0=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{\frac{b}{a}(x_1-m)+\frac{b}{a}(x_2-m)}{2}=-\frac{bm}{2a}$,

所以 $y_0=-\frac{b}{a}x_0$,

即点 M 在直线 $y=-\frac{b}{a}x$ 上.

所以弦 AB 的中点 M 必在曲线 C_2 的另一条渐近线上.

(3)**解**:由(1)知,

曲线 C_1:$\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{16}=1(y\leqslant0)$,

点 $F_4(6,0)$.

设直线 l_1 的方程为 $x=ny+6(n>0)$.

联立$\begin{cases}\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{16}=1,\\x=ny+6,\end{cases}$消去 x,

得$(5+4n^2)y^2+48ny+64=0$,

$\Delta=(48n)^2-4\times64\times(5+4n^2)>0$,

化简,得 $n^2>1$.

设 $C(x_3,y_3)$,$D(x_4,y_4)$,

则 $y_3+y_4=-\frac{48n}{5+4n^2}$,$y_3y_4=\frac{64}{5+4n^2}$.

所以$|y_3-y_4|=\sqrt{(y_3+y_4)^2-4y_3y_4}=\frac{16\sqrt{5}\cdot\sqrt{n^2-1}}{5+4n^2}$,

$\triangle CDF_1$ 的面积 $S=\frac{1}{2}\times|F_1F_4|\cdot|y_3-y_4|=\frac{1}{2}\times8\times\frac{16\sqrt{5}\cdot\sqrt{n^2-1}}{5+4n^2}$.令 $t=\sqrt{n^2-1}>0$, 所以 $n^2=t^2+1$, 所以 $S=\frac{64\sqrt{5}}{4t+\frac{9}{t}}\leqslant\frac{64\sqrt{5}}{2\sqrt{4t\cdot\frac{9}{t}}}=\frac{16\sqrt{5}}{3}$,当且仅当 $t=\frac{3}{2}$,即 $n=\frac{\sqrt{13}}{2}$时,等号成立,所以$\triangle CDF_1$面积的最大值为$\frac{16\sqrt{5}}{3}$.