第 40 期

第 2~3 版专题检测题参考答案

一、选择题

1~6.BAABAD　7~12.ADBBBA

二、填空题

13.>　14.$-b$　15.3612　16.$(2,3]$

三、解答题

17.(1)**证明**:由 $a=b\tan A$ 及正弦定理,

得 $\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}$,

所以 $\sin B=\cos A$,即 $\sin B=\sin\left(\frac{\pi}{2}+A\right)$.

又 B 为钝角,因此 $\frac{\pi}{2}+A\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,

故 $B=\frac{\pi}{2}+A$,即 $B-A=\frac{\pi}{2}$.

(2)**解**:由(1)知,

$C=\pi-(A+B)=\pi-\left(2A+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-2A>0$,

所以 $A\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$.

于是 $\sin A+\sin C=\sin A+\sin\left(\frac{\pi}{2}-2A\right)$

$=\sin A+\cos 2A=-2\sin^2A+\sin A+1$

$=-2\left(\sin A-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{8}$.

因为 $0<A<\frac{\pi}{4}$,所以 $0<\sin A<\frac{\sqrt{2}}{2}$.

所以 $\frac{\sqrt{2}}{2}<-2\left(\sin A-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{8}\leqslant\frac{9}{8}$.

综上,$\sin A+\sin C$ 的取值范围是 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{9}{8}\right]$.

18.**解**:(1)$f(x)=\begin{cases}-3,x<-1,\\2x-1,-1\leqslant x\leqslant 2,\\3,x>2.\end{cases}$

当 $x<-1$ 时,$f(x)\geqslant 1$ 无解;

当 $-1\leqslant x\leqslant 2$ 时,由 $f(x)\geqslant 1$,得 $2x-1\geqslant 1$,解得 $x\geqslant 1$,所以 $1\leqslant x\leqslant 2$;

当 $x>2$ 时,$f(x)=3\geqslant 1$ 恒成立.

综上,$f(x)\geqslant 1$ 的解集为 $\{x|x\geqslant 1\}$.

(2)由 $f(x)\geqslant x^2-x+m$,得 $m\leqslant|x+1|-|x-2|-x^2+x$.

而 $|x+1|-|x-2|-x^2+x\leqslant|x|+1+|x|-2-x^2+|x|=-\left(|x|-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{5}{4}\leqslant\frac{5}{4}$,

且当 $x=\frac{3}{2}$ 时,$|x+1|-|x-2|-x^2+x=\frac{5}{4}$.

故 m 的取值范围为 $\left(-\infty,\frac{5}{4}\right]$.

19.**解**:(1)当点 G 位于 AF 中点时,

有 EG∥平面 $ABCD$.

证明:取 AF 的中点 G,AD 的中点 H,

连接 GH,GE,BH.

在△ADF 中,HG 为中位线,

故 HG∥DF 且 $HG=\frac{1}{2}DF$.

因为 BE∥DF 且 $BE=\frac{1}{2}DF$,

所以 $BE\underline{\underline{/\!/}}HG$,

即四边形 $BEGH$ 为平行四边形,

所以 EG∥BH.

因为 $BH\subset$ 平面 $ABCD$,$EG\not\subset$ 平面 $ABCD$,

所以 EG∥平面 $ABCD$.

(2)连接 AC,BD.因为 $DF\perp$ 平面 $ABCD$,底面 $ABCD$ 是菱形,所以 $AC\perp BD$,所以 $AC\perp$ 平面 $BDFE$.所以该多面体可分割成两个以平面 $BDFE$ 为底面的等体积的四棱锥.

所以 $V_{ABCDEF}=V_{A-BDFE}+V_{C-BDFE}=2V_{A-BDFE}$

$=2\times\frac{1}{3}\times\frac{a+2a}{2}\times a\times\frac{\sqrt{3}}{2}a$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}a^3$.

20.(1)**解**:因为 $a_n+S_n=2n+1$,令 $n=1$,

得 $2a_1=3$,$a_1=\frac{3}{2}$.

因为 $a_n+S_n=2n+1$,

所以 $a_{n-1}+S_{n-1}=2(n-1)+1(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}_+)$.

两式相减,得 $2a_n-a_{n-1}=2$,

整理得 $a_n=\frac{1}{2}a_{n-1}+1$,

所以 $a_n-2=\frac{1}{2}(a_{n-1}-2)(n\geqslant 2)$,

所以数列 $\{a_n-2\}$ 是首项为 $a_1-2=-\frac{1}{2}$,公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列,

所以 $a_n-2=-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,

所以 $a_n=2-\frac{1}{2^n}$.

(2)**证明**:因为 $\frac{1}{2^na_na_{n+1}}$

$=\frac{1}{2^n\cdot\frac{2^{n+1}-1}{2^n}\cdot\frac{2^{n+2}-1}{2^{n+1}}}$

$=\frac{2^{n+1}}{(2^{n+1}-1)(2^{n+2}-1)}$

$=\frac{1}{2^{n+1}-1}-\frac{1}{2^{n+2}-1}$,

所以 $\frac{1}{2a_1a_2}+\frac{1}{2^2a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{2^na_na_{n+1}}=\left(\frac{1}{2^2-1}-\frac{1}{2^3-1}\right)+\left(\frac{1}{2^3-1}-\frac{1}{2^4-1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{n+1}-1}-\frac{1}{2^{n+2}-1}\right)=\frac{1}{3}-\frac{1}{2^{n+2}-1}<\frac{1}{3}$.

21.**解**:(1)由抛物线的定义,

得 $1-\left(-\frac{p}{2}\right)=3$,解得 $p=4$,

所以抛物线 C 的方程为 $y^2=8x$.

(2)$p=2$ 时,抛物线 C:$y^2=4x$,

设直线 l 的方程为 $y=2x+b$,并代入抛物线 C 的方程 $y^2=4x$,得 $4x^2+(4b-4)x+b^2=0$,

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,

则 $x_1+x_2=1-b$,$x_1x_2=\frac{b^2}{4}$,

因为 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+(2x_1+b)\cdot(2x_2+b)=5x_1x_2+2b(x_1+x_2)+b^2=\frac{5b^2}{4}+2b(1-b)+b^2=0$,解得 $b=0$,或 $b=-8$.

当 $b=0$ 时,$M(0,0)$ 不在 x 轴正半轴上,舍去;

当 $b=-8$ 时,$M(4,0)$ 满足题意.

故点 M 的坐标为 $(4,0)$.

22.(1)**解**:由题意,知 $f(x)=2ax^2+(a+4)x+\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,且 $f'(x)=\frac{4ax^2+(a+4)x+1}{x}$.

又 $f(x)$ 的图象在 $x=\frac{1}{4}$ 处的切线与直线 $4x+y=0$ 平行,所以 $f'\left(\frac{1}{4}\right)=-4$,

即 $4\left[4a\left(\frac{1}{4}\right)^2+(a+4)\cdot\frac{1}{4}+1\right]=-4$,

解得 $a=-6$.

(2)**解**:$f'(x)=\frac{4ax^2+(a+4)x+1}{x}$

$=\frac{(4x+1)(ax+1)}{x}$,

由 $x>0$,知 $\frac{4x+1}{x}>0$.

①当 $a\geqslant 0$ 时,对任意 $x>0$,$f'(x)>0$,此时,函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$.

②当 $a<0$ 时,令 $f'(x)=0$,解得 $x=-\frac{1}{a}$.

当 $0<x<-\frac{1}{a}$ 时,$f'(x)>0$;

当 $x>-\frac{1}{a}$ 时,$f'(x)<0$,

此时,函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(0,-\frac{1}{a}\right)$,单调递减区间为 $\left(-\frac{1}{a},+\infty\right)$.

(3)**证明**:不妨设 $A(x_1,0),B(x_2,0)$,且 $0<x_1<x_2$.由(2),知 $a<0$,于是要证 $f'(x_0)<0$ 成立,只需证:$x_0>-\frac{1}{a}$,即 $\frac{x_1+x_2}{2}>-\frac{1}{a}$.

因为 $f(x_1)=2ax_1^2+(a+4)x_1+\ln x_1=0$,①

$f(x_2)=2ax_2^2+(a+4)x_2+\ln x_2=0$,　②

由①-②,得 $f(x_1)-f(x_2)=2ax_1^2+(a+4)x_1+\ln x_1-2ax_2^2-(a+4)x_2-\ln x_2=0$,即 $a(2x_1^2-2x_2^2+x_1-x_2)+4(x_1-x_2)+\ln x_1-\ln x_2=0$,

所以 $-\frac{1}{a}=\frac{2x_1^2+x_1-2x_2^2-x_2}{4x_1+\ln x_1-4x_2-\ln x_2}$.

故只需证 $\frac{x_1+x_2}{2}>\frac{2x_1^2+x_1-2x_2^2-x_2}{4x_1+\ln x_1-4x_2-\ln x_2}$,

即证明 $(x_1+x_2)[4(x_1-x_2)+(\ln x_1-\ln x_2)]<4x_1^2+2x_1-4x_2^2-2x_2$,

即证明 $\ln x_1-\ln x_2<\frac{2x_1-2x_2}{x_1+x_2}$,

变形为 $\ln\frac{x_1}{x_2}<\frac{2\cdot\frac{x_1}{x_2}-2}{\frac{x_1}{x_2}+1}$.

设 $t=\frac{x_1}{x_2}(0<t<1)$,令 $g(t)=\ln t-\frac{2t-2}{t+1}$,

则 $g'(t)=\frac{1}{t}-\frac{4}{(t+1)^2}=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}$,

显然当 $t>0$ 时,$g'(t)\geqslant 0$,当且仅当 $t=1$ 时,$g'(t)=0$,所以 $g(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数.又 $g(1)=0$,所以当 $t\in(0,1)$ 时,$g(t)<0$ 总成立,命题得证.

第 37 期

第 2~3 版专题检测题参考答案

一、选择题

1~6.BDBCCB　7~12.BAABCD

二、填空题

13.105°　14.$(-2,8)$

15.14

16.$a=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,$b=0$,$c=1$

三、解答题

17.**解**:(1)因为函数 $f(x)=|x-a|+|2x-1|-1(a\in\mathbf{R})$ 的一个零点为 1,

所以 $|1-a|=0$,所以 $a=1$.

又当 $a=1$ 时,$f(x)=|x-1|+|2x-1|-1$,

由 $f(x)\leqslant 1$,得 $|x-1|+|2x-1|\leqslant 2$,

上述不等式可化为 $\begin{cases}x\leqslant\frac{1}{2},\\1-x+1-2x\leqslant 2,\end{cases}$

或 $\begin{cases}\frac{1}{2}<x<1,\\1-x+2x-1\leqslant 2,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x\geqslant 1,\\x-1+2x-1\leqslant 2.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x\leqslant\frac{1}{2},\\x\geqslant 0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\frac{1}{2}<x<1,\\x\leqslant 2,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x\geqslant 1,\\x\leqslant\frac{4}{3}.\end{cases}$

所以 $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$,或 $\frac{1}{2}<x<1$,或 $1\leqslant x\leqslant\frac{4}{3}$,

所以原不等式的解集为

$\left\{x\middle|0\leqslant x\leqslant\frac{4}{3}\right\}$.

(2)**证明**:由(1)知 $\frac{1}{m}+\frac{2}{n-1}=a=1$,

因为 $m>0,n>1$,

所以 $m+2(n-1)=[m+2(n-1)]\left(\frac{1}{m}+\frac{2}{n-1}\right)=5+\frac{2m}{n-1}+\frac{2(n-1)}{m}\geqslant 9$,

当且仅当 $m=3,n=4$ 时取等号,

所以 $m+2n\geqslant 11$.

18.**解**:(1)因为 $\frac{1}{\tan A}+\frac{1}{\tan B}=1$,

所以 $\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\cos B}{\sin B}=1$.

所以 $\sin B\cos A+\cos B\sin A=\sin A\sin B\Rightarrow\sin(A+B)=\sin A\sin B$,即 $\sin C=\sin A\sin B$.

因为 $a\sin B=\sqrt{3}R$,所以 $\sin A\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以 $\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$,又 $0<C<\frac{\pi}{2}$,所以 $C=\frac{\pi}{3}$.

(2)因为 $c=\sqrt{10}$,且 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$,

所以 $\begin{cases}a^2+b^2-2ab\cos C=10,\\a+b=ab\end{cases}\Rightarrow(a+b)^2-3ab=10$.

所以 $(ab)^2-3ab-10=0$,所以 $ab=5$ 或 $ab=-2$(舍去),所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times 5\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{4}$.

19.(1)**证明**:如图,连接 B_1C,设 B_1C 与 BC_1 相交于点 O,连接 OD.

因为四边形 BCC_1B_1 是平行四边形,

所以点 O 为 B_1C 的中点,

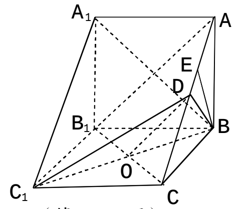
因为 D 为 AC 的中点,

所以 OD 为△AB_1C 的中位线,

所以 OD∥AB_1.

因为 OD⊂平面 BC_1D,$AB_1\not\subset$ 平面 BC_1D,

所以 AB_1∥平面 BC_1D.



(第 19 题图)

(2)**解**:因为 $AA_1\perp$ 平面 ABC,$AA_1\subset$ 平面 AA_1C_1C,所以平面 ABC⊥平面 AA_1C_1C,且平面 ABC∩平面 $AA_1C_1C=AC$.

如图,作 BE⊥AC,垂足为 E,则 BE⊥平面 AA_1C_1C,

在 Rt△ABC 中,$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{13}$,$BE=\frac{AB\cdot BC}{AC}=\frac{6}{\sqrt{13}}$,

所以四棱锥 $B-AA_1C_1D$ 的体积

$V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}(A_1C_1+AD)\times AA_1\times BE=\frac{1}{6}\times\frac{3}{2}\sqrt{13}\times 2\times\frac{6}{\sqrt{13}}=3$.

20.**解**:(1)由已知可得 $a_1=S_1>0$,$q\neq 0$.因为涉及到等比数列的前 n 项和,故分两种情况讨论:

①当 $q=1$ 时,$S_n=na_1>0$;

②当 $q\neq 1$,$q\neq 0$ 时,$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}>0$,

即 $\frac{1-q^n}{1-q}>0$,再分两类处理:

(ⅰ)当 $q>1$ 时,$q^n>1$,此时得 $q>1$;

(ⅱ)当 $q<1$ 且 $q\neq 0$ 时,$q^n<1$,此时得 $-1<q<1$,且 $q\neq 0$.

综上,$q\in(-1,0)\cup(0,+\infty)$.

(2)由 $b_n=a_{n+2}-\frac{3}{2}a_{n+1}$,

得 $b_n=a_n\left(q^2-\frac{3}{2}q\right)$.

所以 $T_n=S_n\left(q^2-\frac{3}{2}q\right)$,于是得到

$T_n-S_n=S_n\left(q^2-\frac{3}{2}q-1\right)=S_n\cdot\left(q+\frac{1}{2}\right)(q-2)$.

注意到(1)中的结论,于是:

①当 $-1<q<-\frac{1}{2}$,或 $q>2$ 时,$T_n>S_n$;

②当 $-\frac{1}{2}<q<2$,且 $q\neq 0$ 时,$T_n<S_n$;

③当 $q=-\frac{1}{2}$,或 $q=2$ 时,$T_n=S_n$.

21.(1)**解**:因为函数 $f(x)=(c-1)\ln x-(x-1)\ln c(c\neq 1)$,$x>0$,所以 $f'(x)=\frac{c-1}{x}-\ln c=\frac{c-1-x\ln c}{x}$.令 $f'(x)=0$,得 $c-1-x\ln c=0$,解得 $x=\frac{c-1}{\ln c}$.当 $0<c<1$ 时,$\ln c<0$,$c-1<0$,所以 $\frac{c-1}{\ln c}>0$;当 $c>1$ 时,$c-1>0$,$\ln c>0$,所以 $\frac{c-1}{\ln c}>0$.若 $0<x<\frac{c-1}{\ln c}$,则 $f'(x)>0$,$f(x)$ 是单调递增函数;若 $x>\frac{c-1}{\ln c}$,则 $f'(x)<0$,$f(x)$ 是单调递减函数.

(2)**证明**:设 $h(x)=x-1-\ln x$,则 $h'(x)=1-\frac{1}{x}$,当 $x>1$ 时,$h'(x)=1-\frac{1}{x}>0$,所以 $h(x)$ 为增函数,所以 $c-1-\ln c>h(1)=0$,所以 $\frac{c-1}{\ln c}>1$.设 $g(x)=x-1-x\ln x$,则当 $x>1$ 时,$g'(x)=-\ln x<0$,所以 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减,所以当 $x>1$ 时,$g(x)<g(1)=0$,所以 $\frac{x-1}{\ln x}<x$,所以 $\frac{c-1}{\ln c}<c$.由 $f(x)$ 的单调性知:$x\in\left(1,\frac{c-1}{\ln c}\right)$ 时,$f(x)$ 单调递增,$x\in\left(\frac{c-1}{\ln c},c\right)$ 时,$f(x)$ 单调递减,所以当 $x=1$ 或 $x=c$ 时,$f(x)$ 在 $[1,c]$ 取最小值,因为 $f(1)=f(c)=0$,所以当 $x\in(1,c)$ 时,$f(x)>0$.

22.**解**:(1)由 $c=1$,$a-c=1$,得 $a=2$,

所以 $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}$,

故椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)由 $\begin{cases}y=kx+m,\\3x^2+4y^2=12,\end{cases}$

得 $(3+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-12=0$,

所以 $\Delta=64k^2m^2-4(3+4k^2)(4m^2-12)=0$,即 $m^2=3+4k^2$.

设 $P(x_P,y_P)$,则 $x_P=-\frac{4km}{3+4k^2}=-\frac{4k}{m}$,

$y_P=kx_P+m=-\frac{4k^2}{m}+m=\frac{3}{m}$,

即 $P\left(-\frac{4k}{m},\frac{3}{m}\right)$.

因为 $M(t,0)$,$Q(4,4k+m)$,

所以 $\overrightarrow{MP}=\left(-\frac{4k}{m}-t,\frac{3}{m}\right)$,$\overrightarrow{MQ}=(4-t,4k+m)$,所以 $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}=\left(-\frac{4k}{m}-t\right)\cdot(4-t)+\frac{3}{m}\cdot(4k+m)=t^2-4t+3+\frac{4k}{m}(t-1)=0$ 恒成立,故 $\begin{cases}t=1,\\t^2-4t+3=0,\end{cases}$ 解得 $t=1$.

综上,存在一个定点 $M(1,0)$,使得 $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}=0$.

⑩

第 38 期

第 2~3 版专题检测题参考答案

一、选择题

1~6.CCBCAD　7~12.CDDDBD

二、填空题

13.$2\sqrt{2}$　14.0

15.$\left(-\frac{3}{4},+\infty\right)$　16.②④

三、解答题

17.**解**:(1)因为等差数列$\{a_n\}$的公差$d<0$,所以$a_1>a_2>a_3$,且$2a_2=a_1+a_3$,又$a_i\in\{1,-2,3,-4,5\}(i=1,2,3)$,所以$a_1=5,a_2=3,a_3=1$,即$d=-2$,所以$a_n=5-2(n-1)=7-2n$.

因为点$B_n(n,b_n)$在函数$g(x)=a\cdot 2^x$的图象上,所以$b_n=a\cdot 2^n$,又因为$b_1=1$,所以$a=\frac{1}{2}$,所以$b_n=2^{n-1}$.

(2)因为$c_n=a_nb_n=a_n\cdot 2^{n-1}$,

所以$S_n=a_1\cdot 2^0+a_2\cdot 2^1+a_3\cdot 2^2+\cdots+a_n\cdot 2^{n-1}$,　①

$2S_n=a_1\cdot 2^1+a_2\cdot 2^2+a_3\cdot 2^3+\cdots+a_{n-1}\cdot 2^{n-1}+a_n\cdot 2^n$,　②

由①-②,得$-S_n=a_1\cdot 2^0+d\cdot 2^1+d\cdot 2^2+\cdots+d\cdot 2^{n-1}-a_n\cdot 2^n$.

所以$-S_n=a_1-2\times\frac{2-2^n}{1-2}-2^n(7-2n)$,

所以$S_n=(9-2n)\cdot 2^n-9$.

18.**解**:(1)依题意,得函数$f(x)=4\cos x\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-1=4\cos x\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right)-1=\sqrt{3}\sin 2x+2\cos^2x-1=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x\right)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

它的最小正周期为$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

由$2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{2},k\in Z$,

得$k\pi+\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{2\pi}{3},k\in Z$,

故函数$f(x)$的单调递减区间为

$\left[k\pi+\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{2\pi}{3}\right],k\in\mathbf{Z}$.

(2)将$y=f(x)$图象上所有的点向右平行移动$\frac{\pi}{6}$个单位长度,得到$y=g(x)=2\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$的图象.

若$g(x)$在$(0,m)$内是单调函数,

则$g(x)$在$(0,m)$内是单调增函数,

所以$2m-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}$,解得$m\leqslant\frac{\pi}{3}$,

故m的最大值为$\frac{\pi}{3}$.

19.**解**:(1)由频率分布直方图可知,$[25,30)$与$[30,35)$两组的人数相同,

所以$a=25$.

所以$b=25\times\frac{0.08}{0.02}=100$.

总人数$N=\frac{25}{0.02\times 5}=250$.

(2)因为第1,2,3组有25+25+100=150人,利用分层抽样在150名员工中抽取6人,每组抽取的人数分别为:第1组的人数为$6\times\frac{25}{150}=1$,第2组的人数为$6\times\frac{25}{150}=1$,第3组的人数为$6\times\frac{100}{150}=4$,所以第1,2,3组分别抽取1人,1人,4人.

(3)由(2)可设第1组的1人为A,第2组的1人为B,第3组的4人分别为C_1,C_2,C_3,C_4,则从6人中抽取2人的所有可能结果为:$(A,B),(A,C_1),(A,C_2),(A,C_3),(A,C_4),(B,C_1),(B,C_2),(B,C_3),(B,C_4),(C_1,C_2),(C_1,C_3),(C_1,C_4),(C_2,C_3),(C_2,C_4),(C_3,C_4)$,共15种.其中恰有1人年龄在第3组的所有结果为:$(A,C_1),(A,C_2),(A,C_3),(A,C_4),(B,C_1),(B,C_2),(B,C_3),(B,C_4)$,共8种.所以恰有1人年龄在第3组的概率为$\frac{8}{15}$.

20.**解**:(1)$S_{扇形OBD}=\frac{1}{2}R^2\theta$,

$S_{\triangle OBD}=\frac{1}{2}R^2\sin\theta$,

$S_{弓}=f(\theta)=\frac{1}{2}R^2(\theta-\sin\theta),\theta\in(0,\pi)$.

(2)设总利润为y元,儿童乐园利润为y_1元,种植草坪成本为y_2元,种植观赏植物成本为y_3元,则$y_1=\frac{1}{2}R^2\sin\theta\cdot 95,y_2=\frac{1}{2}R^2(\theta-\sin\theta)\cdot 5,y_3=\frac{1}{2}R^2(\pi-\theta)\cdot 55$,

所以$y=y_1-y_2-y_3=\frac{1}{2}R^2(100\sin\theta+50\theta-55\pi),\theta\in(0,\pi)$.

设$g(\theta)=100\sin\theta+50\theta-55\pi,\theta\in(0,\pi)$.

所以$g'(\theta)=100\cos\theta+50$,

令$g'(\theta)>0$,得$\cos\theta>-\frac{1}{2}$,

所以$0<\theta<\frac{2\pi}{3}$,

所以$g(\theta)$在$\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)$上为增函数;

令$g'(\theta)<0$,得$\cos\theta<-\frac{1}{2}$,

所以$\frac{2\pi}{3}<\theta<\pi$,

所以$g(\theta)$在$\left(\frac{2\pi}{3},\pi\right)$上为减函数.

故当$\theta=\frac{2\pi}{3}$时,$g(\theta)$取到最大值,此时总利润y也取到最大值.

总利润的最大值为$y=\frac{1}{2}R^2(100\sin\theta+50\theta-55\pi)=\frac{1}{2}R^2\left(50\sqrt{3}-\frac{65\pi}{3}\right)$.

所以当$\angle BOD=\frac{2\pi}{3}$时,总利润最大,最大值为$\frac{1}{2}R^2\left(50\sqrt{3}-\frac{65\pi}{3}\right)$元.

21.(1)**证明**:由$h(x)=f(x)-g(x)=e^x-1-\sqrt{x}-x$,得

$h(1)=e-3<0,h(2)=e^2-3-\sqrt{2}>0$,

所以函数$h(x)$在区间$(1,2)$上有零点.

(2)**解**:由(1)得$h(x)=e^x-1-\sqrt{x}-x$.

由$g(x)=\sqrt{x}+x$,知$x\in[0,+\infty)$,

而$h(0)=0$,

则$x=0$为$h(x)$的一个零点.而$h(x)$在$(1,2)$上有零点,因此$h(x)$在$[0,+\infty)$上至少有两个零点.

因为$h'(x)=e^x-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}-1$,记$\varphi(x)=e^x-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}-1$,则$\varphi'(x)=e^x+\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$.

当$x\in(0,+\infty)$时,$\varphi'(x)>0$,因此$\varphi(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,则$\varphi(x)$在$(0,+\infty)$上至多只有一个零点,即$h(x)$在$[0,+\infty)$上至多有两个零点.

所以方程$f(x)=g(x)$的根的个数为2.

22.(1)**解**:由题意知$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$,

所以$e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{1}{4}$,即$a^2=\frac{4}{3}b^2$.

又$b=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{1+1}}=\sqrt{3}$,所以$a^2=4,b^2=3$.

故椭圆C的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)**解**:由题意知直线l的斜率存在,

设直线l的斜率为k,则直线l的方程为$y=k(x-4)$.

联立$\begin{cases}y=k(x-4),\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$

得$(4k^2+3)x^2-32k^2x+64k^2-12=0$.

由$\Delta=(-32k^2)^2-4(4k^2+3)(64k^2-12)>0$,

得$k^2<\frac{1}{4}$.

设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,

则$x_1+x_2=\frac{32k^2}{4k^2+3},x_1x_2=\frac{64k^2-12}{4k^2+3}$.①

所以$y_1y_2=k(x_1-4)\cdot k(x_2-4)=k^2x_1x_2-4k^2(x_1+x_2)+16k^2$.

所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=(1+k^2)x_1x_1-4k^2(x_1+x_2)+16k^2=(1+k^2)\cdot\frac{64k^2-12}{4k^2+3}-4k^2\cdot\frac{32k^2}{4k^2+3}+16k^2=25-\frac{87}{4k^2+3}$.

因为$0\leqslant k^2<\frac{1}{4}$,

所以$-\frac{87}{3}\leqslant-\frac{87}{4k^2+3}<-\frac{87}{4}$,

所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\in\left[-4,\frac{13}{4}\right)$,

所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$的取值范围是$\left[-4,\frac{13}{4}\right)$.

(3)**证明**:因为B,E两点关于x轴对称,所以$E(x_2,-y_2)$,直线AE的方程为$y-y_1=\frac{y_1+y_2}{x_1-x_2}(x-x_1)$,令$y=0$,得$x=\frac{x_2y_1+x_1y_2}{y_1+y_2}$.又$y_1=k(x_1-4),y_2=k(x_2-4)$,所以$x=\frac{2x_1x_2-4(x_1+x_2)}{x_1+x_2-8}$.

将①代入得$x=1$,所以直线AE与x轴相交于定点$(1,0)$.

第 39 期

第 2~3 版专题检测题参考答案

一、选择题

1~6.DACDAD　7~12.BAADDA

二、填空题

13.$\{x|x\leqslant-6$,或$x\geqslant 0\}$

14.$\frac{x^2}{4}-y^2=1$

15.$[-1,7]$

16.$\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$

三、解答题

17.(1)**解**:因为$m-n=\frac{b}{a}-\frac{2a+b}{a+b}=\frac{b^2-2a^2}{a(a+b)}$

$=\frac{(b-\sqrt{2}a)(b+\sqrt{2}a)}{a(a+b)}$,

又因为a,b为正有理数,

所以$b\neq\sqrt{2}a$,

故当$b>\sqrt{2}a$时,$m>n$;

当$b<\sqrt{2}a$时,$m<n$.

(2)**证明**:因为$m-\sqrt{2}=\frac{b}{a}-\sqrt{2}=\frac{b-\sqrt{2}a}{a}$,$n-\sqrt{2}=\frac{2a+b}{a+b}-\sqrt{2}=\frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}a-b)}{a+b}$,

所以$(m-\sqrt{2})(n-\sqrt{2})=-\frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}a-b)^2}{a(a+b)}<0$,

因此$\sqrt{2}$在m,n之间.

18.**解**:(1)曲线C的直角坐标方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$.

当$\cos\alpha\neq 0$时,l的直角坐标方程为$y=\tan\alpha\cdot x+2-\tan\alpha$;

当$\cos\alpha=0$时,l的直角坐标方程为$x=1$.

(2)将l的参数方程代入C的直角坐标方程,

整理得关于t的方程$(1+3\cos^2\alpha)t^2+4(2\cos\alpha+\sin\alpha)t-8=0$.　①

因为曲线C截直线l所得线段的中点$(1,2)$在C内,所以①有两个解,设为t_1,t_2,则$t_1+t_2=0$.

又由①得$t_1+t_2=-\frac{4(2\cos\alpha+\sin\alpha)}{1+3\cos^2\alpha}$,

所以$2\cos\alpha+\sin\alpha=0$,于是直线l的斜率$k=\tan\alpha=-2$.

19.**解**:(1)由题意,$f(x)=2\sqrt{3}\cdot\sin x\cos x-2\cos^2x+1=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$.

当$f(x)$取最大值时,即$\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=1$,此时$2x-\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,所以$x$的取值集合为$\left\{x\middle|x=k\pi+\frac{\pi}{3},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

(2)因为$f(C)=2$,所以$\sin\left(2C-\frac{\pi}{6}\right)=1$,

又$0<C<\pi$,即$-\frac{\pi}{6}<2C-\frac{\pi}{6}<\frac{11\pi}{6}$,所以$2C-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$,解得$C=\frac{\pi}{3}$.在$\triangle ABC$中,由余弦定理$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$,得$3=a^2+b^2-ab\geqslant ab$,所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{4}$,当且仅当$a=b,C=\frac{\pi}{3}$,即$\triangle ABC$为等边三角形时不等式取等号.故$\triangle ABC$面积的最大值为$\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

20.**证明**:(1)因为$a_n\neq 0$,由$a_n-a_{n+1}=2a_n\cdot a_{n+1}$,得$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=2$,所以$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是以$\frac{1}{a_1}=3$为首项,2为公差的等差数列,所以$\frac{1}{a_n}=3+(n-1)\times 2=2n+1$,即$a_n=\frac{1}{2n+1}$.

(2)因为$a_na_{n+1}=\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)$,所以$a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_{n+1}=\frac{1}{3\times 5}+\frac{1}{5\times 7}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+3}\right)<\frac{1}{6}$.

21.**解**:(1)设$B(c,0)$,由条件知,

$C\left(c,\frac{b^2}{a}\right)$.

所以$\begin{cases}\frac{b^2}{a}=\frac{1}{2},\\ c=\sqrt{3},\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$解得$a=2,b=1$.

故M的标准方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)将$l:y=kx+3$代入$\frac{x^2}{4}+y^2=1$,

得$(1+4k^2)x^2+24kx+32=0$.

故$\Delta=64(k^2-2)>0$,即$k^2>2$.

设$P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$,

则$|PQ|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{\sqrt{64(k^2-2)}}{4k^2+1}$.又点$O$到直线$PQ$的距离$d=\frac{3}{\sqrt{k^2+1}}$,所以$\triangle POQ$的面积$S_{\triangle OPQ}=\frac{1}{2}d|PQ|=\frac{12\sqrt{k^2-2}}{4k^2+1}$.

设$\sqrt{k^2-2}=t$,则$t>0$,$S_{\triangle POQ}=\frac{12t}{4t^2+9}=\frac{12}{4t+\frac{9}{t}}\leqslant\frac{12}{2\sqrt{4t\cdot\frac{9}{t}}}=1$.

当且仅当$t=\frac{3}{2}$时,等号成立,且满足$\Delta>0$,

所以$\triangle POQ$的面积最大值为1.

22.**解**:(1)由题意知,$f'(x)=3x^2+2ax-a^2=(x+a)(3x-a)$.

函数$f(x)$在$[-1,1]$上没有极值点,即$(x+a)(3x-a)=0$在$[-1,1]$上没有实数根,所以$\begin{cases}f'(1)=3+2a-a^2<0,\\ f'(-1)=3-2a-a^2<0,\\ a>0,\end{cases}$解得$a>3$.

所以实数a的取值范围是$(3,+\infty)$.

(2)当$a=1$时,$f(x)=x^3+x^2-x+m$.

因为函数$f(x)$有三个互不相同的零点,所以$x^3+x^2-x+m=0$,即$m=-x^3-x^2+x$有三个互不相等的实数根.

令$g(x)=-x^3-x^2+x$,则$g'(x)=-3x^2-2x+1=-(3x-1)(x+1)$,所以$g(x)$在$(-\infty,-1)$和$\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$上均为减函数,在$\left(-1,\frac{1}{3}\right)$上为增函数,所以$[g(x)]_{极小值}=g(-1)=-1$,$[g(x)]_{极大值}=g\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{27}$.

所以m的取值范围是$\left(-1,\frac{5}{27}\right)$.

(3)因为$f'(x)=3x^2+2ax-a^2=3\left(x-\frac{a}{3}\right)\cdot(x+a)$,且$a>0$,所以当$x<-a$,或$x>\frac{a}{3}$时,$f'(x)>0$;当$-a<x<\frac{a}{3}$时,$f'(x)<0$.

所以函数$f(x)$的单调递增区间为$(-\infty,-a)$和$\left(\frac{a}{3},+\infty\right)$,单调递减区间为$\left(-a,\frac{a}{3}\right)$.

当$a\in[3,6]$时,$\frac{a}{3}\in[1,2]$,$-a\leqslant-3$.

又$x\in[-2,2]$,

所以$[f(x)]_{max}=\max\{f(-2),f(2)\}$,

又$f(2)-f(-2)=16-4a^2<0$,

所以$[f(x)]_{max}=f(-2)=-8+4a+2a^2+m$.

又因为$f(x)\leqslant 1$在$[-2,2]$上恒成立,

所以$[f(x)]_{max}\leqslant 1$,

即$-8+4a+2a^2+m\leqslant 1$,

即当$a\in[3,6]$时,

$m\leqslant 9-4a-2a^2$恒成立.

因为$9-4a-2a^2$在$[3,6]$上的最小值为-87,

所以$m\leqslant-87$.

所以实数m的取值范围是$(-\infty,-87]$.