第 9 期

第 3 版同步周测题参考答案

一、选择题

1.A

2.C

3.A

提示:$z=(1-2i)+(3+i)=4-i$,所以$\bar{z}=4+i$.故选 A.

4.D

提示:因为$\frac{2}{3}<m<1$,所以 $3m-2>0$,$m-1<0$,所以对应的点在第四象限.

5.D

6.C

提示:由已知条件,得 $A(-2,3)$,$B(0,-1)$.因为$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$,所以 C 为线段 AB 的中点,所以 $C(-1,1)$.故点 C 对应的复数是$-1+i$.

7.A

提示:由条件,得$|z|=3$,或$|z|=-1$(舍去).故 z 对应点的轨迹是 1 个圆.

8.A

提示:$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{10}=(-i)^{10}=(-i)^2=-1$.

9.A

提示:$(3+4i)(t-i)=3t+4+(4t-3)i$,故 $4t-3=0$,得 $t=\frac{3}{4}$.

10.C

提示:因为 $M\cup P=P$,所以 $M\subseteq P$.所以$(m^2-2m)+(m^2+m-2)i=-1$ 或$(m^2-2m)+(m^2+m-2)i=4i$,

即$\begin{cases}m^2-2m=-1,\\m^2+m-2=0\end{cases}$或$\begin{cases}m^2-2m=0,\\m^2+m-2=4,\end{cases}$

解得 $m=1$,或 $m=2$.

11.B

提示:设 $z=ai(a\in\mathbf{R}$ 且 $a\neq0)$,则$z^2=-a^2<0$,故 A 正确,B 错误.设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$,若 $z^2=a^2-b^2+2abi\geqslant0$,则 $a^2-b^2\geqslant0$ 且 $ab=0$,所以 $b=0$,即 z 是实数,故 C 正确;若 $z^2=a^2-b^2+2abi<0$,则 $a^2-b^2<0$ 且 $ab=0$,所以 $a=0$ 且 $b\neq0$,即 z 是虚数,故 D 正确.故选 B.

12.B

提示:若 $z_1+z_2=2i$,则 $z_2=2i-z_1$.所以$|z_1-z_2|=|2z_1-2i|=2|z_1-i|\leqslant2(|z_1|+|i|)=2\times(2+1)=6$.

二、填空题

13.2

14.二

提示:由图可知 $z_1=-2-i$,$z_2=i$,

则$\frac{z_1}{z_2}=\frac{-2-i}{i}=\frac{(-2-i)i}{i^2}=-1+2i$.

所以该复数对应的点为$(-1,2)$,位于第二象限.

15.$-1-i$

16.①②

提示:当 z 为纯虚数时,z 与$\bar{z}$对应的点均在虚轴上,故 P_1,O,P_2 三点共线,①正确;显然③错误;当 $z=0$ 时,$\overrightarrow{OP_1}$,$\overrightarrow{OP_2}$对应的复数均为 0,此时有$\overrightarrow{OP_1}=\overrightarrow{OP_2}$,故②正确,④错误.

三、解答题

17.**解**:由$\frac{1}{z}=\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}=\frac{z_1+z_2}{z_1z_2}$,得

$z=\frac{z_1z_2}{z_1+z_2}=\frac{(1-2i)(3+4i)}{(1-2i)+(3+4i)}=\frac{11-2i}{4+2i}=\frac{(11-2i)(4-2i)}{(4+2i)(4-2i)}=\frac{40-30i}{20}=2-\frac{3}{2}i$.

18.**解**:复数 $z=(2+i)m^2-3(i+1)m-2(1-i)=(2m^2-3m-2)+(m^2-3m+2)i$.

(1)若 z 是虚数,则 $m^2-3m+2\neq0$,

解得 $m\neq1$ 或 $m\neq2$.

(2)若 $z<0$,则 $m^2-3m+2=0$ 且 $2m^2-3m-2<0$,解得 $m=1$.

(3)若 z 所对应的点在第三象限,

则 $2m^2-3m-2<0$ 且 $m^2-3m+2<0$,

解得 $m\in(1,2)$.

19.**解**:(1)因为 $1+i$ 是方程 $x^2+bx+c=0$ 的根,

所以$(1+i)^2+b(1+i)+c=0$,

即$(b+c)+(2+b)i=0$.

所以$\begin{cases}b+c=0,\\2+b=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}b=-2,\\c=2.\end{cases}$

(2)把 $x=1-i$ 代入方程左边,得

$(1-i)^2-2(1-i)+2=0$,

显然方程成立.

所以 $1-i$ 也是该方程的一个根.

20.**解**:(1)设 $z=x+yi(x,y\in\mathbf{R})$,则有

$\begin{cases}x^2+y^2=2,\\2xy=2,\\x>0,y>0,\end{cases}$

解得 $x=y=1$.所以 $z=1+i$.

(2)因为 $z=1+i$,所以 $z^2=2i$,$z-z^2=1-i$.

所以 $A(1,1)$,$B(0,2)$,$C(1,-1)$.

故$\overrightarrow{BA}=(1,-1)$,$\overrightarrow{BC}=(1,-3)$.

所以 $\cos\angle ABC=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}=\frac{1+3}{\sqrt{2}\times\sqrt{10}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

21.**解**:(1)因为 $x^2+zx+3z+4i=0$,

所以 $z=-\frac{x^2+4i}{x+3}=-\frac{x^2}{x+3}-\frac{4}{x+3}i$.

由题意得$-\frac{x^2}{x+3}>-\frac{4}{x+3}$,

所以$\frac{x^2-4}{x+3}<0$,

所以$(x+3)(x+2)(x-2)<0$,

解得 $x<-3$,或$-2<x<2$.

所以 x 的取值范围为$(-\infty,-3)\cup(-2,2)$.

(2)假设存在这样的 x,使 $z=\sqrt{3}-\sqrt{2}i$,则$-\frac{x^2}{x+3}-\frac{4}{x+3}i=\sqrt{3}-\sqrt{2}i$.

所以$\begin{cases}-\frac{x^2}{x+3}=\sqrt{3},\\-\frac{4}{x+3}=-\sqrt{2},\end{cases}$方程组无实数解,故这样的 x 不存在.

22.**解**:(1)由 $z_1=z_2$,

得 $m=\sin\alpha$ 且 $m-\cos\alpha=1$,

所以 $\sin\alpha-\cos\alpha=1$,

即 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

因为 $\alpha\in[0,2\pi)$,

所以 $\alpha-\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right)$.

所以 $\alpha-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$或 $\alpha-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$,

解得 $\alpha=\frac{\pi}{2}$或 $\alpha=\pi$.

(2)①若 $\alpha=\frac{\pi}{2}$,则 $t=i$,$f(t)=1+i+i^2+\cdots+i^{n-1}=\frac{1-i^n}{1-i}$.

故当 $n=4k(k\in\mathbf{N}_+)$时,$f(t)=\frac{1-1}{1-i}=0$;

当 $n=4k+1(k\in\mathbf{N}_+)$时,$f(t)=\frac{1-i}{1-i}=1$;

当 $n=4k+2(k\in\mathbf{N}_+)$时,$f(t)=\frac{1-i^2}{1-i}=\frac{2}{1-i}=1+i$;

当 $n=4k+3(k\in\mathbf{N}_+)$时,$f(t)=\frac{1-i^3}{1-i}=\frac{1+i}{1-i}=i$.

②若 $\alpha=\pi$,则 $t=-1$,$f(t)=1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n-1}$.

故当 $n=2k(k\in\mathbf{N}_+)$时,$f(t)=0$;当 $n=2k+1(k\in\mathbf{N}_+)$时,$f(t)=1$.

第 12 期

第 2~3 版综合检测题(二)参考答案

一、选择题

1.C 2.C 3.C 4.B 5.C 6.A

7.D

提示:②中$|z|^2\in\mathbf{R}$,但 z^2 不一定是实数.③中复数集不能比较大小,不能用 b^2-4ac 来确定根的个数.

8.B

9.B

提示:若存在实数 m,使直线 l 是曲线 $y=f(x)$的切线,因为 $f'(x)=2\sin x\cos x+2a=\sin2x+2a$,所以方程 $\sin2x+2a=-1$ 有解,所以$-1\leqslant a\leqslant0$,故所求 a 的取值范围是$(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$.

10.A

提示:由已知条件,得 $a^3-2a>m+a$,故 $m<a^3-3a$ 在 $a\in[0,+\infty)$上恒成立.令 $f(a)=a^3-3a(a\geqslant0)$,则 $f'(a)=3a^2-3=3(a+1)(a-1)$,可知 $f(a)$在$(0,1)$上单调递减,在$(1,+\infty)$上单调递增,故$[f(a)]_{\min}=f(1)=-2$.所以 m 的取值范围为$(-\infty,-2)$.

11.D

12.B

提示:依题意,记 $g(x)=xf(x)$,则 $g'(x)=xf'(x)+f(x)$,$g(0)=0$.当 $x>0$ 时,$g'(x)=x\left[f'(x)+\frac{f(x)}{x}\right]>0$,$g(x)$是增函数,$g(x)>0$;当 $x<0$ 时,$g'(x)=x\left[f'(x)+\frac{f(x)}{x}\right]<0$,$g(x)$是减函数,$g(x)>0$.在同一坐标系内画出函数 $y=g(x)$与 $y=-\frac{1}{x}$的大致图象,结合图象可知,它们共有 1 个公共点,因此函数 $F(x)=xf(x)+\frac{1}{x}$的零点个数是 1,选 B.

二、填空题

13.$\frac{8}{3}+\pi$

14.$a_1+a_2+\cdots+a_n\leqslant\sqrt{n}\ (n\in\mathbf{N}_+)$

15.6

16.-3

提示:$f'(x)=6x^2-2ax=2x(3x-a)$,$x\in(0,+\infty)$.当 $a\leqslant0$ 时,$f'(x)>0$,则 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,又 $f(0)=1$,故 $f(x)$在$(0,+\infty)$上没有零点,不符合题意.当 $a>0$ 时,可知 $f(x)$在$\left(0,\frac{a}{3}\right)$上单调递减,在$\left(\frac{a}{3},+\infty\right)$上单调递增,又 $f(x)$在$(0,+\infty)$内只有一个零点,所以 $f\left(\frac{a}{3}\right)=-\frac{a^3}{27}+1=0$,解得 $a=3$.从而 $f(x)=2x^3-3x^2+1$,$f'(x)=6x(x-1)$.令 $f'(x)=0$,解得 $x=0$ 或 $x=1$.因为 $f(0)=1$,$f(1)=0$,$f(-1)=-4$,所以 $f(x)$在$[-1,1]$上的最大值为 1,最小值为-4,其和为 $1-4=-3$.

三、解答题

17.(1)**解**:由已知条件,得 $f(2)=f(1+1)=f(1)+f(1)+2\times1\times1=4$,$f(3)=f(2+1)=f(2)+f(1)+2\times2\times1=9$,$f(4)=f(3+1)=f(3)+f(1)+2\times3\times1=16$,猜想 $f(n)=n^2(n\in\mathbf{N}_+)$.

(2)**证明**:用数学归纳法进行证明:

①当 $n=1$ 时,$f(1)=1=1^2$,猜想成立.

②假设当 $n=k$ 时,猜想成立,即 $f(k)=k^2$,则当 $n=k+1$ 时,$f(k+1)=f(k)+f(1)+2k=k^2+2k+1=(k+1)^2$,即当 $n=k+1$时猜想也成立.

由①②可知,$f(n)=n^2(n\in\mathbf{N}_+)$.

18.**解**:$z_2=\frac{15-5i}{(2+i)^2}=\frac{15-5i}{3+4i}$

$=\frac{5(3-i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}=\frac{5-15i}{5}=1-3i$.

(1)$z_1+\bar{z}_2=(2-3i)+(1+3i)=3$.

(2)$z_1\cdot z_2=(2-3i)(1-3i)=2-9-9i=-7-9i$.

(3)$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2-3i}{1-3i}=\frac{(2-3i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)}$

$=\frac{2+9+3i}{10}=\frac{11}{10}+\frac{3}{10}i$.

19.**解**:(1)设 $z_1=x+yi$,$x,y\in\mathbf{R}$,由$z_1\cdot\overline{z_1}+3(z_1+\overline{z_1})+5=0$,得 $x^2+y^2+6x+5=0$,整理得$(x+3)^2+y^2=4$,所以点 P 的轨迹方程为$(x+3)^2+y^2=4$.

(2)设 $z_2=x+yi$,$x,y\in\mathbf{R}$,$\frac{z_2+3}{z_2-3}=\frac{x+3+yi}{x-3+yi}=\frac{x^2+y^2-9-6yi}{(x-3)^2+y^2}$,因为$\frac{z_2+3}{z_2-3}$为纯虚数,所以 $x^2+y^2=9$ 且 $y\neq0$,所以点 Q 的轨迹方程为 $x^2+y^2=9(y\neq0)$.

20.**解**:(1)当 $m=-2$ 时,$f(x)=e^x(x^3-2x^2-2x+2)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

因为 $f'(x)=e^x(x^3-2x^2-2x+2)+e^x(3x^2-4x-2)=xe^x(x^2+x-6)=(x+3)x(x-2)e^x$,令 $f'(x)=0$,得 $x=-3$,或 $x=0$,或 $x=2$,

所以当 $x\in(-\infty,3)$或 $x\in(0,2)$时,$f'(x)<0$;当 $x\in(-3,0)$或 $x\in(2,+\infty)$时,$f'(x)>0$.

所以 $f(x)$在$(-\infty,3)$上单调递减,在$(-3,0)$上单调递增,在$(0,2)$上单调递减,在$(2,+\infty)$上单调递增,所以$[f(x)]_{极小值}=f(-3)=-39e^{-3}$,$[f(x)]_{极小值}=f(2)=-2e^2$,$[f(x)]_{极大值}=f(0)=2$.

(2)$f'(x)=e^x(x^3+mx^2-2x+2)+e^x(3x^2+2mx-2)=xe^x[x^2+(m+3)x+2m-2]$.

因为 $f(x)$在$[-2,-1]$上单调递增,

所以当 $x\in[-2,-1]$时,$f'(x)\geqslant0$.

又当 $x\in[-2,-1]$时,$xe^x<0$,

所以当 $x\in[-2,-1]$时,

$x^2+(m+3)x+2m-2\leqslant0$,

所以$\begin{cases}(-2)^2-2(m+3)+2m-2\leqslant0,\\(-1)^2-(m+3)+2m-2\leqslant0,\end{cases}$

解得 $m\leqslant4$,

所以当 $m\in(-\infty,4]$时,$f(x)$在$[-2,-1]$上单调递增.

21.(1)**证明**:依题意,$a_n=\sqrt{n^2+1}$,$b_n=n$,$c_n=\sqrt{n^2+1}-n$.

假设$\{c_n\}$是等差数列,则 $2c_2=c_1+c_3$,所以 $2(\sqrt{5}-2)=\sqrt{2}-1+\sqrt{10}-3$.

所以$2\sqrt{5}=\sqrt{2}+\sqrt{10}$,产生矛盾,所以$\{c_n\}$不是等差数列.

假设$\{c_n\}$是等比数列,则 $c_2^2=c_1c_3$,即$(\sqrt{5}-2)^2=(\sqrt{2}-1)(\sqrt{10}-3)$.

有 $6=6\sqrt{5}-3\sqrt{2}-\sqrt{10}$,产生矛盾,所以$\{c_n\}$也不是等比数列.

(2)**解**:因为 $c_{n+1}=\sqrt{(n+1)^2+1}-(n+1)>0$,$c_n=\sqrt{n^2+1}-n>0$,

所以$\frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{\sqrt{(n+1)^2+1}-(n+1)}{\sqrt{n^2+1}-n}$

$=\frac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt{(n+1)^2+1}+(n+1)}$.

因为 $0<\sqrt{n^2+1}<\sqrt{(n+1)^2+1}$,

又 $0<n<n+1$,

所以$\sqrt{n^2+1}+n<\sqrt{(n+1)^2+1}+n+1$,

所以 $0<\frac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt{(n+1)^2+1}+(n+1)}<1$,

所以 $0<\frac{c_{n+1}}{c_n}<1$,即 $c_{n+1}<c_n$.

22.(1)**解**:$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,$f'(x)=-\frac{1}{x^2}-1+\frac{a}{x}=-\frac{x^2-ax+1}{x^2}$.

令 $g(x)=x^2-ax+1$,显然当 $a\leqslant0$ 时,$g(x)>0$,即 $f'(x)<0$ 恒成立,此时函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$单调递减;

当 $a>0$ 时,令 $g(x)=0$,则 $\Delta=a^2-4$.

(i)若 $0<a\leqslant2$ 时,$\Delta\leqslant0$,即 $g(x)\geqslant0$,

所以 $f'(x)\leqslant0$,此时 $f(x)$在$(0,+\infty)$单调递减.

(ii)若 $a>2$,令 $g(x)=0$,得

$x=\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}$,或 $x=\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$.

当 $x\in\left(0,\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)\cup\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2},+\infty\right)$时,$f'(x)<0$;

当 $x\in\left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$时,$f'(x)>0$.

所以 $f(x)$在$\left(0,\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$,$\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2},+\infty\right)$单调递减,在$\left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$单调递增.

综上,当 $a\leqslant2$ 时,$f(x)$在$(0,+\infty)$单调递减;当 $a>2$ 时,$f(x)$在$\left(0,\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$,$\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2},+\infty\right)$单调递减,在$\left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$单调递增.

(2)**证明**:由(1)知,$f(x)$存在两个极值点当且仅当 $a>2$.

因为 $f(x)$的两个极值点 x_1,x_2 满足 $x^2-ax+1=0$,所以 $x_1x_2=1$,不妨设 $x_1<x_2$,则 $x_2>1$.

因为$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$

$=-\frac{1}{x_1x_2}-1+a\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}$

$=-2+a\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}=-2+a\frac{-2\ln x_2}{\frac{1}{x_2}-x_2}$,

所以$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<a-2$ 等价于$\frac{1}{x_2}-x_2+2\ln x_2<0$.

设函数 $h(x)=\frac{1}{x}-x+2\ln x$,由(1)知,$h(x)$在$(0,+\infty)$单调递减,

又 $h(1)=0$,从而当 $x\in(1,+\infty)$时,$h(x)<0$.

所以$\frac{1}{x_2}-x_2+2\ln x_2<0$,

即$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<a-2$.

第 10 期

第 2~3 版章节测试题参考答案

一、选择题

1.D

2.D

3.A

提示：$z=1-(2-\mathrm{i})^2=1-(3-4\mathrm{i})=-2+4\mathrm{i}$，所以 z 的虚部为 4.

4.B

提示：$z=\frac{2}{1-\mathrm{i}}=\frac{2(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=1+\mathrm{i}$，故 z 的共轭复数是 $1-\mathrm{i}$.

5.C

提示：设这个复数为 $a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，由题意知 $a+b\mathrm{i}+\sqrt{a^2+b^2}=5+\sqrt{3}\,\mathrm{i}$.所以 $\begin{cases}a+\sqrt{a^2+b^2}=5,\\ b=\sqrt{3},\end{cases}$ 解得 $a=\frac{11}{5}$，$b=\sqrt{3}$.所以所求复数为 $\frac{11}{5}+\sqrt{3}\,\mathrm{i}$.

6.B

提示：因为 $ab=0\Leftrightarrow a=0$ 或 $b=0$，而复数 $a+\frac{b}{\mathrm{i}}=a-b\mathrm{i}$ 是纯虚数 $\Leftrightarrow a=0$ 且 $b\neq0$，所以 $ab=0\Leftarrow a+\frac{b}{\mathrm{i}}$ 是纯虚数，故选 B.

7.C

8.D

提示：由题意，得 $\begin{cases}2\cos\theta=t,\\ \lambda+3\sin\theta=4-t^2\end{cases}$ 有解，所以 $\lambda=4-3\sin\theta-4\cos^2\theta=4\sin^2\theta-3\sin\theta=4\left(\sin\theta-\frac{3}{8}\right)^2-\frac{9}{16}$.所以当 $\sin\theta=\frac{3}{8}$ 时，λ 取得最小值 $-\frac{9}{16}$；当 $\sin\theta=-1$ 时，λ 取得最大值 7.故选 D.

9.A

10.B

提示：设 $z=x+y\mathrm{i}(x,y\in\mathbf{R})$，代入 $|z-2-2\mathrm{i}|=|z|$，得 $|(x-2)+(y-2)\mathrm{i}|=|x+y\mathrm{i}|$，即 $\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}=\sqrt{x^2+y^2}$，整理，得 $x+y=2$.而 $P_0(1,2)$，设其关于直线 l:$x+y=2$ 的对称点为 (m,n)，则 $\frac{m+1}{2}+\frac{n+2}{2}=2$ 且 $\frac{n-2}{m-1}=1$，解得 $m=0$，$n=1$.所以对称点对应的复数是 i.

11.D

提示：由图可知，满足条件的复数在单位圆内（含边界），且复数对应点的纵坐标大于或等于 $\frac{1}{2}$，故有 $|z|\leqslant1$，z 的虚部 $\geqslant\frac{1}{2}$.故选 D.

12.C

提示：由已知条件可知，点 Z 到点 $A(1,2)$ 的距离与到点 $B(-2,-1)$ 的距离之差等于 $3\sqrt{2}$，而 $|AB|=3\sqrt{2}$，故点 Z 的轨迹是一条射线.

二、填空题

13.四

提示：$z_1\cdot z_2=(-2-\mathrm{i})\cdot\mathrm{i}=-2\mathrm{i}+1$，故复数 $z_1\cdot z_2$ 对应的点为 $(1,-2)$，位于第四象限.

14.5

提示：$z=\frac{1-7\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{(1-7\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\frac{-6-8\mathrm{i}}{2}=-3-4\mathrm{i}$，则 $|z|=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}=5$.

15.$x=2$

16.②④

提示：解方程 $a+\frac{1}{a}=0$，得 $a=\pm\mathrm{i}$，所以①不成立；②显然成立；令 $a=1$，$b=\mathrm{i}$，则 $|a|=|b|$，但 $a\neq\pm b$，所以③不成立；④显然成立.

三、解答题

17.**解**：

$\left[(1+2\mathrm{i})\cdot\mathrm{i}^{100}+\left(\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^5\right]^2-\left(\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^{20}$

$=[(1+2\mathrm{i})\cdot1+(-\mathrm{i})^5]^2-\mathrm{i}^{10}$

$=(1+\mathrm{i})^2-\mathrm{i}^{10}=1+2\mathrm{i}$.

18.**解**：(1)因为 $z=a^2+a\mathrm{i}$，$|z|=\sqrt{2}$，

所以 $a^4+a^2=2$，

解得 $a^2=1$，或 $a^2=-2$（舍去）.

又因为 z 在复平面内对应的点位于第四象限，所以 $a<0$.

所以 $a=-1$.故 $z=1-\mathrm{i}$.

(2)由(1)得 $z=1-\mathrm{i}$，故 $m^2+m-mz^2=m^2+m+2m\mathrm{i}$.

若 m^2+m-mz^2 是纯虚数，则 $m^2+m=0$ 且 $2m\neq0$，解得 $m=-1$.

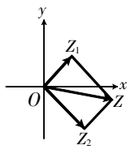
19.**解**：$z=\frac{(1-\mathrm{i})^2+3(1+\mathrm{i})}{2-\mathrm{i}}=\frac{-2\mathrm{i}+3+3\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}=\frac{3+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}=\frac{(3+\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}=1+\mathrm{i}$.

(1)由题意，知 z_1 与 z 的实部互为相反数，虚部相等，所以 $z_1=-1+\mathrm{i}$.

(2)由已知，得 $(1+\mathrm{i})^2+a(1+\mathrm{i})+b=1-\mathrm{i}$，整理得 $a+b+(2+a)\mathrm{i}=1-\mathrm{i}$，

所以 $a+b=1$ 且 $2+a=-1$，解得 $a=-3$，$b=4$.所以 $z_2=-3+4\mathrm{i}$，其共轭复数为 $-3-4\mathrm{i}$.

20.(1)**解**：各向量如图所示.



（第 20 题图）

所画图形是矩形.

(2)**证明**：由 $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$，且 z_1，z_2 不等于零，得 $\left|\frac{z_1}{z_2}+1\right|=\left|\frac{z_1}{z_2}-1\right|$，表示复数 $\frac{z_1}{z_2}$ 在复平面内对应的点到点 $(-1,0)$，$(1,0)$ 的距离相等，

所以 $\frac{z_1}{z_2}$ 对应的点是复平面虚轴上除原点外的点.所以 $\frac{z_1}{z_2}$ 是纯虚数.

所以 $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2$ 是负实数.

21.**解**：(1)设 $z=x+y\mathrm{i}(x,y\in\mathbf{R}$ 且 $y\neq0)$.

由 $|2z+5|=|z+10|$，

得 $(2x+5)^2+(2y)^2=(x+10)^2+y^2$.

化简得 $x^2+y^2=25$.所以 $|z|=5$.

(2)若存在实数 m，使得 $\frac{z}{m}+\frac{m}{z}=\frac{x+y\mathrm{i}}{m}+\frac{m}{x+y\mathrm{i}}=\left(\frac{x}{m}+\frac{mx}{x^2+y^2}\right)+\left(\frac{y}{m}-\frac{my}{x^2+y^2}\right)\mathrm{i}$ 为实数，

则 $\frac{y}{m}-\frac{my}{x^2+y^2}=0$.

又 $y\neq0$，且 $x^2+y^2=25$，

所以 $\frac{1}{m}-\frac{m}{25}=0$，解得 $m=\pm5$.

所以存在 $m=\pm5$ 满足要求.

(3)$(1-2\mathrm{i})z=(1-2\mathrm{i})(x+y\mathrm{i})=(x+2y)+(y-2x)\mathrm{i}$.

依题意，得 $x+2y=y-2x$，即 $y=-3x$.

代入 $x^2+y^2=25$，

解得 $\begin{cases}x=\frac{\sqrt{10}}{2},\\ y=-\frac{3\sqrt{10}}{2},\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-\frac{\sqrt{10}}{2},\\ y=\frac{3\sqrt{10}}{2}.\end{cases}$

所以 $z=\frac{\sqrt{10}}{2}-\frac{3\sqrt{10}}{2}\mathrm{i}$，

或 $z=-\frac{\sqrt{10}}{2}+\frac{3\sqrt{10}}{2}\mathrm{i}$.

22.(1)**证明**：当 $n=1$ 时，左边 $=z=r(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)$，右边 $=r(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)$，左边 = 右边，等式成立.

假设当 $n=k$ 时等式成立，

即 $z^k=[r(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)]^k=r^k(\cos k\alpha+\mathrm{i}\sin k\alpha)$，

则当 $n=k+1$ 时，

$z^{k+1}=[r(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)]^{k+1}$

$=[r(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)]^k r(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)$

$=r^k(\cos k\alpha+\mathrm{i}\sin k\alpha)r(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)$

$=r^{k+1}[(\cos k\alpha\cos\alpha-\sin k\alpha\sin\alpha)+\mathrm{i}(\sin k\alpha\cos\alpha+\cos k\alpha\sin\alpha)]$

$=r^{k+1}[\cos(k+1)\alpha+\mathrm{i}\sin(k+1)\alpha]$，

即当 $n=k+1$ 时，等式也成立.

综上，$z^n=r^n(\cos n\alpha+\mathrm{i}\sin n\alpha)$，$n\in\mathbf{N}_+$.

(2)**解**：因为 $z_1=\left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^{20}=\left[\left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^2\right]^{10}=(-1)^{10}=1$，且 $\frac{z_{n+1}}{z_n}=\frac{1}{2}(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)$（$\alpha$ 为实常数），所以 $\{z_n\}$ 是首项为 1，公比为 $\frac{1}{2}(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)$ 的等比数列.

所以 $z_n=\left[\frac{1}{2}(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)\right]^{n-1}$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}[\cos(n-1)\alpha+\mathrm{i}\sin(n-1)\alpha]$.

第 11 期

第 2~3 版综合检测题(一)参考答案

一、选择题

1.A　2.B　3.A　4.B

5.A

提示：$\Delta y=f(1+\Delta x)-f(1)=(\Delta x)^2+2\Delta x$，所以平均变化率为 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\Delta x+2\in(1.975,2.025)$，解得 $\Delta x\in(-0.025,0.025)$.

6.A

提示：图象中的单调递减区间即为 $f'(x)\leqslant0$ 的解集，故选 A.

7.A

8.B

提示：易得甲产品的利润与投入资金满足 $y=\frac{1}{4}x$，乙产品的利润与投入资金满足 $y=\frac{5}{4}\sqrt{x}$.设乙产品的投入资金为 x 万元，则甲产品的投入资金为 $(10-x)$ 万元，其中 $0\leqslant x\leqslant10$，则可获得的利润 $y=\frac{1}{4}(10-x)+\frac{5}{4}\sqrt{x}$.从而 $y'=-\frac{1}{4}+\frac{5}{8\sqrt{x}}$.令 $y'=0$，解得 $x=\frac{25}{4}$.此时函数 y 取得最大值，为 $\frac{65}{16}$ 万元.

9.D

10.A

提示：分别将 $2+a\mathrm{i}$，$b+\mathrm{i}$ 代入方程得：

$\begin{cases}(2+a\mathrm{i})^2+p(2+a\mathrm{i})+q=0, & ①\\ (b+\mathrm{i})^2+p(b+\mathrm{i})+q=0, & ②\end{cases}$

对①②整理，由复数相等的充要条件得：

$\begin{cases}2p+q-a^2+4=0,\\ (p+4)a=0,\\ pb+q+b^2-1=0,\\ p+2b=0.\end{cases}$

解得 $p=-4$，$q=5$.

11.D

提示：因为 $\frac{2-\mathrm{i}}{a+\mathrm{i}}=\frac{(2-\mathrm{i})(a-\mathrm{i})}{(a+\mathrm{i})(a-\mathrm{i})}=\frac{2a-1-(a+2)\mathrm{i}}{a^2+1}$ 是纯虚数，所以 $2a-1=0\Rightarrow a=\frac{1}{2}$，所以 $|z|=\left|2a+1+\sqrt{2}\,\mathrm{i}\right|=\left|2+\sqrt{2}\,\mathrm{i}\right|=\sqrt{6}$，故选 D.

12.B

二、填空题

13.$S_{3n}=3(S_{2n}-S_n)$

14.3

提示：由 $(1+\mathrm{i})^{2n}=-2^n\cdot\mathrm{i}$，得 $(2\mathrm{i})^n=2^n\cdot\mathrm{i}^n=-2^n\cdot\mathrm{i}$，所以 $\mathrm{i}^n=-\mathrm{i}$，即 $n=4k+3$，$k\in\mathbf{N}$，所以最小的正整数为 3.

15.$a>4$

提示：因为 $f(x)=\left(1-\frac{a}{x}\right)\mathrm{e}^x(x>0)$，所以 $f'(x)=\left(\frac{a}{x^2}-\frac{a}{x}+1\right)\mathrm{e}^x$.因为函数 $f(x)$ 既有极大值又有极小值，所以 $f'(x)=\left(\frac{a}{x^2}-\frac{a}{x}+1\right)\mathrm{e}^x=0$ 有 2 个不等实数根，所以 $x^2-ax+a=0$ 有 2 个不等的正实数根，所以 $\Delta=a^2-4a>0$ 且 $a>0$，所以 $a>4$.

16.-3

提示：由题意可知，$f'(x)=3x^2+2ax+b$，$f'(0)=0$，所以 $b=0$，所以 $f(x)=x^2(x+a)$，有 $\frac{27}{4}=\int_0^{-a}[0-(x^3+ax^2)]\mathrm{d}x=-\left(\frac{x^4}{4}+\frac{ax^3}{3}\right)\Big|_0^{-a}=\frac{a^4}{12}$，所以 $a=\pm3$.又 $-a>0\Rightarrow a<0$，得 $a=-3$.

三、解答题

17.(1)**证明**：依题意，圆的面积为 $\pi\cdot\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2$，正方形的面积为 $\left(\frac{l}{4}\right)^2$，则需证明 $\pi\cdot\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2>\left(\frac{l}{4}\right)^2$.

要证明上式，只需证 $\frac{\pi l^2}{4\pi^2}>\frac{l^2}{16}$，只需证 $\frac{1}{\pi}>\frac{1}{4}$，即证 $4>\pi$.此式显然成立，所以原命题得证.

(2)**解**：一个球与一个正方体的表面积相等时，球的体积比正方体的体积大.

18.**解**：(1)当点 M 在虚轴上时，有 $m^2+m-12=0$，解得 $m=-4$，或 $m=3$.

(2)当点 M 位于第四象限时，有 $\begin{cases}m^2+m-12>0,\\ m^2-8m+15<0,\end{cases}$ 解得 $3<m<5$.

所以实数 m 的取值范围是 $(3,5)$.

19.**解**：(1)设 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，则 $\bar{z}=a-b\mathrm{i}$，所以 $z+\bar{z}=2a=6$，解得 $a=3$.

又 $|z|=\sqrt{9+b^2}=5$，所以 $b=\pm4$，所以复数 z 的虚部为 ±4.

(2)由(1)可知 $z=3\pm4\mathrm{i}$.当 $z=3+4\mathrm{i}$ 时，$\frac{z}{1-\mathrm{i}}=\frac{3+4\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\frac{(3+4\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\frac{-1+7\mathrm{i}}{2}$，故其实部为 $-\frac{1}{2}$；当 $z=3-4\mathrm{i}$ 时，$\frac{z}{1-\mathrm{i}}=\frac{3-4\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\frac{(3-4\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\frac{7-\mathrm{i}}{2}$，故其实部为 $\frac{7}{2}$.

综上，复数 $\frac{z}{1-\mathrm{i}}$ 的实部为 $-\frac{1}{2}$ 或 $\frac{7}{2}$.

20.(1)**解**：定义域为 $(0,+\infty)$，

$f'(x)=\frac{1}{x}-x+1=\frac{-x^2+x+1}{x}$.

由 $f'(x)>0$，解得 $0<x<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(0,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

(2)**证明**：令 $F(x)=f(x)-(x-1)$，则 $F'(x)=\frac{1}{x}-x+1-1=\frac{-(x+1)(x-1)}{x}$.

当 $x>1$ 时，$F'(x)<0$，$F(x)$ 单调递减，所以 $F(x)<F(1)=0$.故当 $x>1$ 时，$f(x)<x-1$.

21.(1)**解**：由 $6S_n=(2n+5)a_n-3n$，

当 $n=1$ 时，有 $6a_1=(2+5)a_1-3$，解得 $a_1=3$；

当 $n=2$ 时，有 $6(a_1+a_2)=(2\times2+5)a_2-3\times2$，解得 $a_2=8$；

当 $n=3$ 时，有 $6(a_1+a_2+a_3)=(2\times3+5)a_3-3\times3$，解得 $a_3=15$；

当 $n=4$ 时，有 $6(a_1+a_2+a_3+a_4)=(2\times4+5)a_4-3\times4$，解得 $a_4=24$.

(2)**解**：由(1)可知，$a_1=1\times3$，$a_2=2\times4$，$a_3=3\times5$，$a_4=4\times6$，猜想 $a_n=n(n+2)(n\in\mathbf{N}_+)$，证明如下：

①当 $n=1$ 时，$a_1=3=1\times3$，猜想成立.

②假设当 $n=k(k\geqslant2)$ 时，猜想成立，即 $a_k=k(k+2)$，那么当 $n=k+1$ 时，

$a_{k+1}=S_{k+1}-S_k=\frac{1}{6}[(2k+7)a_{k+1}-3(k+1)]-\frac{1}{6}[(2k+5)a_k-3k]=\frac{1}{6}(2k+7)a_{k+1}-\frac{1}{6}(2k+5)a_k-\frac{1}{2}$，

化简，得 $(2k+1)a_{k+1}=(2k+5)a_k+3=(2k+5)k(k+2)+3=2k^3+9k^2+10k+3=(2k^3+8k^2+6k)+(k^2+4k+3)=(2k+1)(k+1)(k+3)$，

所以 $a_{k+1}=(k+1)(k+3)$，

即当 $n=k+1$ 时猜想也成立.

由①②可知，$a_n=n(n+2)(n\in\mathbf{N}_+)$.

22.(1)**证明**：当 $a=1$ 时，$f(x)\geqslant1$，即 $\mathrm{e}^x-x^2\geqslant1$，也就是 $\mathrm{e}^x\geqslant1+x^2$，

两边同除以 e^x 可知，原式等价于 $(x^2+1)\mathrm{e}^{-x}-1\leqslant0$.

设函数 $g(x)=(x^2+1)\mathrm{e}^{-x}-1$，则 $g'(x)=-(x^2-2x+1)\mathrm{e}^{-x}=-(x-1)^2\mathrm{e}^{-x}$.

当 $x\neq1$ 时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减.

而 $g(0)=0$，故当 $x\geqslant0$ 时，$g(x)\leqslant0$，即 $f(x)\geqslant1$.

(2)**解**：由 $f(x)=0$，得 $a=\frac{\mathrm{e}^x}{x^2}$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上只有一个零点等价于方程 $a=\frac{\mathrm{e}^x}{x^2}$ 只有一个实根.

令 $g(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{x^2}$，则 $g'(x)=\frac{\mathrm{e}^xx^2-2\mathrm{e}^xx}{(x^2)^2}=\frac{\mathrm{e}^x(x-2)}{x^3}$，

所以当 $x\in(0,2)$ 时，$g(x)$ 单调递减；当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$g(x)$ 单调递增，

而 $g(2)=\frac{\mathrm{e}^2}{4}$，所以当且仅当 $a=\frac{\mathrm{e}^2}{4}$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 只有一个零点.