所以 $f(a)+f(b)<f(-a)+f(-b)$,这与 $f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$ 矛盾,

故假设不成立,

所以 $a+b\geqslant 0$ 成立,即(1)中命题的逆命题成立.

第 8 期

第 2、3 版章节测试题参考答案

一、选择题

1.C

2.D

3.C

提示:因为 $\sqrt{2}-\sqrt{3}<0$,$\sqrt{6}-\sqrt{7}<0$,所以原不等式只需证 $\sqrt{2}+\sqrt{7}<\sqrt{3}+\sqrt{6}$,所以只需证 $(\sqrt{2}+\sqrt{7})^2<(\sqrt{3}+\sqrt{6})^2$,故选 C.

4.C

5.D

6.C

提示:令 $a=-2$,$b=-1$,满足 $a<b<0$,则 $a^2>b^2$,$\frac{a}{b}=2>1$,$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$,故 A、B、D 都不成立,排除 A、B、D,选 C.

7.C

提示:类比相似形中的对应边成比例知,①③属于相似体.

8.C

提示: 垂直于同一个平面的两条直线平行.

9.A

提示:满足题目中的条件,则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为减函数,在 A、B、C、D 四选项中,由基本函数性质知,A 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数,故选 A.

10.C

提示:因为 $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$,$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$,$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)$,

依此类推可得:$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}+\frac{1}{110}+\frac{1}{132}+\frac{1}{156}=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{13}\right)$,所以 $\frac{1}{m}=\frac{1}{13}$,$\frac{1}{n}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{1}{20}$,$m=13$,$n=20$,即 $1\leqslant x\leqslant 13$,$1\leqslant y\leqslant 20$. 又 $\frac{x+y+2}{x+1}=1+\frac{y+1}{x+1}$,把 $\frac{y+1}{x+1}$ 看成点 (x,y),$(-1,-1)$ 连线的斜率,结合 $m\leqslant n$,$m,n\in N_+$,在满足条件的点中,$(13,1)$,$(-1,-1)$ 连线的斜率最小,为 $\frac{1+1}{13+1}=\frac{1}{7}$,故 $\frac{x+y+2}{x+1}$ 最小值为 $\frac{8}{7}$.故选 C.

11.A

提示:对任意 $n\in N_+$ 总有 $c_n/\!/b_n$,则存在实数 $\lambda\neq 0$,使 $c_n=\lambda b_n$,所以 $a_n=\lambda n$,所以 $\{a_n\}$ 是等差数列.

12.B

提示:由数据可知,进入立定跳远决赛的 8 人为 1~8 号,所以进入 30 秒跳绳决赛的 6 人从 1~8 号里产生.数据排序后可知 3 号,6 号,7 号必定进入 30 秒跳绳决赛,则得分为 63,a,60,63,$a-1$ 的 5 人中有 3 人进入 30 秒跳绳决赛.若 1 号,5 号学生未进入 30 秒跳绳决赛,则 4 号学生就会进入决赛,与事实矛盾,所以 1 号,5 号学生必进入 30 秒跳绳决赛.故选 B.

二、填空题

13.$2(a^2+b^2+c^2)\geqslant 2ab+2bc+2ac$,$(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2\geqslant 0$

14.$(a-b)(a^n+a^{n-1}b+\cdots+ab^{n-1}+b^n)=a^{n+1}-b^{n+1}$

15.$\frac{a^3}{8}$

16.③

提示:对于①②④可举反例,说明条件不能推出结论,如①中:$a=b=\frac{1}{2}$,②中:$a=b=1$,④中:$a=-1$,$b=-2$.对于③,反设 a,b 都小于等于 1,则 $a+b\leqslant 2$ 与已知矛盾.

所以假设不成立,故③正确.

三、解答题

17.**证明:**假设 $\frac{1}{4}$ 在 $f(x)$ 的定义域内,

因为 $f(xy)=f(x)+f(y)$,

所以 $f\left(\frac{1}{4}\right)=f\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=2$.

又 $f(x)$ 的值域为 $[-1,1]$,$2\notin[-1,1]$,

所以 $\frac{1}{4}$ 不在函数 $f(x)$ 的定义域内.

18.**解:**(1)如果一个数列从第 2 项起,每一项与它的前一项的和等于同一个常数,那么这个数列就叫作等和数列.

(2)由(1)知 $a_n+a_{n+1}=a_{n+1}+a_{n+2}$,所以 $a_{n+2}=a_n$,

所以等和数列的奇数项相等,偶数项也相等.

19.**解:**$f(a)+f(c)>2f(b)$.

证明如下:因为 a,b,c 是互不相等的正数,

所以 $a+c>2\sqrt{ac}$.

因为 $b^2=ac$,所以 $ac+2(a+c)>b^2+4b$.

即 $ac+2(a+c)+4>b^2+4b+4$.

从而 $(a+2)(c+2)>(b+2)^2$.

因为 $f(x)=\log_2x$ 是增函数,

所以 $\log_2[(a+2)(c+2)]>\log_2(b+2)^2$.

即 $\log_2(a+2)+\log_2(c+2)>2\log_2(b+2)$.

故 $f(a)+f(c)>2f(b)$.

20.**证明:**作斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的直截面 DEF,分别交 AA_1,BB_1,CC_1 于点 D,F,E,则 $\angle DFE$ 为平面 ABB_1A_1 与平面 BCC_1B_1 所成角.在 $\triangle DEF$ 中有余弦定理:$DE^2=DF^2+EF^2-2DF\cdot EF\cos\angle DFE$,两边同乘以 AA_1^2,得 $DE^2\cdot AA_1^2=DF^2\cdot AA_1^2+EF^2\cdot AA_1^2-2DF\cdot AA_1\cdot EF\cdot AA_1\cos\angle DFE$.

即 $S^2_{AA_1C_1C}=S^2_{ABB_1A_1}+S^2_{BCC_1B_1}-2S_{ABB_1A_1}\cdot S_{BCC_1B_1}\cdot\cos\angle DFE$.

21.**证明:**要证明 $\frac{a}{a+m}+\frac{b}{b+m}>\frac{c}{c+m}$,只需证明 $\frac{a}{a+m}+\frac{b}{b+m}-\frac{c}{c+m}>0$ 即可.

因为 $\frac{a}{a+m}+\frac{b}{b+m}-\frac{c}{c+m}=\frac{a(b+m)(c+m)+b(a+m)(c+m)-c(a+m)(b+m)}{(a+m)(b+m)(c+m)}$,

因为 $a>0$,$b>0$,$c>0$,$m>0$,

所以 $(a+m)(b+m)(c+m)>0$,

因为 $a(b+m)(c+m)+b(a+m)(c+m)-c(a+m)(b+m)=abc+abm+acm+am^2+abc+abm+bcm+bm^2-abc-bcm-acm-cm^2=2abm+am^2+abc+bm^2-cm^2=2abm+abc+(a+b-c)m^2$,

因为 $\triangle ABC$ 中任意两边之和大于第三边,

所以 $a+b-c>0$,所以 $(a+b-c)m^2>0$,

所以 $2abm+abc+(a+b-c)m^2>0$,

所以 $\frac{a}{S+m}+\frac{b}{b+m}>\frac{c}{c+m}$.

22.**解:**$\triangle ABC$ 是锐角三角形.

因为 $c^n=a^n+b^n(n>2)$,所以 $c>a$,$c>b$,由 c 是 $\triangle ABC$ 的最大边,所以要证 $\triangle ABC$ 是锐角三角形,只需证角 C 为锐角,即证 $\cos C>0$.

因为 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$,

所以要证 $\cos C>0$,

只要证 $a^2+b^2>c^2$, ①

注意到条件:$a^n+b^n=c^n$,

于是将①等价变形为:

$(a^2+b^2)c^{n-2}>c^n$. ②

因为 $c>a$,$c>b$,$n>2$,

所以 $c^{n-2}>a^{n-2}$,$c^{n-2}>b^{n-2}$,

即 $c^{n-2}-a^{n-2}>0$,$c^{n-2}-b^{n-2}>0$,

从而 $(a^2+b^2)c^{n-2}-c^n=(a^2+b^2)c^{n-2}-a^n-b^n=a^2(c^{n-2}-a^{n-2})+b^2(c^{n-2}-b^{n-2})>0$,

这说明②式成立,从而①式也成立.

故 $\cos C>0$,C 是锐角,所以 $\triangle ABC$ 为锐角三角形.

第 5 期

第 2,3 版章节测试题参考答案

一、选择题

1.D

提示:根据流程图和结构图的意义及画法可知A,B,C都对,故选D.

2.D

提示:描述系统结构的图示是结构图,故某单位综合治理领导小组成员之间的领导关系可以用组织结构图表示.

3.D

提示:结构图的分解方向不确定.

4.C

提示: 流程图用来描述具有时间特征的动态过程.结合选项可知,只有C是一种动态过程.故选C.

5.C

6.C

7.A

8.C

9.B

提示:由算法框图易知,N的功能是计算 $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{99}$,T的功能是计算 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{100}$,故空白框中应填入i=i+2.故选B.

10.C

提示:解读流程图,可以发现,审查过程中出现不能通过审查的环节可能有 3 处,即审查资料及受理、文审、评审材料审查.故选C.

11.A

12.A

二、填空题

13.树

14.补集

提示:交、并、补从属于集合的运算.

15.11

提示:由题意知:①工序 a、b 合并且在工序 c 前完成,

②工序 c 需要在工序 d,e 之前完成,

③工序 d,e 需要在工序 f 前完成,

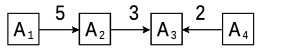
由此知此工程完成要分成四步:

第一步先完成 a,b 工序,要用 3 天;第二步完成 c 工序,要用 2 天;第三步完成 d,e 工序,要用 5 天;第四步完成 f 工序,要用 1 天,

所以所有工序总时间为:$3+2+5+1=11$(天).

16.10 台

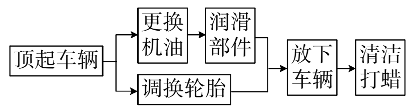
提示:调配后每所学校彩电台数为 10 台,最好的调配方案为:



因此调配出彩电共 3+2+5=10 台.

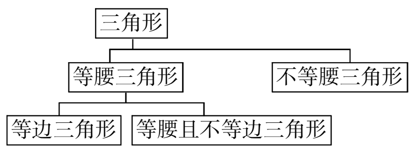
三、解答题

17.**解:**流程图如图所示:



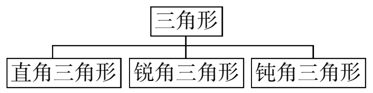
(第 17 题图)

18.**解:**(1)按边分类:



(第 18 题图 1)

(2)按角分类:



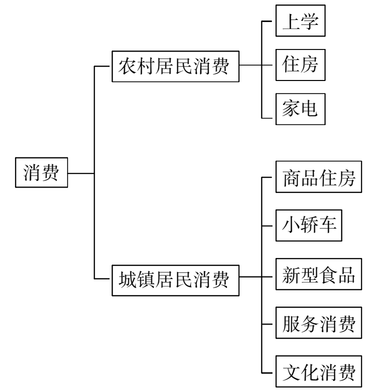
(第 18 题图 2)

19.**解:**(1)一件屏幕成品可能经过一次加工、二次加工两道加工程序和检验、最后检验两道检验程序;也可能经过一次加工、返修加工、二次加工三道加工程序和检验、返修检验、最后检验三道检验程序.

(2)返修加工和二次加工可能导致屏幕废品的产生,二次加工产品的来源是一次加工的合格品和返修加工的合格品.

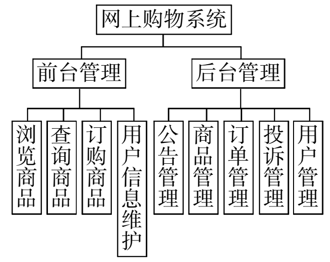
(3)流程图的终点是"屏幕成品"和"屏幕废品".

20.**解:**结构图如下:



(第 20 题图)

21.**解:**(1)结构图如下图所示.



(第 21 题图)

(2)查询商品的上位要素是前台管理,它与上位是从属关系.

22.**解:**(1)若输入 $n_0=0$,则输出的数为20,10,5,4,2.

(2)由(1)知所输出的最大数为20,最小数为2,共5个,输入的 n_0 越大,输出的数越小,

所以要使输出的数中有5,

应使 $\frac{20}{n_0+1}\geqslant 5$.

解得 $n_0=0,1,2,3$.

所以输入 n_0 的可能值为0,1,2,3.

(3)由(1)(2)可知要使结果只有三个数,只能是5,4,2.

所以应使 $5\leqslant\frac{20}{n_0+1}<10$.

解得 $1<n_0\leqslant 3$,即 $n_0=2,3$.

所以输入 n_0 的可能值为 2,3.

第 6 期

第 3 版同步周测题参考答案

一、选择题

1.C

2.C

3.B

4.A

提示:根据三段论特点,过程应为:大前提是增函数的定义;小前提是 $f(x)=2x+1$ 满足增函数的定义;结论是

$f(x)=2x+1$ 为增函数,故①④正确.

5.B

6.B

7.A

提示:因为对于可导函数 $f(x)$,若 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上是增函数,则 $f'(x)\geqslant 0$ 对 $x\in(a,b)$ 恒成立. 所以大前提错误,故选 A.

8.B

提示:1=1,3=1+2,6=1+2+3,10=1+2+3+4,…,第n个三角形数为 $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

9.A

提示:如图所示,设双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$,

则 $F(-c,0)(c>0)$,$B(0,b)$,$A(a,0)$,

所以 $\overrightarrow{FB}=(c,b)$,$\overrightarrow{AB}=(-a,b)$.

又因为 $\overrightarrow{FB}\perp\overrightarrow{AB}$,

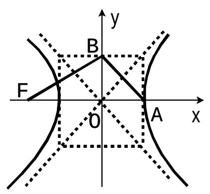
所以 $\overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{AB}=b^2-ac=0$,

所以 $c^2-a^2-ac=0$,

所以 $e^2-e-1=0$,

所以 $e=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 或 $e=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$(舍去).

故选A.



(第 9 题图)

10.D

提示:归纳所给出的导函数知,原函数为偶函数,则其导函数为奇函数.根据这一规律可知,$f(x)$ 为偶函数,其导函数 $g(x)$ 必为奇函数,故 $g(-x)=-g(x)$.

11.D

提示:由于甲不知自己的成绩,所以乙、丙一个优秀一个良好,因此乙知道丙,就知道自己成绩,同样丁知道甲成绩,就知道自己成绩,故选 D.

12.A

二、填空题

13.$\log_2x-2\geqslant 0$

提示:由三段论方法知应为 $\log_2x-2\geqslant 0$.

14.$\frac{4}{3}n(n+1)$

15.41

提示:根据题意,由于 $\sqrt{2+\frac{2}{3}}=2\sqrt{\frac{2}{3}}$,$\sqrt{3+\frac{3}{8}}=3\sqrt{\frac{3}{8}}$,$\sqrt{4+\frac{4}{15}}=4\sqrt{\frac{4}{15}}$,…,那么可知 $\sqrt{6+\frac{a}{b}}=6\sqrt{\frac{a}{b}}$,$a=6$,$b=6\times6-1=35$,所以 $a+b=41$.

16.πab

提示:由于椭圆与圆截 y 轴所得线段之比为 $\frac{b}{a}$,即 $k=\frac{b}{a}$,所以椭圆面积 $S=\pi a^2\cdot\frac{b}{a}=\pi ab$.

三、解答题

17.**解**:①错误.小前提错误.因为若三点共线,则可确定无数平面,只有不共线的三点才能确定一个平面.

②错误.推理形式错误,演绎推理是由一般到特殊的推理,3,5,7,11 只是奇数的一部分,是特殊事例.

18.**解**:因为 $S_n=2n-a_n$,$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$,$n\in N_+$,

所以,当 n=1 时,有 $a_1=2-a_1$,

解得 $a_1=1=2-\frac{1}{2^0}$;

当 n=2 时,有 $a_1+a_2=2\times2-a_2$,

解得 $a_2=\frac{3}{2}=2-\frac{1}{2^1}$;

当 n=3 时,有 $a_1+a_2+a_3=2\times3-a_3$,

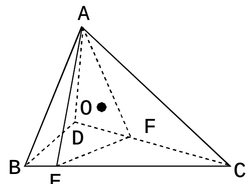
解得 $a_3=\frac{7}{4}=2-\frac{1}{2^2}$;

当 n=4 时,有 $a_1+a_2+a_3+a_4=2\times4-a_4$,

解得 $a_4=\frac{15}{8}=2-\frac{1}{2^3}$.

猜想 $a_n=2-\frac{1}{2^{n-1}}(n\in N_+)$.

19.**解**:如图,



(第 19 题图)

截面 AEF 经过四面体 ABCD 的内切球(与四个面都相切的球)的球心 O,且与 BC,DC 分别交于 E,F,若截面将四面体分为体积相等的两部分,则四棱锥 A-BEFD 与三棱锥 A-EFC 的表面积相等.

20.**解**:因为 $f(x)=\frac{1}{3^x+\sqrt{3}}$,

所以 $f(0)+f(1)=\frac{1}{3^0+\sqrt{3}}+\frac{1}{3^1+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,

$f(-1)+f(2)=\frac{1}{3^{-1}+\sqrt{3}}+\frac{1}{3^2+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,

$f(-2)+f(3)=\frac{1}{3^{-2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{3^3+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

归纳猜想一般性结论:$f(-x)+f(x+1)=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

证明如下:$f(-x)+f(x+1)$

$=\frac{1}{3^{-x}+\sqrt{3}}+\frac{1}{3^{x+1}+\sqrt{3}}$

$=\frac{3^x}{1+\sqrt{3}\cdot3^x}+\frac{1}{3^{x+1}+\sqrt{3}}$

$=\frac{\sqrt{3}\cdot3^x}{\sqrt{3}+3^{x+1}}+\frac{1}{3^{x+1}+\sqrt{3}}$

$=\frac{\sqrt{3}\cdot3^x+1}{\sqrt{3}+3^{x+1}}+\frac{\sqrt{3}\cdot3^x+1}{\sqrt{3}(1+\sqrt{3}\cdot3^x)}$

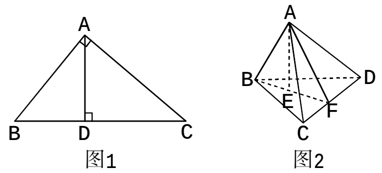
$=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

21.(1)**证明**:如图1所示,由题意,得 $AD^2=BD\cdot DC$,$AB^2=BD\cdot BC$,$AC^2=BC\cdot DC$,

所以 $\frac{1}{AD^2}=\frac{1}{BD\cdot DC}=\frac{BC^2}{BD\cdot BC\cdot DC\cdot BC}=\frac{BC^2}{AB^2\cdot AC^2}$.

又 $BC^2=AB^2+AC^2$,

所以 $\frac{1}{AD^2}=\frac{AB^2+AC^2}{AB^2\cdot AC^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}$.



(第 21 题图)

(2)**解**:在四面体 $ABCD$ 中,AB,AC,AD 两两垂直,$AE\perp$ 平面 BCD,则 $\frac{1}{AE^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}+\frac{1}{AD^2}$.理由如下:

如图2,连接 BE 并延长,交 CD 于点 F,连接 AF.

因为 $AB\perp AC$,$AB\perp AD$,所以 $AB\perp$ 平面 ACD,

又 $AF\subset$ 平面 ACD,所以 $AB\perp AF$.

在 Rt$\triangle ABF$ 中,$AE\perp BF$,所以 $\frac{1}{AE^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AF^2}$.

在 Rt$\triangle ACD$ 中,$AF\perp CD$,所以 $\frac{1}{AF^2}=\frac{1}{AC^2}+\frac{1}{AD^2}$,

所以 $\frac{1}{AE^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}+\frac{1}{AD^2}$. 故猜想正确.

22.(1)**解**:已知 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in R$,$a_1+a_2+\cdots+a_n=1$,

求证:$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\geqslant\frac{1}{n}$.

(2)**证明**:构造函数 $f(x)=(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+\cdots+(x-a_n)^2$

$=nx^2-2(a_1+a_2+\cdots+a_n)x+a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$

$=nx^2-2x+a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$.

因为对一切 $x\in R$,都有 $f(x)\geqslant 0$,

所以 $\Delta=4-4n(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)\leqslant 0$,

所以 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\geqslant\frac{1}{n}$.

第 7 期

第 3 版同步周测题参考答案

一、选择题

1.A

2.C

3.D

提示:A,与两相互垂直的直线平行的平面的位置关系不能确定;B,平面内的一条直线与另一个平面的交线垂直,这两个平面的位置关系不能确定;C,这两个平面有可能平行或重合;D 是成立的,故选 D.

4.C

5.B

提示:$q=\sqrt{ab+\frac{mad}{n}+\frac{nbc}{m}+cd}$

$\geqslant\sqrt{ab+2\sqrt{abcd}+cd}$

$=\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$

$=p$.

6.C

提示:选项 A 中命题条件较少,不足以正面证明;选项 B 中命题是否定性命题,可以用反证法证明;选项 D 中命题是至少性命题,可以用反证法证明.选项 C 不适合用反证法证明.故选 C.

7.C

提示:若∠A为钝角,由余弦定理,可得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}<0$,故 $a^2>b^2+c^2$.

8.A

提示:$f(x)=x^3+x$ 是奇函数,且在 $\mathbf{R}$ 上是增函数,

由 $a+b>0$ 得 $a>-b$,

所以 $f(a)>f(-b)$,即 $f(a)+f(b)>0$,

同理 $f(a)+f(c)>0$,$f(b)+f(c)>0$,

所以 $f(a)+f(b)+f(c)>0$.

9.C

提示:假设 $c\parallel b$,而由 $c\parallel a$,可得 $a\parallel b$,这与 a,b 异面矛盾,故 c 与 b 不可能是平行直线.故选 C.

10.B

提示:分 $\triangle ABC$ 的直线只能过一个顶点且与对边相交,如直线 AD(点 D 在 BC 上),则 $\angle ADB+\angle ADC=\pi$,若 $\angle ADB$ 为钝角,则 $\angle ADC$ 为锐角.而 $\angle ADC>\angle BAD$,$\angle ADC>\angle ABD$,$\triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 不可能相似,与已知不符,只有当 $\angle ADB=\angle ADC=\angle BAC=90°$ 时,才符合题意.

11.C

提示:由于 a,b,c 不全相等,则 a−b,b−c,c−a 中至少有一个不为 0,故①正确;②显然成立;令 a=2,b=3,c=5,满足 $a\neq c$,$b\neq c$,$a\neq b$,故③错.

12.B

提示:因为 $x>0$,$y>0$,$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}=1$,所以 $x+\frac{y}{4}=\left(x+\frac{y}{4}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{4}{y}\right)=2+\frac{y}{4x}+\frac{4x}{y}\geqslant 2+2\sqrt{\frac{y}{4x}\cdot\frac{4x}{y}}=4$,等号在 $y=4x$,即 $x=2$,$y=8$ 时成立,所以 $x+\frac{y}{4}$ 的最小值为 4,要使不等式 $m^2-3m>x+\frac{y}{4}$ 有解,应有 $m^2-3m>4$,所以 $m<-1$ 或 $m>4$,故选 B.

二、填空题

13.$a\neq1$ 或 $b\neq1$

14.④

提示:因为 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$,所以 $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}$,所以 $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$,所以四边形 ABCD 为平行四边形.

15.$AC\perp BD$

提示:从结论出发,找一个使 $A_1C\perp B_1D_1$ 成立的充分条件. 因而可以是:$AC\perp BD$ 或四边形 ABCD 为正方形.

16.(10,5)

提示:设(△,□)为 (a,b),则 $30-a=4b$,即 $a+4b=30$,$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\cdot\frac{a+4b}{30}=\frac{5+\frac{4b}{a}+\frac{a}{b}}{30}\geqslant\frac{5+4}{30}=\frac{3}{10}$,当且仅当 $\frac{4b}{a}=\frac{a}{b}$,即 $a=2b$ 时等号成立,此时 a=10,b=5.

三、解答题

17 **解**:上述解法中,对 $ab\leqslant\frac{1}{4}$ 的证明是错误的.因为 $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$ 成立的条件是 $a\geqslant0$,$b\geqslant0$,而原题条件是 $a\geqslant-\frac{1}{2}$,$b\geqslant-\frac{1}{2}$,不满足上述条件.

正确解答为:在错解中,得 $\sqrt{2a+1}\cdot\sqrt{2b+1}\leqslant2$.

因为 $a\geqslant-\frac{1}{2}$,$b\geqslant-\frac{1}{2}$,所以 $2a+1\geqslant0$,$2b+1\geqslant0$.

所以 $\sqrt{2a+1}\cdot\sqrt{2b+1}\leqslant\frac{(2a+1)+(2b+1)}{2}=\frac{2(a+b+1)}{2}=2$,即 $\sqrt{2a+1}\cdot\sqrt{2b+1}\leqslant2$ 成立,

因此原不等式成立.

18.**证明**:假设 $\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$ 成立,则 $\frac{2}{b}=\frac{a+c}{ac}=\frac{2b}{ac}$,所以 $b^2=ac$.

又因为 $b=\frac{a+c}{2}$,所以 $\left(\frac{a+c}{2}\right)^2=ac$,

即 $a^2+c^2=2ac$,即 $(a-c)^2=0$,

所以 $a=c$,这与 a,b,c 两两不相等矛盾,

所以 $\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$ 不成立.

19.**证明**:因为 $a^3-b^3=a^2-b^2$ 且 $a\neq b$,

所以 $a^2+ab+b^2=a+b$,

由 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2>a^2+ab+b^2$,得 $(a+b)^2>a+b$,

又 $a+b>0$,所以 $a+b>1$.

要证 $a+b<\frac{4}{3}$,即证 $3(a+b)<4$,

又因为 $a+b>0$,

所以只需证明 $3(a+b)^2<4(a+b)$,

又 $a+b=a^2+ab+b^2$,

即证 $3(a+b)^2<4(a^2+ab+b^2)$,也就是证明 $(a-b)^2>0$.

因为 a、b 是不相等的两个正数,故 $(a-b)^2>0$ 成立.

故 $a+b<\frac{4}{3}$ 成立.

综上,得 $1<a+b<\frac{4}{3}$.

20.**证明**:由已知条件得 $b^2=ac$,

$2x=a+b$,$2y=b+c$. ①

要证 $\frac{a}{x}+\frac{c}{y}=2$,只要证 $ay+cx=2xy$,

只要证 $2ay+2cx=4xy$. ②

由①②得 $2ay+2cx=a(b+c)+c(a+b)=ab+2ac+bc$,

$4xy=(a+b)(b+c)=ab+b^2+ac+bc=ab+2ac+bc$,

所以 $2ay+2cx=4xy$.命题得证.

21.**解**:假设三个方程均无实根,则

$$\begin{cases}\Delta_1=16a^2-4(-4a+3)<0,\\ \Delta_2=(a-1)^2-4a^2<0,\\ \Delta_3=4a^2-4(-2a)<0,\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}-\frac{3}{2}<a<\frac{1}{2},\\ a<-1\text{或}a>\frac{1}{3},\\ -2<a<0,\end{cases}$ 即 $-\frac{3}{2}<a<-1$,

所以当 $a\geqslant-1$ 或 $a\leqslant-\frac{3}{2}$ 时,三个方程至少有一个方程有实根.

所以实数a的取值范围是 $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right]\cup[-1,+\infty)$.

22.**解**:(1)证明:当 $a+b\geqslant0$ 时,$a\geqslant-b$ 且 $b\geqslant-a$.

因为 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数,

所以 $f(a)\geqslant f(-b)$,$f(b)\geqslant f(-a)$,

所以 $f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$.

(2)(1)中命题的逆命题为“如果 $f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$,那么 $a+b\geqslant0$”,此命题成立.

用反证法证明如下:

假设 $a+b<0$,则 $a<-b$,

所以 $f(a)<f(-b)$.

同理可得 $f(b)<f(-a)$.