22.**解**:当 $a\leqslant 0$ 时,

由题意可得 $\int_a^0 (x^2-2x)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}$,

所以 $\left(\frac{1}{3}x^3-x^2\right)\Big|_a^0=\frac{4}{3}$,即 $a^3-3a^2+4=0$,

解得 $a=-1$,或 $a=2$.

又因为 $a\leqslant 0$,所以 $a=-1$.

当 $0<a\leqslant 2$ 时,由题意可得

$\int_0^a 0-(x^2-2x)\mathrm{d}x=\int_0^a (2x-x^2)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}$,

即 $a^3-3a^2+4=0$,

解得 $a=2$,或 $a=-1$(舍去).

所以存在常数 $a=-1$ 或 $a=2$,使得由抛物线 $y=x^2-2x$ 及直线 $x=0,x=a,y=0$ 围成的平面图形的面积为 $\frac{4}{3}$.

第 8 期

第 2~3 版章节测试题参考答案

一、选择题

1.A 2.B 3.A 4.A 5.B 6.D 7.B 8.A

提示:$f'(x)=\frac{x^2+2ax-1}{(x+a)^2}$.

由题意,得 $f'(1)=0$,解得 $a=0$.

当 $0<x<1$ 时,$f'(x)<0$;当 $x>1$ 时,$f'(x)>0$.故 $f(1)$ 是函数 $f(x)$ 的极小值.

9.D

提示:由导函数 $y=f'(x)$ 的图像可知,$f(x)$ 先减后增,再递减,最后递增,排除 A,C;极大值点在 x 轴的右侧,排除 B,故选 D.

10.A

11.B

提示:根据二次函数的性质,可知A不成立.对于 B,设 $f(x)=e^x-ex$,则 $f'(x)=e^x-e$,当 $x\in(0,1)$ 时,$f'(x)<0$;当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$f'(x)>0$,所以 $f(x)$ 的最小值为 $f(1)=0$,所以 $f(x)\geqslant 0$,故正确.同理,可知 C,D 均不恒成立.故选 B.

12.B

提示:由题意,知 $xe^x+x^2+2x=-a$ 恰有两个不同的实数解.

设 $f(x)=xe^x+x^2+2x$,

则 $f'(x)=e^x+xe^x+2x+2=(x+1)(e^x+2)$.

当 $x<-1$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减;

当 $x>-1$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增.

故 $f(x)$ 的最小值为 $f(-1)=-\frac{1}{e}-1$.

所以 $-a>-\frac{1}{e}-1$,解得 $a<\frac{1}{e}+1$.

故选 B.

二、填空题

13.$y=2x$ 14.-2

15.$\frac{4}{3}$

提示:设圆锥的高为 h,底面半径为 r,

则 $1^2=(h-1)^2+r^2$,即 $r^2=2h-h^2$.

所以圆锥的体积

$V(h)=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{2}{3}\pi h^2-\frac{\pi}{3}h^3$.

令 $V'(h)=\frac{4}{3}\pi h-\pi h^2=0$,

解得 $h=\frac{4}{3}$ 或 $h=0$(舍去).

易知当 $h=\frac{4}{3}$ 时,$V(h)$ 取得极大值也是最大值.

故当圆锥的体积最大时,圆锥的高为 $\frac{4}{3}$.

16.(3)(4)

提示:令 $F(x)=f(x)-g(x)$,

则 $F'(x)=f'(x)-g'(x)>0$,

所以 $F(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

又 $a<x<b$,

所以 $F(a)<F(x)<F(b)$,

即 $f(a)-g(a)<f(x)-g(x)<f(b)-g(b)$.

从而可知(3)(4)正确.

三、解答题

17.**解**:(1)化简,得 $f(x)=\frac{2e^x}{1-x}$.

因为 $f'(x)=\left(\frac{2e^x}{1-x}\right)'$

$=\frac{(2e^x)'(1-x)-2e^x(1-x)'}{(1-x)^2}$

$=\frac{2e^x(2-x)}{(1-x)^2}$,

所以 $f'(2)=0$.

(2)因为 $f'(x)=\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)'-x'+(\ln x)'$

$=-\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}-1+\frac{1}{x}$,

所以 $f'(1)=-\frac{3}{2}$.

18.**解**:(1)$f'(x)=3x^2-3$.

因为 P 为切点,

所以直线 l 的斜率 $k_1=f'(1)=0$,

所以直线 l 的方程为 $y=-2$.

(2)设切点坐标为 $(x_0,x_0^3-3x_0)(x_0\neq 1)$,

则直线 l 的斜率 $k_2=f'(x_0)=3x_0^2-3$,

所以直线 l 的方程为

$y-(x_0^3-3x_0)=(3x_0^2-3)(x-x_0)$.

又直线 l 过点 $P(1,-2)$,

所以 $-2-(x_0^3-3x_0)=(3x_0^2-3)(1-x_0)$,

解得 $x_0=1$(舍去)或 $x_0=-\frac{1}{2}$.

故所求直线 l 的斜率 $k_2=3x_0^2-3=-\frac{9}{4}$,

所以直线 l 的方程为

$y-(-2)=-\frac{9}{4}(x-1)$,

即 $9x+4y-1=0$.

19.**解**:(1)$f'(x)=e^x-2$.

令 $f'(x)>0$,解得 $x>\ln 2$;

令 $f'(x)<0$,解得 $x<\ln 2$.

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln 2)$ 上单调递减,

在 $(\ln 2,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $f(x)$ 有极小值 $f(\ln 2)=2-\ln 4$,无极大值.

(2)令 $g(x)=f(x)-x^2-(a-2)x-1=e^x-x^2-ax-1$,

则 $g'(x)=e^x-2x-a=f(x)-a$.

结合(1)可得

$[g'(x)]_{\min}=[f(x)]_{\min}-a=2-\ln 4-a$.

因为 $a<2-\ln 4$,所以 $g'(x)>0$.

所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $g(x)>g(0)=0$,

即 $f(x)>x^2+(a-2)x+1$.

20.**解**:$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\sin x+b\cos x)\mathrm{d}x=(b\sin x-a\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=b+a=4$,

$\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)\mathrm{d}x=(b\sin x-a\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{2}b-\frac{\sqrt{3}}{2}a+a=\frac{7-3\sqrt{3}}{2}$,

解得 $a=3,b=1$.

所以 $f(x)=3\sin x+\cos x=\sqrt{10}\sin(x+\varphi)\left(\text{其中}\tan\varphi=\frac{1}{3}\right)$.

故函数 $f(x)$ 的最大值为 $\sqrt{10}$,最小值为 $-\sqrt{10}$.

21.**解**:(1)函数的定义域是 $(0,+\infty)$,

$f'(x)=\frac{4}{x}+2ax-6$.由 $f'(2)=0$,解得 $a=1$.

(2)$f'(x)=\frac{4}{x}+2x-6=\frac{2(x-2)(x-1)}{x}$.

由 $f'(x)>0$,可得 $x>2$,或 $0<x<1$;

由 $f'(x)<0$,可得 $1<x<2$.

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,1)$ 和 $(2,+\infty)$,单调递减区间为 $(1,2)$.

(3)由(2),可知 $f(x)$ 的极大值为 $f(1)=b-5$,极小值为 $f(2)=4\ln 2-8+b$.

由题意,可知 $\begin{cases}f(1)=b-5>0,\\f(2)=4\ln 2-8+b<0,\end{cases}$

解得 $5<b<8-4\ln 2$.

所以实数 b 的取值范围是 $(5,8-4\ln 2)$.

22.**解**:(1)种花区的造价为 $\frac{3a}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$,

种草区的造价为 $2a\left(\frac{\theta}{2}-\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta\right)$,

故总造价

$f(\theta)=a\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\theta}{2}-\sin\theta\cos\theta\right),0<\theta<\frac{\pi}{2}$.

(2)$f'(\theta)$

$=a\left[-\frac{1}{2}-(\cos\theta\cos\theta-\sin\theta\sin\theta)\right]$

$=a\left(-\frac{1}{2}-\cos 2\theta\right)\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$.

令 $f'(\theta)=0$,解得 $\theta=\frac{\pi}{3}$.

当 θ 变化时,$f'(\theta)$,$f(\theta)$ 的变化情况如下表:

θ	$\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$	$\frac{\pi}{3}$	$\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$
$f'(\theta)$	$-$	0	$+$
$f(\theta)$	↘	极小值	↗

故当 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 时,总造价最小,最小值为

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=a\left(\frac{7}{12}\pi-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

第 5 期

第 3 版同步周测题参考答案

一、选择题

1.C

提示:Δx 作为分母不能为 0.

2.C

提示:$f(x)=kx+b$ 在区间 $[m,n]$ 上的平均变化率为 k,所以 $a=b=2$.故选 C.

3.B

提示:由定义知,函数在点 $x=x_0$ 处的导数只与 x_0 有关.

4.D

提示:$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+2\Delta x)-f(a)}{3\Delta x}$

$=\frac{2}{3}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+2\Delta x)-f(a)}{2\Delta x}$

$=\frac{2}{3}f'(a)=1$,

则 $f'(a)=\frac{3}{2}$.

5.B

提示:$f'(x_0)=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2}$,得 $x_0=1$.

6.C

7.B

提示:$f(x)$,$g(x)$ 的常数项可以是任意的.

8.D

9.D

提示:令 $f(x)=ax-\ln(x+1)$,所以 $f'(x)=a-\frac{1}{x+1}$.所以 $f'(0)=a-1=2$.解得 $a=3$,故选 D.

10.D

提示:令 $g(x)=(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-2018)$,则 $f(x)=x\cdot g(x)$.所以 $f'(x)=x\cdot g'(x)+g(x)$.所以 $f'(0)=g(0)=(-1)\times(-2)\times(-3)\times\cdots\times(-2018)=1\times 2\times\cdots\times 2018$.

11.A

提示:因为 $f(x)=x^m+ax$ 的导数为 $f'(x)=2x+1$,所以 $m=2,a=1$,所以 $f(x)=x^2+x$,所以 $f(n)=n^2+n=n(n+1)$,所以数列 $\left\{\frac{1}{f(n)}\right\}(n\in\mathbf{N}_+)$ 的前 n 项和为:$S_n=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$,故选 A.

12.C

提示:$h'(t)=-9.8t+14.7$.由 $h'(2)=-4.9$,知烟花正以 4.9m/s 的瞬时速度下降,①错误;由 $h'(1.5)=0$,知②正确.易知抛物线 $h(t)$ 的对称轴为 $t=1.5$.由于烟花在上升过程中速度越来越小,故在 0~1.5s 内,抛物线 $h(t)$ 的切线倾斜程度越来越小,③错误;结合图像可知④正确.故②④正确.

二、填空题

13.$y=2(x-\pi)$

提示:$y'=(\sin 2x)'=\cos 2x\cdot(2x)'=2\cos 2x$,所以 $k=y'|_{x=\pi}=2$.又过点 $(\pi,0)$,所以切线方程为 $y=2(x-\pi)$.

14.2

提示:$s'=-8t+16$,由 $-8t+16=0$,得 $t=2$.

15.$\sqrt{2}-1$

提示:因为 $f'(x)=-f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin x+\cos x$,

所以 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}\Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}-1$.

16.$\frac{\sqrt{2}}{2}$

提示:易知曲线 $y=e^x$ 在点 P 处的切线与直线 $y=x$ 平行时,点 P 到直线 $y=x$ 的距离最小.由 $y'=e^x$,令 $y'=1$,得 $x=0,y=1$,故 $P(0,1)$.所以点 P 到直线 $y=x$ 的最小距离为 $\frac{|0-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

三、解答题

17.**解**:$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{2(x+\Delta x)+3}-\sqrt{2x+3}}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{[\sqrt{2(x+\Delta x)+3}]^2-(\sqrt{2x+3})^2}{\Delta x[\sqrt{2(x+\Delta x)+3}+\sqrt{2x+3}]}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{2}{\sqrt{2(x+\Delta x)+3}+\sqrt{2x+3}}$

$=\frac{1}{\sqrt{2x+3}}$.

18.**解**:(1)$y'=3^x\ln 3\cdot e^x+3^xe^x-2^x\ln 2$

$=3^xe^x(\ln 3+1)-2^x\ln 2$.

(2)$y'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'$

$=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2x}$

$=\frac{\cos x\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2x}=\frac{1}{\cos^2x}$.

19.**解**:$s'(t)=6t+1$,$s'(4)=25$,故 $v=25$m/s.

所以 $E=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}\times 10\times 25^2=3125$(J).

答:运动开始后 4s 时物体的动能为 3125J.

20.**解**:(1)曲线 $f(x)$ 在 $x=-3$ 处切线的斜率 $f'(-3)>0$,所以在 $x=-3$ 附近曲线是上升的,即函数 $f(x)$ 在 $x=-3$ 附近单调递增.

(2)曲线 $f(x)$ 在 $x=-2$ 处切线的斜率 $f'(-2)<0$,所以在 $x=-2$ 附近曲线是下降的,即函数 $f(x)$ 在 $x=-2$ 附近单调递减.

(3)曲线 $f(x)$ 在 $x=0$ 处切线的斜率 $f'(0)$ 接近于 0,所以函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 附近几乎没有变化.

(4)曲线 $f(x)$ 在 $x=1$ 处切线的斜率 $f'(1)>0$,所以在 $x=1$ 附近曲线是上升的,即函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 附近单调递增.

21.(1)**解**:$f'(x)=a-\frac{1}{(x+b)^2}$,于是 $\begin{cases}f(2)=2a+\frac{1}{2+b}=3,\\f'(2)=a-\frac{1}{(2+b)^2}=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=1,\\b=-1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=\frac{9}{4},\\b=-\frac{8}{3}.\end{cases}$

因为 $a,b\in\mathbf{Z}$,所以 $f(x)=x+\frac{1}{x-1}$.

(2)**证明**:在曲线 $y=f(x)$ 上任取一点 $\left(x_0,x_0+\frac{1}{x_0-1}\right)$.

由 $f'(x_0)=1-\frac{1}{(x_0-1)^2}$,得过此点的切线方程为

$y-\frac{x_0^2-x_0+1}{x_0-1}=\left[1-\frac{1}{(x_0-1)^2}\right](x-x_0)$.

令 $x=1$,得 $y=\frac{x_0+1}{x_0-1}$,即切线与直线 $x=1$ 的交点为 $\left(1,\frac{x_0+1}{x_0-1}\right)$;

令 $y=x$,得 $y=2x_0-1$,即切线与直线 $y=x$ 的交点为 $(2x_0-1,2x_0-1)$.

又直线 $x=1$ 与直线 $y=x$ 的交点为 $(1,1)$,

从而所围三角形的面积为

$\frac{1}{2}\left|\frac{x_0+1}{x_0-1}-1\right|\cdot|2x_0-1-1|$

$=\frac{1}{2}\left|\frac{2}{x_0-1}\right|\cdot 2|x_0-1|=2$.

所以所围三角形的面积为定值 2.

22.(1)**解**:设切点为 (x_0,y_0),则 $y_0=3x_0-x_0^3$.

又 $y'=3-3x^2$,所以切线斜率 $k=\frac{y_0-2}{x_0-2}=3-3x_0^2$,即 $3x_0-x_0^3-2=(x_0-2)(3-3x_0^2)$,解得 $x_0=1$ 或 $x_0=1\pm\sqrt{3}$,相应的斜率 $k=0$ 或 $k=-9\pm 6\sqrt{3}$.所以切线方程为 $y=2$ 或 $y=(-9+6\sqrt{3})x+20-12\sqrt{3}$ 或 $y=(-9-6\sqrt{3})x+20+12\sqrt{3}$.

(2)**证明**:与曲线 S 相切于点 (x_0,y_0) 的切线方程可设为 $y-y_0=(3-3x_0^2)(x-x_0)$,与曲线 S 的方程联立并消去 y,得 $3x-x^3-y_0=3(1-x_0^2)(x-x_0)$,

即 $3x-x^3-(3x_0-x_0^3)=3(1-x_0^2)(x-x_0)$,

化简得 $(x-x_0)(x^2+xx_0-2x_0^2)=0$.①

对于 $x^2+xx_0-2x_0^2=0$,$\Delta=x_0^2+8x_0^2=9x_0^2>0$,

所以①式至少有两个解.

所以与曲线 S 切于点 $(x_0,y_0)(x_0\neq 0)$ 的切线与 S 至少还有一个交点.

第 6 期

第 3 版同步周测题参考答案

一、选择题

1.D 2.B 3.D 4.B 5.B 6.C 7.D

8.D

提示:由导函数图像可知,导数先是越来越大,则 $f(x)$ 的图像越来越"陡峭";随后导数越来越小,则 $f(x)$ 的图像越来越"平缓".故选 D.

9.C

提示:$f'(x)=3ax^2+3$.若函数$f(x)$存在极值,则方程$3ax^2+3=0$有解,则$x^2=-\frac{3}{3a}>0$,所以$a<0$.

10.D

提示:函数$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$.

令$f'(x)=\frac{1}{3}-\frac{1}{x}=0$,解得$x=3$.

当$x\in(0,3)$时,$f'(x)<0$,$f(x)$是减函数;当$x\in(3,+\infty)$时,$f'(x)>0$,$f(x)$是增函数.

故$f(x)$有极小值$f(3)=1-\ln3<0$.

又$f(1)=\frac{1}{3}>0$,$f(6)=2-\ln6>0$,

故$f(x)$在$(0,3)$,$(3,+\infty)$内均有零点.

11.A

提示:因为$f(x)$是**R**上的增函数,所以$f'(x)>0$在**R**上恒成立.

$g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)$.

当$x<0$时,由$f(x)<0$,得$g'(x)>0$,故$g(x)$在$(-\infty,0)$上单调递增;

当$x>0$时,$g'(x)$的符号不确定,故$g(x)$的单调性不确定.故选A.

12.C

提示:由题意可知,$\exists x\in\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$,使得$m<x-e^x\sqrt{x}$成立.

令$h(x)=x-e^x\sqrt{x}$,

则$h'(x)=1-e^x\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$.

当$x\in\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$时,$e^x\geqslant e^{\frac{1}{4}}>1$,

$\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\geqslant2\sqrt{\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\sqrt{2}$,从而$h'(x)<0$.

故$h(x)$在$\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$上为减函数.

所以$h(x)\leqslant h\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{4}}$.

所以$m<\frac{1}{4}-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{4}}$.

二、填空题

13.$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$　14.$-2,-\frac{1}{2}$

15.$\left[\frac{1}{3},+\infty\right)$

16.$\frac{32\sqrt{3}}{3}$

提示:设剪成的小正三角形的边长为x,则

$$S=\frac{(3-x)^2}{\frac{1}{2}(x+1)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(1-x)}=\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{(3-x)^2}{1-x^2}(0<x<1),$$

$$S'=\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{(2x-6)\cdot(1-x^2)-(3-x)^2\cdot(-2x)}{(1-x^2)^2}=\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{-2(3x-1)(x-3)}{(1-x^2)^2}.$$

令$S'=0$,$0<x<1$,解得$x=\frac{1}{3}$.

当$x\in\left(0,\frac{1}{3}\right)$时,$S'<0$;

当$x\in\left(\frac{1}{3},1\right)$时,$S'>0$.

故当$x=\frac{1}{3}$时,S取得最小值,最小值是$\frac{32\sqrt{3}}{3}$.

三、解答题

17.**解**:$f'(x)=\frac{b(x^2-1)-bx\cdot2x}{(x^2-1)^2}=-\frac{b(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$.

当$b>0$时,$f'(x)<0$,

故函数$f(x)$在$(-1,1)$上是减函数;

当$b<0$时,$f'(x)>0$,

故函数$f(x)$在$(-1,1)$上是增函数.

18.**解**:(1)$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$.

令$f'(x)<0$,得$-1<x<3$.

所以$f(x)$的单调递减区间是$(-1,3)$.

(2)结合(1),可得$f(x)$,$f'(x)$的变化情况如下表:

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	16	↘	−16	↗

所以$f(x)$的极大值为$f(-1)=16$,极小值为$f(3)=-16$.

19.**解**:(1)依题意,铁路AM上的运费为$2(50-x)$,

公路MC上的运费为$4\sqrt{100+x^2}$,

则由A到C的总运费为

$y=2(50-x)+4\sqrt{100+x^2}(0\leqslant x\leqslant50)$.

(2)$y'=-2+\frac{4x}{\sqrt{100+x^2}}(0\leqslant x\leqslant50)$.

令$y'=0$,

解得$x_1=\frac{10}{\sqrt{3}}$,$x_2=-\frac{10}{\sqrt{3}}$(舍).

当$0\leqslant x<\frac{10}{\sqrt{3}}$时,$y'<0$,

当$50\geqslant x>\frac{10}{\sqrt{3}}$时,$y'>0$.

故当$x=\frac{10}{\sqrt{3}}$时,y取得最小值,

即当在距离点B为$\frac{10\sqrt{3}}{3}$时的点M处修筑公路至C时总运费最省.

20.**解**:设圆柱的底面半径为r,高为h,则由$\pi r^2h=V$,得$h=\frac{V}{\pi r^2}$.设造价为$f(r)$,则$f(r)=2\pi r^2a+2\pi rhb=2\pi r^2a+2\pi rb\cdot\frac{V}{\pi r^2}=2\pi r^2a+\frac{2bV}{r}$.

令$f'(r)=4\pi ar-\frac{2bV}{r^2}=0$,得$r=\sqrt[3]{\frac{bV}{2\pi a}}$.

当$r<\sqrt[3]{\frac{bV}{2\pi a}}$时,$f'(r)<0$;

当$r>\sqrt[3]{\frac{bV}{2\pi a}}$时,$f'(r)>0$.

故当$r=\sqrt[3]{\frac{bV}{2\pi a}}$时,$f(r)$取得极小值.

此时$\frac{2r}{h}=\frac{2r\cdot\pi r^2}{V}=\frac{2\pi}{V}\cdot\frac{bV}{2\pi a}=\frac{b}{a}$.

答:锅炉的底面直径与高的比为$\frac{b}{a}$时,造价最低.

21.**解**:由$g(x)$的图像,可知$g(x)$的极大值为$\frac{5}{6}$.

由$g'(x)$的图像,可知$g'(x)=0$的两根是$x_1=1$,$x_2=2$,且$x=1$是$g(x)$的极大值点.

所以$g(1)=\frac{5}{6}$.

又$g'(x)=3ax^2+2bx+c$,

所以$\begin{cases}1+2=-\frac{2b}{3a},\\1\times2=\frac{c}{3a},\\a+b+c=\frac{5}{6},\end{cases}$解得$\begin{cases}a=\frac{1}{3},\\b=-\frac{3}{2},\\c=2.\end{cases}$

所以$g(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x$,

$g'(x)=x^2-3x+2$,

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\left(\frac{3}{2}+m\right)x^2+(2+3m)x-2m$.

若$f(x)$在$[2,+\infty)$上单调递增,

则$f'(x)=x^2-(3+2m)x+3m+2\geqslant0$在$[2,+\infty)$上恒成立.

因为$\Delta=(3+2m)^2-4(3m+2)=4m^2+1>0$,

所以$\begin{cases}\frac{3+2m}{2}\leqslant2,\\f'(2)\geqslant0,\end{cases}$解得$m\leqslant0$.

所以实数m的取值范围是$(-\infty,0]$.

22.(1)**解**:$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,

$f'(x)=a+\frac{1}{x}$.

若$f(x)$在区间$[1,2]$上为增函数,则$f'(x)\geqslant0$在$[1,2]$上恒成立,即$a\geqslant-\frac{1}{x}$在$x\in[1,2]$上恒成立,则$a\geqslant-\frac{1}{2}$.

故实数a的取值范围为$\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$.

(2)**证明**:当$a=-e$时,$f(x)=-ex+\ln x$,

$f'(x)=-e+\frac{1}{x}=\frac{-ex+1}{x}$.

令$f'(x)>0$,得$0<x<\frac{1}{e}$;

令$f'(x)<0$,得$x>\frac{1}{e}$.

所以$f(x)$在$\left(0,\frac{1}{e}\right)$上单调递增,在$\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$上单调递减.

所以$[f(x)]_{max}=f\left(\frac{1}{e}\right)=-e\times\frac{1}{e}+\ln\frac{1}{e}=-2$.所以$f(x)\leqslant-2$,即$f(x)+2\leqslant0$.

(3)**解**:由(2)知,$f(x)\leqslant-2$,

所以$|f(x)|\geqslant2$.

设$g(x)=\frac{\ln x}{x}+\frac{3}{2}$,

则$x\in(0,+\infty)$,$g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$.

令$g'(x)>0$,得$0<x<e$,此时$g(x)$单调递增;令$g'(x)<0$,得$x>e$,此时$g(x)$单调递减.

所以$[g(x)]_{max}=g(e)=\frac{1}{e}+\frac{3}{2}<2$.

所以$g(x)<2$.

所以$|f(x)|>g(x)$,即$|f(x)|>\frac{\ln x}{x}+\frac{3}{2}$.所以方程$|f(x)|=\frac{\ln x}{x}+\frac{3}{2}$无实数解.

第7期

第3版同步周测题参考答案

一、选择题

1.A

2.B

提示:定积分与积分变量无关,故$\int_a^b f(x)dx-\int_a^b f(t)dt=0$.

3.A

提示:原式$=(-\cos x-\sin x)\big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\cos\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{2}+\cos0+\sin0=0$.

4.C

提示:由定积分的几何意义$f(x)\geqslant0$时,$\int_a^b f(x)dx$表示面积S,当$f(x)\leqslant0$时,$\int_a^b f(t)dx=-S$.故选C.

5.A

提示:由定积分的几何意义易知$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$为圆$x^2+y^2=a^2$的面积的$\frac{1}{4}$,故选A.

6.C

提示:分别解方程组$\begin{cases}y=2,\\y=\ln x,\end{cases}\begin{cases}y=\ln x,\\x=e,\end{cases}$可得$\begin{cases}x=e^2,\\y=2,\end{cases}\begin{cases}x=e,\\y=1,\end{cases}$所以积分区间为$[1,2]$.

7.D

提示:由定积分性质(3)求$f(x)$在区间$[0,4]$上的定积分来实现,显然D正确.

8.D

提示:$\int_1^a\left(2x+\frac{1}{x}\right)dx=(x^2+\ln x)\big|_1^a=a^2+\ln a-1=3+\ln2$,所以$a=2$.

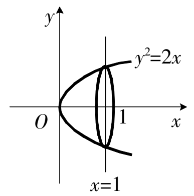
9.D

提示:$\int_3^6\frac{3}{\sqrt{6t}}dt=\sqrt{6t}\big|_3^6=6-3\sqrt{2}$,故选D.

10.D

提示:如图所示,因为$y^2=2x$,所以$[f(x)]^2=2x$,$x\in[0,1]$,

所以$V=\pi\int_0^1[f(x)]^2dx=\pi\int_0^1 2xdx=\pi x^2\big|_0^1=\pi$.



(第10题图)

11.C

12.B

提示:由题意,得$S_{阴}=2\int_0^1(e-e^x)dx=2(ex-e^x)\big|_0^1=2$,由几何概型得所求概率$P=1-\frac{S_{阴}}{S_{正}}=1-\frac{2}{e^2}$.

二、填空题

13.$\frac{8}{3}$

提示:因为$\int_0^1\frac{1}{2}f(x)dx=1$,

所以$\int_0^1 f(x)dx=2$,

因为$\int_{-1}^0 3f(x)dx=2$,

所以$\int_{-1}^0 f(x)dx=\frac{2}{3}$,

所以$\int_{-1}^1 f(x)dx=\int_{-1}^0 f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx=2+\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$.

14.152m

提示:路程$s=\int_0^6(18t-3t^2)dt+\int_6^8(3t^2-18t)dt=(9t^2-t^3)\big|_0^6+(t^3-9t^2)\big|_6^8=9\times6^2-6^3+8^3-9\times8^2-6^3+9\times6^2=152(m)$.

15.1

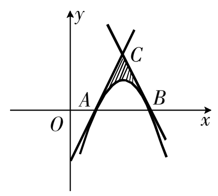
提示:因为$f(1)=\lg1=0$,且$\int_0^a 3t^2dt=t^3\big|_0^a=a^3-0^3=a^3$,所以$f(0)=0+a^3=1$,所以$a=1$.

16.$\frac{2}{3}$

提示:由$y'=-2x+4$得在点A,B处切线的斜率分别为2和-2,则切线方程分别为$y=2x-2$和$y=-2x+6$.

由$\begin{cases}y=2x-2,\\y=-2x+6,\end{cases}$得两切线交点坐标为$C(2,2)$,

所以$S=S_{\triangle ABC}-\int_1^3(-x^2+4x-3)dx=\frac{1}{2}\times2\times2-\left(-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x\right)\big|_1^3=2-\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$.



(第16题图)

三、解答题

17.**解**:(1)$\int_1^2\frac{1}{x(x+1)}dx$

$=\int_1^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx$

$=[\ln x-\ln(x+1)]\big|_1^2$

$=\ln\frac{4}{3}$.

(2)$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos x+2^x)dx$

$=\left(\sin x+\frac{2^x}{\ln2}\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$

$=2+\frac{1}{\ln2}\left(2^{\frac{\pi}{2}}-2^{-\frac{\pi}{2}}\right)$.

18.**解**:因为$f(1)=4$,

所以$a+b+c=4$.　①

$f'(x)=2ax+b$,

因为$f'(1)=1$,所以$2a+b=1$,　②

$\int_0^1 f(x)dx=\left(\frac{1}{3}ax^3+\frac{1}{2}bx^2+cx\right)\big|_0^1=\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b+c=\frac{19}{6}$,　③

由①②③,可得$a=-1$,$b=3$,$c=2$.

所以$f(x)=-x^2+3x+2$.

19.**解**:由题意,可知$\int_0^{x_0}e^xdx=\frac{1}{2}\int_0^4 e^xdx$,

即$e^{x_0}-1=\frac{1}{2}(e^4-1)$,

所以$e^{x_0}=\frac{1}{2}(e^4+1)$,

故$x_0=\ln\frac{e^4+1}{2}$.

20.**解**:$V=4\int_0^6(6t-t^2)dt$

$=4\left(3t^2-\frac{1}{3}t^3\right)\big|_0^6$

$=4\left(3\times6\times6-\frac{1}{3}\times6\times6\times6\right)$

$=144(cm^3)$.

答:从$t=0$到$t=6s$这段时间流出的水量为$144cm^3$.

21.**解**:(1)设速度-时间函数式为$v(t)=v_0+at$,将点$(0,40)$,$(6,-20)$的坐标分别代入,得$v_0=40$,$a=-10$,所以$v(t)=40-10t$.

令$v(t)=0\Rightarrow40-10t=0\Rightarrow t=4$,

物体从0s运动到距离水平地面的最大值为

$s=\int_0^4(40-10t)dt=(40t-5t^2)\big|_0^4=80(m)$.

(2)由上述可知,物体在0~6s内的位移为

$s=\int_0^6(40-10t)dt=(40t-5t^2)\big|_0^6=60(m)$.

(3)由上述可知,物体在0~6s内的路程为

$s=\int_0^6|40-10t|dt$

$=\int_0^4(40-10t)dt-\int_4^6(40-10t)dt$

$=(40t-5t^2)-(40t-5t^2)\big|_4^6$

$=80+20=100(m)$.