第 4 期

第 2、3 版章节测试题参考答案

一、选择题

1.B

提示:设 $n\in\mathbf{N}_+$,则数字 n 共有 n个,所以 $\frac{n(n+1)}{2}\leqslant 100$,即 $n(n+1)\leqslant 200$,又因为 $n\in\mathbf{N}_+$,所以 $n=13$,到第 13 个 13 时共有 $\frac{13\times 14}{2}=91$ 项,从第 92 项开始为 14,故第 100 项为 14.

2.D

3.C

提示:因为 $\sqrt{2}-\sqrt{3}<0$,$\sqrt{6}-\sqrt{7}<0$,所以原不等式只需证 $\sqrt{2}+\sqrt{7}<\sqrt{3}+\sqrt{6}$,所以只需证$(\sqrt{2}+\sqrt{7})^2<(\sqrt{3}+\sqrt{6})^2$,故选 C.

4.B

5.C

提示:两数和为 2 的有 1 个,和为 3 的有 2 个,和为 4 的有 3 个,和为 5 的有 4 个,和为 6 的有 5 个,和为 7 的有 6个,前面共有 21 个,$3\otimes 5$ 是和为 8 的第 3 项,所以 $3\otimes 5$ 为第 24 项,故选 C.

6.B

提示:据已知可转化为 $\frac{1\times\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}>\frac{127}{64}$,整理得 $2^n>128$,解得 $n>7$,故初始值为 $n=8$.

7.C

提示:正三角形的边对应正四面体的面,即正三角形表示的侧面,所以边的中点对应的就是正三角形的中心.

8.C

提示:垂直于同一个平面的两条直线平行.

9.A

提示:三棱柱有 0 个对角面;四棱柱有 2 个对角面$(0+2=0+(3-1))$;五棱柱有 5 个对角面$(2+3=2+(4-1))$;六棱柱有 9 个对角面$(5+4=5+(5-1))$.

猜想:若 k 棱柱有 $f(k)$个对角面,则$(k+1)$棱柱有 $f(k)+k-1$ 个对角面.故选A.

10.C

提示:因为 $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$,$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$,$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)$,

依此类推可得:$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}+\frac{1}{110}+\frac{1}{132}+\frac{1}{156}=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{13}\right)$,所以 $\frac{1}{m}=\frac{1}{13}$,$\frac{1}{n}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{1}{20}$,$m=13$,$n=20$,即 $1\leqslant x\leqslant 13$,$1\leqslant y\leqslant 20$.又 $\frac{x+y+2}{x+1}=1+\frac{y+1}{x+1}$,把 $\frac{y+1}{x+1}$ 看成点(x,y),$(-1,-1)$连线的斜率,结合 $m\leqslant n$,$m,n\in\mathbf{N}_+$,在满足条件的点中,$(13,1)$,$(-1,-1)$连线的斜率最小,为 $\frac{1+1}{13+1}=\frac{1}{7}$,故 $\frac{x+y+2}{x+1}$ 最小值为 $\frac{8}{7}$.故选 C.

11.A

提示:当 $n=k$ 时式子为 $4^{2k-1}+3^{k+1}$,则 $n=k+1$ 时,式子为 $4^{2k+1}+3^{k+2}=4^2\times 4^{2k-1}+3\times 3^{k+1}=16\times(4^{2k-1}+3^{k+1})-13\times 3^{k+1}$,显然 A 正确,故选 A.

12.B

提示:由数据可知,进入立定跳远决赛的 8 人为 1~8 号,所以进入 30 秒跳绳决赛的 6 人从 1~8 号里产生.数据排序后可知 3 号,6 号,7 号必定进入 30 秒跳绳决赛,则得分为 63,a,60,63,$a-1$ 的 5 人中有 3 人进入 30 秒跳绳决赛.若 1 号,5 号学生未进入 30 秒跳绳决赛,则 4 号学生就会进入决赛,与事实矛盾,所以 1 号,5 号学生必进入 30 秒跳绳决赛.故选 B.

二、填空题

13.$2(a^2+b^2+c^2)\geqslant 2ab+2bc+2ac$,$(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2\geqslant 0$

14.$\frac{8}{65}$

提示:观察猜想可得:$a_n=\frac{n}{n^2+1}$,所以当输入数据 8 时,输出数据为 $\frac{8}{8^2+1}=\frac{8}{65}$.

15.$\frac{a^3}{8}$

16.$\frac{x}{(2^n-1)x+2^n}$

提示:观察 $f_1(x)$、$f_2(x)$、$f_3(x)$、$f_4(x)$ 的表达式可见,$f_n(x)$的分子为 x,分母中 x 的系数比常数项小 1,常数项依次为2,4,8,16,…,2^n.故 $f_n(x)=\frac{x}{(2^n-1)x+2^n}$.

三、解答题

17.**证明**:假设 $\frac{1}{4}$ 在 $f(x)$的定义域内,

因为 $f(xy)=f(x)+f(y)$,

所以 $f\left(\frac{1}{4}\right)=f\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=2$.

又 $f(x)$的值域为$[-1,1]$,$2\notin[-1,1]$,

所以 $\frac{1}{4}$ 不在函数 $f(x)$的定义域内.

18.**解**:$f(a)+f(c)>2f(b)$.

证明如下:因为 a,b,c 是互不相等的正数,

所以 $a+c>2\sqrt{ac}$.

因为 $b^2=ac$,所以 $ac+2(a+c)>b^2+4b$.

即 $ac+2(a+c)+4>b^2+4b+4$.

从而$(a+2)(c+2)>(b+2)^2$.

因为 $f(x)=\log_2 x$ 是增函数,

所以 $\log_2[(a+2)(c+2)]>\log_2(b+2)^2$.

即 $\log_2(a+2)+\log_2(c+2)>2\log_2(b+2)$.

故 $f(a)+f(c)>2f(b)$.

19.**证明**:作斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的直截面 DEF,分别交 AA_1,BB_1,CC_1 于点 D,F,E,则$\angle DFE$ 为平面 ABB_1A_1 与平面 BCC_1B_1 所成角.在$\triangle DEF$ 中有余弦定理:$DE^2=DF^2+EF^2-2DF\cdot EF\cos\angle DFE$,两边同乘以 AA_1^2,得 $DE^2\cdot AA_1^2=DF^2\cdot AA_1^2+EF^2\cdot AA_1^2-2DF\cdot AA_1\cdot EF\cdot AA_1\cos\angle DFE$.

即 $S^2_{AA_1C_1C}=S^2_{ABB_1A_1}+S^2_{BCC_1B_1}-2S_{ABB_1A_1}\cdot S_{BCC_1B_1}\cdot\cos\angle DFE$.

20.**证明**:要证明 $\frac{a}{a+m}+\frac{b}{b+m}>\frac{c}{c+m}$,只需证明 $\frac{a}{a+m}+\frac{b}{b+m}-\frac{c}{c+m}>0$ 即可.

因为 $\frac{a}{a+m}+\frac{b}{b+m}-\frac{c}{c+m}$

$=\frac{a(b+m)(c+m)+b(a+m)(c+m)-c(a+m)(b+m)}{(a+m)(b+m)(c+m)}$,

因为 $a>0,b>0,c>0,m>0$,

所以$(a+m)(b+m)(c+m)>0$,

因为 $a(b+m)(c+m)+b(a+m)(c+m)-c(a+m)(b+m)=abc+abm+acm+am^2+abc+abm+bcm+bm^2-abc-bcm-acm-cm^2=2abm+am^2+abc+bm^2-cm^2=2abm+abc+(a+b-c)m^2$,

因为$\triangle ABC$ 中任意两边之和大于第三边,

所以 $a+b-c>0$,所以$(a+b-c)m^2>0$,

所以 $2abm+abc+(a+b-c)m^2>0$,

所以 $\frac{a}{a+m}+\frac{b}{b+m}>\frac{c}{c+m}$.

21.(1)**证明**:$\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$=\frac{\tan x+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan x\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{1+\tan x}{1-\tan x}$.

(2)**解**:$f(x)$是以 4 为一个周期的周期函数.

证明如下:因为 $f(x+2)=f((x+1)+1)=\frac{1+f(x+1)}{1-f(x+1)}=\frac{1+\frac{1+f(x)}{1-f(x)}}{1-\frac{1+f(x)}{1-f(x)}}=-\frac{1}{f(x)}$,

所以 $f(x+4)=f((x+2)+2)=-\frac{1}{f(x+2)}=f(x)$,

所以 $f(x)$是周期函数.

22.**解**:由 $x_1=\frac{1}{2}$ 及 $x_{n+1}=\frac{1}{1+x_n}$,得 $x_2=\frac{2}{3}$,$x_4=\frac{5}{8}$,$x_6=\frac{13}{21}$,

由 $x_2>x_4>x_6$ 猜想:数列$\{x_{2n}\}$是递减数列.

下面用数学归纳法证明:

(1)当 $n=1$ 时,已证命题成立.

(2)假设当 $n=k$ 时命题成立,即 $x_{2k}>x_{2k+2}$,那么 $x_{2k+2}-x_{2k+4}=\frac{1}{1+x_{2k+1}}-\frac{1}{1+x_{2k+3}}=\frac{x_{2k+3}-x_{2k+1}}{(1+x_{2k+1})(1+x_{2k+3})}=\frac{\frac{1}{1+x_{2k+2}}-\frac{1}{1+x_{2k}}}{(1+x_{2k+1})(1+x_{2k+3})}=\frac{x_{2k}-x_{2k+2}}{(1+x_{2k})(1+x_{2k+1})(1+x_{2k+2})(1+x_{2k+3})}>0$,

即 $x_{2(k+1)}>x_{2(k+1)+2}$,

也就是说,当 $n=k+1$ 时命题也成立.

结合(1)和(2)知命题成立.

第 1 期

第 3 版同步周测题参考答案

一、选择题

1.C

2.C

3.B

4.D

5.B

6.B

7.A

提示:只有①③正确.

对于②,式子$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$的左边表示与 $\boldsymbol{c}$ 共线的向量,而右边表示与 $\boldsymbol{a}$ 共线的向量,二者不一定相等;

对于④,应该是$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$;

对于⑤,当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 都垂直时,不能得出 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$.

8.B

提示:1=1,3=1+2,6=1+2+3,10=1+2+3+4,…,第n个三角形数为$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

9.A

提示:如图所示,设双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$,

则 $F(-c,0)(c>0)$,$B(0,b)$,$A(a,0)$,

所以$\overrightarrow{FB}=(c,b)$,$\overrightarrow{AB}=(-a,b)$.

又因为$\overrightarrow{FB}\perp\overrightarrow{AB}$,

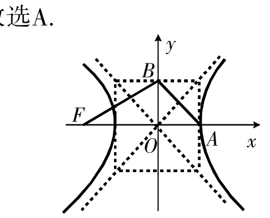
所以$\overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{AB}=b^2-ac=0$,

所以 $c^2-a^2-ac=0$,

所以 $e^2-e-1=0$,

所以 $e=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 或 $e=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$(舍去).

故选A.



(第 9 题图)

10.B

11.D

提示:由于甲不知自己的成绩,所以乙、丙一个优秀一个良好,因此乙知道丙,就知道自己成绩,同样丁知道甲成绩,就知道自己成绩,故选 D.

12.A

二、填空题

13.凸 n 边形的内角和是$(n-2)\times 180°$$(n\geqslant 3,n\in\mathbf{N}_+)$

14.$\frac{4}{3}n(n+1)$

15.41

提示:根据题意,由于 $\sqrt{2+\frac{2}{3}}=2\sqrt{\frac{2}{3}}$,$\sqrt{3+\frac{3}{8}}=3\sqrt{\frac{3}{8}}$,$\sqrt{4+\frac{4}{15}}=4\sqrt{\frac{4}{15}}$,…,那么可知 $\sqrt{6+\frac{a}{b}}=6\sqrt{\frac{a}{b}}$,$a=6$,$b=6\times 6-1=35$,所以 $a+b=41$.

16.πab;$\frac{x_1}{a^2}\cdot x+\frac{y_1}{b^2}\cdot y=1$

提示:当椭圆的离心率 e 趋近于 0时,椭圆趋近于圆,此时 a,b 都趋近于圆的半径 r,故由圆的面积 $S=\pi r^2=\pi\cdot r\cdot r$,猜想椭圆面积 $S_{椭}=\pi\cdot a\cdot b$.而由切线方程 $x_0\cdot x+y_0\cdot y=r^2$ 变形得 $\frac{x_0}{r^2}\cdot x+\frac{y_0}{r^2}\cdot y=1$,则过椭圆上一点 $P(x_1,y_1)$的椭圆的切线方程为 $\frac{x_1}{a^2}\cdot x+\frac{y_1}{b^2}\cdot y=1$.

三、解答题

17.**解**:点 $P(a,b)$在$\odot C$:$x^2+y^2=r^2$ 上时,直线 $ax+by=r^2$ 与$\odot C$ 相切;点 P 在$\odot C$ 内时,直线 $ax+by=r^2$ 与$\odot C$ 相离;点 P 在$\odot C$ 外部时,直线 $ax+by=r^2$ 与$\odot C$ 相交.

18.**解**:因为 $S_n=2n-a_n$,$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$,$n\in\mathbf{N}_+$,

所以,当 $n=1$ 时,有 $a_1=2-a_1$,

解得 $a_1=1=2-\frac{1}{2^0}$;

当 $n=2$ 时,有 $a_1+a_2=2\times 2-a_2$,

解得 $a_2=\frac{3}{2}=2-\frac{1}{2^1}$;

当 $n=3$ 时,有 $a_1+a_2+a_3=2\times 3-a_3$,

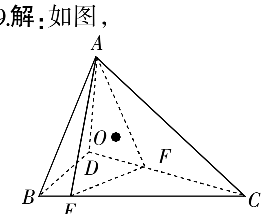
解得 $a_3=\frac{7}{4}=2-\frac{1}{2^2}$;

当 $n=4$ 时,有 $a_1+a_2+a_3+a_4=2\times 4-a_4$,

解得 $a_4=\frac{15}{8}=2-\frac{1}{2^3}$.

猜想 $a_n=2-\frac{1}{2^{n-1}}(n\in\mathbf{N}_+)$.

19.**解**:如图,



(第 19 题图)

截面 AEF 经过四面体 $ABCD$ 的内切球(与四个面都相切的球)的球心 O,且与 BC,DC 分别交于 E,F,若截面将四面体分为体积相等的两部分,则四棱锥 $A-BEFD$ 与三棱锥 $A-EFC$ 的表面积相等.

20.**解**:因为 $f(x)=\frac{1}{3^x+\sqrt{3}}$,

所以 $f(0)+f(1)=\frac{1}{3^0+\sqrt{3}}+\frac{1}{3^1+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,

$f(-1)+f(2)=\frac{1}{3^{-1}+\sqrt{3}}+\frac{1}{3^2+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,

$f(-2)+f(3)=\frac{1}{3^{-2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{3^3+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

归纳猜想一般性结论:$f(-x)+f(x+1)=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

证明如下:$f(-x)+f(x+1)$

$=\frac{1}{3^{-x}+\sqrt{3}}+\frac{1}{3^{x+1}+\sqrt{3}}$

$=\frac{3^x}{1+\sqrt{3}\cdot 3^x}+\frac{1}{3^{x+1}+\sqrt{3}}$

$=\frac{\sqrt{3}\cdot 3^x}{\sqrt{3}+3^{x+1}}+\frac{1}{3^{x+1}+\sqrt{3}}$

$=\frac{\sqrt{3}\cdot 3^x+1}{\sqrt{3}+3^{x+1}}+\frac{\sqrt{3}\cdot 3^x+1}{\sqrt{3}(1+\sqrt{3}\cdot 3^x)}$

$=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

21.(1)**证明**:如图1所示,由题意,得 $AD^2=BD\cdot DC$,$AB^2=BD\cdot BC$,$AC^2=BC\cdot DC$,

所以 $\frac{1}{AD^2}=\frac{1}{BD\cdot DC}=\frac{BC^2}{BD\cdot BC\cdot DC\cdot BC}=\frac{BC^2}{AB^2\cdot AC^2}$.

又$BC^2=AB^2+AC^2$,

所以 $\frac{1}{AD^2}=\frac{AB^2+AC^2}{AB^2\cdot AC^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}$.

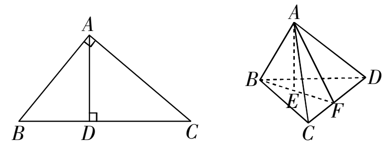


图1 图2

(第 21 题图)

(2)**解**:在四面体$ABCD$中,AB,AC,AD两两垂直,$AE\perp$平面BCD,则 $\frac{1}{AE^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}+\frac{1}{AD^2}$.理由如下:

如图2,连接BE并延长,交CD于点F,连接AF.

因为$AB\perp AC$,$AB\perp AD$,所以$AB\perp$平面ACD,

又$AF\subsetneqq$平面ACD,所以$AB\perp AF$.

在$\mathrm{Rt}\triangle ABF$中,$AE\perp BF$,所以 $\frac{1}{AE^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AF^2}$.

在$\mathrm{Rt}\triangle ACD$中,$AF\perp CD$,所以 $\frac{1}{AF^2}=\frac{1}{AC^2}+\frac{1}{AD^2}$,

所以 $\frac{1}{AE^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}+\frac{1}{AD^2}$.故猜想正确.

22.(1)**解**:已知 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}$,$a_1+a_2+\cdots+a_n=1$,

求证:$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\geqslant\frac{1}{n}$.

(2)**证明**:构造函数 $f(x)=(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+\cdots+(x-a_n)^2$

$=nx^2-2(a_1+a_2+\cdots+a_n)x+a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$

$=nx^2-2x+a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$.

因为对一切 $x\in\mathbf{R}$,都有 $f(x)\geqslant 0$,

所以 $\Delta=4-4n(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)\leqslant 0$,

所以 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\geqslant\frac{1}{n}$.

①
第 2 期
第 3 版同步周测题参考答案

一、选择题

1.B

提示：从证明过程来看，是从已知条件入手，经过推导得出结论，符合综合法的证明思路.

2.C

3.D

提示：A，与两相互垂直的直线平行的平面的位置关系不能确定；B，平面内的一条直线与另一个平面的交线垂直，这两个平面的位置关系不能确定；C，这两个平面有可能平行或重合；D 是成立的，故选 D.

4.C

5.B

提示：$q=\sqrt{ab+\frac{mad}{n}+\frac{nbc}{m}+cd}$

$\geqslant\sqrt{ab+2\sqrt{abcd}+cd}$

$=\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$

$=p$.

6.C

提示：选项 A 中命题条件较少，不足以正面证明；选项 B 中命题是否定性命题，可以用反证法证明；选项 D 中命题是至少性命题，可以用反证法证明.选项 C 不适合用反证法证明.故选 C.

7.B

8.B

9.C

提示：假设 $c/\!/b$，而由 $c/\!/a$，可得 $a/\!/b$，这与 a，b 异面矛盾，故 c 与 b 不可能是平行直线.故选 C.

10.B

提示：分 $\triangle ABC$ 的直线只能过一个顶点且与对边相交，如直线 AD(点 D 在 BC 上)，则 $\angle ADB+\angle ADC=\pi$，若 $\angle ADB$ 为钝角，则 $\angle ADC$ 为锐角.而 $\angle ADC>\angle BAD$，$\angle ADC>\angle ABD$，$\triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 不可能相似，与已知不符，只有当 $\angle ADB=\angle ADC=\angle BAC=90°$时，才符合题意.

11.C

提示：由于 a，b，c 不全相等，则 $a-b$，$b-c$，$c-a$ 中至少有一个不为 0，故①正确；②显然成立；令 $a=2$，$b=3$，$c=5$，满足 $a\neq c$，$b\neq c$，$a\neq b$，故③错.

12.B

提示：因为 $x>0$，$y>0$，$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}=1$，所以 $x+\frac{y}{4}=\left(x+\frac{y}{4}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{4}{y}\right)=2+\frac{y}{4x}+\frac{4x}{y}\geqslant 2+2\sqrt{\frac{y}{4x}\cdot\frac{4x}{y}}=4$，等号在 $y=4x$，即 $x=2$，$y=8$ 时成立，所以 $x+\frac{y}{4}$的最小值为 4，要使不等式 $m^2-3m>x+\frac{y}{4}$有解，应有 $m^2-3m>4$，所以 $m<-1$ 或 $m>4$，故选 B.

二、填空题

13.$a\neq 1$ 或 $b\neq 1$

14.④

提示：因为$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$，所以$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}$，所以$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$，所以四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

15.$AC\perp BD$

提示：从结论出发，找一个使 $A_1C\perp B_1D_1$ 成立的充分条件.因而可以是：$AC\perp BD$ 或四边形 $ABCD$ 为正方形.

16.$\left[-2,\frac{3}{2}\right)$

提示：当 n 为偶数时，$a<2-\frac{1}{n}$，而 $2-\frac{1}{n}\geqslant 2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，所以 $a<\frac{3}{2}$，

当 n 为奇数时，$a>-2-\frac{1}{n}$，而$-2-\frac{1}{n}<-2$，所以 $a\geqslant -2$.

综上可得，$-2\leqslant a<\frac{3}{2}$.

三、解答题

17.**证明**：由题意得$\overrightarrow{AB}=(-4,4)$，$\overrightarrow{AC}=(5,5)$，要证明$\triangle ABC$是直角三角形，只需证明$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$，也就是证明$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，由于$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(-4,4)\cdot(5,5)=0$，故原命题成立.

18.**证明**：假设 $\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$ 成立，则 $\frac{2}{b}=\frac{a+c}{ac}=\frac{2b}{ac}$，所以 $b^2=ac$.

又因为 $b=\frac{a+c}{2}$，所以$\left(\frac{a+c}{2}\right)^2=ac$，即 $a^2+c^2=2ac$，即$(a-c)^2=0$，

所以 $a=c$，这与 a，b，c 两两不相等矛盾，

所以$\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$不成立.

19.**证明**：因为 $a^3-b^3=a^2-b^2$ 且 $a\neq b$，

所以 $a^2+ab+b^2=a+b$，

由$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2>a^2+ab+b^2$，得$(a+b)^2>a+b$，

又 $a+b>0$，所以 $a+b>1$.

要证 $a+b<\frac{4}{3}$，即证 $3(a+b)<4$，

又因为 $a+b>0$，

所以只需证明 $3(a+b)^2<4(a+b)$，

又 $a+b=a^2+ab+b^2$，

即证 $3(a+b)^2<4(a^2+ab+b^2)$，也就是证明$(a-b)^2>0$.

因为 a、b 是不相等的两个正数，故$(a-b)^2>0$ 成立.

故 $a+b<\frac{4}{3}$成立.

综上，得 $1<a+b<\frac{4}{3}$.

20.**证明**：要证原式，只需证 $\frac{a+b+c}{a+b}+\frac{a+b+c}{b+c}=3$，

即证$\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}=1$，

即只需证 $\frac{bc+c^2+a^2+ab}{ab+b^2+ac+bc}=1$.

而由题意知 $A+C=2B$，

所以 $B=\frac{\pi}{3}$，

所以 $b^2=a^2+c^2-ac$.

所以$\frac{bc+c^2+a^2+ab}{ab+b^2+ac+bc}=\frac{bc+c^2+a^2+ab}{ab+a^2+c^2-ac+ac+bc}=\frac{bc+c^2+a^2+ab}{ab+a^2+c^2+bc}=1$.

所以原等式成立，即$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}$.

21.**解**：假设三个方程均无实根，则

$$\begin{cases}\Delta_1=16a^2-4(-4a+3)<0,\\ \Delta_2=(a-1)^2-4a^2<0,\\ \Delta_3=4a^2-4(-2a)<0,\end{cases}$$

$$\text{解得}\begin{cases}-\frac{3}{2}<a<\frac{1}{2},\\ a<-1\text{或}a>\frac{1}{3},\text{即}-\frac{3}{2}<a<-1,\\ -2<a<0,\end{cases}$$

所以当$a\geqslant -1$或$a\leqslant -\frac{3}{2}$时，三个方程至少有一个方程有实根.

所以实数a的取值范围是$\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right]\cup[-1,+\infty)$.

22.**解**：(1)证明：当 $a+b\geqslant 0$ 时，$a\geqslant -b$ 且 $b\geqslant -a$.

因为$f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，

所以$f(a)\geqslant f(-b)$，$f(b)\geqslant f(-a)$，

所以$f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$.

(2)(1)中命题的逆命题为“如果$f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$，那么 $a+b\geqslant 0$”，此命题成立.

用反证法证明如下：

假设 $a+b<0$，则 $a<-b$，

所以$f(a)<f(-b)$.

同理可得$f(b)<f(-a)$.

所以$f(a)+f(b)<f(-a)+f(-b)$，这与$f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$矛盾，

故假设不成立，

所以 $a+b\geqslant 0$ 成立，即(1)中命题的逆命题成立.

第 3 期
第 3 版同步周测题参考答案

一、选择题

1.D

2.B

3.B

4.D

提示：项数为 $n^2-(n-1)=n^2-n+1$.

5.C

6.B

7.C

8.B

9.A

提示：因为从 $n=k$ 到 $n=k+1$ 的过渡，增加了$(k+3)^3$，减少了 k^3，故利用归纳假设，只需证明$(k+3)^3-k^3=9k^2+27k+27$ 能被 9 整除.

10.D

11.D

提示：在证明 $n=k+1$ 时，没有使用归纳假设.

12.A

二、填空题

13.当 $n=1$ 时，左边=4，右边=4，左边≥右边，不等式成立

14.$2k$

15.5

提示：当 $n=1$ 时，3^6+a^3 能被 14 整除的数有 $a=3$ 或 5，当 $a=3$ 且 $n=2$ 时，$3^{10}+3^5$ 不能被 14 整除，故 $a=5$.

16.没有用到归纳假设，不是数学归纳法.

三、解答题

17.**证明**：(1)当 $n=1$ 时，左边=2，

右边=$\frac{1\times(3+1)}{2}$=2=左边，等式成立.

(2)假设 $n=k(k\geqslant 1)$时等式成立，即

$(k+1)+(k+2)+\cdots+(k+k)=\frac{k(3k+1)}{2}$.

则当 $n=k+1$ 时，

左边$=(k+2)+(k+3)+\cdots+(k+k)+(k+k+1)+(k+k+2)$

$=[(k+1)+(k+2)+\cdots+(k+k)]+3k+2$

$=\frac{k(3k+1)}{2}+3k+2=\frac{3k^2+7k+4}{2}$

$=\frac{(k+1)(3k+4)}{2}$

$=\frac{(k+1)[3(k+1)+1]}{2}$，

所以 $n=k+1$ 时，等式成立.

根据(1)和(2)，可知对任意 $n\in\mathbf{N}_+$，等式成立.

18.**证明**：(1)当 $n=1$ 时，左边$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{13}{12}>1$，不等式成立.

(2)假设当 $n=k$ 时，不等式成立，

当 $n=k+1$ 时，不等式左边$=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3(k+1)+1}=\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{3k+1}\right)+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3(k+1)+1}-\frac{1}{k+1}\geqslant 1+\left(\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}-\frac{1}{k+1}\right)$.

欲证上式左边大于等于 1，只需证上式右边第二项大于等于 0.

$\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}-\frac{1}{k+1}$

$=\frac{6k+6}{(3k+2)(3k+4)}-\frac{2}{3(k+1)}$

$=\frac{18(k+1)^2-2(3k+2)(3k+4)}{3(3k+2)(3k+4)(k+1)}$

$=\frac{2}{3(3k+2)(3k+4)(k+1)}>0$.

故当 $n=k+1$ 时，不等式成立.

由(1)(2)知，不等式对任意 $n\in\mathbf{N}_+$ 都成立.

19.**解**：由已知得 $2b_n=a_n+a_{n+1}$，$a_{n+1}^2=b_nb_{n+1}$，$a_1=2$，$b_1=4$，

由此可得 $a_2=6$，$b_2=9$，$a_3=12$，$b_3=16$，$a_4=20$，$b_4=25$.

猜想 $a_n=n(n+1)$，$b_n=(n+1)^2$.

用数学归纳法证明如下：

①当 $n=1$ 时，可得结论成立.

②假设当 $n=k(k\geqslant 1,k\in\mathbf{N}_+)$时，结论成立，

即 $a_k=k(k+1)$，$b_k=(k+1)^2$，

那么当 $n=k+1$ 时，

$a_{k+1}=2b_k-a_k=2(k+1)^2-k(k+1)=(k+1)\cdot(k+2)$，

$b_{k+1}=\frac{a_{k+1}^2}{b_k}=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{(k+1)^2}=(k+2)^2$.

所以当 $n=k+1$ 时，结论也成立.

由①②可知，$a_n=n(n+1)$，$b_n=(n+1)^2$ 对一切正整数 n 都成立.

20.**证明**：(1)当 $n=1$ 时，$x+\frac{1}{x}\geqslant 2$ 成立.

当 $n=2$ 时，$x^2+1+\frac{1}{x^2}\geqslant 2+2>2+1$ 成立.

(2)假设当 $n=k$ 时，$x^k+x^{k-2}+\cdots+\frac{1}{x^{k-2}}+\frac{1}{x^k}\geqslant k+1$ 成立.

那么，当 $n=k+2$ 时，$x^{k+2}+x^k+\cdots+\frac{1}{x^k}+\frac{1}{x^{k+2}}\geqslant k+1+\left(x^{k+2}+\frac{1}{x^{k+2}}\right)\geqslant k+1+2=(k+2)+1$.

这表明，当 $n=k+2$ 时命题也成立.

根据(1)和(2)，可知原不等式成立.

21.**证明**：当 $n=1$ 时，$2^1+2=4>n^2=1$，

当 $n=2$ 时，$2^2+2=6>n^2=4$，

当 $n=3$ 时，$2^3+2=10>n^2=9$，

当 $n=4$ 时，$2^4+2=18>n^2=16$，

由此可以猜想，

$2^n+2>n^2(n\in\mathbf{N}_+)$成立.

下面用数学归纳法证明：

①当 $n=1$ 时，左边$=2^1+2=4$，右边=1，所以左边>右边，所以原不等式成立.

当 $n=2$ 时，左边$=2^2+2=6$，右边$=2^2=4$，所以左边>右边；

当 $n=3$ 时，左边$=2^3+2=10$，右边$=3^2=9$，所以左边>右边.

②假设 $n=k(k\geqslant 3$ 且 $k\in\mathbf{N}_+)$时，不等式成立，即 $2^k+2>k^2$，那么 $n=k+1$ 时，$2^{k+1}+2=2\cdot 2^k+2=2(2^k+2)-2>2k^2-2$.

要证当 $n=k+1$ 时结论成立，只需证 $2k^2-2\geqslant(k+1)^2$，即证 $k^2-2k-3\geqslant 0$，

即证$(k+1)(k-3)\geqslant 0$.

又因为 $k+1>0$，$k-3\geqslant 0$，

所以$(k+1)(k-3)\geqslant 0$.

所以当 $n=k+1$ 时，结论成立.

由①②可知，$n\in\mathbf{N}_+$，$2^n+2>n^2$.

22.**解**：令 $n=1$，得$\frac{1}{2\times 4}=\frac{1}{a+b}$，即 $a+b=8$. ①

又令 $n=2$，得$\frac{1}{2\times 4}+\frac{1}{4\times 6}=\frac{2}{2a+b}$，即 $2a+b=12$. ②

联立①②，解得 $a=b=4$.

下面用数学归纳法证明：

(1)当 $n=1$ 时，命题显然成立.

(2)假设 $n=k$ 时，命题成立，即$\frac{1}{2\times 4}+\frac{1}{4\times 6}+\frac{1}{6\times 8}+\cdots+\frac{1}{2k(2k+2)}=\frac{k}{4k+4}$成立.

那么，当 $n=k+1$ 时，$\frac{1}{2\times 4}+\frac{1}{4\times 6}+\frac{1}{6\times 8}+\cdots+\frac{1}{2k(2k+2)}+\frac{1}{(2k+2)(2k+4)}=\frac{k}{4k+4}+\frac{1}{(4k+4)(k+2)}=\frac{k^2+2k+1}{(4k+4)(k+2)}=\frac{k+1}{4k+8}=\frac{k+1}{4(k+1)+4}$.

这表明，当 $n=k+1$ 时，命题也成立.

综上所述，对任意的自然数 n，存在 $a=b=4$，使$\frac{1}{2\times 4}+\frac{1}{4\times 6}+\frac{1}{6\times 8}+\cdots+\frac{1}{2n(2n+2)}=\frac{n}{an+b}$成立.