第 8 期

第 3 版同步周测题参考答案

一、选择题

1~5.DCCCB

6.C

7.B

提示：由$(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}-2\overrightarrow{DA})\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})$

$=(\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA})\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})$

$=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})$

$=|\overrightarrow{AB}|^2-|\overrightarrow{AC}|^2=0$，得$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|$，

故$\triangle ABC$为等腰三角形.

8.D

9.B

10.B

提示：因为$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}$，

又$\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}$不共线，所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，

$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$，所以$\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}$

$=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}=0$，

所以$\langle\boldsymbol{d},\boldsymbol{b}\rangle=90°$.

11.C

提示：由于$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=(2,t,t)-(1-t,1-t,t)=(1+t,2t-1,0)$，

所以$|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|=\sqrt{(1+t)^2+(2t-1)^2}$

$=\sqrt{5t^2-2t+2}=\sqrt{5\left(t-\frac{1}{5}\right)^2+\frac{9}{5}}$

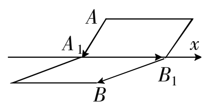
$\geqslant\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

12.B

提示：过A、B分别作$AA_1\perp x$轴，$BB_1\perp x$轴，垂足分别为A_1和B_1，则$AA_1=3$，$A_1B_1=5$，$BB_1=2$，因为$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{B_1B}$，

所以$|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{AA_1}|^2+|\overrightarrow{A_1B_1}|^2+|\overrightarrow{B_1B}|^2+2\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{B_1B}=3^2+5^2+2^2+2\times3\times2\times\cos60°=44$.

所以$|\overrightarrow{AB}|=2\sqrt{11}$.



（第 12 题图）

二、填空题

13.8

14.−4

15.−15

16.(1,1,1)

提示：设$DP=y>0$，则$A(2,0,0)$，$B(2,2,0)$，$P(0,0,y)$，$E\left(1,1,\frac{y}{2}\right)$，$\overrightarrow{DP}=(0,0,y)$，$\overrightarrow{AE}=\left(-1,1,\frac{y}{2}\right)$. 所以$\cos\langle\overrightarrow{DP},\overrightarrow{AE}\rangle=\frac{\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{AE}}{|\overrightarrow{DP}||\overrightarrow{AE}|}=\frac{\frac{1}{2}y^2}{y\sqrt{2+\frac{y^2}{4}}}=\frac{y}{\sqrt{8+y^2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，解得$y=2$，

所以$E(1,1,1)$.

三、解答题

17.**解：**(1)由G为$\triangle BCD$的重心，知

$\overrightarrow{GE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BE}$，

又E,F为CD,AD的中点，

所以$\overrightarrow{EF}\parallel\overrightarrow{AC}$，且$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$，

所以$\overrightarrow{AG}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}$.

(2)由向量加法的平行四边形法则及几何意义，知

$\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{AH}$，$\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AF}$，

所以$\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{FH}$.

18.**解：**(1)因为$\overrightarrow{BC}=(-2,-1,2)$，且$\boldsymbol{c}\parallel\overrightarrow{BC}$，

所以设$\boldsymbol{c}=\lambda\overrightarrow{BC}=(-2\lambda,-\lambda,2\lambda)$，

得$|\boldsymbol{c}|=\sqrt{(-2\lambda)^2+(-\lambda)^2+(2\lambda)^2}=3|\lambda|=3$，

解得$\lambda=\pm1$. 即$\boldsymbol{c}=(-2,-1,2)$或$\boldsymbol{c}=(2,1,-2)$.

(2)因为$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}=(1,1,0)$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}=(-1,0,2)$，

所以$k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(k-1,k,2)$，$k\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(k+2,k,-4)$.

又因为$(k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp(k\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$，

所以$(k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(k\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=0$.

即$(k-1,k,2)\cdot(k+2,k,-4)=2k^2+k-10=0$.

解得$k=2$或$k=-\frac{5}{2}$.

19.**解：**(1)因为$\overrightarrow{HF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{EG}$，$\overrightarrow{EH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{GF}$，

所以四边形$EGFH$是平行四边形.

又$AC=BD$，所以四边形$EGFH$是菱形，所以$\overrightarrow{EF}\perp\overrightarrow{HG}$，故$\overrightarrow{EF}$与$\overrightarrow{GH}$的夹角为$90°$.

(2)由(1)，同理可证$\overrightarrow{EF}\perp\overrightarrow{MN}$，所以$EF\perp$平面$MHNG$，所以$EF\perp HN$，$EF\perp MG$，

故$\overrightarrow{EF}\cdot(\overrightarrow{NH}+\overrightarrow{MG})=0$.

20.**解：**由于$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，

则$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=0$，

即$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}|^2}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$.

又$(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\perp(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，则

$(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{b}^2-3\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2|\boldsymbol{a}|^2-2|\boldsymbol{b}|^2-3|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=0$，

即$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{2|\boldsymbol{a}|^2-2|\boldsymbol{b}|^2}{3|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$.

所以$\frac{|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}|^2}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{2|\boldsymbol{a}|^2-2|\boldsymbol{b}|^2}{3|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$，即$5|\boldsymbol{b}|^2=8|\boldsymbol{a}|^2$，则$|\boldsymbol{b}|=\frac{2\sqrt{10}}{5}|\boldsymbol{a}|$，

所以$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}|^2}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$

$=\frac{\frac{8}{5}|\boldsymbol{a}|^2-2|\boldsymbol{a}|^2}{|\boldsymbol{a}|\cdot\frac{2\sqrt{10}}{5}|\boldsymbol{a}|}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$.

21.(1)**证明：**因为$\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}$

$=\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}\right)+\left(\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}\right)$

$=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE})+(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF})=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}$，

所以A,E,C_1,F四点共面.

(2)**解：**因为$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE})$

$=\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{DD_1}-\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BB_1}$

$=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}$，

所以$x=-1,y=1,z=\frac{1}{3}$，所以$x+y+z=\frac{1}{3}$.

22.**解：**以点D为原点O，DA,DC,DD_1分别为x,y,z轴建立空间直角坐标系，

则$D(0,0,0)$，$B(1,1,0)$，$A_1(1,0,\lambda)$.

设$P(0,1,x)$，其中$x\in[0,\lambda]$，

则$\overrightarrow{BP}=(-1,0,x)$，$\overrightarrow{A_1P}=(-1,1,x-\lambda)$.

因为$A_1P\perp PB$，所以$\overrightarrow{A_1P}\cdot\overrightarrow{BP}=0$，

代入化简得$x^2-\lambda x+1=0$.

由点P唯一，得$\Delta=\lambda^2-4=0$，且$\lambda>0$，

解得$\lambda=2$.

第 5 期

第 3 版同步周测题参考答案

一、选择题

1.A 2.C 3.A 4.B 5.C 6.A

7.B

提示：由题意知，$\frac{2}{\sqrt{m}}=4$，所以$m=\frac{1}{4}$. 所以双曲线E的方程为$\frac{x^2}{4}-y^2=1$.所以E的渐近线方程为$y=\pm\frac{1}{2}x$.

8.C

9.C

提示：当直线l的斜率不存在时，直线l过双曲线的右顶点，满足要求；当直线l的斜率存在时，与两渐近线平行的直线满足要求，故共有3条.

10.D

提示：设双曲线方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,b>0)$，点M在第一象限，则$|AB|=|BM|$，$\angle ABM=120°$. 过点M作$MN\perp x$轴，垂足为N. 在$Rt\triangle MNB$中，$|MB|=2a$，$|BN|=a$，$|MN|=\sqrt{3}a$，故$M(2a,\sqrt{3}a)$，代入双曲线方程，得$a^2=b^2=c^2-a^2$，即$c^2=2a^2$，所以$e=\sqrt{2}$.

11.D

提示：设双曲线的两个焦点分别是$F_1(-5,0)$与$F_2(5,0)$，则这两点正好是两圆的圆心，当且仅当点P与M,F_1三点共线以及P与N,F_2三点共线时所求的值最大，此时$|PM|-|PN|=(|PF_1|+2)-(|PF_2|-1)=6+3=9$，故选D.

12.B

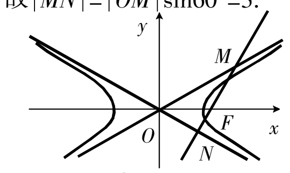
提示：由已知，得$F(2,0)$，渐近线方程为$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$，故$\angle MON=60°$.

若$\triangle OMN$为直角三角形，不妨设$\angle ONM=90°$(如图所示)，

则易得直线MN的倾斜角$\angle MFx=60°$，斜率$k=\sqrt{3}$，方程为$y=\sqrt{3}(x-2)$.

与渐近线方程$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$联立，解得$M(3,\sqrt{3})$，则$|OM|=2\sqrt{3}$.

故$|MN|=|OM|\sin60°=3$.



（第 12 题图）

二、填空题

13.$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1(y<0)$

提示：由已知关系式可知点M与$A(0,5)$，$B(0,-5)$的距离之差等于8，则点M的轨迹是焦点在y轴上的双曲线的下支，其中$a=4$，$c=5$，则$b^2=9$. 所以点M的轨迹方程为$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1(y<0)$.

14.2或$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

提示：当双曲线的焦点在x轴上时，有$\frac{b}{a}=\sqrt{3}$，则离心率$e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=2$；当双曲线的焦点在$y$轴上时，有$\frac{a}{b}=\sqrt{3}$，同理，得$e=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

15.$\frac{4}{5}$

提示：由方程$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$知$a^2=16$，$b^2=9$，即$a=4$，$c=\sqrt{16+9}=5$. 在$\triangle ABP$中，利用正弦定理和双曲线的定义知，$\frac{|\sin A-\sin B|}{\sin P}=\frac{||PB|-|PA||}{|AB|}=\frac{2a}{2c}=\frac{2\times4}{2\times5}=\frac{4}{5}$.

16.$12\sqrt{6}$

提示：设左焦点为F_1，$|PF|-|PF_1|=2a=2$，

所以$|PF|=2+|PF_1|$，$\triangle APF$的周长为$|AF|+|AP|+|PF|=|AF|+|AP|+2+|PF_1|$，$\triangle APF$周长最小即为$|AP|+|PF_1|$最小，当$A,P,F_1$在一条直线上时最小，过$AF_1$的直线方程为$\frac{x}{-3}+\frac{y}{6\sqrt{6}}=1$，与$x^2-\frac{y^2}{8}=1$联立，解得$P$点坐标为$(-2,2\sqrt{6})$，此时$S=S_{\triangle AF_1F}-S_{\triangle F_1PF}=12\sqrt{6}$.

三、解答题

17.**解：**由题意，设双曲线C的方程为$x^2-2y^2=\lambda$，将点$M(2,-2)$代入，可得$\lambda=-4$.

所以双曲线C的方程为$\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{4}=1$，

则$a=\sqrt{2}$，$b=2$，$c=\sqrt{6}$，离心率$e=\frac{c}{a}=\sqrt{3}$，渐近线方程为$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$.

18.**解：**椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$的焦点为$F_1(-\sqrt{7},0)$，$F_2(\sqrt{7},0)$，顶点为$A_1(-4,0)$，$A_2(4,0)$，$B_1(0,-3)$，$B_2(0,3)$.

故所求双曲线的焦点在x轴上，$2c=|A_1A_2|=8$，所以$c=4$；$2a=2\sqrt{7}$，所以$a=\sqrt{7}$. 所以$b^2=c^2-a^2=9$.

故所求双曲线的方程为$\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{9}=1$.

19.**解：**双曲线中，$a=3$，$c=5$. 不妨设$|PF_1|>|PF_2|$，则$|PF_1|-|PF_2|=2a=6$. 又$|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot\cos60°$，而$|F_1F_2|=2c=10$，得$|PF_1|^2+|PF_2|^2-|PF_1|\cdot|PF_2|=(|PF_1|-|PF_2|)^2+|PF_1|\cdot|PF_2|=100$，所以$|PF_1|\cdot|PF_2|=64$. 故$\triangle F_1PF_2$的面积$S=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|\sin60°=16\sqrt{3}$.

20.**解：**直线l的方程为$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，即$bx+ay-ab=0$，则点$(1,0)$到直线$l$的距离$d_1=\frac{b(a-1)}{\sqrt{a^2+b^2}}$，点$(-1,0)$到直线$l$的距离$d_2=\frac{b(a+1)}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$s=d_1+d_2=\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{2ab}{c}\geqslant\frac{4}{5}c$，即$5a\sqrt{c^2-a^2}\geqslant2c^2$，

于是有$5\sqrt{e^2-1}\geqslant2e^2$，

即$4e^4-25e^2+25\leqslant0$，得$\frac{5}{4}\leqslant e^2\leqslant5$.

又$e>1$，所以e的取值范围是$\left[\frac{\sqrt{5}}{2},\sqrt{5}\right]$.

21.**解：**以直线AB为x轴，线段AB的垂直平分线为y轴，建立直角坐标系，如下图，则$A(3,0)$，$B(-3,0)$.

因为$|PB|-|PA|=4<6$，

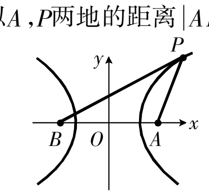
所以P在双曲线的右支上，且$a=2$，$c=3$，$b=\sqrt{5}$.

所以P在双曲线$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$右支上.

因为P在A的北偏东$30°$方向，

所以$k_{AP}=\tan60°=\sqrt{3}$.

所以AP所在直线的方程为$y=\sqrt{3}\cdot(x-3)$. 与双曲线方程联立，解得点P的坐标为$(8,5\sqrt{3})$或$\left(\frac{16}{7},-\frac{5\sqrt{3}}{7}\right)$(舍去)，所以$A,P$两地的距离$|AP|=10$千米.



（第 21 题图）

22.**解：**(1)双曲线的右焦点为$F(\sqrt{2},0)$，渐近线方程为$x\pm y=0$，

则圆心F到渐近线的距离$d=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$. 所以圆的方程为$(x-\sqrt{2})^2+y^2=1$.

(2)设$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，经过点P的直线方程为$y=kx-1$(k显然存在).

联立方程组$\begin{cases}x^2-y^2=1,\\y=kx-1,\end{cases}$消去$y$，

整理得$(1-k^2)x^2+2kx-2=0$.

所以$\Delta=(2k)^2-4(1-k^2)(-2)=8-4k^2>0$，且$x_1+x_2=\frac{-2k}{1-k^2}>0$，$x_1x_2=\frac{-2}{1-k^2}>0$，解得$1<k<\sqrt{2}$. 又$y_1+y_2=k(x_1+x_2)-2=\frac{-2}{1-k^2}$，

所以线段MN的中点为$\left(\frac{-k}{1-k^2},\frac{-1}{1-k^2}\right)$，

垂直平分线的方程为

$y+\frac{1}{1-k^2}=-\frac{1}{k}\left(x+\frac{k}{1-k^2}\right)$.

令$x=0$，得截距$t=\frac{2}{k^2-1}>2$.

故t的取值范围是$(2,+\infty)$.

②

第 6 期

第 3 版同步周测题参考答案

一、选择题

1.A

提示：由题意知点P到点$(2,2)$的距离与到直线$3x-4y-6=0$的距离相等，则点P的轨迹为抛物线.

2.C

3.A

提示：由已知得焦点在 y 轴的负半轴上，$p=4$.故选 A.

4.B

5.B

提示：因为抛物线过点 $P(-6,-3)$，而点 P 在第三象限，所以焦点在 y 轴负半轴上.设抛物线方程为 $x^2=-2py$，把点 P 坐标代入，得 $36=-2p\times(-3)$，所以 $p=6$，所以抛物线的方程为 $x^2=-12y$，所以选 B.

6.D

7.C

提示：点 P 到其焦点的距离等于点 P 到其准线 $x=-2$ 的距离，得 $x_P=7$，$y_P=\pm2\sqrt{14}$.

8.C

提示：画图可知共有 3 条，其中一条平行于 x 轴，所以选 C.

9.A

提示：由已知，得$F\left(\frac{p}{2},0\right)$，直线$AB$：$y=x-p$，代入抛物线的方程，可得$x^2-4px+p^2=0$.设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则$x_1+x_2=4p$.所以$|AF|+|BF|=x_1+x_2+p=4p+p=10$，解得$p=2$.

故准线方程为$x=-1$，即$x+1=0$.

10.C

提示：抛物线$y^2=8x$的准线方程是$x=-2$，点$Q(-2,0)$.

设直线l的方程是$y=k(x+2)$，代入抛物线方程，得$k^2x^2+(4k^2-8)x+4k^2=0$.

由题意知，当$k\neq0$时，$\Delta=(4k^2-8)^2-16k^4\geqslant0$，即$-1\leqslant k<0$或$0<k\leqslant1$.当$k=0$时，也满足题意，所以$-1\leqslant k\leqslant1$.

11.C

提示：因为抛物线的焦点为$F\left(0,\frac{p}{2}\right)$，故过点$F$且倾斜角为$30°$的直线的方程为$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{p}{2}$，与抛物线方程联立得$x^2-\frac{2\sqrt{3}}{3}px-p^2=0$，解方程得$x_A=-\frac{\sqrt{3}}{3}p$，$x_B=\sqrt{3}p$，所以$\frac{|AF|}{|BF|}=\frac{|x_A|}{|x_B|}=\frac{1}{3}$，故选C.

12.A

提示：根据抛物线的定义，可知 d_1 等于点 P 到焦点的距离，故当且仅当点 P 为过抛物线焦点与已知直线垂直的直线与抛物线的交点时，所求距离最小，且$(d_1+d_2)_{\min}=\frac{12}{5}$.故选 A.

二、填空题

13.$y^2=20x$

14.$\left(-\frac{7}{16},0\right)$

提示：抛物线的标准方程是 $y^2=-\frac{7}{4}x$，则焦点在 x 轴的负半轴上，且 $2p=\frac{7}{4}$，故焦点坐标是$\left(-\frac{7}{16},0\right)$.

15.$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

提示：设机器人为 $A(x,y)$，依题意得点 A 在以 $F(1,0)$为焦点，$x=-1$ 为准线的抛物线上，该抛物线的标准方程为 $y^2=4x$.

过点 $P(-1,0)$，斜率为 k 的直线为 $y=k(x+1)$.

由$\begin{cases}y^2=4x,\\y=kx+k,\end{cases}$得 $ky^2-4y+4k=0$.

当 $k=0$ 时，显然不符合题意；

当 $k\neq0$ 时，依题意得 $\Delta=(-4)^2-4k\cdot4k<0$，

化简得 $k^2-1>0$，解得 $k>1$ 或 $k<-1$，因此 k 的取值范围为$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

16.2

提示：因为$F(1,0)$，所以直线AB：$y=k(x-1)$.与$y^2=4x$联立，化简可得$k^2x^2-2(2+k^2)x+k^2=0$.

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

则$x_1+x_2=\frac{4+2k^2}{k^2}$，$x_1x_2=1$.

所以$y_1+y_2=k(x_1+x_2-2)=\frac{4}{k}$，

$y_1y_2=k^2[x_1x_2-(x_1+x_2)+1]=-4$.

由$\angle AMB=90°$，得$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.

又$\overrightarrow{MA}=(x_1+1,y_1-1)$，$\overrightarrow{MB}=(x_2+1,y_2-1)$，

所以$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(x_1+1)(x_2+1)+(y_1-1)\cdot(y_2-1)=x_1x_2+(x_1+x_2)+y_1y_2-(y_1+y_2)+2=0$，

即$1+2+\frac{4}{k^2}-4-\frac{4}{k}+2=0$，解得$k=2$.

三、解答题

17.**解**：双曲线的标准方程为$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$，故其焦点坐标为$(\pm3,0)$.

所以所求抛物线的标准方程为$y^2=-12x$或$y^2=12x$.

18.**解**：设$B\left(x,\frac{x^2}{2p}\right)$，又$F\left(0,\frac{p}{2}\right)$，

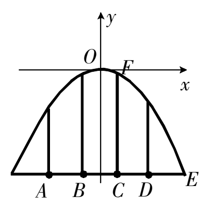
则 $x+0=2\sqrt{3}$，即 $x=2\sqrt{3}$.

所以$B\left(2\sqrt{3},\frac{6}{p}\right)$.

因为$|BF|=2|AF|$，结合抛物线的定义，得$\frac{6}{p}+\frac{p}{2}=2\sqrt{3+\frac{p^2}{4}}$，解得$p=\pm2$.

又$p>0$，所以$p=2$.

19.**解**：建立如图所示的平面直角坐标系.



(第19题图)

设抛物线方程为$x^2=-2py(p>0)$.

由题意，得点E的坐标为$(10,-4)$，

将其代入抛物线方程，解得$p=\frac{25}{2}$.

所以抛物线方程为$x^2=-25y$.

设点$F(2,b)$，则$b=-\frac{4}{25}$.

故最长支柱的长$|CF|=4-\frac{4}{25}=\frac{96}{25}$(m).

20.**解**：由 $y^2=4x$，得 $p=2$，其准线方程为 $x=-1$，焦点为 $F(1,0)$.

(1)由抛物线的定义可知，

$|AF|=x_1+\frac{p}{2}$，从而 $x_1=4-1=3$.

代入 $y^2=4x$ 中，解得 $y_1=\pm2\sqrt{3}$.

所以点 A 的坐标为$(3,2\sqrt{3})$或$(3,-2\sqrt{3})$.

(2)当直线 l 的斜率存在时，

设直线 l 的方程为 $y=k(x-1)$.

与抛物线方程联立并消去 y，

整理得 $k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$，

则 $x_1+x_2=2+\frac{4}{k^2}$.

所以$|AB|=x_1+x_2+p=4+\frac{4}{k^2}>4$.

当直线 l 的斜率不存在时，直线 l的方程为 $x=1$，此时$|AB|=4$，

所以$|AB|\geqslant4$，即线段 AB 的长的最小值为 4.

21.**解**：设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，中点$M(x,y)$，则$y_1^2=2x_1$，$y_2^2=2x_2$.

两式相减，得$(y_1+y_2)\cdot\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=2$.

把$y_1+y_2=2y$，$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{y-0}{x-(-2)}$代入化简，

得AB的中点M的轨迹方程为$y^2=x+2(x>2)$.

22.(1)**解**：联立$x^2=-y$与$y=kx-3$，

得$x^2+kx-3=0$.

因为$\Delta_1=k^2+12>0$，

所以l与抛物线$x^2=-y$恒有2个交点.

若$m\geqslant3$，则l与抛物线$x^2=4y$至少有1个交点.

联立$x^2=4y$与$y=kx-3$，得$x^2-4kx+12=0$.

所以$\Delta_2=16k^2-48\geqslant0$.结合$k>0$，得$k\geqslant\sqrt{3}$.所以$k$的最小值为$\sqrt{3}$.

(2)**证明**：若$m=3$，则l与抛物线$x^2=4y$只有1个交点.

结合(1)，可知$k=\sqrt{3}$，$A(2\sqrt{3},3)$.

由于$F(0,1)$为抛物线$x^2=4y$的焦点，

则$|\overrightarrow{FA}|=3+1=4$.

设$B(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$，

则$x_1+x_2=-k=-\sqrt{3}$，$x_1x_2=-3$.

所以 $y_1+y_2=k(x_1+x_2)-6=-9$，$y_1y_2=(kx_1-3)(kx_2-3)=k^2x_1x_2-3k(x_1+x_2)+9=9$.

所以$\overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{FC}=x_1x_2+(y_1-1)(y_2-1)=x_1x_2+y_1y_2-(y_1+y_2)+1=16$.

所以$\overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{FC}=|\overrightarrow{FA}|^2$.

第 7 期

第 2~3 版章节测试题参考答案

一、选择题

1.D　2.A　3.A　4.B　5.D　6.C

7.D

8.D

提示：据题意知，$\triangle FPM$为等边三角形，$|PF|=|PM|=|FM|$，所以PM垂直于抛物线的准线.设$P\left(\frac{m^2}{4},m\right)$，则$M(-1,m)$，$|PM|=1+\frac{m^2}{4}$，又由$F(1,0)$，$|PM|=|FM|$，得$1+\frac{m^2}{4}=\sqrt{(1+1)^2+m^2}$，得$m=2\sqrt{3}$，所以等边三角形的边长为4，其面积为$4\sqrt{3}$，故选D.

9.C

10.A

提示：设右焦点为$F_1(2,0)$，则$|MF_1|+|MF|=2a=6$. 所以$|MA|+|MF|=|MA|-|MF_1|+6$.又$-|AF_1|\leqslant|MA|-|MF_1|\leqslant|AF_1|$(当$M$,$A$,$F_1$三点共线时等号成立)，所以$6-\sqrt{2}\leqslant|MA|+|MF|\leqslant6+\sqrt{2}$.

11.A

提示：因为$|AF|=6$，$\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$，

所以$|FB|=3$.设$|CF|=x$，

由抛物线的定义，

可得$\frac{x}{3}=\frac{6-x}{6+3}$，解得 $x=\frac{3}{2}$.

故$|BC|=|CF|+|BF|=\frac{9}{2}$.

12.A

提示：由题意，知$A(a,0)$，$B\left(c,\frac{b^2}{a}\right)$，$C\left(c,-\frac{b^2}{a}\right)$.由双曲线的对称性，知$D$在$x$轴上.设$D(x,0)$，由$BD\perp AC$，得$\frac{\frac{b^2}{a}-0}{c-x}\cdot\frac{\frac{b^2}{a}}{a-c}=-1$，解得$c-x=\frac{b^4}{a^2(c-a)}<a+\sqrt{a^2+b^2}=a+c$. 所以$\frac{b^4}{a^2}<c^2-a^2=b^2\Rightarrow\frac{b^2}{a^2}<1\Rightarrow-1<\frac{b}{a}<1$.因此渐近线斜率的取值范围是$(-1,0)\cup(0,1)$.

二、填空题

13.2

提示：由抛物线的定义，得动点Q到焦点的距离的最小值为顶点到准线的距离，即$\frac{p}{2}=1$，$p=2$.

14.8

提示：根据双曲线的定义，有$|MF_2|-|MF_1|=2a=4$，$|NF_2|-|NF_1|=2a=4$，两式相加，得$|MF_2|+|NF_2|-|MN|=8$.

15.$\pm\frac{\sqrt{3}}{4}$

16.②③

提示：易知F_1，F_2，E_1，E_2分别是两个椭圆的焦点，若点P在椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$上且不是两个椭圆的交点，则$P$到$F_1$，$F_2$两点的距离之和是定值，到$E_1$，$E_2$两点的距离之和不是定值，故①错误；由椭圆的对称性可知②正确；曲线C所围的区域在边长为6的正方形内部且在半径为3的圆外部，由此可知③正确，④错误.

三、解答题

17.**解**：设点$N(x,y)$.因为N是EF的中点，$F(2,0)$，所以$E(2x-2,2y)$.又E是OM的中点，$O(0,0)$，所以$M(4x-4,4y)$.将其代入抛物线方程中，得$(4y)^2=8(4x-4)$，即$y^2=2x-2$，此即为点N的轨迹方程.

18.**解**：(1)把 $M\left(\frac{2}{3},-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$代入方程 $y^2=2px$，

得 $p=2$，因此抛物线的方程为 $y^2=4x$.

(2)抛物线的准线方程为 $x=-1$，所以 $F_1(-1,0)$，设双曲线的右焦点为 F，则 $F(1,0)$，

于是 $2a=|MF_1|-|MF|=\frac{7}{3}-\frac{5}{3}=\frac{2}{3}$，

因此 $a=\frac{1}{3}$.

因为 $c=1$，所以 $b^2=c^2-a^2=\frac{8}{9}$，

于是，双曲线的方程为$\frac{x^2}{\frac{1}{9}}-\frac{y^2}{\frac{8}{9}}=1$.

19.**解**：由题意，知抛物线的焦点在 x 轴上，可设抛物线的方程为 $y^2=ax(a\neq0)$.

由点 $M\left(\frac{2}{3},-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$在抛物线上，

得$\left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2=\frac{2}{3}a$，解得 $a=4$.

所以所求抛物线的方程为 $y^2=4x$.

因为点 $M\left(\frac{2}{3},-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$在椭圆上，

所以$\frac{4}{9a^2}+\frac{24}{9b^2}=1$.　①

又 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{1}{2}$，　②

由①②，可得 $a^2=4$，$b^2=3$.

所以所求椭圆的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

20.**解**：(1)当k不存在时，直线l的方程为$x=1$，代入双曲线的方程，得$y=0$，即l与C有一个交点.

当k存在时，设直线l的方程为$y=k(x-1)+2$，

代入C的方程，并整理，得

$(2-k^2)x^2+2(k^2-2k)x-k^2+4k-6=0$.

当$2-k^2=0$，即$k=\pm\sqrt{2}$时，上述方程有唯一解.

当 $2-k^2\neq0$，即 $k\neq\pm\sqrt{2}$ 时，$\Delta=16(3-2k)$.由$\Delta=0$，解得$k=\frac{3}{2}$；由$\Delta>0$，解得$k<\frac{3}{2}$；由$\Delta<0$，解得$k>\frac{3}{2}$.

所以，当 $k\in\{k\mid k$不存在，或$k=\pm\sqrt{2}$，或$k=\frac{3}{2}\}$时，l与C只有一个交点；当$k\in\left\{k\,\middle|\,k<\frac{3}{2},且k\neq\pm\sqrt{2}\right\}$时，$l$与$C$有两个交点；当$k\in\left\{k\,\middle|\,k>\frac{3}{2}\right\}$时，$l$与$C$无交点.

(2)设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由(1)知，

$x_1+x_2=\frac{2(k^2-2k)}{k^2-2}=2\times1$，解得$k=1$.

所以直线AB的方程为$x-y+1=0$.

21.**解**：(1)由题意得$F(1,0)$，l的方程为$y=k(x-1)(k>0)$.

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

由$\begin{cases}y=k(x-1),\\y^2=4x,\end{cases}$得$k^2x^2-2(k^2+2)x+k^2=0$.

故$x_1+x_2=\frac{2(k^2+2)}{k^2}$.

所以$|AB|=|AF|+|BF|=x_1+x_2+p=\frac{2(k^2+2)}{k^2}+2=8$，解得$k=-1$(舍去)，或$k=1$.

所以直线l的方程$y=x-1$.

(2)由(1)得AB的中点坐标为$(3,2)$，所以直线AB的垂直平分线方程为$y-2=-(x-3)$，即$y=-x+5$.

设所求圆的圆心坐标为(x_0,y_0)，

则$\begin{cases}y_0=-x_0+5,\\(x_0+1)^2=\frac{(y_0-x_0+1)^2}{2}+16,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x_0=3,\\y_0=2,\end{cases}$或$\begin{cases}x_0=11,\\y_0=-6.\end{cases}$

因此，所求圆的方程为$(x-3)^2+(y-2)^2=16$或$(x-11)^2+(y+6)^2=144$.

22.**解**：(1)由题意，得$M(-5\sqrt{2},0)$，$N(5\sqrt{2},0)$.

因为线路AB段上的任意一点到N的距离比到M的距离多10km，所以线路AB是以M，N为焦点的双曲线的一部分，设双曲线方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，则$2a=10$，$c=5\sqrt{2}$，所以$a^2=25$，$b^2=25$.

所以线路AB的方程为

$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{25}=1(x\leqslant-5,y\geqslant0)$.

同理可得线路CD的方程为

$\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{25}=1(x\geqslant0,y\leqslant-5)$.

易知$B(-5,0)$，故线路BC的方程为$x^2+y^2=25(-5\leqslant x\leqslant0,-5\leqslant y\leqslant0)$.

(2)设$G(x,y)$，则$x^2-y^2=25(x\leqslant-5,y\geqslant0)$.又$Q(0,5\sqrt{2})$，

故$|GQ|^2=x^2+(y-5\sqrt{2})^2$

$=2y^2-10\sqrt{2}y+75=2\left(y-\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2+50$.

所以当$y=\frac{5\sqrt{2}}{2}$时，$|GQ|$取得最小值，此时$x=-\frac{5\sqrt{6}}{2}$.所以G的位置为点$\left(-\frac{5\sqrt{6}}{2},\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$.