$\frac{k^2-1}{k}(x-2k)$，即$y=\frac{k^2-1}{k}x+3$.所以直线PQ过定点$(0,3)$.

第 12 期

第 2~3 版章节测试题参考答案

一、选择题

1~5.BDABCB

6.D

提示：由已知得$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OC}=2(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})+(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})$，整理可得$\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OC}$，故选D.

7.A

8.D

提示：以D为原点，以DA,DC,DD_1分别为x,y,z轴建立空间直角坐标系，则$A(1,0,0),C_1(0,1,1)$，

设$P(x,y,1)(0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1)$.

则$\overrightarrow{PA}=(1-x,-y,-1)$，$\overrightarrow{PC_1}=(-x,1-y,0)$，

于是$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC_1}=x^2-x+y^2-y$

$=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$.

因为$0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1$，

所以$0\leqslant\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant\frac{1}{4},0\leqslant\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant\frac{1}{4}$，

故$-\frac{1}{2}\leqslant\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\leqslant 0$.

9.A　10.B

11.A

提示：所有椭圆和双曲线的焦距均为$|AB|=10$，则$c=5$.对于过点M的椭圆，有$2a_M=|MA|+|MB|=3+10=13$，所以$a_M=\frac{13}{2},e_M=\frac{10}{13}$.同理，$a_N=6,e_N=\frac{5}{6}$；$a_P=2,e_P=\frac{5}{2}$；$a_Q=\frac{5}{2},e_Q=2$.所以$e_M<e_N<e_Q<e_P$.

12.A

提示：$4-b^2=1$，故$b^2=3$，

椭圆方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

联立$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$与$y=kx+2$，得$(4k^2+3)x^2+16kx+4=0$，

有$\Delta=(16k)^2-16(4k^2+3)\leqslant 0$，

解得$-\frac{1}{2}\leqslant k\leqslant\frac{1}{2}$.

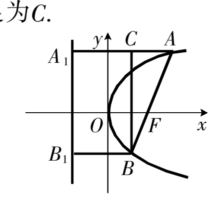
二、填空题

13.若$x\notin\mathbf{R}$，则$x^2+1\leqslant 1$

14.2

15.$\frac{8}{3}$

提示：如图，过点A,B分别作准线的垂线，垂足为A_1,B_1，过点B作AA_1的垂线，垂足为C.



(第15题图)

设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),|BF|=m$，则$|AF|=3m$，由抛物线的定义，知$|BB_1|=m,|AA_1|=3m$.

在$\triangle ABC$中，

因为$|AC|=2m,|AB|=4m$，

所以$k_{AB}=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$.

所以直线AB的方程为

$y=\sqrt{3}(x-1)$.

与抛物线方程联立，消去y，

得$3x^2-10x+3=0$.

所以弦AB的中点到抛物线准线的距离为$\frac{x_1+x_2}{2}+1=\frac{5}{3}+1=\frac{8}{3}$.

16.$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},\sqrt{2}\right)$

三、解答题

17.**证明**：若$a-b=1$，则$a=b+1$.故$a^2-b^2+2a-4b-3=(b+1)^2-b^2+2(b+1)-4b-3=0$.

因此，原命题的逆否命题为真命题，从而原命题也为真命题，得证.

18.**解**：若p为真命题，则

$\begin{cases}a-1>0,\\2(a-1)-1>0,\end{cases}$或$\begin{cases}a-1<0,\\1\cdot(a-1)-1>0,\end{cases}$

解得$a>\frac{3}{2}$；

若q为真命题，则$a^2-4<0$，

解得$-2<a<2$.

(1)若$p\wedge q$是真命题，则p真q真，

所以实数a的取值范围为$\left(\frac{3}{2},2\right)$.

(2)由题意，得p,q同真假.

若p真q真，由(1)知$\frac{3}{2}<a<2$；

若p假q假，则$\begin{cases}a\leqslant-\frac{3}{2},\\a\leqslant-2\text{ 或 }a\geqslant 2\end{cases}\Rightarrow a\leqslant-2$.

所以实数a的取值范围为

$(-\infty,-2]\cup\left(\frac{3}{2},2\right)$.

19.**解**：(1)因为$e\geqslant\sqrt{2}k$，所以$\frac{\sqrt{3+m}}{\sqrt{3}}\geqslant\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{3}}$，解得$m\leqslant 3$.又$m>0$，所以实数$m$的取值范围为$(0,3]$.

(2)由$m^2-(2a+2)m+a(a+2)\leqslant 0$，得$(m-a)(m-a-2)\leqslant 0$，所以$a\leqslant m\leqslant a+2$.

因为p是q的必要不充分条件，所以$\begin{cases}a>0,\\a+2\leqslant 3,\end{cases}$解得$0<a\leqslant 1$.

所以实数a的取值范围为$(0,1]$.

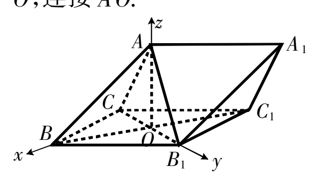
20.**证明**：取基底$\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}$.

(1)因为$\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{ED'}+\overrightarrow{D'G}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{EG}$，所以$EG/\!/AC$.

(2)因为$\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{FD'}+\overrightarrow{D'G}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}=2\overrightarrow{FG}$，所以$FG/\!/AB'$.

又由(1)$EG/\!/AC$，所以平面$EFG/\!/$平面$AB'C$.

21.(1)**证明**：如图，连接BC_1，交B_1C于O，连接AO.



(第 21 题图)

因为侧面BB_1C_1C为菱形，

所以$B_1C\perp BC_1$，且O为B_1C与BC_1的中点.

又$AB\perp B_1C$，

所以$B_1C\perp$平面ABO，

故$B_1C\perp AO$.

又$B_1O=CO$，故$AC=AB_1$.

(2)因为$AC\perp AB_1$，且O为B_1C的中点，所以$AO=CO$，

又因为$AB=BC$，$\triangle BOA\cong\triangle BOC$.

故$OA\perp OB$，从而OA,OB,OB_1两两垂直.以O为坐标原点，$\overrightarrow{OB}$的方向为x轴正方向，$|\overrightarrow{OB}|$为单位长，建立如图所示的空间直角坐标系$O-xyz$.

因为$\angle CBB_1=60^\circ$，

所以$\triangle CBB_1$为等边三角形.

又$AB=BC$，则$A\left(0,0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right),B(1,0,0),B_1\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3},0\right),C\left(0,-\frac{\sqrt{3}}{3},0\right)$，

$\overrightarrow{AB_1}=\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$，$\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{AB}=\left(1,0,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$，$\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{BC}=\left(-1,-\frac{\sqrt{3}}{3},0\right)$.

设$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$是平面AA_1B_1的法向量，则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB_1}=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1B_1}=0,\end{cases}$

即$\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{3}y-\frac{\sqrt{3}}{3}z=0,\\x-\frac{\sqrt{3}}{3}z=0,\end{cases}$

所以可取$\boldsymbol{n}=(1,\sqrt{3},\sqrt{3})$.

设$\boldsymbol{m}$是平面$A_1B_1C_1$的法向量，则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1B_1}=0,\\\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{B_1C_1}=0,\end{cases}$

同理可取$\boldsymbol{m}=(1,-\sqrt{3},\sqrt{3})$.

则$\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\frac{1}{7}$.

所以二面角$A-A_1B_1-C_1$的余弦值为$\frac{1}{7}$.

22.**解**：(1)由题可知$\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2},\\a=2\sqrt{2},\end{cases}$

解得$\begin{cases}c=2,\\a=2\sqrt{2}.\end{cases}$所以$b^2=a^2-c^2=4\Rightarrow b=2$.

所以椭圆C的方程为$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$.

(2)假设存在椭圆上的一点$P(x_0,y_0)$，使得直线PF_1,PF_2与以Q为圆心的圆相切，则Q到直线PF_1,PF_2的距离相等，$F_1(-2,0),F_2(2,0)$，

PF_1：$(x_0+2)y-y_0x-2y_0=0$，

PF_2：$(x_0-2)y-y_0x+2y_0=0$，

$d_1=\frac{|3y_0|}{\sqrt{(x_0+2)^2+y_0^2}}=\frac{|y_0|}{\sqrt{(x_0-2)^2+y_0^2}}=d_2$，

整理，得$8x_0^2-40x_0+32+8y_0^2=0$.

因为点在椭圆上，所以$x_0^2+2y_0^2=8$.

解得$x_0=2$，或$x_0=8$(舍去)，

$x_0=2$时，$y_0=\pm\sqrt{2},r=1$.

所以椭圆上存在点P，其坐标为$(2,\sqrt{2})$或$(2,-\sqrt{2})$，使得直线PF_1,PF_2与以Q为圆心的圆$(x-1)^2+y^2=1$相切.

第 9 期

第 3 版同步周测题参考答案

一、选择题

1.D　2.B　3.B　4.A　5.B　6.C
7.B　8.B　9.C　10.B　11.C　12.C

二、填空题

13.$(-2,4,1)$或$(2,-4,-1)$

提示：据题意，得$\overrightarrow{AB}=(-1,-1,2)$，$\overrightarrow{AC}=(1,0,2)$.

设$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，因为$\boldsymbol{n}$与平面ABC垂直，

所以$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-x-y+2z=0,\\x+2z=0,\end{cases}$可得$\begin{cases}y=4z,\\y=-2x,\end{cases}$

因为$|\boldsymbol{n}|=\sqrt{21}$，所以$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{21}$，

解得$y=4$或$y=-4$.

当$y=4$时，$x=-2,z=1$；当$y=-4$时，$x=2,z=-1$.

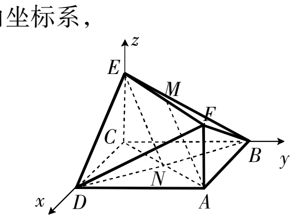
14.$\frac{\sqrt{5}}{10}$

15.$\frac{\sqrt{2}}{6}$

16.$4\pm\sqrt{15}$

三、解答题

17.**证明**：(1)建立如图所示的空间直角坐标系，



(第 17 题图)

设$AC\cap BD=N$，连接NE.则点N,E的坐标分别为$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$，$(0,0,1)$.

所以$\overrightarrow{NE}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$.

又点A,M的坐标分别为$(\sqrt{2},\sqrt{2},0)$，$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$，

所以$\overrightarrow{AM}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$.

所以$\overrightarrow{NE}=\overrightarrow{AM}$且$NE$与$AM$不共线.所以$NE/\!/AM$.

又因为$NE\subset$平面BDE，$AM\not\subset$平面BDE，所以$AM/\!/$平面BDE.

(2)由(1)得，

$\overrightarrow{AM}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$，

因为$D(\sqrt{2},0,0),F(\sqrt{2},\sqrt{2},1),B(0,\sqrt{2},0)$，

所以$\overrightarrow{DF}=(0,\sqrt{2},1),\overrightarrow{BF}=(\sqrt{2},0,1)$.

所以$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{DF}=0,\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BF}=0$.

所以$\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{DF},\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{BF}$，

即$AM\perp DF,AM\perp BF$.

又$DF\cap BF=F$，

所以$AM\perp$平面BDF.

18.**解**：(1)因为$AC\perp l,BD\perp l,\alpha-l-\beta$为$60^\circ$的二面角，

所以$\langle\overrightarrow{CA},\overrightarrow{DB}\rangle=60^\circ$.

因为$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}$，

所以$|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{CD}|^2+|\overrightarrow{DB}|^2+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{DB}$.

所以$10^2=2^2+|\overrightarrow{CD}|^2+4^2+2|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{DB}|\cdot\cos\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{DB}\rangle=2^2+|\overrightarrow{CD}|^2+4^2+2\times 2\times 4\times\cos 120^\circ$，

解得$|\overrightarrow{CD}|^2=88$.

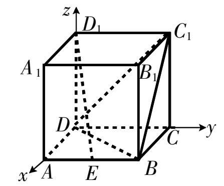
所以CD的长度为$2\sqrt{22}$.

(2)因为$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB})\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}+|\overrightarrow{CD}|^2+\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{CD}=|\overrightarrow{CD}|^2=88$，

所以$\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\rangle=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CD}|}=\frac{88}{10\times 2\sqrt{22}}=\frac{\sqrt{22}}{5}$.

所以AB和棱l所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{22}}{5}$.

19.**解**：建立如图所示的空间直角坐标系，则$B(1,1,0),C_1(0,1,1),D_1(0,0,1),E\left(1,\frac{1}{2},0\right)$.



(第 19 题图)

所以$\overrightarrow{D_1E}=\left(1,\frac{1}{2},-1\right),\overrightarrow{DB}=(1,1,0),\overrightarrow{DC_1}=(0,1,1)$.

设$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$是平面BC_1D的法向量，则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DB}=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC_1}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}x+y=0,\\y+z=0.\end{cases}$

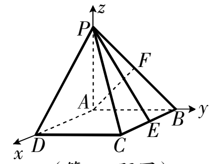
令$y=-1$，得$\boldsymbol{n}=(1,-1,1)$.

设D_1E与平面BC_1D的夹角为θ，则

$\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{D_1E},\boldsymbol{n}\rangle|=\left|\frac{\overrightarrow{D_1E}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{D_1E}||\boldsymbol{n}|}\right|=\left|\frac{1-\frac{1}{2}-1}{\frac{3}{2}\times\sqrt{3}}\right|=\frac{\sqrt{3}}{9}$.

所以D_1E与平面BC_1D的夹角的正弦值为$\frac{\sqrt{3}}{9}$.

20.**证明**：以A为坐标原点，AD,AB,AP所在直线分别为x轴，y轴，z轴，建立如图所示空间直角坐标系$Axyz$，



(第 20 题图)

则$P(0,0,1),B(0,1,0),F\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),D(\sqrt{3},0,0)$，

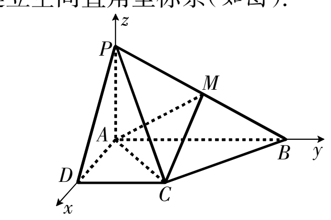
设$BE=x(0\leqslant x\leqslant\sqrt{3})$，

则$E(x,1,0)$，

$\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{AF}=(x,1,-1)\cdot\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=0$，

所以$x\in[0,\sqrt{3}]$时都有$PE\perp AF$，即无论点E在BC边的何处，都有$PE\perp AF$.

21.(1)**证明**：以A为坐标原点，AD,AB,AP所在直线分别为x轴，y轴，z轴建立空间直角坐标系(如图).



(第 21 题图)

则$A(0,0,0),B(0,2,0),C(1,1,0),D(1,0,0),P(0,0,1),M\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$.

因为$\overrightarrow{AP}=(0,0,1),\overrightarrow{DC}=(0,1,0)$，

且$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{DC}=0$，所以$AP\perp DC$.

由题设知$AD\perp DC$，且AP与AD是平面PAD内的两条相交直线，由此得$DC\perp$平面PAD.又$DC\subset$平面PCD，故平面$PAD\perp$平面PCD.

(2)**解**：因为$\overrightarrow{AC}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{PB}=(0,2,-1)$，

故$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{2},|\overrightarrow{PB}|=\sqrt{5},\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{PB}=2$，

所以$\cos\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{PB}\rangle=\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{PB}|}=\frac{\sqrt{10}}{5}>0$，

故$0<\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{PB}\rangle<\frac{\pi}{2}$，

所以AC与PB所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{10}}{5}$.

(3)**解**：由$\overrightarrow{AM}=\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{AC}=(1,1,0)$，

知平面AMC的一个法向量为$\boldsymbol{n}_1=(1,-1,2)$.

由$\overrightarrow{BM}=\left(0,-1,\frac{1}{2}\right),\overrightarrow{CB}=(-1,1,0)$，

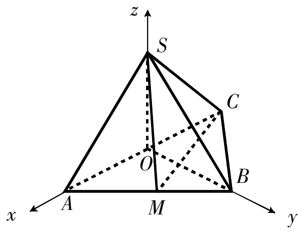
知平面BMC的一个法向量为$\boldsymbol{n}_2=(1,1,2)$.

所以$\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{2}{3}$.

设二面角$A-MC-B$为θ，则$|\cos\theta|=|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle|=\frac{2}{3}$.

结合图形可知，二面角$A-MC-B$的余弦值为$-\frac{2}{3}$.

22.**解**：(1)取AC的中点O为坐标原点，建立空间直角坐标系(如图所示)，则$A(2,0,0),C(-2,0,0),S(0,0,2),B(0,2\sqrt{3},0),M(1,\sqrt{3},0)$， ③



(第 22 题图)

所以$\overrightarrow{MS}=(-1,-\sqrt{3},2)$,$\overrightarrow{MC}=(-3,-\sqrt{3},0)$,$\overrightarrow{OS}=(0,0,2)$.

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 是平面 SMC 的法向量,则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MS}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MC}=0,\end{cases}$

即$\begin{cases}-x-\sqrt{3}y+2z=0,\\ -3x-\sqrt{3}y=0.\end{cases}$

令 $x=-1$,得 $\boldsymbol{n}=(-1,\sqrt{3},1)$.

易知$\overrightarrow{OS}$为平面 AMC 的一个法向量,

所以 $\cos\langle\overrightarrow{OS},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{OS}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{OS}||\boldsymbol{n}|}$

$=\dfrac{2}{2\times\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

因为二面角 $S-CM-A$ 为锐角,所以二面角 $S-CM-A$ 的余弦值为$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

(2)因为$\overrightarrow{MB}=(-1,\sqrt{3},0)$,由(1)知平面 SMC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(-1,\sqrt{3},1)$,

所以点 B 到平面 SMC 的距离为

$d=\dfrac{|\overrightarrow{MB}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{|1+3+0|}{\sqrt{5}}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$.

第 10 期

第 2~3 版章节测试题参考答案

一、选择题

1.A 2.C 3.B 4.A 5.B 6.C 7.B 8.C 9.C 10.C 11.A 12.B

二、填空题

13.5

14.$\pm\sqrt{39}$

15.$\sqrt{98+56\sqrt{2}}$

提示:$\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$,

所以$\overrightarrow{AC'}^2=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'})^2$

$=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{AA'}^2+2(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA'})$

$=25+9+49+2(5\times3\cos60^\circ+5\times7\cos45^\circ+3\times7\cos45^\circ)$

$=98+56\sqrt{2}$,

所以$|\overrightarrow{AC'}|=\sqrt{98+56\sqrt{2}}$,

即AC'的长为$\sqrt{98+56\sqrt{2}}$.

16.①②③

三、解答题

17.**解**:因为 $BG=2GD$,

所以$\overrightarrow{BG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BD}$.

又$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{b}$,

所以$\overrightarrow{PG}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BG}=\boldsymbol{b}+\dfrac{2}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{b})$

$=\dfrac{2}{3}\boldsymbol{a}-\dfrac{1}{3}\boldsymbol{b}+\dfrac{2}{3}\boldsymbol{c}$.

18.**解**:$3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=3(3,5,-4)-2(2,1,8)=(5,13,-28)$,

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(3,5,-4)\cdot(2,1,8)=6+5-32=-21$.

因为 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}\perp z$ 轴,所以$(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})\cdot(0,0,1)=(3\lambda+2\mu,5\lambda+\mu,-4\lambda+8\mu)\cdot(0,0,1)=-4\lambda+8\mu=0$.

即当 λ,μ 满足$-4\lambda+8\mu=0$时,可使得 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 与 z 轴垂直.

19.**证明**:设$|AB|=2a$,$|AD|=2b$,$|AP|=2c$,以A为坐标原点,以AB,AD,AP所在直线分别为x,y,z轴建立空间直角坐标系,则$B(2a,0,0)$,$C(2a,2b,0)$,$D(0,2b,0)$,$P(0,0,2c)$,$E(a,0,0)$,$F(a,b,c)$.

(1)因为$\overrightarrow{EF}=(0,b,c)$,$\overrightarrow{AP}=(0,0,2c)$,$\overrightarrow{AD}=(0,2b,0)$,

所以$\overrightarrow{EF}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AD})$,

所以$\overrightarrow{EF}$与$\overrightarrow{AP}$,$\overrightarrow{AD}$共面.

又因为点$E\notin$平面PAD,所以$EF\parallel$平面PAD.

(2)因为$\overrightarrow{CD}=(-2a,0,0)$,所以$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{EF}=(-2a,0,0)\cdot(0,b,c)=0$,所以$CD\perp EF$.

20.**解**:如图,以 D 为坐标原点,分别以 DA,DC,DD_1 所在直线为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系 $D-xyz$.

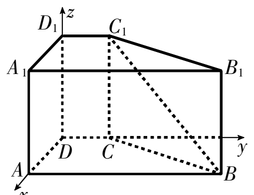
则 $C_1(0,1,2)$,$B(2,4,0)$,

所以$\overrightarrow{BC_1}=(-2,-3,2)$,$\overrightarrow{CD}=(0,-1,0)$.

设$\overrightarrow{BC_1}$与$\overrightarrow{CD}$所成的角为 θ,

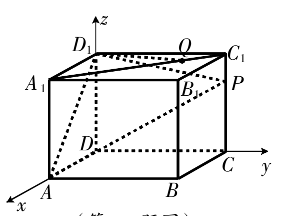
则 $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{BC_1}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{BC_1}||\overrightarrow{CD}|}=\dfrac{3\sqrt{17}}{17}$.

所以异面直线 BC_1 与 DC 所成角的余弦值为$\dfrac{3\sqrt{17}}{17}$.



(第 20 题图)

21.**解**:(1)如图,建立空间直角坐标系,则 $A(1,0,0)$,$B(1,1,0)$,$P(0,1,m)$,$C(0,1,0)$,$D(0,0,0)$,$B_1(1,1,1)$,$D_1(0,0,1)$.



(第 21 题图)

所以$\overrightarrow{BD}=(-1,-1,0)$,$\overrightarrow{BB_1}=(0,0,1)$,$\overrightarrow{AP}=(-1,1,m)$,$\overrightarrow{AC}=(-1,1,0)$.

又由$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$,$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BB_1}=0$,知$\overrightarrow{AC}$为平面 BDD_1B_1 的一个法向量.

设 AP 与平面 BDD_1B_1 的夹角为 θ,

则 $\sin\theta=\left|\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)\right|$

$=\dfrac{|\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+m^2}}$,

依题意有$\dfrac{2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+m^2}}=\dfrac{1}{3}$,

解得 $m=4$,或 $m=-4$(舍去).

故当 $m=4$ 时,直线 AP 与平面 BDD_1B_1 夹角的正弦值为$\dfrac{1}{3}$.

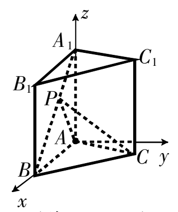
(2)若在线段 A_1C_1 上存在这样的点 Q,设此点的横坐标为 x,则 $Q(x,1-x,1)$,

所以$\overrightarrow{D_1Q}=(x,1-x,0)$.

依题意,对任意的 m 要使 D_1Q 在平面 APD_1 上的投影垂直于 AP,即$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{D_1Q}=0\Leftrightarrow-x+(1-x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$.

即 Q 为 A_1C_1 的中点时,满足题设的要求.

22.**解**:建立如图所示的空间直角坐标系,则$B(a,0,0)$,$A_1(0,0,a)$,$C\left(\dfrac{a}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}a,0\right)$.



(第 22 题图)

设$P(x,0,z)$.

(1)由$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AB}=0$,

得$\left(x-\dfrac{a}{2}\right)\cdot a=0$,得$x=\dfrac{a}{2}$.

所以P为A_1B的中点,即$\dfrac{A_1P}{PB}=1$时,$PC\perp AB$.

(2)当$\dfrac{A_1P}{PB}=\dfrac{2}{3}$时,由$\overrightarrow{A_1P}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{PB}$,得$(x,0,z-a)=\dfrac{2}{3}\cdot(a-x,0,-z)$,

即$\begin{cases}3x=2a-2x,\\ 3(z-a)=-2z,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=\dfrac{2}{5}a,\\ z=\dfrac{3a}{5},\end{cases}$

即$P\left(\dfrac{2}{5}a,0,\dfrac{3a}{5}\right)$.

设平面PAC的法向量$\boldsymbol{n}=(x',y',z')$,

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}\dfrac{2}{5}ax'+\dfrac{3a}{5}z'=0,\\ \dfrac{a}{2}x'+\dfrac{\sqrt{3}}{2}ay'=0.\end{cases}$

令$x'=3$,则$y'=-\sqrt{3}$,$z'=-2$,

所以$\boldsymbol{n}=(3,-\sqrt{3},-2)$.

又平面ABC的一个法向量为$\boldsymbol{n_0}=(0,0,1)$,

故$\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{n_0}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n_0}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{n_0}|}=\dfrac{-2}{4\times1}=-\dfrac{1}{2}$.

设二面角$P-AC-B$为θ,结合图形知θ为锐角.

则$\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{n_0}\rangle|=\dfrac{1}{2}$,故$\theta=60^\circ$.

所以二面角$P-AC-B$的大小为60°.

(3)设点C_1到平面PAC的距离为d,

则$d=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{C_1C}|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2a}{4}=\dfrac{a}{2}$.

所以点C_1到平面PAC的距离为$\dfrac{a}{2}$.

第 11 期

第 2~3 版综合检测题(一)参考答案

一、选择题

1.A 2.A 3.B 4.B 5.D 6.A 7.A

提示:由已知,得$y_0+\dfrac{p}{2}=3y_0$,其中$p=8$,所以$y_0=2$.

8.B

提示:因为$\boldsymbol{a}=(2,-1,3)$,$\boldsymbol{b}=(-4,2,x)$,$\boldsymbol{c}=(1,-x,2)$,$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(-2,1,x+3)$,且$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{c}$,所以$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$,即$-2-x+2\cdot(x+3)=0$,解得$x=-4$,故选B.

9.C

10.A

11.D

提示:由题意,翻折后$AC=BC=AB$,所以$\angle ABC=60^\circ$,

$|\overrightarrow{BP}|^2=\left|\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}\right|^2=\dfrac{9}{4}$.

12.C

提示:若$|PA|+|PB|=4=|AB|$,则点P的轨迹是线段AB,故A错误;若$|PA|-|PB|=3<|AB|$,则点P的轨迹是双曲线的左支,故B错误;对于C,设$M(x,y)$,则$y^2=\dfrac{3}{4}(4-x^2)$,$k_{AM}\cdot k_{BM}=\dfrac{y}{x-2}\cdot\dfrac{y}{x+2}=\dfrac{y^2}{x^2-4}=-\dfrac{3}{4}$,故正确;同理,得D中$k_{AM}\cdot k_{BM}=\dfrac{3}{4}$,故错误.故选C.

二、填空题

13.$a=1$,$b=-1$(答案不唯一)

14.$\dfrac{9}{2}$

15.$\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

提示:设椭圆的长半轴长、短半轴长、半焦距分别为a、b、c,

因为$\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=0$,所以点$M$的轨迹是以原点$O$为圆心,半焦距为半径的圆.

又点M总在椭圆的内部,所以$c<b$,$c^2<b^2=a^2-c^2$,即$2c^2<a^2$.

所以$e^2=\dfrac{c^2}{a^2}<\dfrac{1}{2}$,而$e\in(0,1)$,

故$e\in\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

16.①③

提示:①因为两曲线的焦点都在x轴上,半焦距c相等都是$\sqrt{34}$,所以双曲线$\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{9}=1$与椭圆$\dfrac{x^2}{35}+y^2=1$有相同的焦点,正确;

②过点$P(2,1)$的抛物线的标准方程有两条,除了$y^2=\dfrac{1}{2}x$,还有一条焦点在y轴上的抛物线,不正确;

③已知双曲线C:$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$,若它的离心率为$\sqrt{5}$,则$\dfrac{c}{a}=\sqrt{5}$,所以$\dfrac{b}{a}=2$,所以双曲线$C$的一条渐近线方程为$y=2x$,正确;

④由解析式知,半焦距为1,$\triangle PF_1F_2$的面积的最大值为2,即$bc=2$,可得$b=2$,故$m=4$,不正确.

三、解答题

17.**解**:逆命题为:若$a+b$是偶数,则a,b都是奇数.它是假命题.

否命题:若a,b不都是奇数,则$a+b$不是偶数.它是假命题.

逆否命题为:若$a+b$不是偶数,则a,b不都是奇数.它是真命题.

18.**解**:(1)$A=\{x|-2\leqslant x\leqslant5\}$,$B=\{x|m+1\leqslant x\leqslant2m-1\}$,$B\neq\varnothing$.

因为"命题 p:$\forall x\in B$,则 $x\in A$"是真命题,所以 $B\subseteq A$,$B\neq\varnothing$.

所以$\begin{cases}m+1\leqslant2m-1,\\ m+1\geqslant-2,\\ 2m-1\leqslant5.\end{cases}$ 解得 $2\leqslant m\leqslant3$.

所以实数 m 的取值范围为$[2,3]$.

(2)若 q 为真,则 $A\cap B\neq\varnothing$.

因为 $B\neq\varnothing$,

所以 $m+1\leqslant2m-1$,即 $m\geqslant2$.

所以$\begin{cases}m+1\leqslant5,\\ m\geqslant2,\end{cases}$所以 $2\leqslant m\leqslant4$.

所以实数 m 的取值范围为$[2,4]$.

19.**解**:(1)由离心率$e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}=\sqrt{2}$,得$a=b$,则可设双曲线的方程为$x^2-y^2=\lambda$.

将点$(4,-\sqrt{10})$代入,得$\lambda=6$.所以该双曲线的标准方程为$\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{y^2}{6}=1$.

(2)结合(1)可得$|F_1F_2|=2\sqrt{6+6}=4\sqrt{3}$.又$M(4,-\sqrt{10})$,所以$\triangle F_1MF_2$的面积$S=\dfrac{1}{2}\times4\sqrt{3}\times\sqrt{10}=2\sqrt{30}$.

20.(1)**解**:以O为坐标原点,OA,OC,OO_1所在直线分别为x,y,z轴,建立空间直角坐标系,则$B(1,1,0)$,$A_1(1,0,1)$,$C_1(0,1,1)$.

设$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$是平面A_1BC_1的法向量,则$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BA_1}=0$,$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC_1}=0$,而$\overrightarrow{BA_1}=(0,-1,1)$,$\overrightarrow{BC_1}=(-1,0,1)$,所以$\begin{cases}-y+z=0,\\ -x+z=0,\end{cases}$即$x=y=z$.

取$z=1$,则$x=y=1$,故$\boldsymbol{n}=(1,1,1)$.

所以$\boldsymbol{n}=(1,1,1)$为平面A_1BC_1的一个法向量.

(2)**证明**:因为$E\left(0,\dfrac{2}{3},1\right)$,$F\left(0,1,\dfrac{2}{3}\right)$,则$\overrightarrow{EF}=\left(0,\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{3}\right)$,

又$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EF}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}=0$,

所以$\overrightarrow{EF}\perp\boldsymbol{n}$,所以$EF\parallel$平面$A_1BC_1$.

21.(1)**证明**:以点 C 为坐标原点,建立如图所示的空间直角坐标系,则 $C(0,0,0)$,$B(\sqrt{2},0,0)$,$A_1(0,1,1)$,$D\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$,$M\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},1,0\right)$,$B_1(\sqrt{2},1,0)$,

所以$\overrightarrow{CD}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$,

$\overrightarrow{BD}=\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$,

$\overrightarrow{BM}=\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},1,0\right)$.

因为$\begin{cases}\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\\ \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{BM}=0,\end{cases}$

所以 $CD\perp BD$,$CD\perp BM$,

所以 $CD\perp$平面 BDM.

(2)**解**:$\overrightarrow{BB_1}=(0,1,0)$,$\overrightarrow{CB}=(\sqrt{2},0,0)$,

设平面 B_1BD 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$,

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{BB_1}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{BD}=0,\end{cases}$

即$\begin{cases}y=0,\\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{2}=0,\end{cases}$

令 $x=1$,得 $\boldsymbol{n}_1=(1,0,\sqrt{2})$.

设平面 CBD 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x,y,z)$,

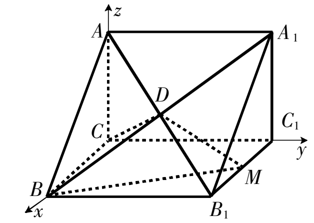
则$\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{CB}=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{CD}=0,\end{cases}$

即$\begin{cases}\sqrt{2}x=0,\\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}x+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{2}=0,\end{cases}$

令 $y=1$,得 $\boldsymbol{n}_2=(0,1,-1)$.

所以 $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,

所以二面角 $C-BD-B_1$ 的余弦值为$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.



(第 21 题图)

22.(1)**解**:由题意可得$p=2$,所以圆S的圆心为$S(0,1)$,半径为1,所以$|BC|=2$.

若线段AB,BC,CD的长按此顺序构成一个等差数列,

则$|AB|+|CD|=2|BC|=4$.

设$A(x_1,y_1)$,$D(x_2,y_2)$.

由$\begin{cases}x^2=4y,\\ y=kx+1,\end{cases}$得$x^2-4kx-4=0$.

所以$x_1+x_2=4k$,$y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2=4k^2+2$,$|AB|+|CD|=|AD|-|BC|=y_1+y_2+2-2=4k^2+2=4$,结合$k>0$,解得$k=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

(2)**证明**:由(1)可知$Q(2k,2k^2+1)$.

当$k=0$时,直线l'与抛物线没有两个交点,所以$k\neq0$.

用$-\dfrac{1}{k}$替换k可得$P\left(-\dfrac{2}{k},\dfrac{2}{k^2}+1\right)$,

计算得直线PQ的斜率$k_{PQ}=\dfrac{k^2-1}{k}$.

所以直线PQ的方程为$y-(2k^2+1)=$