第 12 期
第 2~3 版综合检测题(二)参考答案

一、选择题

1~5.BDBBB

6.D

提示：由已知得$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OC}=2(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})+(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})$，整理可得$\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OC}$，故选D.

7.A

8.D

提示：以D为原点，以DA，DC，DD_1分别为x，y，z轴建立空间直角坐标系，则$A(1,0,0)$，$C_1(0,1,1)$，

设$P(x,y,1)(0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1)$.

则$\overrightarrow{PA}=(1-x,-y,-1)$，$\overrightarrow{PC_1}=(-x,1-y,0)$，

于是$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC_1}=x^2-x+y^2-y$

$=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$.

因为$0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1$，

所以$0\leqslant\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant\frac{1}{4}$，$0\leqslant\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant\frac{1}{4}$，

故$-\frac{1}{2}\leqslant\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\leqslant 0$.

9.A　10.B

11.A

提示：所有椭圆和双曲线的焦距均为$|AB|=10$，则$c=5$.对于过点M的椭圆，有$2a_M=|MA|+|MB|=3+10=13$，所以$a_M=\frac{13}{2}$，$e_M=\frac{10}{13}$.同理，$a_N=6$，$e_N=\frac{5}{6}$；$a_P=2$，$e_P=\frac{5}{2}$；$a_Q=\frac{5}{2}$，$e_Q=2$.所以$e_M<e_N<e_Q<e_P$.

12.A

提示：$4-b^2=1$，故$b^2=3$，

椭圆方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

联立$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$与$y=kx+2$，得$(4k^2+3)x^2+16kx+4=0$，

有$\Delta=(16k)^2-16(4k^2+3)\leqslant 0$，

解得$-\frac{1}{2}\leqslant k\leqslant\frac{1}{2}$.

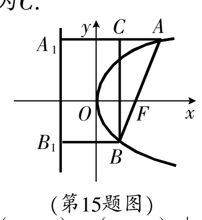
二、填空题

13.若$x\notin\mathbf{R}$，则$x^2+1\leqslant 1$

14.2

15.$\frac{8}{3}$

提示：如图，过点A，B分别作准线的垂线，垂足为A_1，B_1，过点B作AA_1的垂线，垂足为C.



(第15题图)

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$|BF|=m$，则$|AF|=3m$，由抛物线的定义，知$|BB_1|=m$，$|AA_1|=3m$.

在$\triangle ABC$中，

因为$|AC|=2m$，$|AB|=4m$，

所以$k_{AB}=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$.

所以直线AB的方程为

$y=\sqrt{3}(x-1)$.

与抛物线方程联立，消去y，

得$3x^2-10x+3=0$.

所以弦AB的中点到抛物线准线的距离为$\frac{x_1+x_2}{2}+1=\frac{5}{3}+1=\frac{8}{3}$.

16.$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},\sqrt{2}\right)$

三、解答题

17.**证明**：若$a-b=1$，则$a=b+1$.故$a^2-b^2+2a-4b-3=(b+1)^2-b^2+2(b+1)-4b-3=0$.

因此，原命题的逆否命题为真命题，从而原命题也为真命题，得证.

18.**解**：若p为真命题，则

$\begin{cases}a-1>0,\\2(a-1)-1>0,\end{cases}$或$\begin{cases}a-1<0,\\1\cdot(a-1)-1>0,\end{cases}$

解得$a>\frac{3}{2}$；

若q为真命题，则$a^2-4<0$，

解得$-2<a<2$.

(1)若p且q是真命题，则p真q真，

所以实数a的取值范围为$\left(\frac{3}{2},2\right)$.

(2)由题意，得$\neg p$，q一真一假，即p，q同真假.

若p真q真，由(1)知$\frac{3}{2}<a<2$；

若p假q假，则$\begin{cases}a\leqslant-\frac{3}{2},\\a\leqslant-2\text{ 或 }a\geqslant 2\end{cases}\Rightarrow a\leqslant-2$.

所以实数a的取值范围为

$(-\infty,-2]\cup\left(\frac{3}{2},2\right)$.

19.**解**：(1)因为$e\geqslant\sqrt{2}k$，所以$\frac{\sqrt{3+m}}{\sqrt{3}}\geqslant\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{3}}$，解得$m\leqslant 3$.又$m>0$，所以实数$m$的取值范围为$(0,3]$.

(2)由$m^2-(2a+2)m+a(a+2)\leqslant 0$，得$(m-a)(m-a-2)\leqslant 0$，所以$a\leqslant m\leqslant a+2$.

因为p是q的必要不充分条件，所以$\begin{cases}a>0,\\a+2\leqslant 3,\end{cases}$解得$0<a\leqslant 1$.

所以实数a的取值范围为$(0,1]$.

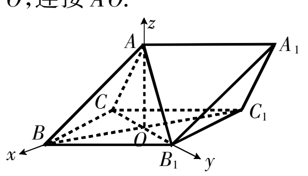
20.**证明**：取基底$\overrightarrow{AA'}$，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$.

(1)因为$\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{ED'}+\overrightarrow{D'G}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{EG}$，所以$EG/\!/AC$.

(2)因为$\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{FD'}+\overrightarrow{D'G}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}=2\overrightarrow{FG}$，所以$FG/\!/AB'$.

又由(1)$EG/\!/AC$，所以平面$EFG/\!/$平面$AB'C$.

21.(1)**证明**：如图，连接BC_1，交B_1C于O，连接AO.



(第21题图)

因为侧面BB_1C_1C为菱形，

所以$B_1C\perp BC_1$，且O为B_1C与BC_1的中点.

又$AB\perp B_1C$，

所以$B_1C\perp$平面ABO，

故$B_1C\perp AO$.

又$B_1O=CO$，故$AC=AB_1$.

(2)因为$AC\perp AB_1$，且O为B_1C的中点，所以$AO=CO$，

又因为$AB=BC$，$\triangle BOA\cong\triangle BOC$.

故$OA\perp OB$，从而OA，OB，OB_1两两垂直.以O为坐标原点，$\overrightarrow{OB}$的方向为x轴正方向，$|\overrightarrow{OB}|$为单位长，建立如图所示的空间直角坐标系$O-xyz$.

因为$\angle CBB_1=60^\circ$，

所以$\triangle CBB_1$为等边三角形.

又$AB=BC$，则$A\left(0,0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$，$B(1,0,0)$，$B_1\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3},0\right)$，$C\left(0,-\frac{\sqrt{3}}{3},0\right)$，

$\overrightarrow{AB_1}=\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$，$\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{AB}=\left(1,0,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$，$\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{BC}=\left(-1,-\frac{\sqrt{3}}{3},0\right)$.

设$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$是平面AA_1B_1的法向量，则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB_1}=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1B_1}=0,\end{cases}$

即$\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{3}y-\frac{\sqrt{3}}{3}z=0,\\x-\frac{\sqrt{3}}{3}z=0,\end{cases}$

所以可取$\boldsymbol{n}=(1,\sqrt{3},\sqrt{3})$.

设$\boldsymbol{m}$是平面$A_1B_1C_1$的法向量，则

$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1B_1}=0,\\\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{B_1C_1}=0,\end{cases}$

同理可取$\boldsymbol{m}=(1,-\sqrt{3},\sqrt{3})$.

则$\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\frac{1}{7}$.

所以平面AA_1B_1与平面$A_1B_1C_1$夹角的余弦值为$\frac{1}{7}$.

22.**解**：(1)由题可知$\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2},\\a=2\sqrt{2},\end{cases}$

解得$\begin{cases}c=2,\\a=2\sqrt{2}.\end{cases}$所以$b^2=a^2-c^2=4\Rightarrow b=2$.

所以椭圆C的方程为$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$.

(2)假设存在椭圆上的一点$P(x_0,y_0)$，使得直线PF_1，PF_2与以Q为圆心的圆相切，则Q到直线PF_1，PF_2的距离相等，$F_1(-2,0)$，$F_2(2,0)$，

PF_1：$(x_0+2)y-y_0x-2y_0=0$，

PF_2：$(x_0-2)y-y_0x+2y_0=0$，

$d_1=\frac{|3y_0|}{\sqrt{(x_0+2)^2+y_0^2}}=\frac{|y_0|}{\sqrt{(x_0-2)^2+y_0^2}}=d_2$，

整理，得$8x_0^2-40x_0+32+8y_0^2=0$.

因为点在椭圆上，所以$x_0^2+2y_0^2=8$.

解得$x_0=2$，或$x_0=8$(舍去)，

$x_0=2$时，$y_0=\pm\sqrt{2}$，$r=1$.

所以椭圆上存在点P，其坐标为$(2,\sqrt{2})$或$(2,-\sqrt{2})$，使得直线PF_1，PF_2与以Q为圆心的圆$(x-1)^2+y^2=1$相切.

第 9 期
第 3 版同步周测题参考答案

一、选择题

1.A　2.C　3.A　4.B　5.C　6.A

7.D

8.C

9.C

提示：当直线l的斜率不存在时，直线l过双曲线的右顶点，满足要求；当直线l的斜率存在时，与两渐近线平行的直线满足要求，故共有3条.

10.D

提示：设双曲线方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，点$M$在第一象限，则$|AB|=|BM|$，$\angle ABM=120^\circ$.过点$M$作$MN\perp x$轴，垂足为$N$.在$\mathrm{Rt}\triangle MNB$中，$|MB|=2a$，$|BN|=a$，$|MN|=\sqrt{3}a$，故$M(2a,\sqrt{3}a)$，代入双曲线方程，得$a^2=b^2=c^2-a^2$，即$c^2=2a^2$，所以$e=\sqrt{2}$.

11.D

提示：设双曲线的两个焦点分别是$F_1(-5,0)$与$F_2(5,0)$，则这两点正好是两圆的圆心，当且仅当点P与M，F_1三点共线以及P与N，F_2三点共线时所求的值最大，此时$|PM|-|PN|=(|PF_1|+2)-(|PF_2|-1)=6+3=9$，故选D.

12.B

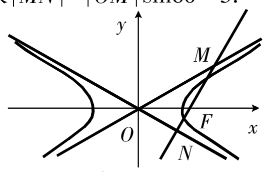
提示：由已知，得$F(2,0)$，渐近线方程为$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$，故$\angle MON=60^\circ$.

若$\triangle OMN$为直角三角形，不妨设$\angle ONM=90^\circ$(如图所示)，

则易得直线MN的倾斜角$\angle MFx=60^\circ$，斜率$k=\sqrt{3}$，方程为$y=\sqrt{3}(x-2)$.

与渐近线方程$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$联立，解得$M(3,\sqrt{3})$，则$|OM|=2\sqrt{3}$.

故$|MN|=|OM|\sin 60^\circ=3$.



(第12题图)

二、填空题

13.$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1(y<0)$

提示：由已知关系式可知点M与$A(0,5)$，$B(0,-5)$的距离之差等于8，则点M的轨迹是焦点在y轴上的双曲线的下支，其中$a=4$，$c=5$，则$b^2=9$.所以点M的轨迹方程为$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1(y<0)$.

14.$y=4x^2$

提示：设$M(x,y)$，$B(x_0,y_0)$，则$y_0=2x_0^2+1$.

又M为AB的中点，所以$\begin{cases}x=\frac{0+x_0}{2},\\y=\frac{y_0-1}{2},\end{cases}$

即$\begin{cases}x_0=2x,\\y_0=2y+1,\end{cases}$

将其代入$y_0=2x_0^2+1$，得$2y+1=2\times(2x)^2+1$，即$y=4x^2$.

15.$\frac{4}{5}$

提示：由方程$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$知$a^2=16$，$b^2=9$，即$a=4$，$c=\sqrt{16+9}=5$.在$\triangle ABP$中，利用正弦定理和双曲线的定义知，$\frac{|\sin A-\sin B|}{\sin P}=\frac{||PB|-|PA||}{|AB|}=\frac{2a}{2c}=\frac{2\times 4}{2\times 5}=\frac{4}{5}$.

16.$12\sqrt{6}$

提示：设左焦点为F_1，$|PF|-|PF_1|=2a=2$，

所以$|PF|=2+|PF_1|$，$\triangle APF$的周长为$|AF|+|AP|+|PF|=|AF|+|AP|+2+|PF_1|$，$\triangle APF$周长最小即为$|AP|+|PF_1|$最小，当$A$，$P$，$F_1$在一条直线上时最小，过$AF_1$的直线方程为$\frac{x}{-3}+\frac{y}{6\sqrt{6}}=1$，与$x^2-\frac{y^2}{8}=1$联立，解得$P$点坐标为$(-2,2\sqrt{6})$，此时$S=S_{\triangle AF_1F}-S_{\triangle F_1PF}=12\sqrt{6}$.

三、解答题

17.**解**：因为点B与点$A(-1,1)$关于原点O对称，所以点B的坐标为$(1,-1)$.

设P点的坐标为(x,y)，

由条件可得$\frac{y-1}{x+1}\cdot\frac{y+1}{x-1}=-\frac{1}{3}$，

化简，得$x^2+3y^2=4(x\neq\pm 1)$，故动点P的轨迹方程为$x^2+3y^2=4(x\neq\pm 1)$.

18.**解**：椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$的焦点为$F_1(-\sqrt{7},0)$，$F_2(\sqrt{7},0)$，顶点为$A_1(-4,0)$，$A_2(4,0)$，$B_1(0,-3)$，$B_2(0,3)$.

故所求双曲线的焦点在x轴上，$2c=|A_1A_2|=8$，所以$c=4$；$2a=2\sqrt{7}$，所以$a=\sqrt{7}$.所以$b^2=c^2-a^2=9$.

故所求双曲线的方程为$\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{9}=1$.

19.**解**：双曲线中，$a=3$，$c=5$.不妨设$|PF_1|>|PF_2|$，则$|PF_1|-|PF_2|=2a=6$.又$|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot\cos 60^\circ$，而$|F_1F_2|=2c=10$，得$|PF_1|^2+|PF_2|^2-|PF_1|\cdot|PF_2|=(|PF_1|-|PF_2|)^2+|PF_1|\cdot|PF_2|=100$，所以$|PF_1|\cdot|PF_2|=64$.故$\triangle F_1PF_2$的面积$S=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|\sin 60^\circ=16\sqrt{3}$.

20.**解**：直线l的方程为$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，即$bx+ay-ab=0$，则点$(1,0)$到直线$l$的距离$d_1=\frac{b(a-1)}{\sqrt{a^2+b^2}}$，点$(-1,0)$到直线$l$的距离$d_2=\frac{b(a+1)}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$s=d_1+d_2=\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{2ab}{c}\geqslant\frac{4}{5}c$，即$5a\sqrt{c^2-a^2}\geqslant 2c^2$，

于是有$5\sqrt{e^2-1}\geqslant 2e^2$，

即$4e^4-25e^2+25\leqslant 0$，得$\frac{5}{4}\leqslant e^2\leqslant 5$.

又$e>1$，所以e的取值范围是$\left[\frac{\sqrt{5}}{2},\sqrt{5}\right]$.

21.**解**：以直线AB为x轴，线段AB的垂直平分线为y轴，建立直角坐标系，如下图，则$A(3,0)$，$B(-3,0)$.

因为$|PB|-|PA|=4<6$，

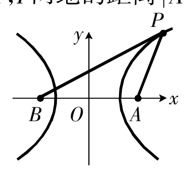
所以P在双曲线的右支上，且$a=2$，$c=3$，$b=\sqrt{5}$.

所以P在双曲线$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$右支上.

因为P在A的北偏东30°方向，

所以$k_{AP}=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$.

所以AP所在直线的方程为$y=\sqrt{3}\cdot(x-3)$.与双曲线方程联立，解得点P的坐标为$(8,5\sqrt{3})$或$\left(\frac{16}{7},-\frac{5\sqrt{3}}{7}\right)$(舍去)，所以$A$，$P$两地的距离$|AP|=10$千米.



(第21题图)

22.**解**：(1)双曲线的右焦点为$F(\sqrt{2},0)$，渐近线方程为$x\pm y=0$，

则圆心F到渐近线的距离$d=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$.所以圆的方程为$(x-\sqrt{2})^2+y^2=1$.

(2)设$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，经过点P的直线方程为$y=kx-1$(k显然存在).

联立方程组$\begin{cases}x^2-y^2=1,\\y=kx-1,\end{cases}$消去$y$，

整理得$(1-k^2)x^2+2kx-2=0$.

所以$\Delta=(2k)^2-4(1-k^2)(-2)=8-4k^2>0$，且$x_1+x_2=\frac{-2k}{1-k^2}>0$，$x_1x_2=\frac{-2}{1-k^2}>0$，解得$1<k<\sqrt{2}$.又$y_1+y_2=k(x_1+x_2)-2=\frac{-2}{1-k^2}$，

所以线段MN的中点为$\left(\frac{-k}{1-k^2},\frac{-1}{1-k^2}\right)$，

垂直平分线的方程为

$y+\frac{1}{1-k^2}=-\frac{1}{k}\left(x+\frac{k}{1-k^2}\right)$.

令$x=0$，得截距$t=\frac{2}{k^2-1}>2$.

故t的取值范围是$(2,+\infty)$.

第 10 期
第 2~3 版章节测试题参考答案

一、选择题

1.D 2.A 3.A 4.D 5.D 6.C

7.D

8.D

提示： 据题意知，$\triangle FPM$为等边三角形，$|PF|=|PM|=|FM|$，所以PM垂直于抛物线的准线.设$P\left(\frac{m^2}{4},m\right)$，则$M(-1,m)$，$|PM|=1+\frac{m^2}{4}$，又由$F(1,0)$，$|PM|=|FM|$，得$1+\frac{m^2}{4}=\sqrt{(1+1)^2+m^2}$，得$m=2\sqrt{3}$，所以等边三角形的边长为4，其面积为$4\sqrt{3}$，故选D.

9.C

10.A

提示： 设右焦点为$F_1(2,0)$，则$|MF_1|+|MF|=2a=6$. 所以$|MA|+|MF|=|MA|-|MF_1|+6$.又$-|AF_1|\leqslant|MA|-|MF_1|\leqslant|AF_1|$(当$M,A,F_1$三点共线时等号成立)，所以$6-\sqrt{2}\leqslant|MA|+|MF|\leqslant6+\sqrt{2}$.

11.A

提示： 因为$|AF|=6,\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$，

所以$|FB|=3$.设$|CF|=x$，

由抛物线的定义，

可得$\frac{x}{3}=\frac{6-x}{6+3}$，解得$x=\frac{3}{2}$.

故$|BC|=|CF|+|BF|=\frac{9}{2}$.

12.A

提示： 由题意，知$A(a,0),B\left(c,\frac{b^2}{a}\right)$，$C\left(c,-\frac{b^2}{a}\right)$.由双曲线的对称性，知$D$在$x$轴上.设$D(x,0)$，由$BD\perp AC$，得$\frac{\frac{b^2}{a}-0}{c-x}\cdot\frac{\frac{b^2}{a}}{a-c}=-1$，解得$c-x=\frac{b^4}{a^2(c-a)}<a+\sqrt{a^2+b^2}=a+c$. 所以$\frac{b^4}{a^2}<c^2-a^2=b^2\Rightarrow\frac{b^2}{a^2}<1\Rightarrow-1<\frac{b}{a}<1$.因此渐近线斜率的取值范围是$(-1,0)\cup(0,1)$.

二、填空题

13.2

提示： 由抛物线的定义，得动点Q到焦点的距离的最小值为顶点到准线的距离，即$\frac{p}{2}=1,p=2$.

14.8

提示： 根据双曲线的定义，有$|MF_2|-|MF_1|=2a=4$，$|NF_2|-|NF_1|=2a=4$，两式相加，得$|MF_2|+|NF_2|-|MN|=8$.

15.$x+2y-4=0$

提示： 由$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=4$得$x\cdot1+y\cdot2=4$，因此所求动点$P$的轨迹方程为$x+2y-4=0$.

16.②③

提示： 易知F_1,F_2,E_1,E_2分别是两个椭圆的焦点，若点P在椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$上且不是两个椭圆的交点，则$P$到$F_1,F_2$两点的距离之和是定值，到$E_1,E_2$两点的距离之和不是定值，故①错误；由椭圆的对称性可知②正确；曲线C所围的区域在边长为6的正方形内部且在半径为3的圆外部，由此可知③正确，④错误.

三、解答题

17.**解：** 设点$N(x,y)$.因为N是EF的中点，$F(2,0)$，所以$E(2x-2,2y)$.又E是OM的中点，$O(0,0)$，所以$M(4x-4,4y)$.将其代入抛物线方程中，得$(4y)^2=8(4x-4)$，即$y^2=2x-2$，此即为点N的轨迹方程.

18.**解：**(1)把$M\left(\frac{2}{3},-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$代入方程$y^2=2px$，

得$p=2$，因此抛物线的方程为$y^2=4x$.

(2)抛物线的准线方程为$x=-1$，所以$F_1(-1,0)$，设双曲线的右焦点为F，则$F(1,0)$，

于是$2a=|MF_1|-|MF|=\frac{7}{3}-\frac{5}{3}=\frac{2}{3}$，

因此$a=\frac{1}{3}$.

因为$c=1$，所以$b^2=c^2-a^2=\frac{8}{9}$，

于是，双曲线的方程为$\frac{x^2}{\frac{1}{9}}-\frac{y^2}{\frac{8}{9}}=1$.

19.**解：**(1)由椭圆C的一个焦点为$F(0,-\sqrt{2})$，得椭圆C焦点在y轴上，且另一个焦点为$F'(0,\sqrt{2})$，半焦距$c=\sqrt{2}$.

又点$M(1,\sqrt{2})$在椭圆C上，

所以$2a=|MF|+|MF'|=4$.

所以$a=2,b^2=a^2-c^2=2$.

所以椭圆C的方程为$\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{2}=1$.

(2)联立直线$l:2x-y-2=0$与椭圆C的方程，

解得$x=0,y=-2$，或$x=\frac{4}{3},y=\frac{2}{3}$.

所以$A(0,-2),B\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)$，

$|AB|=\sqrt{\left(\frac{4}{3}-0\right)^2+\left(\frac{2}{3}+2\right)^2}=\frac{4}{3}\sqrt{5}$.

20.**解：**(1)当k不存在时，直线l的方程为$x=1$，代入双曲线的方程，得$y=0$，即l与C有一个交点.

当k存在时，设直线l的方程为$y=k(x-1)+2$，

代入C的方程，并整理，得

$(2-k^2)x^2+2(k^2-2k)x-k^2+4k-6=0$.

当$2-k^2=0$，即$k=\pm\sqrt{2}$时，上述方程有唯一解.

当$2-k^2\neq0$，即$k\neq\pm\sqrt{2}$时，$\Delta=16(3-2k)$.由$\Delta=0$，解得$k=\frac{3}{2}$；由$\Delta>0$，解得$k<\frac{3}{2}$；由$\Delta<0$，解得$k>\frac{3}{2}$.

所以，当$k\in\{k\mid k$不存在，或$k=\pm\sqrt{2}$，或$k=\frac{3}{2}\}$时，l与C只有一个交点；当$k\in\left\{k\middle|k<\frac{3}{2}，且k\neq\pm\sqrt{2}\right\}$时，$l$与$C$有两个交点；当$k\in\left\{k\middle|k>\frac{3}{2}\right\}$时，$l$与$C$无交点.

(2)设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，由(1)知，

$x_1+x_2=\frac{2(k^2-2k)}{k^2-2}=2\times1$，解得$k=1$.

所以直线AB的方程为$x-y+1=0$.

21.**解：**(1)由题意得$F(1,0)$，l的方程为$y=k(x-1)(k>0)$.

设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$.

由$\begin{cases}y=k(x-1),\\y^2=4x,\end{cases}$得$k^2x^2-2(k^2+2)x+k^2=0$.

故$x_1+x_2=\frac{2(k^2+2)}{k^2}$.

所以$|AB|=|AF|+|BF|=x_1+x_2+p=\frac{2(k^2+2)}{k^2}+2=8$，解得$k=-1$(舍去)，或$k=1$.

所以直线l的方程为$y=x-1$.

(2)由(1)得AB的中点坐标为$(3,2)$，所以直线AB的垂直平分线方程为$y-2=-(x-3)$，即$y=-x+5$.

设所求圆的圆心坐标为(x_0,y_0)，

则$\begin{cases}y_0=-x_0+5,\\(x_0+1)^2=\frac{(y_0-x_0+1)^2}{2}+16,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x_0=3,\\y_0=2,\end{cases}$或$\begin{cases}x_0=11,\\y_0=-6.\end{cases}$

因此，所求圆的方程为$(x-3)^2+(y-2)^2=16$或$(x-11)^2+(y+6)^2=144$.

22.**解：**(1)由题意，得$M(-5\sqrt{2},0),N(5\sqrt{2},0)$.

因为线路AB段上的任意一点到N的距离比到M的距离多10km，所以线路AB是以M,N为焦点的双曲线的一部分，设双曲线方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，则$2a=10,c=5\sqrt{2}$，所以$a^2=25,b^2=25$.

所以线路AB的方程为

$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{25}=1(x\leqslant-5,y\geqslant0)$.

同理可得线路CD的方程为

$\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{25}=1(x\geqslant0,y\leqslant-5)$.

易知$B(-5,0)$，故线路BC的方程为$x^2+y^2=25(-5\leqslant x\leqslant0,-5\leqslant y\leqslant0)$.

(2)设$G(x,y)$，则$x^2-y^2=25(x\leqslant-5,y\geqslant0)$.又$Q(0,5\sqrt{2})$，

故$|GQ|^2=x^2+(y-5\sqrt{2})^2$

$=2y^2-10\sqrt{2}y+75=2\left(y-\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2+50$.

所以当$y=\frac{5\sqrt{2}}{2}$时，$|GQ|$取得最小值，此时$x=-\frac{5\sqrt{6}}{2}$.所以G的位置为点$\left(-\frac{5\sqrt{6}}{2},\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$.

第 11 期
第 2~3 版综合检测题(一)参考答案

一、选择题

1.A 2.A 3.B 4.B 5.D 6.A

7.A

提示： 由已知，得$y_0+\frac{p}{2}=3y_0$，其中$p=8$，所以$y_0=2$.

8.B

提示： 设$M(0,0,z)$，直线l的一个单位方向向量$s_0=\left(\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$，故点$M$到直线$l$的距离$d=\sqrt{|\overrightarrow{OM}|^2-|\overrightarrow{OM}\cdot s_0|^2}=\sqrt{z^2-\frac{1}{3}z^2}=\sqrt{6}$，解得$z=\pm3$.

9.C

10.A

11.D

提示： 由题意，翻折后$AC=BC=AB$，

所以$\angle ABC=60°$，

$|\overrightarrow{BP}|^2=\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}\right|^2=\frac{9}{4}$.

12.C

提示： 若$|PA|+|PB|=4=|AB|$，则点P的轨迹是线段AB，故A错误；若$|PA|-|PB|=3<|AB|$，则点P的轨迹是双曲线的左支，故B错误；对于C，设$M(x,y)$，则$y^2=\frac{3}{4}(4-x^2)$，$k_{AM}\cdot k_{BM}=\frac{y}{x-2}\cdot\frac{y}{x+2}=\frac{y^2}{x^2-4}=-\frac{3}{4}$，故正确；同理，得D中$k_{AM}\cdot k_{BM}=\frac{3}{4}$，故错误.故选C.

二、填空题

13.$a=1,b=-1$(答案不唯一)

14.$\left(\frac{10}{3},-1,\frac{7}{3}\right)$

提示： 将等式$\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$改写为$\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$，即$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$，$\overrightarrow{OC}=\frac{2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{3}$.

又$2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(10,-3,7)$，

所以$\overrightarrow{OC}=\left(\frac{10}{3},-1,\frac{7}{3}\right)$，即点$C$的坐标为$\left(\frac{10}{3},-1,\frac{7}{3}\right)$.

15.$\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

提示： 设椭圆的长半轴长、短半轴长、半焦距分别为a、b、c，

因为$\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=0$，所以点$M$的轨迹是以原点$O$为圆心，半焦距为半径的圆.

又点M总在椭圆的内部，所以$c<b$，$c^2<b^2=a^2-c^2$，即$2c^2<a^2$.

所以$e^2=\frac{c^2}{a^2}<\frac{1}{2}$，而$e\in(0,1)$，

故$e\in\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

16.①③

提示： ①因为两曲线的焦点都在x轴上，半焦距c相等都是$\sqrt{34}$，所以双曲线$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$与椭圆$\frac{x^2}{35}+y^2=1$有相同的焦点，正确；

②过点$P(2,1)$的抛物线的标准方程有两条，除了$y^2=\frac{1}{2}x$，还有一条焦点在y轴上的抛物线，不正确；

③已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，若它的离心率为$\sqrt{5}$，则$\frac{c}{a}=\sqrt{5}$，所以$\frac{b}{a}=2$，所以双曲线$C$的一条渐近线方程为$y=2x$，正确；

④由解析式知，半焦距为1，$\triangle PF_1F_2$的面积的最大值为2，即$bc=2$，可得$b=2$，故$m=4$，不正确.

三、解答题

17.**解：** 逆命题为：若$a+b$是偶数，则a,b都是奇数.它是假命题.

否命题：若a,b不都是奇数，则$a+b$不是偶数.它是假命题.

逆否命题为：若$a+b$不是偶数，则a,b不都是奇数.它是真命题.

18.**解：**(1)$A=\{x\mid-2\leqslant x\leqslant5\}$，$B=\{x\mid m+1\leqslant x\leqslant2m-1\}$，$B\neq\varnothing$.

因为“命题p：任意$x\in B$，则$x\in A$”是真命题，所以$B\subseteq A$，$B\neq\varnothing$.

所以$\begin{cases}m+1\leqslant2m-1,\\m+1\geqslant-2,\\2m-1\leqslant5,\end{cases}$解得$2\leqslant m\leqslant3$.

所以实数m的取值范围为$[2,3]$.

(2)若q为真，则$A\cap B\neq\varnothing$.

因为$B\neq\varnothing$，

所以$m+1\leqslant2m-1$，即$m\geqslant2$.

所以$\begin{cases}m+1\leqslant5,\\m\geqslant2,\end{cases}$所以$2\leqslant m\leqslant4$.

所以实数m的取值范围为$[2,4]$.

19.**解：**(1)由离心率$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{2}$，得$a=b$，则可设双曲线的方程为$x^2-y^2=\lambda$.

将点$(4,-\sqrt{10})$代入，得$\lambda=6$.所以该双曲线的标准方程为$\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{6}=1$.

(2)结合(1)可得$|F_1F_2|=2\sqrt{6+6}=4\sqrt{3}$.又$M(4,-\sqrt{10})$，所以$\triangle F_1MF_2$的面积$S=\frac{1}{2}\times4\sqrt{3}\times\sqrt{10}=2\sqrt{30}$.

20.(1)**解：** 以O为坐标原点，OA，OC，OO_1所在直线分别为x,y,z轴，建立空间直角坐标系，则$B(1,1,0)$，$A_1(1,0,1)$，$C_1(0,1,1)$.

设$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$是平面A_1BC_1的法向量，则$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BA_1}=0,\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC_1}=0$，而$\overrightarrow{BA_1}=(0,-1,1)$，$\overrightarrow{BC_1}=(-1,0,1)$，所以$\begin{cases}-y+z=0,\\-x+z=0,\end{cases}$即$x=y=z$.

取$z=1$，则$x=y=1$，故$\boldsymbol{n}=(1,1,1)$.

所以$\boldsymbol{n}=(1,1,1)$为平面A_1BC_1的一个法向量.

(2)**证明：** 因为$E\left(0,\frac{2}{3},1\right)$，$F\left(0,1,\frac{2}{3}\right)$，则$\overrightarrow{EF}=\left(0,\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$，

又$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EF}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=0$，

所以$\overrightarrow{EF}\perp\boldsymbol{n}$，所以$EF$∥平面$A_1BC_1$.

21.(1)**证明：** 以点C为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系，则$C(0,0,0)$，$B(\sqrt{2},0,0)$，$A_1(0,1,1)$，$D\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，$M\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1,0\right)$，$B_1(\sqrt{2},1,0)$，

所以$\overrightarrow{CD}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，

$\overrightarrow{BD}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，

$\overrightarrow{BM}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},1,0\right)$.

因为$\begin{cases}\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\\\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{BM}=0,\end{cases}$

所以$CD\perp BD,CD\perp BM$，

所以$CD\perp$平面BDM.

(2)**解：** $\overrightarrow{BB_1}=(0,1,0)$，$\overrightarrow{CB}=(\sqrt{2},0,0)$，

设平面B_1BD的法向量为$\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{BB_1}=0,\\\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{BD}=0,\end{cases}$

即$\begin{cases}y=0,\\-\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=0,\end{cases}$

令$x=1$，得$\boldsymbol{n}_1=(1,0,\sqrt{2})$.

设平面CBD的法向量为$\boldsymbol{n}_2=(x,y,z)$，

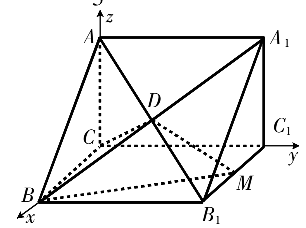
则$\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{CB}=0,\\\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{CD}=0,\end{cases}$

即$\begin{cases}\sqrt{2}x=0,\\\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=0,\end{cases}$

令$y=1$，得$\boldsymbol{n}_2=(0,1,-1)$.

所以$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，

所以平面BCD与平面BDB_1夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$.



(第 21 题图)

22.(1)**解：** 由题意可得$p=2$，所以圆S的圆心为$S(0,1)$，半径为1，所以$|BC|=2$.

若线段AB,BC,CD的长按此顺序构成一个等差数列，

则$|AB|+|CD|=2|BC|=4$.

设$A(x_1,y_1),D(x_2,y_2)$.

由$\begin{cases}x^2=4y,\\y=kx+1,\end{cases}$得$x^2-4kx-4=0$.

所以$x_1+x_2=4k$，$y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2=4k^2+2$，$|AB|+|CD|=|AD|-|BC|=y_1+y_2+2-2=4k^2+2=4$，结合$k>0$，解得$k=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2)**证明：** 由(1)可知$Q(2k,2k^2+1)$.

当$k=0$时，直线l'与抛物线没有两个交点，所以$k\neq0$.

用$-\frac{1}{k}$替换k可得$P\left(-\frac{2}{k},\frac{2}{k^2}+1\right)$，

计算得直线PQ的斜率$k_{PQ}=\frac{k^2-1}{k}$.

所以直线PQ的方程为$y-(2k^2+1)=\frac{k^2-1}{k}(x-2k)$，即$y=\frac{k^2-1}{k}x+3$.所以直线$PQ$过定点$(0,3)$.