第8期

第3版同步周测题参考答案

一、选择题

1.A

2.C

3.A

提示:由已知得焦点在 y 轴的负半轴上,$p=4$.故选 A.

4.B

5.B

提示:因为抛物线过点 $P(-6,-3)$,而点 P 在第三象限,所以焦点在 y 轴负半轴上.设抛物线方程为 $x^2=-2py$,把点 P 坐标代入,得 $36=-2p\times(-3)$,所以 $p=6$,所以抛物线的方程为 $x^2=-12y$,所以选 B.

6.D

7.C

提示:点 P 到其焦点的距离等于点 P 到其准线 $x=-2$ 的距离,得 $x_P=7$,$y_P=\pm2\sqrt{14}$.

8.C

提示:画图可知共有 3 条,其中一条平行于 x 轴,所以选 C.

9.A

提示:由已知,得 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$,直线 AB:$y=x-p$,代入抛物线的方程,可得 $x^2-4px+p^2=0$.设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $x_1+x_2=4p$.所以 $|AF|+|BF|=x_1+x_2+p=4p+p=10$,解得 $p=2$.

故准线方程为 $x=-1$,即 $x+1=0$.

10.C

提示:抛物线 $y^2=8x$ 的准线方程是 $x=-2$,点 $Q(-2,0)$.

设直线 l 的方程是 $y=k(x+2)$,代入抛物线方程,得 $k^2x^2+(4k^2-8)x+4k^2=0$.

由题意知,当 $k\neq0$ 时,$\Delta=(4k^2-8)^2-16k^4\geqslant0$,即 $-1\leqslant k<0$ 或 $0<k\leqslant1$.当 $k=0$ 时,也满足题意,所以 $-1\leqslant k\leqslant1$.

11.C

提示:因为抛物线的焦点为 $F\left(0,\frac{p}{2}\right)$,故过点 F 且倾斜角为30°的直线的方程为 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{p}{2}$,与抛物线方程联立得 $x^2-\frac{2\sqrt{3}}{3}px-p^2=0$,解方程得 $x_A=-\frac{\sqrt{3}}{3}p$,$x_B=\sqrt{3}p$,所以 $\frac{|AF|}{|BF|}=\frac{|x_A|}{|x_B|}=\frac{1}{3}$,故选C.

12.A

提示:根据抛物线的定义,可知 d_1 等于点 P 到焦点的距离,故当且仅当点 P 为过抛物线焦点与已知直线垂直的直线与抛物线的交点时,所求距离最小,且 $(d_1+d_2)_{\min}=\frac{12}{5}$.故选 A.

二、填空题

13.$y^2=20x$

14.$\left(-\frac{7}{16},0\right)$

提示:抛物线的标准方程是 $y^2=-\frac{7}{4}x$,则焦点在 x 轴的负半轴上,且 $2p=\frac{7}{4}$,故焦点坐标是 $\left(-\frac{7}{16},0\right)$.

15.$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

提示:设机器人为 $A(x,y)$,依题意得点 A 在以 $F(1,0)$ 为焦点,$x=-1$ 为准线的抛物线上,该抛物线的标准方程为 $y^2=4x$.

过点 $P(-1,0)$,斜率为 k 的直线为 $y=k(x+1)$.

由 $\begin{cases}y^2=4x,\\y=kx+k,\end{cases}$ 得 $ky^2-4y+4k=0$.

当 $k=0$ 时,显然不符合题意;

当 $k\neq0$ 时,依题意得 $\Delta=(-4)^2-4k\cdot4k<0$,

化简得 $k^2-1>0$,解得 $k>1$ 或 $k<-1$,因此 k 的取值范围为 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

16.2

提示:因为 $F(1,0)$,所以直线 AB:$y=k(x-1)$.与 $y^2=4x$ 联立,化简可得 $k^2x^2-2(2+k^2)x+k^2=0$.

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,

则 $x_1+x_2=\frac{4+2k^2}{k^2}$,$x_1x_2=1$.

所以 $y_1+y_2=k(x_1+x_2-2)=\frac{4}{k}$,

$y_1y_2=k^2[x_1x_2-(x_1+x_2)+1]=-4$.

由 $\angle AMB=90°$,得 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.

又 $\overrightarrow{MA}=(x_1+1,y_1-1)$,$\overrightarrow{MB}=(x_2+1,y_2-1)$,

所以 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(x_1+1)(x_2+1)+(y_1-1)\cdot(y_2-1)=x_1x_2+(x_1+x_2)+y_1y_2-(y_1+y_2)+2=0$,

即 $1+2+\frac{4}{k^2}-4-\frac{4}{k}+2=0$,解得 $k=2$.

三、解答题

17.(1)因为点 $(-3,2)$ 在第二象限,所以抛物线的开口方向向左或向上,设所求抛物线的标准方程为 $y^2=-2ax(a>0)$ 或 $x^2=2py(p>0)$.

因为过点 $(-3,2)$,

所以 $4=-2a\times(-3)$,

或 $9=2p\times2$,

解得 $a=\frac{2}{3}$,或 $p=\frac{9}{4}$.

所以所求抛物线的标准方程为 $y^2=-\frac{4}{3}x$,或 $x^2=\frac{9}{2}y$.

(2)令 $x=0$,则 $y=-2$;令 $y=0$,则 $x=4$.当焦点坐标为 $(4,0)$ 时,所求抛物线的标准方程为 $y^2=16x$;当焦点坐标为 $(0,-2)$ 时,所求抛物线的标准方程为 $x^2=-8y$.

18.**解**:设 $B\left(x,\frac{x^2}{2p}\right)$,又 $F\left(0,\frac{p}{2}\right)$,

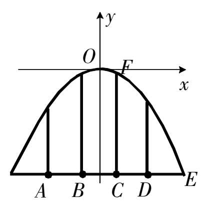
则 $x+0=2\sqrt{3}$,即 $x=2\sqrt{3}$.

所以 $B\left(2\sqrt{3},\frac{6}{p}\right)$.

因为 $|BF|=2|AF|$,结合抛物线的定义,得 $\frac{6}{p}+\frac{p}{2}=2\sqrt{3+\frac{p^2}{4}}$,解得 $p=\pm2$.

又 $p>0$,所以 $p=2$.

19.**解**:建立如图所示的平面直角坐标系.



(第19题图)

设抛物线方程为 $x^2=-2py(p>0)$.

由题意,得点 E 的坐标为 $(10,-4)$,

将其代入抛物线方程,解得 $p=\frac{25}{2}$.

所以抛物线方程为 $x^2=-25y$.

设点 $F(2,b)$,则 $b=-\frac{4}{25}$.

故最长支柱的长 $|CF|=4-\frac{4}{25}=\frac{96}{25}$(m).

20.**解**:由 $y^2=4x$,得 $p=2$,其准线方程为 $x=-1$,焦点为 $F(1,0)$.

(1)由抛物线的定义可知,

$|AF|=x_1+\frac{p}{2}$,从而 $x_1=4-1=3$.

代入 $y^2=4x$ 中,解得 $y_1=\pm2\sqrt{3}$.

所以点 A 的坐标为 $(3,2\sqrt{3})$ 或 $(3,-2\sqrt{3})$.

(2)当直线 l 的斜率存在时,

设直线 l 的方程为 $y=k(x-1)$.

与抛物线方程联立并消去 y,

整理得 $k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$,

则 $x_1+x_2=2+\frac{4}{k^2}$.

所以 $|AB|=x_1+x_2+p=4+\frac{4}{k^2}>4$.

当直线 l 的斜率不存在时,直线 l 的方程为 $x=1$,此时 $|AB|=4$,

所以 $|AB|\geqslant4$,即线段 AB 的长的最小值为 4.

21.**解**:设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,中点 $M(x,y)$,则 $y_1^2=2x_1$,$y_2^2=2x_2$.

两式相减,得 $(y_1+y_2)\cdot\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=2$.

把 $y_1+y_2=2y$,$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{y-0}{x-(-2)}$ 代入化简,

得 AB 的中点 M 的轨迹方程为 $y^2=x+2(x>2)$.

22.(1)**解**:联立 $x^2=-y$ 与 $y=kx-3$,

得 $x^2+kx-3=0$.

因为 $\Delta_1=k^2+12>0$,

所以 l 与抛物线 $x^2=-y$ 恒有2个交点.

若 $m\geqslant3$,则 l 与抛物线 $x^2=4y$ 至少有1个交点.

联立 $x^2=4y$ 与 $y=kx-3$,得 $x^2-4kx+12=0$.

所以 $\Delta_2=16k^2-48\geqslant0$.结合 $k>0$,得 $k\geqslant\sqrt{3}$.所以 k 的最小值为 $\sqrt{3}$.

(2)**证明**:若 $m=3$,则 l 与抛物线 $x^2=4y$ 只有1个交点.

结合(1),可知 $k=\sqrt{3}$,$A(2\sqrt{3},3)$.

由于 $F(0,1)$ 为抛物线 $x^2=4y$ 的焦点,

则 $|\overrightarrow{FA}|=3+1=4$.

设 $B(x_1,y_1)$,$C(x_2,y_2)$,

则 $x_1+x_2=-k=-\sqrt{3}$,$x_1x_2=-3$.

所以 $y_1+y_2=k(x_1+x_2)-6=-9$,$y_1y_2=(kx_1-3)(kx_2-3)=k^2x_1x_2-3k(x_1+x_2)+9=9$.

所以 $\overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{FC}=x_1x_2+(y_1-1)(y_2-1)=x_1x_2+y_1y_2-(y_1+y_2)+1=16$.

所以 $\overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{FC}=|\overrightarrow{FA}|^2$.

第5期

第3版同步周测题参考答案

一、选择题

1.D 2.C 3.B 4.A 5.B 6.C 7.B 8.B 9.B 10.B 11.D 12.C

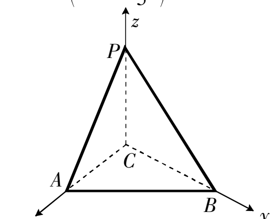
二、填空题

13.$\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{\pi}{3}$ 14.$\frac{\sqrt{3}}{3}$,45°,45°

15.$4\pm\sqrt{15}$

16.3

提示:如图,建立空间直角坐标系,则 $A(4,0,0)$,$B(0,3,0)$,$P\left(0,0,\frac{9}{5}\right)$,所以 $\overrightarrow{AB}=(-4,3,0)$,$\overrightarrow{AP}=\left(-4,0,\frac{9}{5}\right)$,



(第16题图)

所以点 P 到斜边 AB 的距离

$d=\sqrt{|\overrightarrow{AP}|^2-\frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}|^2}{|\overrightarrow{AB}|^2}}=3$.

三、解答题

17.**证明**:以 A 为坐标原点,AB,AD,AP 所在直线分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系,

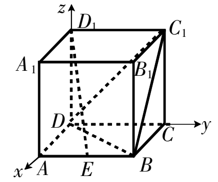
设 $PA=AD=a$,$AB=b$,则 $P(0,0,a)$,$D(0,a,0)$,$C(b,a,0)$,$M\left(\frac{b}{2},\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$,$N\left(\frac{b}{2},0,0\right)$,

所以 $\overrightarrow{MN}=\left(0,-\frac{a}{2},-\frac{a}{2}\right)$,$\overrightarrow{PD}=(0,a,-a)$,$\overrightarrow{PC}=(b,a,-a)$.

易知 $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{PD}=0$ 且 $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{PC}=0$,即 $\overrightarrow{MN}$ 是平面 PCD 的一个法向量,

所以 $MN\perp$ 平面 PCD.

18.**解**:建立如图所示的空间直角坐标系,则 B $(1,1,0)$,C_1 $(0,1,1)$,D_1 $(0,0,1)$,$E\left(1,\frac{1}{2},0\right)$.



(第18题图)

所以 $\overrightarrow{D_1E}=\left(1,\frac{1}{2},-1\right)$,$\overrightarrow{DB}=(1,1,0)$,$\overrightarrow{DC_1}=(0,1,1)$.

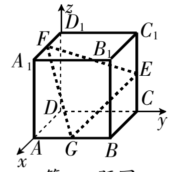
设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 是平面 BC_1D 的法向量,则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DB}=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC_1}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x+y=0,\\y+z=0.\end{cases}$

令 $y=-1$,得 $\boldsymbol{n}=(1,-1,1)$.

设 D_1E 与平面 BC_1D 的夹角为 θ,则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{D_1E},\boldsymbol{n}\rangle|=\left|\frac{\overrightarrow{D_1E}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{D_1E}||\boldsymbol{n}|}\right|=\left|\frac{1-\frac{1}{2}-1}{\frac{3}{2}\times\sqrt{3}}\right|=\frac{\sqrt{3}}{9}$.

所以 D_1E 与平面 BC_1D 的夹角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{9}$.

19.**解**:如图建立空间直角坐标系,



(第19题图)

则 A $(a,0,0)$,$E\left(0,a,\frac{a}{2}\right)$,$F\left(\frac{a}{2},0,a\right)$,$G\left(a,\frac{a}{2},0\right)$,

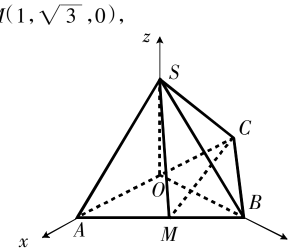
所以 $\overrightarrow{EF}=\left(\frac{a}{2},-a,\frac{a}{2}\right)$,$\overrightarrow{EG}=\left(a,-\frac{a}{2},-\frac{a}{2}\right)$,$\overrightarrow{GA}=\left(0,-\frac{a}{2},0\right)$.

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 是平面 EFG 的一个法向量,则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EF}=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EG}=0,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}x-2y+z=0,\\2x-y-z=0,\end{cases}$

所以 $x=y=z$,可取 $\boldsymbol{n}=(1,1,1)$,

所以 $d=\frac{|\overrightarrow{GA}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}a$,即点 A 到平面 EFG 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{6}a$.

20.**解**:(1)取 AC 的中点 O 为坐标原点,建立空间直角坐标系(如图所示),则 $A(2,0,0)$,$C(-2,0,0)$,$S(0,0,2)$,$B(0,2\sqrt{3},0)$,$M(1,\sqrt{3},0)$,



(第20题图)

所以 $\overrightarrow{MS}=(-1,-\sqrt{3},2)$,$\overrightarrow{MC}=(-3,-\sqrt{3},0)$,$\overrightarrow{OS}=(0,0,2)$.

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 是平面 SMC 的一个法向量,则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MS}=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MC}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x-\sqrt{3}y+2z=0,\\-3x-\sqrt{3}y=0.\end{cases}$

令 $x=-1$,得 $\boldsymbol{n}=(-1,\sqrt{3},1)$.

取 $\overrightarrow{OS}$ 为平面 AMC 的法向量,所以

$\cos\langle\overrightarrow{OS},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\overrightarrow{OS}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{OS}||\boldsymbol{n}|}=\frac{2}{2\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

所以平面 SCM 与平面 ACM 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

(2)因为 $\overrightarrow{MB}=(-1,\sqrt{3},0)$,由(1)知平面 SMC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(-1,\sqrt{3},1)$,

所以点 B 到平面 SMC 的距离

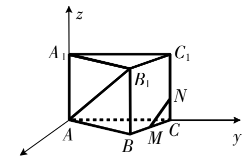
$d=\frac{|\overrightarrow{MB}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{|1+3+0|}{\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

21.**解**:如图,以点 A 为原点,AC,AA_1 所在直线分别为 y,z 轴,过 A 点垂直于 AC 的直线为 x 轴,建立空间直角坐标系 $A-xyz$.因为正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的所有棱长都是2,

所以 A $(0,0,0)$,B_1 $(\sqrt{3},1,2)$,B $(\sqrt{3},1,0)$,$C(0,2,0)$,

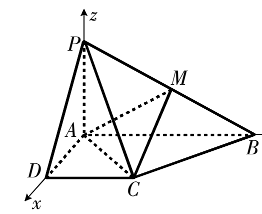
所以 $M\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},0\right)$.

假设在侧棱 CC_1 上存在点 N,使得异面直线 AB_1 和 MN 所成的角等于45°,可设 $N(0,2,m)$ $(0\leqslant m\leqslant2)$,则 $\overrightarrow{AB_1}=(\sqrt{3},1,2)$,$\overrightarrow{MN}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},m\right)$,所以 $|\overrightarrow{AB_1}|=2\sqrt{2}$,$|\overrightarrow{MN}|=\sqrt{m^2+1}$,$\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{MN}=2m-1$.因为异面直线 AB_1 和 MN 所成的角等于45°,所以 $\overrightarrow{AB_1}$ 和 $\overrightarrow{MN}$ 的夹角是45°或135°.又因为 $\cos\langle\overrightarrow{AB_1},\overrightarrow{MN}\rangle=\frac{\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{MN}}{|\overrightarrow{AB_1}|\cdot|\overrightarrow{MN}|}=\frac{2m-1}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{m^2+1}}$,所以 $\frac{2m-1}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{m^2+1}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$,解得 $m=-\frac{3}{4}$.但 $-\frac{3}{4}\notin[0,2]$,所以点 N 不在侧棱 CC_1 上,即在侧棱 CC_1 上不存在点 N,使得异面直线 AB_1 和 MN 的夹角等于45°.



(第21题图)

22.(1)**证明**:以 A 为坐标原点,AD,AB,AP 所在直线分别为 x 轴,y 轴,z 轴建立空间直角坐标系(如图).



(第22题图)

则 A $(0,0,0)$,B $(0,2,0)$,$C(1,1,0)$,$D(1,0,0)$,$P(0,0,1)$,$M\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$.

因为 $\overrightarrow{AP}=(0,0,1)$,$\overrightarrow{DC}=(0,1,0)$,

且 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{DC}=0$,所以 $AP\perp DC$.

由题设知 $AD\perp DC$,且 AP 与 AD 是平面 PAD 内的两条相交直线,由此得 $DC\perp$ 平面 PAD.又 $DC\subsetneqq$ 平面 PCD,故平面 $PAD\perp$ 平面 PCD.

(2)**解**:因为 $\overrightarrow{AC}=(1,1,0)$,$\overrightarrow{PB}=(0,2,-1)$,

故 $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{2}$,$|\overrightarrow{PB}|=\sqrt{5}$,$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{PB}=2$,

所以 $\cos\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{PB}\rangle=\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{PB}|}=\frac{\sqrt{10}}{5}>0$,

故 $0<\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{PB}\rangle<\frac{\pi}{2}$,

所以直线 AC 与 PB 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

(3)**解**:由 $\overrightarrow{AM}=\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$,$\overrightarrow{AC}=(1,1,0)$,

知平面 AMC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(1,-1,2)$.

由 $\overrightarrow{BM}=\left(0,-1,\frac{1}{2}\right)$,$\overrightarrow{CB}=(-1,1,0)$,

知平面 BMC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(1,1,2)$.

所以 $\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{2}{3}$.

所以平面 AMC 与平面 BMC 夹角的余弦值为 $\frac{2}{3}$.

第6期

第2、3版章节测试题参考答案

一、选择题

1.D 2.D 3.D 4.B

5.C

提示:以 D 为原点,DA,DC,DD_1 所在直线分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系,则 $\overrightarrow{AB_1}=(0,1,2)$,$\overrightarrow{AD_1}=(-1,0,2)$,$\overrightarrow{AA_1}=(0,0,2)$.

设平面 AB_1D_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB_1}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD_1}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}y+2z=0,\\ -x+2z=0.\end{cases}$

令 $z=1$,得 $\boldsymbol{n}=(2,-2,1)$.

故点 A_1 到平面 AB_1D_1 的距离为 $\dfrac{|\overrightarrow{AA_1}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2}{3}$.

6.C

提示:$|PQ|=|\overrightarrow{PQ}|$

$=\sqrt{(3\cos\alpha-2\cos\beta)^2+(3\sin\alpha-2\sin\beta)^2}$

$=\sqrt{13-12\cos(\alpha-\beta)}$.

当 $\cos(\alpha-\beta)=-1$ 时,$|PQ|_{max}=5$;

当 $\cos(\alpha-\beta)=1$ 时,$|PQ|_{min}=1$.

7.C

提示:$|\overrightarrow{CD}|^2=|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}|^2=|\overrightarrow{CA}|^2+|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BD}|^2+2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}=1+1+1+0+0+2\times1\times1\times\cos120°=2$.

所以 $|\overrightarrow{CD}|=\sqrt{2}$.

8.C

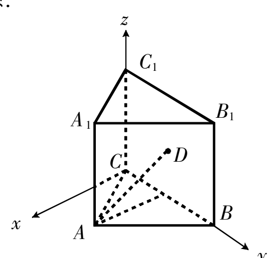
9.D

提示:$\sin\theta=\cos\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle=\dfrac{1}{\sqrt{3}\times\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{15}}{15}$.

10.B

11.C

提示:如图,以 C 为原点,CB 所在直线为 y 轴,CC_1 所在直线为 z 轴,过点 C 在平面 ABC 内作 BC 的垂线为 x 轴,建立空间直角坐标系.



(第 11 题图)

设三棱柱的棱长为 2,

所以 $A(\sqrt{3},1,0)$,$D(0,1,1)$,$\overrightarrow{AD}=(-\sqrt{3},0,1)$.

易知平面 BB_1C_1C 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,0,0)$,

所以 $\cos\langle\overrightarrow{AD},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{AD}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{AD}||\boldsymbol{n}|}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

设直线 AD 与平面 BB_1C_1C 的夹角为 θ,

则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AD},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,所以 $\theta=60°$.

12.B

提示:由题意,知 $BD\perp$ 平面 ACD,所以 $BD\perp AC$,所以 $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC}=0$,故①错;平面 ADC 与平面 ABC 不垂直,所以它们的法向量也不垂直,故④错.

二、填空题

13.0 14.$\dfrac{5}{6}$ 15.$\pm\sqrt{39}$ 16.3

三、解答题

17.**解**:因为 $BG=2GD$,

所以 $\overrightarrow{BG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BD}$.

又 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{b}$,

所以 $\overrightarrow{PG}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BG}=\boldsymbol{b}+\dfrac{2}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{b})$

$=\dfrac{2}{3}\boldsymbol{a}-\dfrac{1}{3}\boldsymbol{b}+\dfrac{2}{3}\boldsymbol{c}$.

18.**解**:$\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$,

所以 $(AC')^2=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'})^2$

$=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{AA'}^2+2(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA'})$

$=25+9+49+2(5\times3\cos60°+5\times7\cos45°+3\times7\cos45°)$

$=98+56\sqrt{2}$,

所以 $|\overrightarrow{AC'}|=\sqrt{98+56\sqrt{2}}$,即 AC' 的长为 $\sqrt{98+56\sqrt{2}}$.

19.**解**:以 B 为坐标原点,以 BC,BA,BD 所在直线分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系,则 $A(0,2,0)$,$C(2,0,0)$,$E(1,1,0)$.

设点 D 的坐标为 $(0,0,z)(z>0)$,则 $\overrightarrow{BE}=(1,1,0)$,$\overrightarrow{AD}=(0,-2,z)$,设 $\overrightarrow{BE}$ 与 $\overrightarrow{AD}$ 所成角为 θ,则 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BE}=\sqrt{2}\times\sqrt{4+z^2}\cdot\cos\theta=-2$,且 AD 与 BE 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$,

所以 $|\cos\theta|=\dfrac{2}{\sqrt{2}\times\sqrt{4+z^2}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$,

所以 $\cos^2\theta=\dfrac{2}{4+z^2}=\dfrac{1}{10}$,得 $z=4$,即 BD 的长为4.

又 $V_{ABCD}=\dfrac{1}{6}|AB|\cdot|BC|\cdot|BD|=\dfrac{1}{6}\times2\times2\times4=\dfrac{8}{3}$,因此四面体 $ABCD$ 的体积是 $\dfrac{8}{3}$.

20.(1)**证明**:设 AC 与 BD 交于点 G.

因为 $EF/\!/AG$,且 $EF=1$,$AG=\dfrac{1}{2}AC=1$.

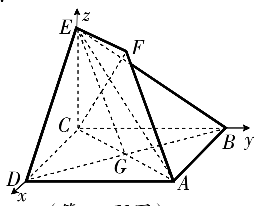
所以四边形 $AGEF$ 为平行四边形,

所以 $AF/\!/EG$.

因为 $EG\subsetneq$ 平面 BDE,$AF\not\subseteq$ 平面 BDE,所以 $AF/\!/$ 平面 BDE.

(2)**证明**:因为正方形 $ABCD$ 和四边形 $ACEF$ 所在的平面相互垂直,且 $CE\perp AC$,所以 $CE\perp$ 平面 $ABCD$.

如图,以 C 为原点,建立空间直角坐标系 $C-xyz$.



(第 20 题图)

则 $C(0,0,0)$,$A(\sqrt{2},\sqrt{2},0)$,$B(0,\sqrt{2},0)$,$F\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right)$,$E(0,0,1)$,$D(\sqrt{2},0,0)$,

所以 $\overrightarrow{CF}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right)$,$\overrightarrow{BE}=(0,-\sqrt{2},1)$,$\overrightarrow{DE}=(-\sqrt{2},0,1)$,

所以 $\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{BE}=0$,$\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{DE}=0$,

所以 $CF\perp BE$,$CF\perp DE$.

又 $BE\cap DE=E$,

所以 $CF\perp$ 平面 BDE.

(3)**解**:由(2)知,$\overrightarrow{CF}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right)$ 是平面 BDE 的一个法向量.

设平面 ABE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BA}=0$,$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BE}=0$,

即 $\begin{cases}\sqrt{2}x=0,\\ -\sqrt{2}y+z=0,\end{cases}$ 所以 $x=0$,且 $z=\sqrt{2}y$.

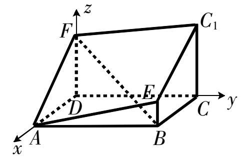
令 $y=1$,则 $z=\sqrt{2}$,

所以 $\boldsymbol{n}=(0,1,\sqrt{2})$.

所以 $\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{CF}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CF}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{CF}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

所以平面 ABE 与平面 BED 夹角的大小为 $\dfrac{\pi}{6}$.

21.**解**:以 D 为坐标原点,DA,DC,DF 所在直线分别为 x 轴,y 轴,z 轴建立空间直角坐标系(如图),则 $D(0,0,0)$,$A(2,0,0)$,$B(2,4,0)$,$C(0,4,0)$,$E(2,4,1)$,$C_1(0,4,3)$.



(第 21 题图)

(1)设 $F(0,0,z)$.由 $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{EC_1}$,得

$(-2,0,z)=(-2,0,2)$,所以 $z=2$.

所以 $F(0,0,2)$,$\overrightarrow{BF}=(-2,-4,2)$,

所以 $|\overrightarrow{BF}|=2\sqrt{6}$.

(2)设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 为平面 AEC_1F 的法向量,

又 $\overrightarrow{AE}=(0,4,1)$,$\overrightarrow{AF}=(-2,0,2)$,

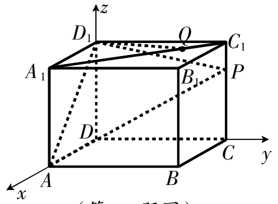
由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AF}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}4y+z=0,\\ -2x+2z=0.\end{cases}$ 令 $z=1$,则 $x=1$,$y=-\dfrac{1}{4}$,所以 $\boldsymbol{n}=\left(1,-\dfrac{1}{4},1\right)$.

又 $\overrightarrow{CC_1}=(0,0,3)$,

则 $d=\dfrac{|\overrightarrow{CC_1}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{4\sqrt{33}}{11}$.

所以点 C 到平面 AEC_1F 的距离为 $\dfrac{4\sqrt{33}}{11}$.

22.**解**:(1)如图,建立空间直角坐标系,则 $A(1,0,0)$,$B(1,1,0)$,$P(0,1,m)$,$C(0,1,0)$,$D(0,0,0)$,$B_1(1,1,1)$,$D_1(0,0,1)$.



(第 22 题图)

所以 $\overrightarrow{BD}=(-1,-1,0)$,$\overrightarrow{BB_1}=(0,0,1)$,$\overrightarrow{AP}=(-1,1,m)$,$\overrightarrow{AC}=(-1,1,0)$.

又由 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$,$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BB_1}=0$,知 $\overrightarrow{AC}$ 为平面 BDD_1B_1 的一个法向量.

设 AP 与平面 BDD_1B_1 的夹角为 θ,

则 $\sin\theta=\left|\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)\right|=\dfrac{|\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+m^2}}$,

依题意有 $\dfrac{2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+m^2}}=\dfrac{1}{3}$,

解得 $m=4$,或 $m=-4$(舍去).

故当 $m=4$ 时,直线 AP 与平面 BDD_1B_1 夹角的正弦值为 $\dfrac{1}{3}$.

(2)若在线段 A_1C_1 上存在这样的点 Q,设此点的横坐标为 x,则 $Q(x,1-x,1)$,

所以 $\overrightarrow{D_1Q}=(x,1-x,0)$.

依题意,对任意的 m 要使 D_1Q 在平面 APD_1 上的投影垂直于 AP,即 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{D_1Q}=0\Leftrightarrow -x+(1-x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$.

即 Q 为 A_1C_1 的中点时,满足题设的要求.

第7期

第3版同步周测题参考答案

一、选择题

1.D

2.B

3.B

4.C

提示:由 $ax^2+by^2=1$,得 $\dfrac{x^2}{\frac{1}{a}}+\dfrac{y^2}{\frac{1}{b}}=1$.

因为焦点在 x 轴上,所以 $\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}>0$,

所以 $0<a<b$.

5.C

提示:将 $mx^2+ny^2=-mn(m<n<0)$ 化成标准方程得 $\dfrac{x^2}{-n}+\dfrac{y^2}{-m}=1$,由 $m<n<0\Rightarrow-m>-n>0$,得焦点在 y 轴上,即 $a^2=-m$,$b^2=-n$,得 $c^2=a^2-b^2=n-m$,故选 C.

6.C

7.A

8.B

提示:根据题意,知点 $P\left(-c,\pm\dfrac{b^2}{a}\right)$.因为 $\angle F_1PF_2=45°$,所以有 $\dfrac{2c}{\frac{b^2}{a}}=\tan45°=1$,即 $2ac=b^2=a^2-c^2$,所以 $e^2+2e-1=0$,解得 $e=\sqrt{2}-1$,或 $e=-\sqrt{2}-1$(舍去).故选B.

9.C

提示:直线 $y-kx-1=0$ 过定点 $(0,1)$,若使直线 $y-kx-1=0$ 与椭圆 $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{m}=1$ 恒有公共点,则必有点 $(0,1)$ 在椭圆上或椭圆内,即椭圆与 y 轴的交点的纵坐标的绝对值大于等于 1,但不能等于 $\sqrt{5}$.

10.C

提示:直线 $ax+by+4=0$ 与圆 $x^2+y^2=4$ 没有公共点,即相离,

所以 $\dfrac{4}{\sqrt{a^2+b^2}}>2$,所以 $a^2+b^2<4$,所以 $\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{b^2}{4}<1$,所以 $\dfrac{a^2}{9}+\dfrac{b^2}{4}<\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{b^2}{4}<1$,所以点 (a,b) 在椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 的内部,故有 2 个公共点.

11.C

提示:设 $\dfrac{y}{x-2}=k$,则 $y=k(x-2)$.由 $\begin{cases}4x^2+y^2=4,\\ y=k(x-2)\end{cases}$ 消去 y,整理得 $(k^2+4)x^2-4k^2x+4(k^2-1)=0$,$\Delta=16k^4-4\times4(k^2-1)\cdot(k^2+4)\geqslant0$,

解得 $-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\leqslant k\leqslant\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$,所以 $k_{min}=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

12.C

提示:设 $P(x_0,y_0)$,则 $\dfrac{x_0^2}{4}+\dfrac{y_0^2}{3}=1$,即 $y_0^2=3-\dfrac{3x_0^2}{4}$.又因为 $F(-1,0)$,所以 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{FP}=x_0\cdot(x_0+1)+y_0^2=\dfrac{1}{4}x_0^2+x_0+3=\dfrac{1}{4}(x_0+2)^2+2$.又 $x_0\in[-2,2]$,所以 $(\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{FP})\in[2,6]$,所以 $(\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{FP})_{max}=6$.

二、填空题

13.中心

提示:依据椭圆的对称性.

14.$\dfrac{3}{5}$

提示:因为 $2\times2b=2a+2c$,

所以 $a+c=2b$. ①

又 $a^2-c^2=b^2$,即 $(a+c)(a-c)=b^2$,

所以 $a-c=\dfrac{b}{2}$. ②

由①②,得 $a=\dfrac{5b}{4}$,$c=\dfrac{3b}{4}$,

故 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{3}{5}$.

15.[1,2]

提示:因为 $P(m,n)$ 是椭圆 $x^2+\dfrac{y^2}{2}=1$ 上的一个动点,所以 $m^2+\dfrac{n^2}{2}=1$,即 $n^2=2-2m^2$,所以 $m^2+n^2=2-m^2$,又 $-1\leqslant m\leqslant1$,所以 $1\leqslant2-m^2\leqslant2$,所以 $1\leqslant m^2+n^2\leqslant2$.

16.35

提示:根据对称性,得 $|P_1F|+|P_2F|+|P_3F|+\cdots+|P_7F|=\dfrac{1}{2}\times7\times2a=\dfrac{1}{2}\times7\times10=35$.

三、解答题

17.**解**:(1)设椭圆的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 或 $\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$.

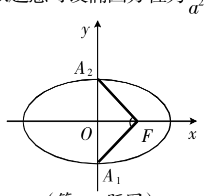
由已知得 $2a=10$,$a=5$.

又因为 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{4}{5}$,所以 $c=4$.

所以 $b^2=a^2-c^2=25-16=9$.

所以椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 或 $\dfrac{y^2}{25}+\dfrac{x^2}{9}=1$.

(2)依题意可设椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$.



(第 17 题图)

如图所示,$\triangle A_1FA_2$ 为一等腰直角三角形,OF 为斜边 A_1A_2 的中线(高),且 $|OF|=c$,$|A_1A_2|=2b$,则 $c=b=3$,

$a^2=b^2+c^2=18$,

故所求椭圆的方程为 $\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

18.**解**:由已知,得 $\dfrac{x^2}{\frac{m}{9}}+\dfrac{y^2}{\frac{m}{16}}=1$,

$a^2=\dfrac{m}{9}$,$b^2=\dfrac{m}{16}$,$c^2=\dfrac{7m}{144}$.

在 $\triangle PF_1F_2$ 中,由面积公式,得

$S_{\triangle PF_1F_2}=\dfrac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|\sin60°=3\sqrt{3}$,

解得 $|PF_1|\cdot|PF_2|=12$.

在 $\triangle PF_1F_2$ 中,由余弦定理,得

$4c^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot\cos60°=|PF_1|^2+|PF_2|^2-|PF_1|\cdot|PF_2|=(|PF_1|+|PF_2|)^2-3|PF_1|\cdot|PF_2|$,

即 $4c^2=4a^2-3\times12$,所以 $b^2=a^2-c^2=9$,

即 $9=\dfrac{m}{16}$,解得 $m=144$.

由此可得 $a=\sqrt{\dfrac{m}{9}}=4$,$c=\sqrt{\dfrac{7m}{144}}=\sqrt{7}$,

所以离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$.

19.**解**:设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,由题意知 $y_1<0$,$y_2>0$.

(1)直线 l 的方程为 $y=\sqrt{3}(x-c)$,其中 $c=\sqrt{a^2-b^2}$.

联立 $\begin{cases}y=\sqrt{3}(x-c),\\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\end{cases}$

得 $(3a^2+b^2)y^2+2\sqrt{3}b^2cy-3b^4=0$.

解得 $y_1=\dfrac{-\sqrt{3}b^2(c+2a)}{3a^2+b^2}$,

$y_2=\dfrac{-\sqrt{3}b^2(c-2a)}{3a^2+b^2}$,

因为 $\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$,所以 $-y_1=2y_2$.

即 $\dfrac{\sqrt{3}b^2(c+2a)}{3a^2+b^2}$

$=2\cdot\dfrac{-\sqrt{3}b^2(c-2a)}{3a^2+b^2}$,

得离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2}{3}$.

(2)因为 $|AB|=\sqrt{1+\dfrac{1}{3}}|y_2-y_1|$,

所以 $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{4\sqrt{3}ab^2}{3a^2+b^2}=\dfrac{15}{4}$.

由 $\dfrac{c}{a}=\dfrac{2}{3}$,得 $b=\dfrac{\sqrt{5}}{3}a$.

所以 $\dfrac{5}{4}a=\dfrac{15}{4}$,得 $a=3$,$b=\sqrt{5}$.

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$.

20.**解**:(1)根据题意,若 M 与 A 重合,即椭圆的右顶点的坐标为 $(2,0)$,则 $a=2$,则椭圆的焦点在 x 轴上,且 $c=\sqrt{3}$,则椭圆焦点的坐标为 $(\sqrt{3},0)$,$(-\sqrt{3},0)$.

(2)若 $m=3$,则椭圆的方程为 $\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$,变形可得 $y^2=1-\dfrac{x^2}{9}$.

设 $P(x,y)$,则

$|PA|^2=(x-2)^2+y^2=x^2-4x+4+y^2=\dfrac{8x^2}{9}-4x+5$.

又由 $-3\leqslant x\leqslant3$,根据二次函数的性质,分析可得,

当 $x=-3$ 时,$|PA|^2=\dfrac{8x^2}{9}-4x+5$ 取得最大值,且最大值为 25;

当 $x=\dfrac{9}{4}$ 时,$|PA|^2=\dfrac{8x^2}{9}-4x+5$ 取得最小值,且最小值为 $\dfrac{1}{2}$.

所以 $|PA|$ 的最大值为 5,最小值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

21.**解**:(1)将 $y=x+b$ 代入 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$,消去 y,整理得 $3x^2+4bx+2b^2-2=0$.①

因为直线 $y=x+b$ 与椭圆 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 相交于 A,B 两个不同的点,

所以 $\Delta=16b^2-12(2b^2-2)=24-8b^2>0$,解得 $-\sqrt{3}<b<\sqrt{3}$.

所以 b 的取值范围为 $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$.

(2)设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$.当 $b=1$ 时,方程①为 $3x^2+4x=0$.

解得 $x_1=0$,$x_2=-\dfrac{4}{3}$.

所以 $y_1=1$,$y_2=-\dfrac{1}{3}$.

所以 $|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

22.**解**:以两根桅杆的顶端 A,C 所在直线为 x 轴,线段 AC 的垂直平分线为 y 轴,建立平面直角坐标系 xOy,则 P 点在以 A,C 为焦点的椭圆上.设椭圆的标准方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,则 $2a=30$,$2c=15$,所以 $a=15$,$c=7.5$,$b^2=a^2-c^2=225-56.25=168.75$.故椭圆的标准方程为 $\dfrac{x^2}{225}+\dfrac{y^2}{168.75}=1$.因为点 P 的纵坐标为 -7.5,代入椭圆方程可解得 $P(-12.25,-7.5)$,所以 P 到桅杆 AB 的距离为 $12.25-7.5=4.75$(米).