第 12 期

第 2~3 版综合检测题(二)参考答案

一、选择题

1.C　2.A　3.B　4.D　5.B　6.C

7.A　8.B

9.C

提示:利用三角函数线判断,可知选 C.

10.D

提示:$f(x)=(\cos x+1-\sin^2x)\tan\frac{x}{2}=(\cos x+\cos^2x)\tan\frac{x}{2}=\cos x(1+\cos x)\tan\frac{x}{2}=\cos x\cdot 2\cos^2\frac{x}{2}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\cos x\sin x=\frac{1}{2}\sin 2x$. 函数 $y=\frac{1}{2}\sin 2x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ 上是增函数,且最小正周期 $T=\pi$.但对于函数 $f(x)$,必须有 $\frac{x}{2}\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$,即 $x\neq 2k\pi+\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,所以 $f(x)$ 的最小正周期为 2π.故选 D.

11.D

提示:$f(x)=\frac{1-\cos\omega x}{2}+\frac{1}{2}\sin\omega x-\frac{1}{2}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{4}\right)$.

由 $f(x)=0$,

解得 $x=\frac{k\pi+\frac{\pi}{4}}{\omega}\notin(\pi,2\pi)$,$k\in\mathbf{Z}$,

所以 $\omega\notin\left(\frac{1}{8},\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{5}{8},\frac{5}{4}\right)\cup\left(\frac{9}{8},\frac{9}{4}\right)\cup\cdots=\left(\frac{1}{8},\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{5}{8},+\infty\right)$.

又 $\omega>0$,

所以 $\omega\in\left(0,\frac{1}{8}\right]\cup\left[\frac{1}{4},\frac{5}{8}\right]$.

12.D

提示:因为直线 MN 经过 $\triangle ABC$ 的外心,所以其经过 BC 的中点 E.

以 A 为原点,AC 所在直线为 x 轴,建立如图所示平面直角坐标系,则 $A(0,0)$,$B(0,3)$,$C(3,0)$,$E\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$.

因为 $(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BQ})\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{BC}=0$,

所以 $\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{BC}$.

又 $AE\perp BC$,所以 $PQ/\!/AE$.

由 $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AM}=\mathbf{0}$,知点 A 是 PM 的中点.

所以 $\overrightarrow{PN}=2\overrightarrow{AE}=(3,3)$.

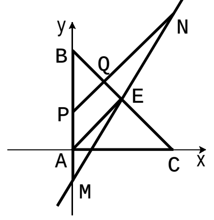
又 $\overrightarrow{PN}=3\overrightarrow{PQ}$,设 $P(0,m)(0\leqslant m\leqslant 3)$,

则 $Q(1,m+1)$,故 $\overrightarrow{BQ}=(1,m-2)$.

又 $\overrightarrow{BC}=(3,-3)$,$\overrightarrow{BQ}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 共线,

所以 $3(m-2)-(-3)=0$,解得 $m=1$.

所以 $|\overrightarrow{BP}|=2$.



(第 12 题图)

二、填空题

13.25N,1000J

14.$-\frac{1}{2}$　15.$-\frac{\pi}{6}$,$\frac{\pi}{3}$

16.①③

提示:$f(x)=a\sin 2x+b\cos 2x$

$=\sqrt{a^2+b^2}\sin(2x+\varphi)\leqslant\sqrt{a^2+b^2}$.

又 $\left|f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right|=\left|\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{2}b\right|\geqslant 0$,

由题意,得 $\sqrt{a^2+b^2}\leqslant\left|\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{2}b\right|$ 恒成立.

上式两边平方,整理得 $(a-\sqrt{3}b)^2\leqslant 0$.

所以 $(a-\sqrt{3}b)^2=0$,$a=\sqrt{3}b$.

所以 $f(x)=\sqrt{3}b\sin 2x+b\cos 2x$

$=2b\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

从而易知①正确,②不正确,③正确.

④若 $b>0$,则当 $f(x)$ 单调递增时,有 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$,解得 $k\pi-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{6}$,④不正确;

⑤若经过点 (a,b) 的直线与函数 $f(x)$ 的图象不相交,则此直线与 x 轴平行,又 $f(x)$ 的振幅为 $2|b|>|b|$,故直线必与 $f(x)$ 的图象有交点,⑤不正确.

三、解答题

17.解:(1)$f(\alpha)=\frac{\cos\alpha\cos\alpha(-\tan\alpha)}{\tan\alpha\cos\alpha}=-\cos\alpha$.

(2)因为 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{3}$,

所以 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

所以 $\cos\alpha=\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)$

$=\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6}-\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\sin\frac{\pi}{6}$

$=\frac{2\sqrt{6}-1}{6}$.

故 $f(\alpha)=\frac{1-2\sqrt{6}}{6}$.

18.解:(1)若 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{PB}$,则 $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$,

故 $x=y=\frac{1}{2}$.

(2)因为 $\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}$,

所以 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

$=\overrightarrow{OA}+\frac{3}{4}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{OB}$.

故 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{OB}\right)\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$

$=-\frac{1}{4}|\overrightarrow{OA}|^2-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\frac{3}{4}|\overrightarrow{OB}|^2$

$=-\frac{1}{4}\times 4^2-\frac{1}{2}\times 4\times 2\times\cos 60^\circ+\frac{3}{4}\times 2^2=-3$.

19.(1)解:因为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}$ 垂直,所以 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c})=4\cos\alpha\sin\beta-8\cos\alpha\cos\beta+4\sin\alpha\cos\beta+8\sin\alpha\sin\beta=4\sin(\alpha+\beta)-8\cos(\alpha+\beta)=0$.因此 $\tan(\alpha+\beta)=2$.

(2)解:由 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=(\sin\beta+\cos\beta,4\cos\beta-4\sin\beta)$,

得 $|b+c|$

$=\sqrt{(\sin\beta+\cos\beta)^2+(4\cos\beta-4\sin\beta)^2}$

$=\sqrt{17-15\sin 2\beta}\leqslant 4\sqrt{2}$.

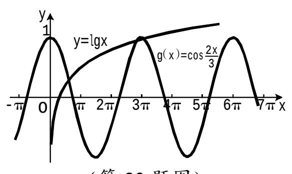
所以 $|b+c|$ 的最大值为 $4\sqrt{2}$.

(3)证明:由 $\tan\alpha\tan\beta=16$,

得 $\frac{4\cos\alpha}{\sin\beta}=\frac{\sin\alpha}{4\cos\beta}$,所以 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

20.解:(1)根据 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数,图象过点 $M(0,2)$,可得 $f(-x)=f(x)$ 且 $A=2$,则有 $2\sin(-\omega x+\varphi)=2\sin(\omega x+\varphi)$,即 $-\omega x+\varphi=\omega x+\varphi+2k\pi$ 或 $-\omega x+\varphi+\omega x+\varphi=\pi+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,得 $\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$.而 $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$,所以 $\varphi=\frac{\pi}{2}$.由 $f(x)=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{2}\right)=2\cos\omega x$ 的图象关于点 $N\left(\frac{3\pi}{4},0\right)$ 对称,得 $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=2\cos\left(\frac{3\omega}{4}\pi\right)=0$,即 $\frac{3\omega}{4}\pi=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,所以 $\omega=\frac{4}{3}\left(k+\frac{1}{2}\right)(k\in\mathbf{Z})$.又 $0<\omega\leqslant 2$,所以 $\omega=\frac{2}{3}$ 或 $\omega=2$.又 $f(x)$ 在区间 $[0,\pi]$ 上是减函数,可知只有 $\omega=\frac{2}{3}$ 满足条件.所以 $f(x)=2\cos\frac{2x}{3}$.

(2)$g(x)=\cos\frac{2x}{3}$.作出函数 $g(x)$ 与 $y=\lg x$ 的图象如下:



(第 20 题图)

观察图象可知有3个交点,所以方程 $g(x)-\lg x=0$ 有3个实数根.

21.(1)证明:根据两角和与差的余弦公式,有

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$,　①

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$.　②

由①-②,

得 $\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta$.　③

令 $\alpha+\beta=A$,$\alpha-\beta=B$,则 $\alpha=\frac{A+B}{2}$,$\beta=\frac{A-B}{2}$,

代入③,得 $\cos A-\cos B=-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$.

(2)解:结合已知材料及(1),得

$\sin^2 20^\circ+\cos^2 50^\circ+\sin 20^\circ\cos 50^\circ=\frac{1}{2}(1-\cos 40^\circ)+\frac{1}{2}(1+\cos 100^\circ)+\sin 20^\circ\cos 50^\circ$

$=1+\frac{1}{2}(\cos 100^\circ-\cos 40^\circ)+\sin 20^\circ\cos 50^\circ$

$=1+(-\sin 70^\circ\sin 30^\circ)+\frac{1}{2}(\sin 70^\circ-\sin 30^\circ)$

$=1-\sin 70^\circ\sin 30^\circ+\frac{1}{2}\sin 70^\circ-\frac{1}{2}\sin 30^\circ$

$=1-\frac{1}{2}\sin 70^\circ+\frac{1}{2}\sin 70^\circ-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$.

22.解:(1)$f(x)=\sin\omega x(\sin\omega x+\cos\omega x)-\frac{1}{2}=\sin^2\omega x+\sin\omega x\cos\omega x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(1-\cos 2\omega x)+\frac{1}{2}\sin 2\omega x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\sin 2\omega x-\frac{1}{2}\cos 2\omega x=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2\omega x-\frac{\pi}{4}\right)$.

因为 $f(x)$ 图象的相邻两对称轴之间的距离为 2π,

所以最小正周期 $T=2\times 2\pi=\frac{2\pi}{2\omega}$,解得 $\omega=\frac{1}{4}$.

(2)结合(1)可得 $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)$.

当 $x\in[-\pi,\pi]$ 时,$\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$,

所以当 $\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$,即 $x=\pi$ 时,$f(x)$ 取得最大值 $\frac{1}{2}$;当 $\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}$,即 $x=-\frac{\pi}{2}$ 时,$f(x)$ 取得最小值 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(3)假设存在锐角 α,β 满足要求,则 $f\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\cdot f\left(2\beta+\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)$

$=\frac{1}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\beta=\frac{\sqrt{3}}{8}$,

所以 $\sin\frac{\alpha}{2}\cos\beta=\frac{\sqrt{3}}{4}$.又 $\alpha+2\beta=\frac{2\pi}{3}$,

所以 $\sin\frac{\alpha}{2}\cos\beta=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\beta\right)\cos\beta$

$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\beta-\frac{1}{2}\sin\beta\right)\cos\beta$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos^2\beta-\frac{1}{2}\sin\beta\cos\beta$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1+\cos 2\beta}{2}-\frac{1}{4}\sin 2\beta=\frac{\sqrt{3}}{4}$,

化简,得 $\sqrt{3}\cos 2\beta-\sin 2\beta=0$,

即 $\tan 2\beta=\sqrt{3}$.

由 β 为锐角,得 $0<2\beta<\pi$,所以 $2\beta=\frac{\pi}{3}$,从而 $\beta=\frac{\pi}{6}$,$\alpha=\frac{2\pi}{3}-2\beta=\frac{\pi}{3}$.

所以存在锐角 α,β 满足要求,且 $\alpha=\frac{\pi}{3}$,$\beta=\frac{\pi}{6}$.

第 9 期

第 3 版同步周测题参考答案

一、选择题

1.C　2.D　3.D　4.A

5.B

提示:原式 $=\frac{\tan^2\frac{\pi}{8}-1}{\tan\frac{\pi}{8}}$

$=-2\times\frac{1-\tan^2\frac{\pi}{8}}{2\tan\frac{\pi}{8}}=-2\times\frac{1}{\tan\frac{\pi}{4}}=-2$.

6.B　7.A

8.A

提示:$f(x)=\sqrt{3}\cos x-\sin x=2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$,$-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 0\Rightarrow-\frac{\pi}{3}\leqslant x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{6}$,故当 $x+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{3}$ 时,$f(x)$ 取得最小值1.

9.D

10.A

提示:将已知两式平方相加,得 $\sin(A+B)=\frac{1}{2}$,所以 $\sin C=\frac{1}{2}$,所以 $C=\frac{\pi}{6}$,或 $C=\frac{5\pi}{6}$.若 $C=\frac{5\pi}{6}$,则 $A+B=\frac{\pi}{6}$.因为 $1-3\cos A=4\sin B>0$,所以 $\cos A<\frac{1}{3}$.又 $\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$,所以 $A>\frac{\pi}{3}$,所以 $C\neq\frac{5\pi}{6}$.所以 $C=\frac{\pi}{6}$.

11.A

提示:$2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A}{2}\right)=1+\cos\left(\frac{\pi}{2}+A\right)$

$=1-\sin A$.

由 $|\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}|=|\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}|$,知 $\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$.

所以 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=2\cos A(1-\sin A)+(-1+\sin 2A)=2\cos A-\sin 2A-1+\sin 2A=2\cos A-1=0$,解得 $\cos A=\frac{1}{2}$.又 $0<A<\pi$,所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

12.C

提示:$\tan\alpha=\frac{1+\sin 2\beta}{\cos 2\beta}=\frac{(\sin\beta+\cos\beta)^2}{\cos^2\beta-\sin^2\beta}=\frac{\sin\beta+\cos\beta}{\cos\beta-\sin\beta}=\frac{1+\tan\beta}{1-\tan\beta}=\tan\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)$.因为 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,$\beta+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$,所以 $\alpha=\beta+\frac{\pi}{4}$,即 $\alpha-\beta=\frac{\pi}{4}$.

故选 C.

二、填空题

13.$\frac{1}{8}$

提示:原式 $=\sin 15^\circ\sin 30^\circ\cos 15^\circ=\frac{1}{2}\sin^2 30^\circ=\frac{1}{8}$.

14.$-\frac{1}{2}$

提示:由 $\tan(\pi+2\alpha)=-\frac{4}{3}$,得 $\tan 2\alpha=-\frac{4}{3}$.又 $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=-\frac{4}{3}$,解得 $\tan\alpha=-\frac{1}{2}$,或 $\tan\alpha=2$.因为 α 是第二象限角,所以 $\tan\alpha=-\frac{1}{2}$.

15.$[-\sqrt{13},\sqrt{13}]$

16.$[\sqrt{3},+\infty)$

提示:依题意,得 $3\sqrt{2}\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}+\sqrt{6}\cdot\cos^2\frac{x}{4}-\frac{\sqrt{6}}{2}-m=\frac{3\sqrt{2}}{2}\sin\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}\cos\frac{x}{2}-m=\sqrt{6}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)-m\leqslant 0$ 在 $x\in\left[-\frac{5\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$ 上恒成立,

所以 $m\geqslant\sqrt{6}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$ 在 $x\in\left[-\frac{5\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$ 上恒成立.

由于 $-\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{4}$,

所以 $-\sqrt{3}\leqslant\sqrt{6}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant\sqrt{3}$,

故 $m\geqslant\sqrt{3}$.

三、解答题

17.解:(1)因为 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,$\cos\alpha=\frac{3}{5}$,

所以 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$,$\tan\alpha=\frac{4}{3}$.

所以 $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=-\frac{24}{7}$.

(2)因为 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$,$\sin\alpha=\frac{4}{5}$,

所以 $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{24}{25}$,

$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=-\frac{7}{25}$.

所以 $\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\sin 2\alpha\cos\frac{\pi}{4}+\cos 2\alpha\sin\frac{\pi}{4}$

$=\frac{17\sqrt{2}}{50}$.

18.(1)解:原式 $=\frac{\sqrt{3}\tan 12^\circ-3}{2\sin 12^\circ\cos 24^\circ}$

$=\frac{\sqrt{3}\sin 12^\circ-3\cos 12^\circ}{2\sin 12^\circ\cos 12^\circ\cos 24^\circ}$

$=\frac{\sqrt{3}\sin 12^\circ-3\cos 12^\circ}{\sin 24^\circ\cos 24^\circ}$

$=\frac{2\sqrt{3}(\sin 12^\circ\cos 60^\circ-\cos 12^\circ\sin 60^\circ)}{\sin 24^\circ\cos 24^\circ}$

$=\frac{-2\sqrt{3}\sin 48^\circ}{\frac{1}{2}\sin 48^\circ}$

$=-4\sqrt{3}$.

(2)证明:左边 $=\frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}(1+\sin\theta)+\sin\theta}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}(1+\sin\theta)-\sin\theta}$

$=\frac{1+\sin\theta+\cos\theta}{1+\sin\theta-\cos\theta}$

$=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+2\cos^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+2\sin^2\frac{\theta}{2}}$

$=\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}$,

右边 $=\frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\sin\theta}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\sin\theta}=\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$

$=\frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}=\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}$,

左边=右边,所以等式成立.

19.(1)证明:$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{1+2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1}$

$=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\tan\frac{\alpha}{2}$,得证.

(2)解:因为 α,β 都是锐角,$\cos\alpha=\frac{4}{5}$,$\cos(\alpha+\beta)=\frac{5}{13}$,所以 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$,$\sin(\alpha+\beta)=\frac{12}{13}$.

所以 $\sin\beta=\sin[(\alpha+\beta)-\alpha]=\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha=\frac{12}{13}\times\frac{4}{5}-\frac{5}{13}\times\frac{3}{5}=\frac{33}{65}$.

所以 $\cos\beta=\frac{56}{65}$.

所以 $\tan\frac{\beta}{2}=\frac{\sin\beta}{1+\cos\beta}=\frac{3}{11}$.

20.解:(1)由积化和差公式及 $\alpha-\beta=\frac{\pi}{3}$,得

$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$

$=-\frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)+\frac{1}{4}$.

由 $\cos(\alpha+\beta)\in[-1,1]$,得 $\sin\alpha\sin\beta$ 的最大值为 $-\frac{1}{2}\times(-1)+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

(2)$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$=\sqrt{3}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$.

由 $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\in[-1,1]$,

得 $\cos\alpha+\cos\beta$ 的最小值为 $-\sqrt{3}$.

21.解:(1)当 $m=0$ 时,

$f(x)=\left(1+\frac{\cos x}{\sin x}\right)\sin^2x=\sin^2x+\sin x\cos x$

$=\frac{1-\cos 2x+\sin 2x}{2}$

$=\frac{1}{2}\left[\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+1\right]$.

令 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi$,$k\in Z$,得 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[\frac{3\pi}{8}+k\pi,\frac{7\pi}{8}+k\pi\right]$,$k\in Z$.

(2)$f(x)=\left(1+\frac{\cos x}{\sin x}\right)\sin^2x+m\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}(1+\sin 2x-\cos 2x)+m\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\cos 2x-\cos\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}[\sin 2x-(1+m)\cos 2x]+\frac{1}{2}$.

由 $\tan\alpha=2$,得 $\sin 2\alpha=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{4}{5}$,$\cos 2\alpha=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=-\frac{3}{5}$.

代入 $f(\alpha)=\frac{3}{5}$ 中,解得 $m=-2$.

22.解:延长 GH 交 CD 于点 N,

则 $NH=40\sin\theta$,$CN=40\cos\theta$.

所以 $HM=50-40\cos\theta$,$AM=50-40\sin\theta$.

故 $S=(50-40\cos\theta)(50-40\sin\theta)$

$=100[25-20(\sin\theta+\cos\theta)+16\sin\theta\cos\theta]\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

令 $t=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$,

则 $\sin\theta\cos\theta=\frac{t^2-1}{2}$,且 $t\in[1,\sqrt{2}]$.

所以 $S=100[25-20t+8(t^2-1)]$

$=800\left(t-\frac{5}{4}\right)^2+450$.

所以当 $t=1$ 时,$S_{\max}=500$,

此时 $\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=1\Rightarrow\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

因为 $\frac{\pi}{4}\leqslant\theta+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{3\pi}{4}$,

所以 $\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}$,即 $\theta=0$ 或 $\theta=\frac{\pi}{2}$.

因此,$S=100[25-20(\sin\theta+\cos\theta)+16\sin\theta\cos\theta]\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$,当点 H 在 $\overset{\frown}{EF}$ 的端点 E 或 F 处时,该健身室的面积最大,最大面积是500m².

第 10 期

第 2~3 版章节测试题参考答案

一、选择题

1.D　2.B　3.D　4.D　5.A　6.B　7.D

8.B

9.B

提示:由 $\tan45°=\tan(21°+24°)=\dfrac{\tan21°+\tan24°}{1-\tan21°\tan24°}=1$,得 $\tan21°+\tan24°+\tan21°\tan24°=1$,所以 $(1+\tan21°)(1+\tan24°)=1+\tan21°\tan24°+\tan21°+\tan24°=2$.同理,$(1+\tan20°)(1+\tan25°)=2$.

所以原式 $=2\times2=4$.

10.A

提示:$\sin\gamma=\sin\alpha-\sin\beta$,$\cos\gamma=\cos\beta-\cos\alpha$,两式平方相加,得 $\cos(\beta-\alpha)=\dfrac{1}{2}$.

由 $\cos\alpha+\cos\gamma=\cos\beta$,$\alpha,\beta,\gamma\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,

得 $\cos\alpha<\cos\beta$,故 $\alpha>\beta$,所以 $\beta-\alpha=-\dfrac{\pi}{3}$.

11.D

12.B

提示:由 $f(x)$ 图象的一个最高点是 $\left(\dfrac{\pi}{4},\sqrt{3}\right)$,

可得 $a^2+b^2=3$ 且 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(a+b)=\sqrt{3}$,解得 $a=b=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.所以 $f(x)=\dfrac{\sqrt{6}}{2}(\sin x+\cos x)=\sqrt{3}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

从而可得 $g(x)=\sqrt{3}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}x+\dfrac{\pi}{4}\right)$,

则 $M(-1,\sqrt{3})$,$N(3,-\sqrt{3})$.

由 $\tan\angle MOx=-\sqrt{3}$,得 $\angle MOx=\dfrac{2\pi}{3}$;

由 $\tan\angle NOx=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,得 $\angle NOx=\dfrac{\pi}{6}$,

所以 $\theta=\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{5\pi}{6}$.

故 $\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}-\theta\right)=\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}-\dfrac{5\pi}{6}\right)=\sin\dfrac{3\pi}{4}\cdot\cos\dfrac{5\pi}{6}-\cos\dfrac{3\pi}{4}\sin\dfrac{5\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.

二、填空题

13.$\dfrac{1}{2}$

提示:原式

$=\sin163°\sin223°+\sin253°\sin(-47°)$

$=-\sin17°\sin43°+\cos17°\cos43°$

$=\cos(43°+17°)=\cos60°=\dfrac{1}{2}$.

14.$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

提示:原式 $=\dfrac{\cos75°-\sin75°}{\cos75°+\sin75°}$

$=\dfrac{1-\tan75°}{1+\tan75°}=\tan(45°-75°)$

$=\tan(-30°)=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

15.$\pm\dfrac{3}{5}$

提示:由 $25\sin^2\theta+\sin\theta-24=0$,且 θ 为第二象限角,解得 $\sin\theta=\dfrac{24}{25}$,或 $\sin\theta=-1$(舍去).故 $\cos\theta=-\dfrac{7}{25}$,$\cos\dfrac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}}=\pm\dfrac{3}{5}$.

16.$(1+\sqrt{5})R$

提示:连接 OB,设 $\angle OBD=\alpha$,则 $AD=R+R\sin\alpha$,$\dfrac{1}{2}BC=BD=R\cos\alpha$,$BC=2R\cos\alpha$,$AD+BC=R+R\sin\alpha+2R\cos\alpha=R+\sqrt{5}R\sin(\alpha+\varphi)$,其中 $\tan\varphi=2$,所以 $AD+BC$ 的最大值为 $R+\sqrt{5}R$,即 $(1+\sqrt{5})R$.

三、解答题

17.解:(1)$\cos^2\theta-\sin^2\theta=\cos2\theta=\dfrac{1}{2}$.

因为 $2\theta\in(0,\pi)$,所以 $2\theta=\dfrac{\pi}{3}$,得 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$.

(2)若 $\sin x=\dfrac{3}{5}$,$x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$,

则 $\cos x=-\sqrt{1-\sin^2x}=-\dfrac{4}{5}$.

所以 $\cos(x+\theta)=\cos x\cos\theta-\sin x\sin\theta$

$=-\dfrac{4}{5}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{3}{5}\times\dfrac{1}{2}=-\dfrac{4\sqrt{3}+3}{10}$.

18.(1)解:$\cos\alpha=2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-1=2\times\dfrac{4}{5}-1=\dfrac{3}{5}$.

(2)证明:由(1)及 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$,

可得 $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$.

因为 $\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{5}{13}$,$\dfrac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\dfrac{3\pi}{2}$,

所以 $\cos(\alpha+\beta)=-\dfrac{12}{13}$.

所以 $\sin\beta=\sin[(\alpha+\beta)-\alpha]=\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha=\dfrac{5}{13}\times\dfrac{3}{5}+\dfrac{12}{13}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{63}{65}>\dfrac{25}{26}$.

19.解:(1)原式

$=4\tan10°+2\tan40°+\dfrac{\sin20°}{\cos20°}-\dfrac{\cos20°}{\sin20°}$

$=4\tan10°+2\tan40°-\dfrac{2\cos40°}{\sin40°}$

$=4\tan10°+\dfrac{2\sin40°}{\cos40°}-\dfrac{2\cos40°}{\sin40°}$

$=4\tan10°-\dfrac{4\cos80°}{\sin80°}$

$=4\tan10°-\dfrac{4\sin10°}{\cos10°}=0$.

(2)原式

$=\dfrac{2\cos^210°}{4\sin10°\cos10°}-\sin10°\left(\dfrac{\cos5°}{\sin5°}-\dfrac{\sin5°}{\cos5°}\right)$

$=\dfrac{\cos10°}{2\sin10°}-2\cos10°=\dfrac{\cos10°-2\sin20°}{2\sin10°}$

$=\dfrac{\cos10°-2\sin(30°-10°)}{2\sin10°}$

$=\dfrac{\cos10°-2\sin30°\cos10°+2\cos30°\sin10°}{2\sin10°}$

$=\cos30°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

20.解:(1)$f(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\dfrac{1}{2}\cos x+\dfrac{1}{2}\cos x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x=\sqrt{3}\sin x$.

因为 $f(\alpha)=\sqrt{3}\sin\alpha=\dfrac{3\sqrt{3}}{5}$,

所以 $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$.

又 α 是第一象限角,所以 $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$.

故 $g(\alpha)=2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=1-\cos\alpha=\dfrac{1}{5}$.

(2)$f(x)\geqslant g(x)\Rightarrow\sqrt{3}\sin x\geqslant1-\cos x\Rightarrow\sqrt{3}\sin x+\cos x\geqslant1\Rightarrow\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)\geqslant\dfrac{1}{2}$,

可得 $2k\pi+\dfrac{\pi}{6}\leqslant x+\dfrac{\pi}{6}\leqslant2k\pi+\dfrac{5\pi}{6}$,$k\in\mathbf{Z}$,

解得 x 的取值范围是 $\left[2k\pi,2k\pi+\dfrac{2\pi}{3}\right]$,$k\in\mathbf{Z}$.

21.解:(1)$f(x)=-(\cos^2\omega x-\sin^2\omega x)+\sin\omega x\cdot2\sqrt{3}\cos\omega x+\lambda$

$=-\cos2\omega x+\sqrt{3}\sin2\omega x+\lambda$

$=2\sin\left(2\omega x-\dfrac{\pi}{6}\right)+\lambda$.

因为直线 $x=\pi$ 是 $f(x)$ 图象的一条对称轴,

所以 $2\omega\pi-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,

解得 $\omega=\dfrac{k}{2}+\dfrac{1}{3}$.又 $\omega\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$,

所以 $\omega=\dfrac{5}{6}$.

故最小正周期为 $\dfrac{2\pi}{2\times\dfrac{5}{6}}=\dfrac{6\pi}{5}$.

(2)因为 $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$,

所以 $2\sin\left(2\times\dfrac{5}{6}\times\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6}\right)+\lambda=0$,

解得 $\lambda=-\sqrt{2}$.

故 $f(x)=2\sin\left(\dfrac{5}{3}x-\dfrac{\pi}{6}\right)-\sqrt{2}$.

由 $x\in\left[0,\dfrac{3\pi}{5}\right]$,

得 $\dfrac{5}{3}x-\dfrac{\pi}{6}\in\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right]$,

$\sin\left(\dfrac{5}{3}x-\dfrac{\pi}{6}\right)\in\left[-\dfrac{1}{2},1\right]$.

故 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{3\pi}{5}\right]$ 上的值域为 $[-1-\sqrt{2},2-\sqrt{2}]$.

22.解:(1)因为 MN 与扇形弧 $\overset{\frown}{PQ}$ 相切于点 T,所以 $OT\perp MN$,$OT=3$.所以 $MT=3\tan\alpha$.

在 $Rt\triangle OTN$ 中,$\angle NOT=\dfrac{2\pi}{3}-\alpha$,

所以 $NT=3\tan\left(\dfrac{2\pi}{3}-\alpha\right)$.

所以 $MN=MT+NT=3\tan\alpha+3\tan\left(\dfrac{2\pi}{3}-\alpha\right)$,$\dfrac{\pi}{6}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$.

(2)$MN=3\tan\alpha+3\tan\left(\dfrac{2\pi}{3}-\alpha\right)$

$=3\left[\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-\alpha\right)}{\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}-\alpha\right)}\right]$

$=3\cdot\dfrac{\sin\alpha\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}-\alpha\right)+\cos\alpha\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-\alpha\right)}{\cos\alpha\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}-\alpha\right)}$

$=\dfrac{3\sin\left(\alpha+\dfrac{2\pi}{3}-\alpha\right)}{\cos\alpha\left(-\dfrac{1}{2}\cos\alpha+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)}$

$=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha}$

$=\dfrac{3\sqrt{3}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin2\alpha-\dfrac{1}{2}\cos2\alpha-\dfrac{1}{2}}$

$=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sin\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)-\dfrac{1}{2}}$.

由 $\dfrac{\pi}{6}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$,得 $\dfrac{\pi}{6}<2\alpha-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{5\pi}{6}$.

故当 $2\alpha-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$ 时,MN 取得最小值 $6\sqrt{3}$.

所以建造这样的一条公路 MN,至少要投入 $2000\times6\sqrt{3}=12000\sqrt{3}$(万元).

第 11 期

第 2~3 版综合检测题(一)参考答案

一、选择题

1.D　2.B　3.D　4.B　5.A　6.D

7.D　8.B

9.D

提示:$\tan\dfrac{\beta}{2}=\tan\left[\left(\alpha+\dfrac{\beta}{4}\right)-\left(\alpha-\dfrac{\beta}{4}\right)\right]=\dfrac{\tan\left(\alpha+\dfrac{\beta}{4}\right)-\tan\left(\alpha-\dfrac{\beta}{4}\right)}{1+\tan\left(\alpha+\dfrac{\beta}{4}\right)\tan\left(\alpha-\dfrac{\beta}{4}\right)}=\dfrac{1}{m^2+3m+3}$.

又 $m\geqslant-1$,所以 $m^2+3m+3=\left(m+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}\geqslant1$,故 $\tan\dfrac{\beta}{2}=\dfrac{1}{m^2+3m+3}\in(0,1]$.

10.A　11.A

12.B

提示:$f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.从而可知①②正确.

二、填空题

13.$\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

14.$\left\{x\middle|x\neq\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2},k\in Z\right\}$

15.13

16.0

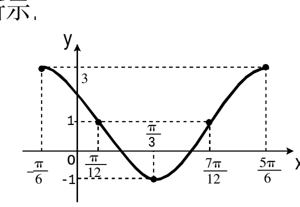
提示:因为 $\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP}=-\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$,$\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})$,$\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$,所以 $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$.故 $\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})=0$.

三、解答题

17.解:(1)列表如下:

$2x+\dfrac{\pi}{3}$	0	$\dfrac{\pi}{2}$	π	$\dfrac{3\pi}{2}$	2π
x	$-\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{12}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{7\pi}{12}$	$\dfrac{5\pi}{6}$
y	3	1	-1	1	3

描点并将它们用光滑的曲线连接起来得该函数在一个周期内的简图如图所示.



(第 17 题图)

(2)由(1)中简图可得该函数的单调递减区间为 $\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$,$\left[\dfrac{5\pi}{6},\pi\right]$.

18.解:(1)由已知条件,得 $\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}=(1+k,2-k)$,$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2,1)$.

若向量 $\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 垂直,则 $(\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2(1+k)+2-k=0$,解得 $k=-4$.

(2)由已知,得 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3,3)$,$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(0,3)$.

设向量 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ,

则 $\cos\theta=\dfrac{(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})}{|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|}=\dfrac{3\times0+3\times3}{3\sqrt{2}\times3}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

又 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$,所以 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$.

19.(1)解:由 $2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\mathbf{0}$,

得 $2(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})=\mathbf{0}$,

化简得 $\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$.

(2)证明:$\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD}$

$=\overrightarrow{OA}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}$.

结合(1),可得 $\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{DA}$.

所以 $OC\parallel DA$,且 $OC\neq DA$.故四边形 $OCAD$ 是梯形.

20.解:(1)因为 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,$\cos\alpha=\dfrac{1}{7}$,所以 $\sin\alpha=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$,$\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}=\dfrac{2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{6}{7}\times\dfrac{7}{4\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

(2)因为 $\alpha+\beta\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$,$\cos(\alpha+\beta)=-\dfrac{11}{14}$,所以 $\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$.

所以 $\cos\beta=\cos[(\alpha+\beta)-\alpha]=\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha=-\dfrac{11}{14}\times\dfrac{1}{7}+\dfrac{5\sqrt{3}}{14}\times\dfrac{4\sqrt{3}}{7}=\dfrac{1}{2}$.

又 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,$\alpha+\beta\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$,

所以 $0<\beta<\pi$.所以 $\beta=\dfrac{\pi}{3}$.

故函数 $f(x)=\sin(\beta x+\varphi)$ 的最小正周期为 $\dfrac{2\pi}{\beta}=6$.

21.解:(1)$f(x)=\sqrt{3}\sin(2018\pi-x)\cdot\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)-\cos^2x+1$

$=\sqrt{3}(-\sin x)(-\cos x)-\dfrac{1}{2}(1+\cos2x)+1$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin2x-\dfrac{1}{2}\cos2x+\dfrac{1}{2}$

$=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{1}{2}$.

令 $2x-\dfrac{\pi}{6}=k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,

得 $x=\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{12}$,$k\in\mathbf{Z}$.

所以 $f(x)$ 图象的对称中心为 $\left(\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{12},\dfrac{1}{2}\right)$,$k\in\mathbf{Z}$.

(2)由 $|f(x)-m|\leqslant1$,

得 $f(x)-1\leqslant m\leqslant f(x)+1$.

若 $x\in\left[-\dfrac{\pi}{12},\dfrac{\pi}{2}\right]$,则 $2x-\dfrac{\pi}{6}\in\left[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{5\pi}{6}\right]$,$\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)\in\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{2},1\right]$,所以 $f(x)\in\left[\dfrac{1-\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2}\right]$.

所以 $m\leqslant\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}+1=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$ 且 $m\geqslant\dfrac{3}{2}-1=\dfrac{1}{2}$.

故实数 m 的取值范围是 $\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}\right]$.

22.解:(1)由条件得 $A=2$,$\dfrac{T}{4}=3$,

因为 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$,所以 $\omega=\dfrac{\pi}{6}$.

所以曲线段 FBC 的解析式为

$y=2\sin\left(\dfrac{\pi}{6}x+\dfrac{2\pi}{3}\right)$,$x\in[-4,0]$.

当 $x=0$ 时,$y=|OC|=\sqrt{3}$,

又 $|CD|=\sqrt{3}$,

所以 $\angle COD=\dfrac{\pi}{4}$,所以 $\angle DOE=\dfrac{\pi}{4}$.

(2)由(1)易知 $|OD|=\sqrt{6}$,故 $|OP|=\sqrt{6}$.

由题意可知 $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$,

矩形草坪的面积为

$S=\sqrt{6}\sin\theta(\sqrt{6}\cos\theta-\sqrt{6}\sin\theta)$

$=6(\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta)$

$=6\left(\dfrac{1}{2}\sin2\theta+\dfrac{1}{2}\cos2\theta-\dfrac{1}{2}\right)$

$=3\sqrt{2}\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)-3$.

因为 $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$,

所以 $\dfrac{\pi}{4}<2\theta+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{3\pi}{4}$,

故当 $2\theta+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$,即 $\theta=\dfrac{\pi}{8}$ 时,

矩形草坪的面积最大.