第 8 期

第 3 版同步周测题参考答案

一、选择题

1.A　2.C　3.D　4.C　5.C　6.A

7.A

8.B

提示：$\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$

$=\tan\left[(\alpha+\beta)-\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\frac{3}{22}$.

9.C

提示：原式

$=\frac{\tan60°(1-\tan10°\cdot\tan50°)-\tan60°}{\tan10°\cdot\tan50°}$

$=-\sqrt{3}$.

10.C

提示：由已知，得

$\sin\alpha\cos\frac{\pi}{3}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{3}+\sin\alpha$

$=-\frac{4\sqrt{3}}{5}$,

即 $\frac{3}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha=-\frac{4\sqrt{3}}{5}$,

即 $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha+\frac{1}{2}\cos\alpha=-\frac{4}{5}$,

所以 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{4}{5}$.

故 $\cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)=-\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{4}{5}$.

11.D

提示：由已知条件，得

$\sin(A-B)=1-2\cos A\sin B$,

所以 $\sin A\cos B-\cos A\sin B=1-2\cos A\sin B$,

即 $\sin A\cos B+\cos A\sin B=1$,

即 $\sin(A+B)=1$.

所以 $A+B=90°$.

故 $\triangle ABC$ 是直角三角形.

12.C

提示：由两角和的余弦公式可知①正确；令 $\alpha=\frac{\pi}{2}$，$\beta=0$，可知②正确；对于③，公式成立还需保证 $\alpha+\beta\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ 及 $\tan\alpha\tan\beta\neq1$，故③错误；由两角差的正弦公式可知④错误. 故假命题是③④.

二、填空题

13.$-\frac{7\sqrt{2}}{26}$

14.$\sin2-\cos2$

提示：原式

$=\sqrt{\sin^2 2+\cos^2 2-2\sin2\cos2}$

$=\sqrt{(\sin2-\cos2)^2}$

$=|\sin2-\cos2|$

$=\sin2-\cos2$.

15.2

16.65°

三、解答题

17.解：(1)原式

$=\frac{\sin(30°+17°)-\sin17°\cos30°}{\cos17°}$

$=\frac{\sin30°\cos17°}{\cos17°}$

$=\sin30°$

$=\frac{1}{2}$.

(2)因为 $\tan60°=\tan(25°+35°)$

$=\frac{\tan25°+\tan35°}{1-\tan25°\tan35°}=\sqrt{3}$,

所以 $\tan25°+\tan35°$

$=\sqrt{3}(1-\tan25°\tan35°)$,

所以原式 $=\sqrt{3}(1-\tan25°\tan35°)+\sqrt{3}\tan25°\tan35°=\sqrt{3}$.

18.解：由已知条件，得

$\sin[(\alpha-\beta)+\beta]=\sin\alpha=\frac{3}{5}$.

又 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,

所以 $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$,

所以 $\tan\alpha=-\frac{3}{4}$.

所以 $\tan\left(\alpha-\frac{3\pi}{4}\right)$

$=\frac{\tan\alpha-\tan\frac{3\pi}{4}}{1+\tan\alpha\tan\frac{3\pi}{4}}=\frac{1}{7}$.

19.解：(1)由 $\sin A+\cos A=\frac{1}{5}$,

两边平方，得 $1+2\sin A\cdot\cos A=\frac{1}{25}$,

故 $\sin A\cdot\cos A=-\frac{12}{25}$.

(2)$(\sin A-\cos A)^2=1-2\sin A\cdot\cos A=\frac{49}{25}$.

因为在 $\triangle ABC$ 中，$0°<A<180°$,

所以 $\sin A>0$,

又 $\sin A\cos A<0$，故 $\cos A<0$,

所以 $\sin A-\cos A>0$，则 $\sin A-\cos A=\frac{7}{5}$.

与已知条件联立，可得 $\sin A=\frac{4}{5}$,

$\cos A=-\frac{3}{5}$，所以 $\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=-\frac{4}{3}$.

20.解：(1)$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{5}$，　①

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{3}{5}$.　②

由①②，解得

$\cos\alpha\cos\beta=\frac{2}{5}$，$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{5}$.

所以 $\tan\alpha\tan\beta=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{1}{2}$.

(2)由 $\alpha+\beta\in(0,\pi)$，$\cos(\alpha+\beta)=\frac{1}{5}$,

得 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

由 $\alpha-\beta\in\left(-\frac{3\pi}{2},0\right)$，$\cos(\alpha-\beta)=\frac{3}{5}$,

得 $\sin(\alpha-\beta)=-\frac{4}{5}$.

所以 $\cos2\beta=\cos[(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)]=\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{2\sqrt{6}}{5}\times\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{3-8\sqrt{6}}{25}$.

21.解：(1)$\tan B=\tan(\angle AMC-\angle BAM)=\frac{\tan\angle AMC-\tan\angle BAM}{1+\tan\angle AMC\tan\angle BAM}=-1$.

又 $0<B<\pi$，所以 $B=\frac{3\pi}{4}$.

(2)因为 $\alpha+\beta=B$,

所以 $\beta=B-\alpha=\frac{3\pi}{4}-\alpha$.

所以 $\sqrt{2}\sin\alpha-\sin\beta=\sqrt{2}\sin\alpha-\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha=\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$.

因为 $0<\alpha<\frac{3\pi}{4}$,

所以 $-\frac{\pi}{4}<\alpha-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}$.

所以 $-\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)<1$.

所以 $\sqrt{2}\sin\alpha-\sin\beta$ 的取值范围是 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$.

22.(1)证明：因为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，所以 $\sin\frac{\pi x}{2}\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi x}{2}=0$,

即 $\sin\left(\frac{\pi x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=0$.

(2)解：由 $\frac{\pi x}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$,

得对称轴方程是 $x=\frac{5}{3}+2k(k\in\mathbf{Z})$.

(3)解：由 $f\left(\frac{4A}{\pi}\right)=f\left(\frac{4B}{\pi}\right)=\frac{1}{2}$，得

$\sin\left(2A-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(2B-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$.

因为 $0<A<B<\pi$,

所以 $-\frac{\pi}{3}<2A-\frac{\pi}{3}<2B-\frac{\pi}{3}<\frac{5\pi}{3}$.

所以 $2A-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$，$2B-\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}$,

解得 $A=\frac{\pi}{4}$，$B=\frac{7\pi}{12}$. 所以 $C=\frac{\pi}{6}$.

所以 $\frac{\sin B}{\sin C}=\frac{\sin\frac{7\pi}{12}}{\sin\frac{\pi}{6}}=2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=2\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.

第 5 期

第 3 版同步周测题参考答案

一、选择题

1.B　2.C　3.D　4.C

5.A

提示：由减法的三角形法则易求得.

6.A

提示：$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=2e_1+4e_2=2\overrightarrow{AB}$，则 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BD}$ 共线. 又两向量有公共点 B，故 A,B,D 三点共线.

7.C

8.A

提示：由 $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{CB}$ 求得点 C 的坐标为(3,3)，代入直线方程 $y=\frac{1}{2}ax$，解得 $a=2$. 故选 A.

9.B

提示：因为 $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{DA}=-e_2$,

$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}e_1+\frac{\sqrt{3}}{2}e_2$，所以 $\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}e_1-\frac{2-\sqrt{3}}{2}e_2$.

10.A

提示：不妨设 $\overrightarrow{OA}=a$，$\overrightarrow{OB}=b$. 由于 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP}=-a+2t\overrightarrow{PA}+tb$，即 $\overrightarrow{AP}=\frac{-a+tb}{1+2t}$，而 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=-a+b$，故有 $\begin{cases}\frac{1}{1+2t}=\lambda,\\ \frac{t}{1+2t}=\lambda.\end{cases}$ 解得 $t=1$，$\lambda=\frac{1}{3}$.

11.D

提示：根据题意，向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是不共线的向量，所以 $1\cdot(3m-2)-2\cdot m\neq0$，解得 $m\neq2$.

12.C

提示：由 $2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=0$，得 $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，所以 G 是 BC 的中点. 结合 G 是△ABC 的外心，易知 BC=2，△ABC 是直角三角形，且∠BAC=90°. 又∠BOC=90°，所以点 A，O 均在以 BC 为直径的圆上. 当 $|\overrightarrow{OA}|$ 最大时，OA 为直径，故 $|\overrightarrow{OA}|$ 的最大值为 2.

二、填空题

13.$\frac{1}{3}$

14.7

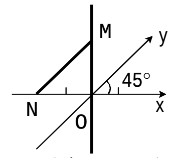
提示：向右平移 $\overrightarrow{AB}$，有 3 个位置可以平移，则有 3×2=6 个向量，加上向量 $\overrightarrow{BA}$，共 7 个.

15.b_6

提示：因为 $\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_7}=0$，所以 $a_2+a_5+b_2+b_5+b_7=\overrightarrow{A_2A_3}+\overrightarrow{A_5A_6}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_5}+\overrightarrow{OA_7}=(\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{A_2A_3})+(\overrightarrow{OA_5}+\overrightarrow{A_5A_6})+\overrightarrow{OA_7}=\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_6}+\overrightarrow{OA_7}=\overrightarrow{OA_6}=b_6$.

16.$2\sqrt{2}$

提示：易知 MN∥y 轴，∠MNO=45°，∠MON=90°(如图). 在△MON 中，$\cos45°=-\frac{x_0}{y_0}$，所以 $y_0=2\sqrt{2}$.

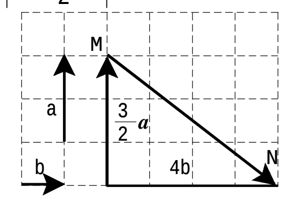


(第 16 题图)

三、解答题

17.解：(1)化简得 $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{n}=-13\boldsymbol{a}$，故 $\boldsymbol{n}=-13\boldsymbol{m}$，所以向量 $\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}$ 平行.

(2)向量 $4\boldsymbol{b}-\frac{3}{2}\boldsymbol{a}$ 即下图中的向量 $\overrightarrow{MN}$，且 $\left|4\boldsymbol{b}-\frac{3}{2}\boldsymbol{a}\right|=5$.



(第 17 题图)

18.解：(1)$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=e_2-\frac{1}{2}e_1$，$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AN}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\left(\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\frac{3}{4}e_1-e_2$.

(2)若 ke_1+e_2 与 $2e_1+ke_2$ 同向共线，则存在 $\lambda>0$，使得 $ke_1+e_2=\lambda(2e_1+ke_2)$，所以 $\begin{cases}k=2\lambda,\\ 1=k\lambda,\\ \lambda>0,\end{cases}$ 解得 $k=\sqrt{2}$.

19.解：(1)$3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}=3(3,2)+(-1,2)-2(4,1)=(0,6)$.

(2)设 $\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{b}+n\boldsymbol{c}$，其中 $m,n\in\mathbf{R}$，即 $(3,2)=(-m+4n,2m+n)$,

所以 $\begin{cases}-m+4n=3,\\ 2m+n=2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=\frac{5}{9},\\ n=\frac{8}{9}.\end{cases}$

所以 $\boldsymbol{a}=\frac{5}{9}\boldsymbol{b}+\frac{8}{9}\boldsymbol{c}$.

(3)因为 $\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{c}=(3+4k,2+k)$，$2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=(-5,2)$，所以 $2(3+4k)-(-5)(2+k)=0$，解得 $k=-\frac{16}{13}$.

20.解：(1)$\overrightarrow{OA}=(1,2)$，$\overrightarrow{AB}=(3,3)$.

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}=(1+3t,2+3t)$.

若点 P 在 x 轴上，只需 $2+3t=0$,

解得 $t=-\frac{2}{3}$；

若点 P 在 y 轴上，只需 $1+3t=0$,

解得 $t=-\frac{1}{3}$；

若点 P 在第二象限，则需 $\begin{cases}1+3t<0,\\ 2+3t>0,\end{cases}$

解得 $-\frac{2}{3}<t<-\frac{1}{3}$.

故依次满足条件的 t 值为：

$t=-\frac{2}{3}$，$t=-\frac{1}{3}$，$t\in\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$.

(2)由题意，得 $\overrightarrow{OA}=(1,2)$，$\overrightarrow{PB}=(3-3t,3-3t)$. 若四边形 $OABP$ 为平行四边形，则需 $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{PB}$,

于是 $\begin{cases}3-3t=1,\\ 3-3t=2,\end{cases}$ 此方程组无解.

故四边形 $OABP$ 不能构成平行四边形.

21.解：因为 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=\mathbf{0}$,

所以 $\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OD}$.

所以 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OC}|$，$|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OD}|$,

故四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

又 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AD}|$,

故四边形 $ABCD$ 是菱形.

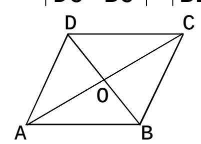
因为 $\cos\angle DAB=\frac{1}{2}$，$\angle DAB\in(0°,180°)$,

所以 $\angle DAB=60°$.

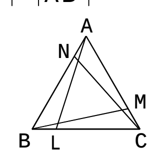
所以 $\triangle ABD$ 是边长为 1 的正三角形.

所以 $|\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{AC}|=2|\overrightarrow{AO}|=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$,

$|\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{BD}|=|\overrightarrow{AB}|=1$.



(第 21 题图)



(第 22 题图)

22.证明：如图，令 $\overrightarrow{BC}=a$，$\overrightarrow{CA}=b$ 为一组基底，根据已知有 $\overrightarrow{BL}=la$，$\overrightarrow{CM}=mb$.

因为 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=-a-b$,

所以 $\overrightarrow{AN}=n\overrightarrow{AB}=-na-nb$.

所以 $\overrightarrow{AL}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BL}=(l-1)a-b$，　①

$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CM}=a+mb$，　②

$\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AN}=-na+(1-n)b$.　③

把①②③代入已知式 $\overrightarrow{AL}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}=0$，则有 $(l-n)a+(m-n)b=0$. 根据平面向量基本定理，有 $l-n=m-n=0$，所以 $l=m=n$.

②

第 6 期

第 3 版同步周测题参考答案

一、选择题

1.C　2.B

3.C

提示：$(\boldsymbol{a}+\sqrt{2}\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+2\sqrt{2}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{b}^2=1+0+2\times4=9$，所以 $|\boldsymbol{a}+\sqrt{2}\boldsymbol{b}|=3$.

4.B

提示：$\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上的射影为

$|a|\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|b|}=\frac{2\times3+1\times4}{5}=2$.

5.B

6.A

提示：由题意，得 $\lambda a+b=(-3\lambda-1,2\lambda)$，$a-2b=(-1,2)$.

因为 $(\lambda a+b)\perp(a-2b)$，

所以 $(-3\lambda-1)\times(-1)+2\lambda\times2=0$，

解得 $\lambda=-\frac{1}{7}$.

7.D

8.B

提示：$\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}-2\overrightarrow{DA}=(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD})+(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$，所以 $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=|\overrightarrow{AB}|^2-|\overrightarrow{AC}|^2=0$.所以 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|$，所以 $\triangle ABC$ 为等腰三角形.

9.B

提示：结论①③正确，②④错误.

10.D

提示：由 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=1$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，不妨以 O 为原点，$\overrightarrow{OA}$ 的方向为 x 轴正方向建立平面直角坐标系，则 $A(1,0)$，$B(0,1)$，故 $C(\lambda,\mu)$，$M\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.所以 $\overrightarrow{MC}=\left(\lambda-\frac{1}{2},\mu-\frac{1}{2}\right)$.因为 $|\overrightarrow{MC}|=1$，所以 $\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\mu-\frac{1}{2}\right)^2=1$.故选 D.

11.B

提示：由 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OC}$ 在 $\overrightarrow{OB}$ 方向上的射影相等，得 $\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|}=\frac{\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OB}|}$，所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$.所以 $3a+b=12+5b$，即 $3a-4b-12=0$.所以点 (a,b) 在直线 $3x-4y-12=0$ 上，a^2+b^2 表示原点 O 与直线 $3x-4y-12=0$ 上的点的距离 d 的平方，则 d 的最小值为 $\frac{12}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{12}{5}$，故 a^2+b^2 的最小值为 $\frac{144}{25}$.

12.C

提示：由已知，得 $|\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{e}|^2\geqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e}|^2$，展开，得 $t^2-2t(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e})+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}-1\geqslant0$.由于上式对 $t\in\mathbf{R}$ 恒成立，故 $\Delta=4(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e})^2-4(2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}-1)\leqslant0$，即 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}-1)^2\leqslant0$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}=1$.所以 $\boldsymbol{e}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}-\boldsymbol{e}^2=1-1=0$. 所以 $e\perp(a-e)$.

二、填空题

13.45°

14.135°

15.120°

提示：设向量 a 和 b 的夹角为 θ.

由 $(2a+b)\cdot b=0$，得 $a\cdot b=-\frac{|b|^2}{2}$.

又 $|a|=|b|$，

所以 $\cos\theta=\frac{a\cdot b}{|a||b|}=\frac{-\frac{|b|^2}{2}}{|b|^2}=-\frac{1}{2}$，

故 $\theta=120°$.

16.3

提示：由数量积公式，得 $\cos\theta=-\frac{4}{5}$，所以 $\sin\theta=\frac{3}{5}$，所以 $|a\times b|=1\times5\times\frac{3}{5}=3$.

三、解答题

17.**解**：要保持平衡状态，则 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$，故 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OC}$. 以 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 为邻边作 $\square AOBC'$，则 $|\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OC'}|$，且 $\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{OC'}$，所以 $|\overrightarrow{OA}|>|\overrightarrow{OB}|$，$|\overrightarrow{OA}|>|\overrightarrow{OC}|$.所以细绳 OA 受力最大，故细绳 OA 的耐力要求最高.

18.**解**：(1)由于 $|a|=1$，$|b|=\sqrt{3}$，$|a+b|=2$，

故 $|a+b|^2=a^2+b^2+2a\cdot b=1+3+2a\cdot b=4$，

所以 $a\cdot b=0$，即 $a\perp b$.

所以向量 a 与 b 的夹角为 90°.

(2)假设存在实数 λ，使得 $(\lambda a-b)\perp(a+2b)$，那么 $(\lambda a-b)\cdot(a+2b)=\lambda a^2+(2\lambda-1)\cdot a\cdot b-2b^2=\lambda+0-6=0$，

解得 $\lambda=6$.

故存在实数 $\lambda=6$，使得 $(\lambda a-b)\perp(a+2b)$.

19.**解**：(1)因为四边形 $ABCD$ 是矩形，所以 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$，即 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.

因为 $AB=9$，$BC=6$，$\overrightarrow{CP}=2\overrightarrow{PD}$，

所以 $|\overrightarrow{CP}|=6$，$|\overrightarrow{PD}|=3$，

则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DP})\cdot(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{PC})$

$=\left(\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\right)$

$=|\overrightarrow{BC}|^2-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}-\frac{2}{9}|\overrightarrow{AB}|^2$

$=6^2-\frac{2}{9}\times9^2=18$.

(2)设 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AD}$ 的夹角为 θ.

与(1)同理，易得 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=|\overrightarrow{BC}|^2-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}-\frac{2}{9}|\overrightarrow{AB}|^2=6^2-\frac{1}{3}\times9\times6\times\cos\theta-\frac{2}{9}\times9^2=6$，解得 $\cos\theta=\frac{2}{3}$.

故 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AD}$ 夹角的余弦值为 $\frac{2}{3}$.

20.**解**：(1)因为 $\boldsymbol{a}=(-1,2)$，$\boldsymbol{b}=(3,2)$，所以 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-4,0)$.故 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=(-1)\times(-4)+2\times0=4$.

(2)$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2,4)$，$2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-5,2)$，所以 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=2\times(-5)+4\times2=-2$.

(3)因为 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=3\times2+2\times1=8$，

所以 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})=8(-1,2)=(-8,16)$；

因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-1\times3+2\times2=1$，

所以 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=(2,1)$.

21.**解**：(1)设 $\overrightarrow{OM}=(x,y)$，因为点 M 在直线 OP 上，所以向量 $\overrightarrow{OM}$ 与 $\overrightarrow{OP}$ 共线.

又 $\overrightarrow{OP}=(2,1)$，

所以 $x-2y=0$，即 $x=2y$，

所以 $\overrightarrow{OM}=(2y,y)$.

又 $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM}$，$\overrightarrow{OA}=(1,7)$，

所以 $\overrightarrow{MA}=(1-2y,7-y)$.

同理 $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}=(5-2y,1-y)$，

于是 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(1-2y)(5-2y)+(7-y)(1-y)=5y^2-20y+12=5(y-2)^2-8$.

所以当 $y=2$ 时，$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ 取得最小值 -8，此时 $\overrightarrow{OM}=(4,2)$.

(2)当 $\overrightarrow{OM}=(4,2)$，即 $y=2$ 时，有 $\overrightarrow{MA}=(-3,5)$，$\overrightarrow{MB}=(1,-1)$，

所以 $|\overrightarrow{MA}|=\sqrt{34}$，$|\overrightarrow{MB}|=\sqrt{2}$.

所以 $\cos\angle AMB=\frac{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}}{|\overrightarrow{MA}||\overrightarrow{MB}|}=-\frac{4\sqrt{17}}{17}$.

22.**解**：(1)$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\frac{2}{3}\boldsymbol{a}$.

(2)假设在线段 BC 上存在点 F 满足 $AF\perp BE$，设 $\overrightarrow{BF}=t\overrightarrow{BC}(0\leqslant t\leqslant1)$，则 $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}$.

在菱形 $ABCD$ 中，$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos60°=\frac{1}{2}$，因为 $AF\perp BE$，

所以 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BE}=(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b})\cdot\left(\boldsymbol{b}-\frac{2}{3}\boldsymbol{a}\right)=\left(1-\frac{2}{3}t\right)\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\frac{2}{3}\boldsymbol{a}^2+t\boldsymbol{b}^2=\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{3}t\right)-\frac{2}{3}+t=0$，解得 $t=\frac{1}{4}$.

从而 $\overrightarrow{AF}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{4}\boldsymbol{b}$，$|\overrightarrow{AF}|^2=\boldsymbol{a}^2+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\frac{1}{16}\boldsymbol{b}^2=1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{16}\times1=\frac{21}{16}$，

所以 $|\overrightarrow{AF}|=\frac{\sqrt{21}}{4}$.

故在线段 BC 上存在一点 F，使得 $AF\perp BE$，此时 $BF=\frac{1}{4}BC$，$AF=\frac{\sqrt{21}}{4}$.

第 7 期

第 2~3 版章节测试题参考答案

一、选择题

1.C　2.B　3.D　4.D　5.B　6.A

7.D

提示：若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，所以 $m(2m+1)-3\times2=0$，解得 $m=-2$，或 $m=\frac{3}{2}$.

当 $m=\frac{3}{2}$ 时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向，应舍去，所以 $m=-2$，所以 $\boldsymbol{b}=(2,-2)$.所以 $|\boldsymbol{b}|=2\sqrt{2}$.

8.B

提示：设 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的夹角为 θ，则 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 方向上的射影为 $|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta=\frac{(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{|\boldsymbol{a}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}=1$.

9.B

提示：由 $\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AB}=(1-\lambda)\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$，且 $\overrightarrow{BQ}\cdot\overrightarrow{CP}=-2$，$AB=1$，$AC=2$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，得 $3\lambda-2=0$，解得 $\lambda=\frac{2}{3}$.故选 B.

10.D

提示：设 $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$，得 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}$，由平行四边形法则，于是 $NP/\!/AB$，所以 $\frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{|\overrightarrow{AN}|}{|\overrightarrow{AC}|}=\frac{1}{5}$.同理可得 $\frac{S_{\triangle ABQ}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{1}{4}$，所以 $\frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ABQ}}=\frac{4}{5}$.

11.B

12.C

提示：当点 P 在边 AB 上时，$m\in[0,1]$，$n=0$，所以 $m+n\in[0,1]$.

取 AB 的中点 O，连接 OC，则 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AD}$.当点 P 在边 BC 上时，设 $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}$，$\lambda\in[0,1]$，则 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\lambda(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=\overrightarrow{AB}+\lambda\left(\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)=\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AD}$. 所以 $m=1-\frac{\lambda}{2}$，$n=\lambda$.所以 $m+n=1+\frac{\lambda}{2}\in\left[1,\frac{3}{2}\right]$.

当点 P 在边 AC 上时，由向量加法的平行四边形法则，得 $n\in[0,1]$，$m\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$，所以 $m+n\in\left[0,\frac{3}{2}\right]$.

所以 $m+n$ 的取值范围是 $\left[0,\frac{3}{2}\right]$.

故选 C.

二、填空题

13.(1)a 与 d，b 与 e；(2)a 与 d；(3)a，c，d

14.4

提示：力 $\boldsymbol{F}$ 对物体所做的功 $W=\boldsymbol{F}\cdot\overrightarrow{AB}=(2,3)\cdot(2,0)=4$.

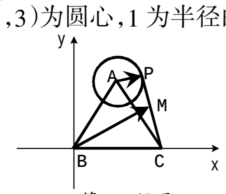
15.[1,7]

提示：$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 同向时，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 为 1；$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 反向时，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 为 7.或者设其夹角为 θ，则 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=25-24\cos\theta\in[1,49]$.

16.$\frac{49}{4}$

提示：建立如图所示的平面直角坐标系，则 $B(0,0)$，$C(2\sqrt{3},0)$，$A(\sqrt{3},3)$.

由 $|\overrightarrow{AP}|=1$，知点 P 的轨迹是以 $A(\sqrt{3},3)$ 为圆心，1 为半径的圆.



(第 16 题图)

设 $P(x,y)$，由 $\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{MC}$，得 $M\left(\frac{x+2\sqrt{3}}{2},\frac{y}{2}\right)$，则 $\overrightarrow{BM}=\left(\frac{x+2\sqrt{3}}{2},\frac{y}{2}\right)$.

故 $|\overrightarrow{BM}|^2=\frac{1}{4}[(x+2\sqrt{3})^2+y^2]$，它表示圆 A 上的点到点 $N(-2\sqrt{3},0)$ 的距离 d 平方的 $\frac{1}{4}$.

结合图形可知，$d_{max}=|\overrightarrow{AN}|+1=7$，所以 $(|\overrightarrow{BM}|^2)_{max}=\frac{1}{4}d_{max}^2=\frac{49}{4}$.

三、解答题

17.**解**：根据题意，得

$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，

$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{BA}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，

$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{BC}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$，

$\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BF}=(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})-(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

18.**解**：(1)由 $(2a-3b)\cdot(2a+b)=61$，解得 $a\cdot b=-6$.

所以 $\cos\theta=\frac{a\cdot b}{|a||b|}=\frac{-6}{4\times3}=-\frac{1}{2}$.

又 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$，所以 $\theta=\frac{2\pi}{3}$.

(2)$|a-b|^2=a^2-2a\cdot b+b^2=37$，

所以 $|a-b|=\sqrt{37}$；

$|a+b|^2=a^2+2a\cdot b+b^2=13$，

所以 $|a+b|=\sqrt{13}$.

19.**解**：(1)$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\boldsymbol{e}_1+(1+\lambda)\boldsymbol{e}_2$.

因为 A，E，C 三点共线，

所以存在实数 m，使得 $\overrightarrow{AE}=m\overrightarrow{EC}$，

即 $\boldsymbol{e}_1+(1+\lambda)\boldsymbol{e}_2=m(-2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)$.

因为 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是平面内两个不共线的非零向量，所以 $1=-2m$，且 $1+\lambda=m$，

解得 $\lambda=-\frac{3}{2}$.

(2)$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EC}=-3\boldsymbol{e}_1-\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_2=-3(2,1)-\frac{1}{2}(2,-2)=(-7,-2)$.

在平行四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$，

设点 A 的坐标为 (x,y)，

则 $\begin{cases}3-x=-7,\\5-y=-2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=10,\\y=7.\end{cases}$

所以点 A 的坐标为 $(10,7)$.

20.**解**：设点 P 的坐标为 (x_1,y_1)，则 $\overrightarrow{AP}=(x_1-2,y_1-3)$，$\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}=(5-2,4-3)+\lambda(7-2,10-3)=(3+5\lambda,1+7\lambda)$.

由 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}$，

得 $\begin{cases}x_1-2=3+5\lambda,\\y_1-3=1+7\lambda,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_1=5+5\lambda,\\y_1=4+7\lambda.\end{cases}$

所以点 P 的坐标为 $(5+5\lambda,4+7\lambda)$.

(1)令 $5+5\lambda=4+7\lambda$，得 $\lambda=\frac{1}{2}$.

所以当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，点 P 在直线 $y=x$ 上.

(2)若 P 为第一象限内的点，

则有 $\begin{cases}5+5\lambda>0,\\4+7\lambda>0,\end{cases}$ 解得 $\lambda>-\frac{4}{7}$.

故 λ 的取值范围为 $\left(-\frac{4}{7},+\infty\right)$.

21.(1)**解**：由题意，得 $M\left(0,\frac{1}{2}\right)$，$N\left(2,\frac{1}{2}\right)$.

所以 $\overrightarrow{MP}=\left(t,\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{NP}=\left(t-2,\frac{1}{2}\right)$.

因为 $MP\perp NP$，所以 $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{NP}=t(t-2)+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=0$，解得 $t=\frac{2\pm\sqrt{3}}{2}$.

(2)**证明**：设 $R(x,y)$，

则 $\overrightarrow{MR}=\left(x,y-\frac{1}{2}\right)$.

因为 $\overrightarrow{MP}$ 与 $\overrightarrow{MR}$ 共线，

所以 $t\left(y-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}x=0$.　①

又 $\overrightarrow{QN}=\left(2-t,\frac{1}{2}\right)$，

$\overrightarrow{NR}=\left(x-2,y-\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{QN}$ 与 $\overrightarrow{NR}$ 共线，

所以 $(2-t)\left(y-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}(x-2)=0$.②

联立①②，解得 $x=\frac{t}{t-1}$，$y=\frac{t}{2t-2}$.

所以 $\overrightarrow{AR}=\left(\frac{t}{t-1},\frac{t}{2t-2}\right)$.

又 $\overrightarrow{AC}=(2,1)$，$\frac{t}{t-1}\cdot1-\frac{t}{2t-2}\cdot2=0$，

所以 $\overrightarrow{AR}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 共线.

因为 $\overrightarrow{AR}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 有公共点 A，

所以 R，A，C 三点共线.

22.**解**：(1)若 P 是 BC 的中点，则 $OP\perp BC$.在 $\mathrm{Rt}\triangle BPO$ 中，$OP=\frac{1}{2}OA=1$，$OB=2$，可得 $\angle BOP=60°$.

所以 $\angle BOC=120°$. 所以 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OC}|\cos\angle BOC=2\times2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-2$.

(2)①因为 $BP=2PC$，所以 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{OB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OB}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OC}$.

又 $\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OB}+\mu\overrightarrow{OC}$，且 $\overrightarrow{OB}$ 与 $\overrightarrow{OC}$ 不共线，所以 $\lambda=\frac{1}{3}$，$\mu=\frac{2}{3}$.

②由①可得 $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OC}$，

所以 $|\overrightarrow{OP}|^2=\frac{1}{9}|\overrightarrow{OB}|^2+\frac{4}{9}|\overrightarrow{OC}|^2+\frac{4}{9}\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$.

又 $|\overrightarrow{OP}|=1$，$|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=2$，代入可得 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=-\frac{11}{4}$. 所以 $\cos\angle BOC=\frac{\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OB}|\cdot|\overrightarrow{OC}|}=\frac{-\frac{11}{4}}{2\times2}=-\frac{11}{16}$.