第 12 期
第 2~3 版综合检测题(二)参考答案

一、选择题

1.D 2.C 3.C 4.A 5.C 6.B
7.C 8.A 9.A 10.B
11.A

提示：所有椭圆和双曲线的焦距均为$|AB|=10$,则$c=5$.对于过点M的椭圆,有$2a_M=|MA|+|MB|=3+10=13$,所以$a_M=\frac{13}{2}$,$e_M=\frac{10}{13}$.同理,$a_N=6$,$e_N=\frac{5}{6}$;$a_P=2$,$e_P=\frac{5}{2}$;$a_Q=\frac{5}{2}$,$e_Q=2$.所以$e_M<e_N<e_Q<e_P$.

12.B

提示：依题意,记$g(x)=xf(x)$,则$g'(x)=xf'(x)+f(x)$,$g(0)=0$.当$x>0$时,$g'(x)=x\left[f'(x)+\frac{f(x)}{x}\right]>0$,$g(x)$是增函数,$g(x)>0$;当$x<0$时,$g'(x)=x\left[f'(x)+\frac{f(x)}{x}\right]<0$,$g(x)$是减函数,$g(x)>0$.在同一坐标系内画出函数$y=g(x)$与$y=-\frac{1}{x}$的大致图像,结合图像可知,它们共有1个公共点,因此函数$F(x)=xf(x)+\frac{1}{x}$的零点个数是1,选B.

二、填空题

13.若$x\notin \mathbf{R}$,则$x^2+1\leq 1$

14.2

15.$a>4$

提示：$f'(x)=\left(\frac{a}{x^2}-\frac{a}{x}+1\right)e^x$.

因为函数$f(x)$既有极大值又有极小值,

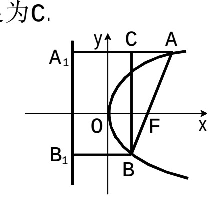
所以$f'(x)=0$有2个不等实数根,

即$x^2-ax+a=0$有2个不等的正实数根.

所以$\Delta=a^2-4a>0$且$a>0$,所以$a>4$.

16.$\frac{8}{3}$

提示：如图,过点A,B分别作准线的垂线,垂足为A_1,B_1,过点B作AA_1的垂线,垂足为C.



(第16题图)

设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$|BF|=m$,则$|AF|=3m$,由抛物线的定义,知$|BB_1|=m$,$|AA_1|=3m$.

在△ABC中,

因为$|AC|=2m$,$|AB|=4m$,

所以$k_{AB}=\tan 60°=\sqrt{3}$.

所以直线AB的方程为

$y=\sqrt{3}(x-1)$.

与抛物线方程联立,消去y,

得$3x^2-10x+3=0$.

所以弦AB的中点到抛物线准线的距离为$\frac{x_1+x_2}{2}+1=\frac{5}{3}+1=\frac{8}{3}$.

三、解答题

17.证明：若$a-b=1$,则$a=b+1$.故$a^2-b^2+2a-4b-3=(b+1)^2-b^2+2(b+1)-4b-3=0$.

因此,原命题的逆否命题为真命题,从而原命题也为真命题,得证.

18.解：若p为真命题,则

$\begin{cases}a-1>0,\\2(a-1)-1>0,\end{cases}$或$\begin{cases}a-1<0,\\1\cdot(a-1)-1>0,\end{cases}$

解得$a>\frac{3}{2}$;

若q为真命题,则$a^2-4<0$,

解得$-2<a<2$.

(1)若"p且q"是真命题,则p真q真,

所以实数a的取值范围为$\left(\frac{3}{2},2\right)$.

(2)由题意,得p,q同真假.

若p真q真,由(1)知$\frac{3}{2}<a<2$;

若p假q假,则$\begin{cases}a\leq\frac{3}{2},\\a\leq -2\text{或}a\geq 2\end{cases}\Rightarrow a\leq -2$.

所以实数a的取值范围为

$(-\infty,-2]\cup\left(\frac{3}{2},2\right)$.

19.解：(1)因为$e\geq\sqrt{2}k$,所以$\frac{\sqrt{3+m}}{\sqrt{3}}\geq\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{3}}$,解得$m\leq 3$.又$m>0$,所以实数$m$的取值范围为$(0,3]$.

(2)由$m^2-(2a+2)m+a(a+2)\leq 0$,得$(m-a)(m-a-2)\leq 0$,所以$a\leq m\leq a+2$.

因为p是q的必要不充分条件,所以$\begin{cases}a>0,\\a+2\leq 3,\end{cases}$解得$0<a\leq 1$.

所以实数a的取值范围为$(0,1]$.

20.解：(1)由图可知当$x<1$或$x>2$时,$f'(x)>0$;当$1<x<2$时,$f'(x)<0$.

所以$f(x)$的单调递增区间为$(-\infty,1)$,$(2,+\infty)$,单调递减区间为$(1,2)$.

(2)由图可知$x=1$,$x=2$是$f(x)$的极值点,因为$a=1$,所以$f'(x)=3x^2+2bx+c$,

所以$\begin{cases}f'(1)=0,\\f'(2)=0,\end{cases}$代入解得$b=-\frac{9}{2}$,$c=6$.所以$f(x)=3x^3-\frac{9}{2}x^2+6x+1$;当$x=1$时,$f(x)$有极大值$f(1)=\frac{11}{2}$;当$x=2$时,$f(x)$有极小值$f(2)=19$.

21.解：(1)由椭圆C_1与直线$y=2\sqrt{3}$相切,可得$b=2\sqrt{3}$.因为双曲线E的焦点为$(\pm 2,0)$,所以椭圆C_1中,$a^2-b^2=4$.所以$a^2=16$,$a=4$,$e=\frac{1}{2}$.所以C_1的标准方程为$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$,$C_2$的标准方程为$x^2=2y$.

(2)对于C_2,$y'=x$,由切点为$D\left(x_0,\frac{x_0^2}{2}\right)(x_0<0)$,可得直线$l:y=x_0(x-x_0)+\frac{x_0^2}{2}=x_0x-\frac{x_0^2}{2}$.令$x=0$,则$y_M=-\frac{x_0^2}{2}$.

当$-\frac{1}{2}\leq y_M<0$时,解得$0<x_0^2\leq 1$.

将直线l与椭圆C_1的方程联立,可得$(3+4x_0^2)x^2-4x_0^3x+x_0^4-48=0$.

设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则$x_1+x_2=\frac{4x_0^3}{3+4x_0^2}$,$x_1x_2=\frac{x_0^4-48}{3+4x_0^2}$,且$\Delta=-12(x_0^4-64x_0^2-48)>0$在$0<x_0^2\leq 1$时恒成立.

由$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{BM}=\mu\overrightarrow{BD}$,

得$\left(-x_1,-\frac{x_0^2}{2}-y_1\right)=\lambda\left(x_0-x_1,\frac{x_0^2}{2}-y_1\right)$,

$\left(-x_2,-\frac{x_0^2}{2}-y_2\right)=\mu\left(x_0-x_2,\frac{x_0^2}{2}-y_2\right)$.

解得$\lambda=-\frac{x_1}{x_0-x_1}$,$\mu=-\frac{x_2}{x_0-x_2}$,$\lambda+\mu=\frac{2x_1x_2-x_0(x_1+x_2)}{x_0^2-x_0(x_1+x_2)+x_1x_2}=\frac{-2x_0^4-96}{x_0^4+3x_0^2-48}$.

令$t=x_0^2\in(0,1]$,$f(t)=\lambda+\mu=\frac{-2t^2-96}{t^2+3t-48}$,

则$f'(t)=-6\cdot\frac{t^2-64t-48}{(t^2+3t-48)^2}>0$.

故$f(t)$在$(0,1]$上单调递增,可得$f(0)<f(t)\leq f(1)$,即$2<f(t)\leq\frac{49}{22}$.

所以$\lambda+\mu$的取值范围为$\left(2,\frac{49}{22}\right]$.

22.解：(1)$f'(x)=-\frac{a}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x-a}{x^2}$.

令$f'(x)=0$,得$x=a$.

①若$a\leq 0$,则$f'(x)>0$,$f(x)$在区间$(0,e]$上单调递增,此时函数$f(x)$无最小值.

②若$0<a<e$,当$x\in(0,a)$时,$f'(x)<0$,函数$f(x)$在区间$(0,a]$上单调递减;当$x\in(a,e]$时,$f'(x)>0$,函数$f(x)$在区间$(a,e]$上单调递增,所以当$x=a$时,函数$f(x)$取得最小值$\ln a$.

③若$a\geq e$,则$f'(x)\leq 0$,函数$f(x)$在区间$(0,e]$上单调递减,所以当$x=e$时,函数$f(x)$取得最小值$\frac{a}{e}$.

综上可知,当$a\leq 0$时,函数$f(x)$在区间$(0,e]$上无最小值;当$0<a<e$时,函数$f(x)$在区间$(0,e]$上的最小值为$\ln a$;当$a\geq e$时,函数$f(x)$在区间$(0,e]$上的最小值为$\frac{a}{e}$.

(2)$g'(x)=\frac{e^x}{x}+(\ln x-1)e^x+1$

$=\left(\frac{1}{x}+\ln x-1\right)e^x+1$.

当$a=1$时,$f(x)=\frac{1}{x}+\ln x-1$.

由(1)可知,此时$f(x)$在区间$(0,e]$上的最小值为$\ln 1=0$,即$\frac{1}{x}+\ln x-1\geq 0$.

若$x_0\in(0,e]$,则$e^{x_0}>0$,$\frac{1}{x_0}+\ln x_0-1\geq 0$,

所以$g'(x_0)=\left(\frac{1}{x_0}+\ln x_0-1\right)e^{x_0}+1\geq 1>0$.

曲线$y=g(x)$在点$x=x_0$处的切线与y轴垂直等价于方程$g'(x_0)=0$有实数解,而$g'(x_0)>0$,故方程$g'(x_0)=0$无实数解.

故不存在$x_0\in(0,e]$,使曲线$y=g(x)$在点$x=x_0$处的切线与y轴垂直.

第 9 期
第 3 版同步周测题参考答案

一、选择题

1.D 2.B 3.D 4.C
5.B

提示：A中,$y'=-\frac{1}{x^2}<0$,不存在极值点;B中,$y'=1-e^x$,令$y'=0$,得$x=0$,且$x<0$时,$y'>0$,$x>0$时,$y'<0$,则$x=0$为极大值点;C中,$y'=3x^2+6x+3=3(x+1)^2\geq 0$,不存在极值点;D中,$y'=3x^2\geq 0$,不存在极值点.故选B.

6.C
7.A
8.A

提示：$f'(x)=\frac{e^x(x+1)}{(x+2)^2}$,易得$f(x)$在$(-2,-1)$上单调递减,在$(-1,+\infty)$上单调递增.若$f(x)$在$(-2,a)$上有最小值,则$a>-1$.

9.C

提示：$f'(x)=3x^2+2px+2$,若$|p|<\sqrt{6}$,则$f'(x)>0$,即$f(x)$无极值.

10.B

提示：$f'(x)=\sin x+x\cos x-\sin x=x\cos x$.当$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时,$f'(x)\geq 0$,$f(x)$是增函数,所以$f\left(\frac{\pi}{2}\right)>f\left(\frac{3}{2}\right)>f(1)$.

又$f(-x)=f(x)$,所以$f\left(-\frac{3}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)$.

所以$f\left(\frac{\pi}{2}\right)>f\left(-\frac{3}{2}\right)>f(1)$.

11.C

提示：设圆半径为x,矩形的高记作h,那么窗户面积$S=\frac{\pi}{2}x^2+2hx$.

故窗户周长为

$l(x)=\pi x+2x+2h=\frac{\pi}{2}x+2x+\frac{S}{x}$.

令$l'(x)=\frac{\pi}{2}+2-\frac{S}{x^2}=0$,

解得$x=\sqrt{\frac{2S}{\pi+4}}$(舍去负值).

所以$l(x)$只有一个极值点,因此$x=\sqrt{\frac{2S}{\pi+4}}$为最小值点.故选C.

12.B

提示：由已知条件,得方程$xe^x+x^2+2x=-a$恰有两个不相等的实数解.

设$f(x)=xe^x+x^2+2x$,

则$f'(x)=e^x+xe^x+2x+2=(x+1)(e^x+2)$.

当$x<-1$时,$f'(x)<0$,$f(x)$是减函数;当$x>-1$时,$f'(x)>0$,$f(x)$是增函数.

故$f(x)$的最小值为$f(-1)=-1-\frac{1}{e}<0$.结合$f(x)$的大致图像可知$-a>-1-\frac{1}{e}$,

所以$a<1+\frac{1}{e}$.

二、填空题

13.$(2,+\infty)$ 14.$\frac{8}{3}$

15.$(-\infty,-3)\cup(6,+\infty)$

提示：$f'(x)=3x^2+2ax+(a+6)$.因为$f(x)$有极大值和极小值,所以$f'(x)=0$有两个不相等的实根,所以$\Delta=4a^2-4\times 3\times(a+6)>0$,解得$a<-3$,或$a>6$.

16.①②⑤

三、解答题

17.解：函数y的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

由题意,得$y'=e^x-1$,令$y'=0$,解得$x=0$.

因为在$(-\infty,0)$内,$y'<0$,

所以函数y在$(-\infty,0]$上单调递减;

因为在$(0,+\infty)$内,$y'>0$,

所以函数y在$[0,+\infty)$上单调递增.

18.解：(1)$f'(x)=x^2-m^2$.由已知得$f'(1)=1-m^2=0(m>0)$,解得$m=1$.

所以$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x$.

(2)令$f'(x)=0$,得$x=\pm m$.当x变化时,$f'(x)$,$f(x)$的变化情况如下表:

x	$(-\infty,-m)$	$-m$	$(-m,m)$	m	$(m,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以$f(-m)=-\frac{m^3}{3}+m^3\geq\frac{2}{3}$,解得$m\geq 1$.故实数$m$的取值范围为$[1,+\infty)$.

19.解：(1)由原式得

$f(x)=x^3-ax^2-4x+4a$,

所以$f'(x)=3x^2-2ax-4$.

(2)由$f'(-1)=0$,得$a=\frac{1}{2}$.

此时$f(x)=(x^2-4)\left(x-\frac{1}{2}\right)$,

$f'(x)=3x^2-x-4$.

由$f'(x)=0$,得$x=\frac{4}{3}$,或$x=-1$.

又$f\left(\frac{4}{3}\right)=-\frac{50}{27}$,$f(-1)=\frac{9}{2}$,

$f(-2)=0$,$f(2)=0$,

所以$f(x)$在$[-2,2]$上的最大值为$\frac{9}{2}$,最小值为$-\frac{50}{27}$.

20.解：(1)设需新建n个桥墩,

则$(n+1)x=m$,即$n=\frac{m}{x}-1$,

所以$y=f(x)$

$=256n+(n+1)(2+\sqrt{x})x$

$=256\left(\frac{m}{x}-1\right)+\frac{m}{x}(2+\sqrt{x})x$

$=\frac{256m}{x}+m\sqrt{x}+2m-256$.

(2)由(1),知

$f'(x)=-\frac{256m}{x^2}+\frac{1}{2}mx^{-\frac{1}{2}}$

$=\frac{m}{2x^2}(x^{\frac{3}{2}}-512)$.

令$f'(x)=0$,得$x=64$.

当$0<x<64$时,$f'(x)<0$,$f(x)$为减函数;当$64<x<640$时,$f'(x)>0$,$f(x)$为增函数.所以$f(x)$在$x=64$处取得最小值,此时$n=\frac{m}{x}-1=\frac{640}{64}-1=9$.故需新建9个桥墩才能使y最小.

21.(1)解：$f'(x)=x-\frac{a}{x}=\frac{x^2-a}{x}(x>0)$,

当$a\leq 0$时,$f'(x)>0$恒成立,

所以函数$f(x)$的单调递增区间为$(0,+\infty)$;

当$a>0$时,令$f'(x)>0$,得$x>\sqrt{a}$,

所以函数$f(x)$的单调递增区间为$(\sqrt{a},+\infty)$,单调递减区间为$(0,\sqrt{a})$.

(2)证明：设$F(x)=\frac{2}{3}x^3-\left(\frac{1}{2}x^2+\ln x\right)$,

故$F'(x)=2x^2-x-\frac{1}{x}$

$=\frac{(x-1)(2x^2+x+1)}{x}$.

因为$x>1$,所以$F'(x)>0$.

所以$F(x)$在$(1,+\infty)$上为增函数.

所以$F(x)>F(1)=\frac{1}{6}>0$.

所以当$x>1$时,$\frac{1}{2}x^2+\ln x<\frac{2}{3}x^3$.

22.(1)解：$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,

$f'(x)=a+\frac{1}{x}$.

若$f(x)$在区间$[1,2]$上为增函数,则$f'(x)\geq 0$在$[1,2]$上恒成立,即$a\geq -\frac{1}{x}$在$x\in[1,2]$上恒成立,则$a\geq -\frac{1}{2}$.故实数a的取值范围为$\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$.

(2)证明：当$a=-e$时,$f(x)=-ex+\ln x$,

$f'(x)=-e+\frac{1}{x}=\frac{-ex+1}{x}$.

令$f'(x)>0$,得$0<x<\frac{1}{e}$;

令$f'(x)<0$,得$x>\frac{1}{e}$.

所以$f(x)$在$\left(0,\frac{1}{e}\right)$上单调递增,在$\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$上单调递减.

所以$[f(x)]_{\max}=f\left(\frac{1}{e}\right)=-e\times\frac{1}{e}+\ln\frac{1}{e}=-2$.所以$f(x)\leq -2$,即$f(x)+2\leq 0$.

(3)解：由(2)知,$f(x)\leq -2$,

所以$|f(x)|\geq 2$.

设$g(x)=\frac{\ln x}{x}+\frac{3}{2}$,

则$x\in(0,+\infty)$,$g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$.

令$g'(x)>0$,得$0<x<e$,此时$g(x)$单调递增;令$g'(x)<0$,得$x>e$,此时$g(x)$单调递减.

所以$[g(x)]_{\max}=g(e)=\frac{1}{e}+\frac{3}{2}<2$.

所以$g(x)<2$.

所以$|f(x)|>g(x)$,即$|f(x)|>\frac{\ln x}{x}+\frac{3}{2}$.所以方程$|f(x)|=\frac{\ln x}{x}+\frac{3}{2}$无实数解.

第 10 期
第 2~3 版章节测试题参考答案

一、选择题

1.B 2.D 3.A 4.B 5.A 6.A 7.D 8.D

9.C

提示:当$x\geqslant1$时,$f'(x)\geqslant0$,函数$f(x)$在$(1,+\infty)$上是增函数;当$x<1$时,$f'(x)\leqslant0$,$f(x)$在$(-\infty,1)$上是减函数,故当$x=1$时$f(x)$取得最小值,即有$f(0)\geqslant f(1)$,$f(2)\geqslant f(1)$,得$f(0)+f(2)\geqslant 2f(1)$.

10.D

11.A

提示:令$f(x)=-x^3+x^2+x-2$,则$f'(x)=-3x^2+2x+1$.令$-3x^2+2x+1=0$,得$x=1$,或$x=-\frac{1}{3}$,故函数$f(x)$在$x=1$和$x=-\frac{1}{3}$处分别取得极大值$f(1)=-1$和极小值$f\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{59}{27}$.据此画出函数$f(x)$的大致图像,可知图像与$x$轴只有一个交点,即方程只有一个根,且在$\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$内.

12.B

提示:根据导数的几何意义,将"可平行性"的定义转化为:关于x的方程$f'(x)=a$(a是导数值)至少有两个不相等的实根.①对于函数$y=1$,$y'=0$恒成立,此时任意两点的切线都是重合的,不符合题意,故错误.②由$y'=-\sin x$和三角函数的周期性知,$y'=a(-1\leqslant a\leqslant1)$的解有无穷多个,正确.③$f'(x)=3x^2-2x+a$,令$3x^2-2x+a=m$($m$是导数值),即$3x^2-2x+a-m=0$,当$\Delta=4-12(a-m)\leqslant0$时,上述方程至多有一个实根,不符合题意,错误.④对于$y=e^x-1(x<0)$,$y'=e^x\in(0,1)$;对于$y=x+\frac{1}{x}$,$y'=1-\frac{1}{x^2}$,要使得分段函数$f(x)$的图像具有"可平行性",则$1-\frac{1}{x^2}\in(0,1)$,得$x>1$,所以$m=1$,④正确.

二、填空题

13.(1)$\frac{1}{2}$;(2)$\frac{3}{4}$

提示:(1)$\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}$.

(2)由函数$f(x)$的图像知,

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x+3}{2},-1\leqslant x\leqslant1,\\ x+1,1\leqslant x\leqslant3,\end{cases}$$

故$\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{3-\frac{3}{2}}{2}=\frac{3}{4}$.

14.$\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right)$

提示:$f'(x)=\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\in[-1,1]$,所以$-1\leqslant\tan\alpha\leqslant1$.结合$\alpha\in[0,\pi)$,解得$\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right)$.

15.2

提示:设底面边长为a,

则高$h=\sqrt{12-\frac{a^2}{2}}$,

所以体积$V=\frac{1}{3}a^2h=\frac{1}{3}\sqrt{12a^4-\frac{a^6}{2}}$.

设$y=12a^4-\frac{1}{2}a^6$,则$y'=48a^3-3a^5$.

令$y'=0(a>0)$,解得$a=4$.

此时,体积最大,则高$h=2$.

16.$[-e^2,+\infty)$

提示:$f'(x)=\frac{(x-1)e^x+a}{x^2}$.由已知条件知,$f'(x)\geqslant0$在$[2,4]$上恒成立,即$(x-1)e^x+a\geqslant0$在$[2,4]$上恒成立.

记$g(x)=(x-1)e^x+a$,$x\in[2,4]$,则$g'(x)=xe^x>0$,$g(x)$在$[2,4]$上单调递增,故$[g(x)]_{\min}=g(2)=e^2+a\geqslant0$,解得$a\geqslant-e^2$.

三、解答题

17.**解**:$\Delta y=\frac{1}{(1+\Delta x)^2}-1=\frac{-(\Delta x)^2-2\Delta x}{(1+\Delta x)^2}$.

故$\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{-\Delta x-2}{(1+\Delta x)^2}=-2$.

所以该曲线在点P处的切线的斜率为-2.

18.**解**:(1)$f'(x)=3x^2+1$,可得曲线$y=f(x)$在点$(2,-6)$处的切线的斜率$k=3\times2^2+1=13$,故切线方程为$y-(-6)=13\cdot(x-2)$,即$13x-y-32=0$.

(2)设切点为(m,m^3+m-16),

则切线的斜率$k=3m^2+1=\frac{m^3+m-16}{m}$,

解得$m=-2$,$k=13$.

所以切点坐标为$(-2,-26)$,直线l的方程为$y=13x$.

19.**解**:(1)依题意,得$f'(x)=3x^2-x=x(3x-1)$.

当$0<x<\frac{1}{3}$时,$f'(x)<0$;当$x>\frac{1}{3}$时,$f'(x)>0$.所以$f(x)$有极小值$f\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{54}$.

又$f(0)=0$,$f(1)=\frac{1}{2}$,故$f(x)$在$[0,1]$上的最大值为$\frac{1}{2}$,最小值为$-\frac{1}{54}$.

(2)$f'(x)=3ax^2-x$.令$g(x)=3ax^2-x$,则$g'(x)=6ax-1$.

由$g'(x)<0$,得$g(x)$的单调递减区间为$\left(0,\frac{1}{6a}\right)$.故$A=\left(0,\frac{1}{6a}\right)$.

当$x\in\left(0,\frac{1}{6a}\right)$时,$f'(x)=3ax^2-x=x(3ax-1)<0$,故$y=f(x)$在区间$A$上单调递减.

20.**解**:(1)设Q为AB的中点,由条件知PQ垂直平分AB,若$\angle BAO=\theta$(rad),

则$OB=OA=\frac{AQ}{\cos\angle BAO}=\frac{10}{\cos\theta}$,

$OP=10-10\tan\theta$,

所以$y=OA+OB+OP$

$=\frac{10}{\cos\theta}+\frac{10}{\cos\theta}+10-10\tan\theta$,

即$y=\frac{20-10\sin\theta}{\cos\theta}+10\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\right)$.

(2)$y'=\frac{-10\cos\theta\cos\theta-(20-10\sin\theta)(-\sin\theta)}{\cos^2\theta}$

$=\frac{10(2\sin\theta-1)}{\cos^2\theta}$.

令$y'=0$,得$\sin\theta=\frac{1}{2}$.

又$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$,所以$\theta=\frac{\pi}{6}$.

当$\theta\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right)$时,$y'<0$,$y$单调递减;

当$\theta\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$时,$y'>0$,$y$单调递增.

所以当$\theta=\frac{\pi}{6}$时,y取得最小值.

此时$OQ=\frac{10\sqrt{3}}{3}$km,故污水处理厂位于线段AB的垂直平分线上,且距离AB边$\frac{10\sqrt{3}}{3}$km处.

21.**解**:(1)函数的定义域为$(0,+\infty)$.

当$a=1$时,$f(x)=x-\ln x$,

$f'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$.

当$0<x<1$时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减;当$x>1$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增,

所以$[f(x)]_{极小值}=f(1)=1$,无极大值.

(2)$f'(x)=(1-a)x+a-\frac{1}{x}$

$=\frac{(1-a)x^2+ax-1}{x}$

$=\frac{(1-a)\left(x-\frac{1}{a-1}\right)(x-1)}{x}$.

当$a\in(3,4)$时,$f(x)$在$[1,2]$上单调递减,所以$f(1)$是最大值,$f(2)$是最小值.

所以$|f(x_1)-f(x_2)|$

$\leqslant f(1)-f(2)=\frac{a}{2}-\frac{3}{2}+\ln2$.

所以$ma+\ln2>\frac{a}{2}-\frac{3}{2}+\ln2$.

由$a>0$,上式整理,得$m>\frac{1}{2}-\frac{3}{2a}$.

由$3<a<4$,得$0<\frac{1}{2}-\frac{3}{2a}<\frac{1}{8}$.

所以$m\geqslant\frac{1}{8}$.

所以实数m的取值范围是$\left[\frac{1}{8},+\infty\right)$.

22.**解**:(1)函数的定义域是$(0,+\infty)$,$f'(x)=\frac{4}{x}+2ax-6$.由$f'(2)=0$,解得$a=1$.

(2)$f'(x)=\frac{4}{x}+2x-6=\frac{2(x-2)(x-1)}{x}$.

由$f'(x)>0$,可得$x>2$,或$0<x<1$;

由$f'(x)<0$,可得$1<x<2$.

所以函数$f(x)$的单调递增区间为$(0,1)$和$(2,+\infty)$,单调递减区间为$(1,2)$.

(3)由(2),可知$f(x)$的极大值为$f(1)=b-5$,极小值为$f(2)=4\ln2-8+b$.

由题意,可知$\begin{cases}f(1)=b-5>0,\\ f(2)=4\ln2-8+b<0,\end{cases}$

解得$5<b<8-4\ln2$.

所以实数b的取值范围是$(5,8-4\ln2)$.

第 11 期
第 2~3 版综合检测题(一)参考答案

一、选择题

1.C 2.B 3.C 4.B 5.D 6.A 7.A

提示:由已知,得$y_0+\frac{p}{2}=3y_0$,其中$p=8$,所以$y_0=2$.

8.A

提示:$\Delta y=f(1+\Delta x)-f(1)=(\Delta x)^2+2\Delta x$,所以平均变化率为$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\Delta x+2\in(1.975,2.025)$,解得$\Delta x\in(-0.025,0.025)$.

9.A

提示:图像中的单调递减区间即为$f'(x)\leqslant0$的解集,故选A.

10.A

11.B

提示:易得甲产品的利润与投入资金满足$y=\frac{1}{4}x$,乙产品的利润与投入资金满足$y=\frac{5}{4}\sqrt{x}$.设乙产品的投入资金为x万元,则甲产品的投入资金为$(10-x)$万元,其中$0\leqslant x\leqslant10$,则可获得的利润$y=\frac{1}{4}(10-x)+\frac{5}{4}\sqrt{x}$.从而$y'=-\frac{1}{4}+\frac{5}{8\sqrt{x}}$.令$y'=0$,解得$x=\frac{25}{4}$.此时函数$y$取得最大值,为$\frac{65}{16}$万元.

12.C

提示:若$|PA|+|PB|=4=|AB|$,则点P的轨迹是线段AB,故A错误;若$|PA|-|PB|=3<|AB|$,则点P的轨迹是双曲线的左支,故B错误;对于C,设$M(x,y)$,则$y^2=\frac{3}{4}(4-x^2)$,$k_{AM}\cdot k_{BM}=\frac{y}{x-2}\cdot\frac{y}{x+2}=\frac{y^2}{x^2-4}=-\frac{3}{4}$,故正确;同理,得D中$k_{AM}\cdot k_{BM}=\frac{3}{4}$,故错误.故选C.

二、填空题

13.$a=1$,$b=-1$(答案不唯一)

14.-3

15.4

提示:若$x=0$,则不论a取何值,$f(x)\geqslant0$,显然成立;

当$x\in(0,1]$时,$f(x)=ax^3-3x+1\geqslant0$可转化为$a\geqslant\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}$,

设$g(x)=\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}$,则$g'(x)=\frac{3(1-2x)}{x^4}$,

所以$g(x)$在$\left(0,\frac{1}{2}\right)$上单调递增,在$\left(\frac{1}{2},1\right)$上单调递减,因此$[g(x)]_{\max}=g\left(\frac{1}{2}\right)=4$,从而$a\geqslant4$;

当$x\in[-1,0)$时,$f(x)=ax^3-3x+1\geqslant0$可转化为$a\leqslant\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}$,

设$g(x)=\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}$,则$g'(x)=\frac{3(1-2x)}{x^4}$,

所以$g(x)$在$[-1,0)$上单调递增,因此$[g(x)]_{\min}=g(-1)=4$,从而$a\leqslant4$.

综上所述,$a=4$.

16.$\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

提示:设椭圆的长半轴长、短半轴长、焦半距分别为a、b、c,

因为$\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=0$,所以点M的轨迹是以原点O为圆心,焦半距为半径的圆.

又点M总在椭圆的内部,所以$c<b$,$c^2<b^2=a^2-c^2$,即$2c^2<a^2$.

所以$e^2=\frac{c^2}{a^2}<\frac{1}{2}$,而$e\in(0,1)$,

故$e\in\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

三、解答题

17.**解**:逆命题为:若$a+b$是偶数,则a,b都是奇数.它是假命题.

否命题:若a,b不都是奇数,则$a+b$不是偶数.它是假命题.

逆否命题为:若$a+b$不是偶数,则a,b不都是奇数.它是真命题.

18.**解**:(1)$A=\{x|-2\leqslant x\leqslant5\}$,$B=\{x|m+1\leqslant x\leqslant2m-1\}$,$B\neq\varnothing$.

因为"命题p:任意$x\in B$,都有$x\in A$"是真命题,所以$B\subseteq A$,$B\neq\varnothing$.

所以$\begin{cases}m+1\leqslant2m-1,\\ m+1\geqslant-2,\\ 2m-1\leqslant5.\end{cases}$ 解得$2\leqslant m\leqslant3$.

所以实数m的取值范围为$[2,3]$.

(2)若q为真,则$A\cap B\neq\varnothing$.

因为$B\neq\varnothing$,

所以$m+1\leqslant2m-1$,即$m\geqslant2$.

所以$\begin{cases}m+1\leqslant5,\\ m\geqslant2,\end{cases}$所以$2\leqslant m\leqslant4$.

所以实数m的取值范围为$[2,4]$.

19.**解**:(1)由离心率$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{2}$,得$a=b$,则可设双曲线的方程为$x^2-y^2=\lambda$.

将点$(4,-\sqrt{10})$代入,得$\lambda=6$.所以该双曲线的标准方程为$\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{6}=1$.

(2)结合(1)可得$|F_1F_2|=2\sqrt{6+6}=4\sqrt{3}$.又$M(4,-\sqrt{10})$,所以$\triangle F_1MF_2$的面积$S=\frac{1}{2}\times4\sqrt{3}\times\sqrt{10}=2\sqrt{30}$.

20.(1)**解**:定义域为$(0,+\infty)$,

$f'(x)=\frac{1}{x}-x+1=\frac{-x^2+x+1}{x}$.

由$f'(x)>0$,解得$0<x<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.故$f(x)$的单调递增区间为$\left(0,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

(2)**证明**:令$F(x)=f(x)-(x-1)$,则

$F'(x)=\frac{1}{x}-x+1-1=\frac{-(x+1)(x-1)}{x}$.

当$x>1$时,$F'(x)<0$,$F(x)$单调递减,所以$F(x)<F(1)=0$.故当$x>1$时,$f(x)<x-1$.

21.**解**:(1)当$m=-2$时,$f(x)=e^x(x^3-2x^2-2x+2)$,定义域为$(-\infty,+\infty)$.

$f'(x)=e^x(x^3-2x^2-2x+2)+e^x(3x^2-4x-2)=(x+3)x(x-2)e^x$,

令$f'(x)=0$,得$x=-3$,或$x=0$,或$x=2$.

当$x\in(-\infty,3)$或$x\in(0,2)$时,$f'(x)<0$;当$x\in(-3,0)$或$x\in(2,+\infty)$时,$f'(x)>0$.

所以$f(x)$在$(-\infty,3)$上单调递减,在$(-3,0)$上单调递增,在$(0,2)$上单调递减,在$(2,+\infty)$上单调递增,所以$[f(x)]_{极小值}=f(-3)=-37e^3$,$[f(x)]_{极小值}=f(2)=-2e^2$,$[f(x)]_{极大值}=f(0)=2$.

(2)$f'(x)=e^x(x^3+mx^2-2x+2)+e^x\cdot(3x^2+2mx-2)=xe^x[x^2+(m+3)x+2m-2]$.

若$f(x)$在$[-2,-1]$上单调递增,则当$x\in[-2,-1]$时,$f'(x)\geqslant0$.

又当$x\in[-2,-1]$时,$xe^x<0$,

所以当$x\in[-2,-1]$时,

$x^2+(m+3)x+2m-2\leqslant0$,

所以$\begin{cases}(-2)^2-2(m+3)+2m-2\leqslant0,\\ (-1)^2-(m+3)+2m-2\leqslant0,\end{cases}$

解得$m\leqslant4$.

所以存在$m\in(-\infty,4]$,使$f(x)$在$[-2,-1]$上单调递增.

22.(1)**解**:由题意可得$p=2$,所以圆S的圆心为$S(0,1)$,半径为1,所以$|BC|=2$.

若线段AB,BC,CD的长按此顺序构成一个等差数列,

则$|AB|+|CD|=2|BC|=4$.

设$A(x_1,y_1)$,$D(x_2,y_2)$.

由$\begin{cases}x^2=4y,\\ y=kx+1,\end{cases}$得$x^2-4kx-4=0$.

所以$x_1+x_2=4k$,$y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2=4k^2+2$,$|AB|+|CD|=|AD|-|BC|=y_1+y_2+2-2=4k^2+2=4$,结合$k>0$,解得$k=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2)**证明**:由(1)可知$Q(2k,2k^2+1)$.

当$k=0$时,直线l'与抛物线没有两个交点,所以$k\neq0$.

用$-\frac{1}{k}$替换k可得$P\left(-\frac{2}{k},\frac{2}{k^2}+1\right)$,

计算得直线PQ的斜率$k_{PQ}=\frac{k^2-1}{k}$.

所以直线PQ的方程为$y-(2k^2+1)=\frac{k^2-1}{k}(x-2k)$,即$y=\frac{k^2-1}{k}x+3$.所以直线$PQ$过定点$(0,3)$.