第8期

第3版同步周测题参考答案

一、选择题

1.C

提示：当 x=2 时，$y=\frac{2}{2}=1$；当 x=1.5 时，$y=\frac{2}{1.5}=\frac{4}{3}$.故函数 y 的改变量为 $\frac{4}{3}-1=\frac{1}{3}$.

2.A

提示：该质点的平均速度为

$$\frac{s(3+\Delta t)-s(3)}{\Delta t}$$

$$=\frac{(3+\Delta t)^2+3-(3^2+3)}{\Delta t}=6+\Delta t.$$

3.A

提示：$m_1=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=1$，$m_2=\frac{g(1)-g(0)}{1-0}=1$，$m_3=\frac{h(1)-h(0)}{1-0}=1$，故 $m_1=m_2=m_3$.

4.B

提示：由定义知，函数在点 $x=x_0$ 处的导数只与 x_0 有关.

5.D

提示：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+2\Delta x)-f(a)}{3\Delta x}$

$=\frac{2}{3}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+2\Delta x)-f(a)}{2\Delta x}$

$=\frac{2}{3}f'(a)=1$，

则 $f'(a)=\frac{3}{2}$.

6.B

提示：割线的斜率 $k=\frac{\Delta y}{\Delta x}$

$=\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x+1}=\frac{2}{3}$.

7.C

提示：设切点为 $P_0(a,b)$.由 $f'(x)=3x^2+1$，得 $k=f'(a)=3a^2+1=4$，解得 $a=\pm1$，所以点 P_0 的坐标为 $(1,0)$ 或 $(-1,-4)$.

8.A

提示：$s'=2\sin t+2t\cos t+1$，故选 A.

9.A

10.D

提示：由已知条件，

得 $f'(x)=f'(-2)e^x-2x$.

所以 $f'(-2)=f'(-2)\times e^{-2}-2\times(-2)$，

解得 $f'(-2)=\frac{4e^2}{e^2-1}$.

11.A

提示：设 $A(2,f(2))$，$B(4,f(4))$.由图像知，$f(x)$ 的图像在点 A，B 处的切线斜率 k_A，k_B 与割线 AB 的斜率 k_{AB} 满足 $k_A<k_{AB}<k_B$，所以 $f'(2)<\frac{f(4)-f(2)}{4-2}<f'(4)$，即 $2f'(2)<f(4)-f(2)<2f'(4)$.

12.C

提示：画出各曲线，可知①④不存在自公切线；曲线②的一条自公切线为 $y=5$；曲线③的一条自公切线为 $y=-\frac{1}{4}$.

二、填空题

13.$\frac{\pi}{4}$

提示：$f'(x)=e^x\cos x-e^x\sin x$，

则 $f'(0)=1$.

所以所求切线的斜率 $k=\tan\theta=1$，

故倾斜角 $\theta=\frac{\pi}{4}$.

14.在第 3min 附近红茶温度大约以 4°C/min 的速度下降

15.$-\frac{3}{16}$

提示：设 $f(x)=x^{-3}$.由已知条件，得 $f'(2)=M$.又 $f'(x)=-3x^{-4}$，则 $f'(2)=-\frac{3}{16}$.

故 $M=-\frac{3}{16}$.

16.$30000\pi cm^2/s$

提示：因为水波以 v=50cm/s 的速度向外扩张，所以水波的半径 $r=vt$，面积 $S=\pi r^2=\pi(vt)^2=2500\pi t^2$，面积的膨胀率 $S'=5000\pi t$.

当 $r=300$ 时，$t=6$，$S'=5000\pi\times6=30000\pi(cm^2/s)$.

三、解答题

17.**解**：y'

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{2(x+\Delta x)+3}-\sqrt{2x+3}}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{[\sqrt{2(x+\Delta x)+3}]^2-(\sqrt{2x+3})^2}{\Delta x[\sqrt{2(x+\Delta x)+3}+\sqrt{2x+3}]}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{2}{\sqrt{2(x+\Delta x)+3}+\sqrt{2x+3}}$

$=\frac{1}{\sqrt{2x+3}}$.

18.**解**：(1)$y'=(3^xe^x)'-(2^x)'+(e)'$

$=(3^x)'e^x+3^x(e^x)'-(2^x)'$

$=3^x\ln3\cdot e^x+3^xe^x-2^x\ln2$

$=(\ln3+1)\cdot(3e)^x-2^x\ln2$.

(2)y'

$=\frac{(x+\cos x)'(x+\sin x)-(x+\cos x)(x+\sin x)'}{(x+\sin x)^2}$

$=\frac{(1-\sin x)(x+\sin x)-(x+\cos x)(1+\cos x)}{(x+\sin x)^2}$

$=\frac{-x\cos x-x\sin x+\sin x-\cos x-1}{(x+\sin x)^2}$.

19.**解**：(1)因为 $\Delta s=s(3)-s(2)$

$=(3\times3^2+2\times3+1)-(3\times2^2+2\times2+1)=17$，

所以 $\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{17}{3-2}=17$(m/s)，即从 t=2 到 t=3 时，s 关于 t 的平均变化率为 17，即此段时间内该质点的平均速度为 17m/s.

(2)因为 $s'(t)=6t+2$，

所以 $s'(2)=6\times2+2=14$(m/s).

故当 t=2 时该质点的瞬时速度为 14m/s.

(3)设该质点的速度为 v m/s，

则 $v(t)=s'(t)=6t+2$，

所以 $v'(t)=6$，所以 $v'(2)=6(m/s^2)$.

故当 t=2 时该质点的加速度为 $6m/s^2$.

20.**解**：(1)氡气的散发速度就是剩余量函数的导数，

即 $A'(t)=500\times\ln0.834\times0.834^t$.

(2)$A'(7)=500\times\ln0.834\times0.834^7\approx-25.5$.

它表示在第 7 天附近，氡气大约以 25.5 克/天的速度自然散发.也就是说，如果保持这一速度，每经过 1 天，氡气的剩余量将下降大约 25.5 克.

21.**解**：$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$，$g'(x)=\frac{a}{x}(x>0)$.

由已知，得 $\begin{cases}\sqrt{x}=a\ln x,\\ \frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{a}{x},\end{cases}$

解得 $a=\frac{e}{2}$，$x=e^2$.

所以两条曲线的交点坐标为 (e^2,e)，

切线的斜率 $k=f'(e^2)=\frac{1}{2e}$，

所以切线的方程为 $y-e=\frac{1}{2e}(x-e^2)$，

即 $\frac{x}{2e}-y+\frac{e}{2}=0$.

22.(1)**解**：$f'(x)=x^2-4x+3=(x-2)^2-1\geqslant-1$，故切线斜率的取值范围为 $[-1,+\infty)$.

(2)**解**：结合(1)可知，

$f'(x)\geqslant-1$ 且 $-\frac{1}{f'(x)}\geqslant-1$，

即 $-1\leqslant f'(x)<0$ 或 $f'(x)\geqslant1$，

解得 $x\leqslant2-\sqrt{2}$，或 $1<x<3$，或 $x\geqslant2+\sqrt{2}$.故切点横坐标的取值范围为 $(-\infty,2-\sqrt{2}]\cup(1,3)\cup[2+\sqrt{2},+\infty)$.

(3)**证明**：假设存在切线 l 与曲线 C 同时切于不同的两点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$x_1\neq x_2$，

则在点 A 处的切线方程是

$y-\left(\frac{1}{3}x_1^3-2x_1^2+3x_1\right)=(x_1^2-4x_1+3)(x-x_1)$，

即 $y=(x_1^2-4x_1+3)x+\left(-\frac{2}{3}x_1^3+2x_1^2\right)$；

同理，在点 B 处的切线方程是

$y=(x_2^2-4x_2+3)x+\left(-\frac{2}{3}x_2^3+2x_2^2\right)$.

由于两切线是同一直线，

则有 $x_1^2-4x_1+3=x_2^2-4x_2+3$

且 $-\frac{2}{3}x_1^3+2x_1^2=-\frac{2}{3}x_2^3+2x_2^2$，

化简得 $x_1+x_2=4$

且 $(x_1+x_2)^2-3(x_1+x_2)-x_1x_2=0$.

解得 $x_1=2$，$x_2=2$.

这与 $x_1\neq x_2$ 矛盾，所以不存在与曲线 C 同时切于两个不同点的直线.

第5期

第3版同步周测题参考答案

一、选择题

1.A

提示：题中方程等价于 $\sqrt{x^2+y^2}=\frac{|12x+5y-12|}{13}$，此式表示动点 $M(x,y)$ 到定点 $(0,0)$ 与定直线 $12x+5y-12=0$ 的距离相等且定点不在定直线上，根据抛物线的定义可知，动点 M 的集合是以定点为焦点，定直线为准线的一条抛物线.

2.B

3.A

提示：由已知得焦点在 y 轴的负半轴上，p=4.故选 A.

4.B

5.B

提示：因为抛物线过点 P(-6,-3)，而点 P 在第三象限，所以焦点在 y 轴负半轴上.设抛物线方程为 $x^2=-2py$，把点 P 坐标代入，得 $36=-2p\times(-3)$，所以 p=6，所以抛物线的方程为 $x^2=-12y$，所以选 B.

6.D

7.C

提示：点 P 到其焦点的距离等于点 P 到其准线 x=-2 的距离，得 $x_P=7$，$y_P=\pm2\sqrt{14}$.

8.D

9.A

提示：由已知，得 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$，直线 AB：$y=x-p$，代入抛物线的方程，可得 $x^2-4px+p^2=0$.设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=4p$.所以 $|AF|+|BF|=x_1+x_2+p=4p+p=10$，解得 $p=2$.故准线方程为 $x=-1$，即 $x+1=0$.

10.C

提示：抛物线 $y^2=8x$ 的准线方程是 $x=-2$，点 $Q(-2,0)$.

设直线 l 的方程是 $y=k(x+2)$，代入抛物线方程，得 $k^2x^2+(4k^2-8)x+4k^2=0$.

由题意知，当 $k\neq0$ 时，$\Delta=(4k^2-8)^2-16k^4\geqslant0$，即 $-1\leqslant k<0$ 或 $0<k\leqslant1$.当 $k=0$ 时，也满足题意，所以 $-1\leqslant k\leqslant1$.

11.C

提示：画图可知共有 3 条，其中一条平行于 x 轴，所以选 C.

12.A

提示：根据抛物线的定义，可知 d_1 等于点 P 到焦点的距离，故当且仅当点 P 为过抛物线焦点与已知直线垂直的直线与抛物线的交点时，所求距离最小，且 $(d_1+d_2)_{min}=\frac{12}{5}$.故选 A.

二、填空题

13.$y^2=20x$

14.$\left(-\frac{7}{16},0\right)$

提示：抛物线的标准方程是 $y^2=-\frac{7}{4}x$，则焦点在 x 轴的负半轴上，且 $2p=\frac{7}{4}$，故焦点坐标是 $\left(-\frac{7}{16},0\right)$.

15.$\left(\frac{1}{8},\pm\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

提示：由抛物线的定义及平面几何知识，易知点 P 的横坐标为 $\frac{|OF|}{2}=\frac{1}{8}$.

16.2

提示：因为 $F(1,0)$，所以直线 AB：$y=k(x-1)$.与 $y^2=4x$ 联立，化简可得 $k^2x^2-2(2+k^2)x+k^2=0$.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

则 $x_1+x_2=\frac{4+2k^2}{k^2}$，$x_1x_2=1$.

所以 $y_1+y_2=k(x_1+x_2-2)=\frac{4}{k}$，

$y_1y_2=k^2[x_1x_2-(x_1+x_2)+1]=-4$.

由 $\angle AMB=90°$，得 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.

又 $\overrightarrow{MA}=(x_1+1,y_1-1)$，$\overrightarrow{MB}=(x_2+1,y_2-1)$，

所以 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(x_1+1)(x_2+1)+(y_1-1)\cdot(y_2-1)=x_1x_2+(x_1+x_2)+y_1y_2-(y_1+y_2)+2=0$，

即 $1+2+\frac{4}{k^2}-4-\frac{4}{k}+2=0$，解得 $k=2$.

三、解答题

17.**解**：椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{10}+y^2=1$，故其焦点坐标为 $(\pm3,0)$.

所以所求抛物线的标准方程为 $y^2=-12x$ 或 $y^2=12x$.

18.**解**：设 $B\left(x,\frac{x^2}{2p}\right)$，又 $F\left(0,\frac{p}{2}\right)$，

则 $x+0=2\sqrt{3}$，即 $x=2\sqrt{3}$.

所以 $B\left(2\sqrt{3},\frac{6}{p}\right)$.

因为 $|BF|=2|AF|$，结合抛物线的定义，得 $\frac{6}{p}+\frac{p}{2}=2\sqrt{3+\frac{p^2}{4}}$，解得 $p=\pm2$.又 $p>0$，所以 $p=2$.

19.**解**：(1)依题意，设抛物线的方程为 $x^2=-2py(p>0)$.

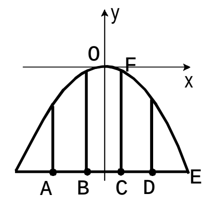
由点 $A(m,-2)$ 在该抛物线上，且 $|AF|=3$，根据抛物线的定义，得 $\frac{p}{2}+2=3$，解得 $p=2$.

所以抛物线的标准方程为 $x^2=-4y$.

(2)将点 $A(m,-2)$ 代入抛物线的方程，可得 $m=\pm2\sqrt{2}$.

又 $F(0,1)$，所以 $\triangle OAF$ 的面积 $S=\frac{1}{2}\times1\times2\sqrt{2}=\sqrt{2}$.

20.**解**：建立如图所示的平面直角坐标系.



(第20题图)

设抛物线方程为 $x^2=-2py(p>0)$.

由题意，得点 E 的坐标为 $(10,-4)$，

将其代入抛物线方程，解得 $p=\frac{25}{2}$.

所以抛物线方程为 $x^2=-25y$.

设点 $F(2,b)$，则 $b=-\frac{4}{25}$.

故最长支柱的长 $|CF|=4-\frac{4}{25}=\frac{96}{25}$(m).

21.**解**：由 $y^2=4x$，得 $p=2$，其准线方程为 $x=-1$，焦点为 $F(1,0)$.

(1)由抛物线的定义可知，

$|AF|=x_1+\frac{p}{2}$，从而 $x_1=4-1=3$.

代入 $y^2=4x$ 中，解得 $y_1=\pm2\sqrt{3}$.

所以点 A 的坐标为 $(3,2\sqrt{3})$ 或 $(3,-2\sqrt{3})$.

(2)当直线 l 的斜率存在时，

设直线 l 的方程为 $y=k(x-1)$.

与抛物线方程联立并消去 y，

整理得 $k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$，

则 $x_1+x_2=2+\frac{4}{k^2}$.

所以 $|AB|=x_1+x_2+p=4+\frac{4}{k^2}>4$.

当直线 l 的斜率不存在时，直线 l 的方程为 $x=1$，此时 $|AB|=4$，

所以 $|AB|\geqslant4$，即线段 AB 的长的最小值为 4.

22.(1)**解**：联立 $x^2=-y$ 与 $y=kx-3$，

得 $x^2+kx-3=0$.

因为 $\Delta_1=k^2+12>0$，

所以 l 与抛物线 $x^2=-y$ 恒有 2 个交点.

若 $m\geqslant3$，则 l 与抛物线 $x^2=4y$ 至少有 1 个交点.

联立 $x^2=4y$ 与 $y=kx-3$，得 $x^2-4kx+12=0$.

所以 $\Delta_2=16k^2-48\geqslant0$.结合 $k>0$，得 $k\geqslant\sqrt{3}$.所以 k 的最小值为 $\sqrt{3}$.

(2)**证明**：若 $m=3$，则 l 与抛物线 $x^2=4y$ 只有 1 个交点.

结合(1)，可知 $k=\sqrt{3}$，$A(2\sqrt{3},3)$.

由于 $F(0,1)$ 为抛物线 $x^2=4y$ 的焦点，

则 $|\overrightarrow{FA}|=3+1=4$.

设 $B(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$，

则 $x_1+x_2=-k=-\sqrt{3}$，$x_1x_2=-3$.

所以 $y_1+y_2=k(x_1+x_2)-6=-9$，$y_1y_2=(kx_1-3)(kx_2-3)=k^2x_1x_2-3k(x_1+x_2)+9=9$.

所以 $\overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{FC}=x_1x_2+(y_1-1)(y_2-1)=x_1x_2+y_1y_2-(y_1+y_2)+1=16$.

所以 $\overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{FC}=|\overrightarrow{FA}|^2$.

第 6 期

第 3 版同步周测题参考答案

一、选择题

1.D　2.C　3.B　4.B　5.C　6.A

7.B

提示:由题意知,$\frac{2}{\sqrt{m}}=4$,所以$m=\frac{1}{4}$.所以双曲线E的方程为$\frac{x^2}{4}-y^2=1$.所以E的渐近线方程为$y=\pm\frac{1}{2}x$.

8.C

9.C

提示:当直线l的斜率不存在时,直线l过双曲线的右顶点,满足要求;当直线l的斜率存在时,与两渐近线平行的直线满足要求,故共有3条.

10.D

提示:设双曲线方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,b>0)$,点M在第一象限,则$|AB|=|BM|$,$\angle ABM=120°$.过点M作$MN\perp x$轴,垂足为N.在Rt$\triangle MNB$中,$|MB|=2a$,$|BN|=a$,$|MN|=\sqrt{3}a$,故$M(2a,\sqrt{3}a)$,代入双曲线方程,得$a^2=b^2=c^2-a^2$,即$c^2=2a^2$,所以$e=\sqrt{2}$.

11.D

提示:设双曲线的两个焦点分别是$F_1(-5,0)$与$F_2(5,0)$,则这两点正好是两圆的圆心,当且仅当点P与M,F_1三点共线以及P与N,F_2三点共线时所求的值最大,此时$|PM|-|PN|=(|PF_1|+2)-(|PF_2|-1)=6+3=9$,故选D.

12.B

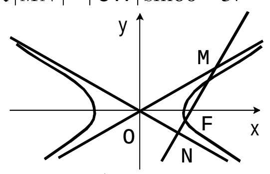
提示:由已知,得$F(2,0)$,渐近线方程为$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$,故$\angle MON=60°$.

若$\triangle OMN$为直角三角形,不妨设$\angle ONM=90°$(如图所示),

则易得直线MN的倾斜角$\angle MFx=60°$,斜率$k=\sqrt{3}$,方程为$y=\sqrt{3}(x-2)$.

与渐近线方程$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$联立,解得$M(3,\sqrt{3})$,则$|OM|=2\sqrt{3}$.

故$|MN|=|OM|\sin60°=3$.



(第 12 题图)

二、填空题

13.$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1(y<0)$

提示:由已知关系式可知点M与$A(0,5)$,$B(0,-5)$的距离之差等于8,则点M的轨迹是焦点在y轴上的双曲线的下支,其中$a=4$,$c=5$,则$b^2=9$.所以点M的轨迹方程为$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1(y<0)$.

14.4

提示:将点$(-\sqrt{2},2)$代入双曲线方程中,得$2+4m=1$,所以$m=-\frac{1}{4}$.

故双曲线的标准方程为$x^2-\frac{y^2}{4}=1$,

则$b=2$,虚轴长为$2b=4$.

15.(-12,0)

提示:由$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b}=1$表示双曲线,

得$b<0$,

所以离心率$e=\frac{\sqrt{4-b}}{2}\in(1,2)$.

所以$-12<b<0$.

16.$\frac{\sqrt{2}}{2}$

提示:设$P(x,y)(x\geqslant1)$.因为直线$x-y+1=0$平行于渐近线$x-y=0$,所以点P到直线$x-y+1=0$的距离恒大于该直线与渐近线$x-y=0$之间的距离.因此c的最大值为这两条平行直线间的距离,即$\frac{|1-0|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

三、解答题

17.**解**:由题意,设双曲线C的方程为$x^2-2y^2=\lambda$,将点$M(2,-2)$代入,可得$\lambda=-4$.

所以双曲线C的方程为$\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{4}=1$,

则$a=\sqrt{2}$,$b=2$,$c=\sqrt{6}$,离心率$e=\frac{c}{a}=\sqrt{3}$,渐近线方程为$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$.

18.**解**:椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$的焦点为$F_1(-\sqrt{7},0)$,$F_2(\sqrt{7},0)$,顶点为$A_1(-4,0)$,$A_2(4,0)$,$B_1(0,-3)$,$B_2(0,3)$.

故所求双曲线的焦点在x轴上,$2c=|A_1A_2|=8$,所以$c=4$;$2a=2\sqrt{7}$,所以$a=\sqrt{7}$.所以$b^2=c^2-a^2=9$.

故所求双曲线的方程为$\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{9}=1$.

19.**解**:双曲线中,$a=3$,$c=5$.不妨设$|PF_1|>|PF_2|$,则$|PF_1|-|PF_2|=2a=6$.又$|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot\cos60°$,而$|F_1F_2|=2c=10$,得$|PF_1|^2+|PF_2|^2-|PF_1|\cdot|PF_2|=(|PF_1|-|PF_2|)^2+|PF_1|\cdot|PF_2|=100$,所以$|PF_1|\cdot|PF_2|=64$.故$\triangle F_1PF_2$的面积$S=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|\sin60°=16\sqrt{3}$.

20.**解**:直线l的方程为$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$,即$bx+ay-ab=0$,则点$(1,0)$到直线l的距离$d_1=\frac{b(a-1)}{\sqrt{a^2+b^2}}$,点$(-1,0)$到直线l的距离$d_2=\frac{b(a+1)}{\sqrt{a^2+b^2}}$,$s=d_1+d_2=\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{2ab}{c}\geqslant\frac{4}{5}c$,即$5a\sqrt{c^2-a^2}\geqslant2c^2$,

于是有$5\sqrt{e^2-1}\geqslant2e^2$,

即$4e^4-25e^2+25\leqslant0$,得$\frac{5}{4}\leqslant e^2\leqslant5$.

又$e>1$,所以e的取值范围是$\left[\frac{\sqrt{5}}{2},\sqrt{5}\right]$.

21.**解**:以直线AB为x轴,线段AB的垂直平分线为y轴,建立直角坐标系,如下图,则$A(3,0)$,$B(-3,0)$.

因为$|PB|-|PA|=4<6$,

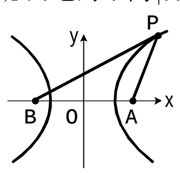
所以P在双曲线的右支上,且$a=2$,$c=3$,$b=\sqrt{5}$.

所以P在双曲线$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$右支上.

因为P在A的北偏东30°方向,

所以$k_{AP}=\tan60°=\sqrt{3}$.

所以AP所在直线的方程为$y=\sqrt{3}\cdot(x-3)$.与双曲线方程联立,解得点P的坐标为$(8,5\sqrt{3})$或$\left(\frac{16}{7},-\frac{5\sqrt{3}}{7}\right)$(舍去),所以A,P两地的距离$|AP|=10$千米.



(第 21 题图)

22.**解**:(1)双曲线的右焦点为$F(\sqrt{2},0)$,渐近线方程为$x\pm y=0$,

则圆心F到渐近线的距离$d=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$.所以圆的方程为$(x-\sqrt{2})^2+y^2=1$.

(2)设$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,经过点P的直线方程为$y=kx-1$(k显然存在).

联立方程组$\begin{cases}x^2-y^2=1,\\ y=kx-1,\end{cases}$消去y,

整理得$(1-k^2)x^2+2kx-2=0$.

所以$\Delta=(2k)^2-4(1-k^2)(-2)=8-4k^2>0$,且$x_1+x_2=\frac{-2k}{1-k^2}>0$,$x_1x_2=\frac{-2}{1-k^2}>0$,

解得$1<k<\sqrt{2}$.又$y_1+y_2=k(x_1+x_2)-2=\frac{-2}{1-k^2}$,

所以线段MN的中点为$\left(\frac{-k}{1-k^2},\frac{-1}{1-k^2}\right)$,

垂直平分线的方程为

$y+\frac{1}{1-k^2}=-\frac{1}{k}\left(x+\frac{k}{1-k^2}\right)$.

令$x=0$,得截距$t=\frac{2}{k^2-1}>2$.

故t的取值范围是$(2,+\infty)$.

第 7 期

第 2~3 版章节测试题参考答案

一、选择题

1.C　2.B　3.A　4.B　5.D　6.C

7.B　8.A

9.C

提示:A选项中,直线的斜率大于0,故$ab<0$,此时曲线应为双曲线,故错误;同理,B选项中,$a<0$,$b<0$,曲线不存在,故错误;C选项中,$a>0$,$b<0$,曲线为焦点在x轴上的双曲线,故正确;由C选项可知D不正确.故选C.

10.A

提示:设右焦点为$F_1(2,0)$,则$|MF_1|+|MF|=2a=6$.所以$|MA|+|MF|=|MA|-|MF_1|+6$.又$-|AF_1|\leqslant|MA|-|MF_1|\leqslant|AF_1|$(当M,A,$F_1$三点共线时等号成立),所以$6-\sqrt{2}\leqslant|MA|+|MF|\leqslant6+\sqrt{2}$.

11.A

提示:因为$|AF|=6$,$\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$,

所以$|FB|=3$.设$|CF|=x$,

由抛物线的定义,

可得$\frac{x}{3}=\frac{6-x}{6+3}$,解得$x=\frac{3}{2}$.

故$|BC|=|CF|+|BF|=\frac{9}{2}$.

12.A

提示:由题意,知$A(a,0)$,$B\left(c,\frac{b^2}{a}\right)$,$C\left(c,-\frac{b^2}{a}\right)$.由双曲线的对称性,知D在x轴上.设$D(x,0)$,由$BD\perp AC$,得$\frac{\frac{b^2}{a}-0}{c-x}\cdot\frac{\frac{b^2}{a}}{a-c}=-1$,解得$c-x=\frac{b^4}{a^2(c-a)}<a+\sqrt{a^2+b^2}=a+c$.所以$\frac{b^4}{a^2}<c^2-a^2=b^2\Rightarrow\frac{b^2}{a^2}<1\Rightarrow-1<\frac{b}{a}<1$.因此渐近线斜率的取值范围是$(-1,0)\cup(0,1)$.

二、填空题

13.$y^2=28x$

14.8

提示:根据双曲线定义,有$|MF_2|-|MF_1|=2a=4$,$|NF_2|-|NF_1|=2a=4$,两式相加,得$|MF_2|+|NF_2|-|MN|=8$.

15.$\pm\frac{\sqrt{3}}{4}$

16.②③

提示:易知F_1,F_2,E_1,E_2分别是两个椭圆的焦点,若点P在椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$上且不是两个椭圆的交点,则P到$F_1$,$F_2$两点的距离之和是定值,到$E_1$,$E_2$两点的距离之和不是定值,故①错误;由椭圆的对称性可知②正确;曲线C所围的区域在边长为6的正方形内部且在半径为3的圆外部,由此可知③正确,④错误.

三、解答题

17.**解**:(1)设椭圆的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,

则$2a=10$,且$a^2-b^2=3^2$,解得$a=5$,$b=4$.

因此该椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

(2)由(1)可知,$P(0,\pm4)$,$|F_1F_2|=6$,

故$\triangle F_1PF_2$的面积$S=\frac{1}{2}\times6\times4=12$.

18.**解**:由椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$的焦点为$(\pm4,0)$,可设双曲线的方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$,且$c=4$.

又双曲线的离心率等于2,所以$\frac{c}{a}=2$,

所以$a=2$.

所以$b^2=c^2-a^2=12$,$b=2\sqrt{3}$.

所以该双曲线的方程为$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$,

渐近线方程为$y=\pm\sqrt{3}x$.

19.**解**:由题意,知抛物线的焦点在x轴上,可设抛物线的方程为$y^2=ax(a\neq0)$.

由点$M\left(\frac{2}{3},-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$在抛物线上,

得$\left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2=\frac{2}{3}a$,解得$a=4$.

所以所求抛物线的方程为$y^2=4x$.

因为点$M\left(\frac{2}{3},-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$在椭圆上,

所以$\frac{4}{9a^2}+\frac{24}{9b^2}=1$.　①

又$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{1}{2}$,　②

由①②,可得$a^2=4$,$b^2=3$.

所以所求椭圆的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

20.**解**:(1)当k不存在时,直线l的方程为$x=1$,代入双曲线的方程,得$y=0$,即l与C有一个交点.

当k存在时,设直线l的方程为$y=k(x-1)+2$,

代入C的方程,并整理,得

$(2-k^2)x^2+2(k^2-2k)x-k^2+4k-6=0$.

当$2-k^2=0$,即$k=\pm\sqrt{2}$时,上述方程有唯一解.

当$2-k^2\neq0$,即$k\neq\pm\sqrt{2}$时,$\Delta=16(3-2k)$.由$\Delta=0$,解得$k=\frac{3}{2}$;由$\Delta>0$,解得$k<\frac{3}{2}$;由$\Delta<0$,解得$k>\frac{3}{2}$.

所以,当$k\in\left\{k\middle|k\text{不存在,或}k=\pm\sqrt{2},\text{或}k=\frac{3}{2}\right\}$时,l与C只有一个交点;当$k\in\left\{k\middle|k<\frac{3}{2},\text{且}k\neq\pm\sqrt{2}\right\}$时,l与C有两个交点;当$k\in\left\{k\middle|k>\frac{3}{2}\right\}$时,l与C无交点.

(2)设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,由(1)知,

$x_1+x_2=\frac{2(k^2-2k)}{k^2-2}=2\times1$,解得$k=1$.

所以直线AB的方程为$x-y+1=0$.

21.**解**:(1)由题意得$F(1,0)$,l的方程为$y=k(x-1)(k>0)$.

设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$.

由$\begin{cases}y=k(x-1),\\ y^2=4x,\end{cases}$得$k^2x^2-2(k^2+2)x+k^2=0$.

故$x_1+x_2=\frac{2(k^2+2)}{k^2}$.

所以$|AB|=|AF|+|BF|=x_1+x_2+p=\frac{2(k^2+2)}{k^2}+2=8$,解得$k=-1$(舍去),或$k=1$.

所以直线l的方程$y=x-1$.

(2)由(1)得AB的中点坐标为$(3,2)$,所以直线AB的垂直平分线方程为$y-2=-(x-3)$,即$y=-x+5$.

设所求圆的圆心坐标为(x_0,y_0),

则$\begin{cases}y_0=-x_0+5,\\ (x_0+1)^2=\frac{(y_0-x_0+1)^2}{2}+16,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x_0=3,\\ y_0=2,\end{cases}$或$\begin{cases}x_0=11,\\ y_0=-6.\end{cases}$

因此,所求圆的方程为$(x-3)^2+(y-2)^2=16$或$(x-11)^2+(y+6)^2=144$.

22.**解**:(1)由题意,得$M(-5\sqrt{2},0)$,$N(5\sqrt{2},0)$.

因为线路AB段上的任意一点到N的距离比到M的距离多10km,所以线路AB是以M,N为焦点的双曲线的一部分,设双曲线方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$,则$2a=10$,$c=5\sqrt{2}$,所以$a^2=25$,$b^2=25$.

所以线路AB的方程为

$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{25}=1(x\leqslant-5,y\geqslant0)$.

同理可得线路CD的方程为

$\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{25}=1(x\geqslant0,y\leqslant-5)$.

易知$B(-5,0)$,故线路BC的方程为$x^2+y^2=25(-5\leqslant x\leqslant0,-5\leqslant y\leqslant0)$.

(2)设$G(x,y)$,则$x^2-y^2=25(x\leqslant-5,y\geqslant0)$.又$Q(0,5\sqrt{2})$,

故$|GQ|^2=x^2+(y-5\sqrt{2})^2$

$=2y^2-10\sqrt{2}y+75=2\left(y-\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2+50$.

所以当$y=\frac{5\sqrt{2}}{2}$时,$|GQ|$取得最小值,此时$x=-\frac{5\sqrt{6}}{2}$.所以G的位置为点$\left(-\frac{5\sqrt{6}}{2},\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$.