

第 1 期

第 3 版同步周测题参考答案

一、选择题

1.C

提示:选项 A 是假命题;选项 B、D 不是命题;选项 C 是真命题.故选 C.

2.B

提示:逆命题是将原命题的条件与结论互换,故选 B.

3.A

提示:命题 α 的条件和结论恰好是命题 β 的条件和结论的否定,所以命题 α 是命题 β 的否命题.

4.C

提示:原命题与逆否命题同真假,故选 C.

5.D

提示:只有选项 D 中的命题是真命题,即 $p \Rightarrow q$,故 p 是 q 的充分条件.

6.B

提示:由 $2^x < 2^y$,得 $x < y$;
由 $\log_3 x < \log_3 y$,得 $0 < x < y$.
所以 $p \nRightarrow q$,但 $q \Rightarrow p$.故 p 是 q 的必要不充分条件.

7.D

8.D

9.C

提示:在 $\triangle ABC$ 中,若 $\cos A = 2\sin B \sin C$,
则 $-\cos(B+C) = 2\sin B \sin C$,化简得 $\cos(B-C) = 0$,故 $B-C = 90^\circ$ 或 $B-C = -90^\circ$,即 $B = C + 90^\circ$ 或 $C = B + 90^\circ$,故 $\triangle ABC$ 是钝角三角形,原命题与逆否命题是真命题.
若 $\triangle ABC$ 是钝角三角形,取 $A = 120^\circ$,
 $B = 30^\circ, C = 30^\circ$,则 $2\sin B \sin C = \frac{1}{2} \neq \cos A$,故逆命题与否命题是假命题.

10.C

提示:一次函数 $y = -\frac{m}{n}x + \frac{1}{n}$ 的图象同时经过第一、三、四象限 $\Rightarrow -\frac{m}{n} > 0$,且 $\frac{1}{n} < 0 \Rightarrow m > 0$,且 $n < 0 \Rightarrow mn < 0$,反之不可以.故选 C.

11.B

提示:根据命题的等价性可得.

12.D

提示:因为 $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的增函数,
且 $f(-1) = -4$,
所以 $Q = \{x | f(x) < -4\} = \{x | x < -1\}$.
同理,得 $P = \{x | f(x+t) < 2\} = \{x | x+t < 2\} = \{x | x < 2-t\}$.
因为“ $x \in P$ ”是“ $x \in Q$ ”的充分不必要条件,
所以 $P \subsetneq Q$.故 $2-t < -1$,解得 $t > 3$.

13.一个函数为 $y = 2x + 1$,这个函数是增函数

14.若 $(\complement_U A) \cap (\complement_U B) = \complement_U B$,则 $A \subsetneq B$

提示:否命题与逆命题互为逆否命题,故命题 p 的逆否命题是:若 $(\complement_U A) \cap (\complement_U B) = \complement_U B$,则 $A \subsetneq B$.

15. \Rightarrow

16.(0,2)

且 $f(-1) = -4$,
所以 $Q = \{x | f(x) < -4\} = \{x | x < -1\}$.
同理,得 $P = \{x | f(x+t) < 2\} = \{x | x+t < 2\} = \{x | x < 2-t\}$.
因为“ $x \in P$ ”是“ $x \in Q$ ”的充分不必要条件,
所以 $P \subsetneq Q$.故 $2-t < -1$,解得 $t > 3$.

二、填空题

13.一个函数为 $y = 2x + 1$,这个函数是增函数

14.若 $(\complement_U A) \cap (\complement_U B) = \complement_U B$,则 $A \subsetneq B$

提示:否命题与逆命题互为逆否命题,故命题 p 的逆否命题是:若 $(\complement_U A) \cap (\complement_U B) = \complement_U B$,则 $A \subsetneq B$.

15. \Rightarrow

16.(0,2)

提示:由 $\frac{x-2m}{x+m} < 0 (m > 0)$,得 $p: x \in (-m, 2m)$.由 $x(x-4) < 0$,得 $q: x \in (0, 4)$.
根据题意,可知上述两区间相交但不存在包含关系,结合 $m > 0$,得 $0 < 2m < 4$,所以 m 的取值范围是 $(0, 2)$.

三、解答题

17.解:原命题可改写为:若一个函数是单调函数,则该函数不是周期函数,
故逆命题为:若一个函数不是周期函数,则该函数是单调函数;
否命题为:若一个函数不是单调函数,则该函数是周期函数;
逆否命题为:若一个函数是周期函数,则该函数不是单调函数.

18.证明:因为一个命题的原命题与逆否命题具有相同的真假性,所以可证明原命题为真命题.
因为 $a+b \geq 0$,所以 $a \geq -b, b \geq -a$.
因为 $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的增函数,
所以 $f(a) \geq f(-b), f(b) \geq f(-a)$,
所以 $f(a)+f(b) \geq f(-a)+f(-b)$.
所以原命题为真命题,故其逆否命题为真命题.

19.解:(1)四边形的对角线互相平分 \nRightarrow 四边形是矩形,而四边形是矩形 \Rightarrow 四边形对角线互相平分,所以 p 是 q 的必要不充分条件.

(2)方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一根为 1 $\Rightarrow a+b+c=0 (a, b, c \in \mathbf{R})$;反之 $a+b+c=0 (a, b, c \in \mathbf{R}) \Rightarrow$ 方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一根为 1,所以 p 是 q 的充要条件.

(3)数 a 能被 6 整除 \Rightarrow 数 a 能被 3 整除,而数 a 能被 3 整除 \nRightarrow 数 a 能被 6 整除,所以 p 是 q 的充分不必要条件.

(4)因为 $ab=0$ 时, $|ab|=ab$,所以 $|ab|=ab \nRightarrow ab > 0$,而当 $ab > 0$ 时,有 $|ab|=ab$,所以 p 是 q 的必要不充分条件.

20.解:若方程 $x^2+mx+1=0$ 有实数根,则 $\Delta_1 = m^2 - 4 \geq 0$,所以 $p: m \geq 2$ 或 $m \leq -2$;
若方程 $4x^2+4(m-2)x+1=0$ 无实数根,则 $\Delta_2 = 16(m-2)^2 - 16 < 0$,所以 $q: 1 < m < 3$.

由 p 真 q 假,得 $\begin{cases} m \geq 2 \text{ 或 } m \leq -2, \\ m \geq 3 \text{ 或 } m \leq 1, \end{cases}$ 所以 $m \geq 3$ 或 $m \leq -2$;

由 p 假 q 真,得 $\begin{cases} -2 < m < 2, \\ 1 < m < 3, \end{cases}$ 所以 $1 < m < 2$.
所以实数 m 的取值范围为 $(-\infty, -2] \cup (1, 2) \cup [3, +\infty)$.

21.解:由 $(x-1+m)(x-1-m) \geq 0$,其中 $m > 0 \Rightarrow p: x \in \{x | x \geq 1+m \text{ 或 } x \leq 1-m\}$.
由 $x = n + \frac{1}{n}$,结合基本不等式,得 $q: x \in \{x | x \geq 2 \text{ 或 } x \leq -2\} \subseteq \{x | x \geq 1+m \text{ 或 } x \leq 1-m\}$,
所以 $1-m \geq -2$ 且 $1+m \leq 2$,又 $m > 0$,故 $0 < m \leq 1$.
所以实数 m 的取值范围是 $(0, 1]$.

22.证明:充分性:因为 $a+b=0$,所以 $S_n = aq^n + b = aq^n - a$,
所以 $a_n = S_n - S_{n-1} = (aq^n - a) - (aq^{n-1} - a) = a(q-1)q^{n-1} (n > 1)$.
又 $a_1 = aq - a = a(q-1)$ 满足上式,
所以 $a_n = a(q-1)q^{n-1} (n \in \mathbf{N}_+)$.
所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a(q-1)q^n}{a(q-1)q^{n-1}} = q$.
故数列 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列.
必要性:因为数列 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列,
所以 $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1}{1-q} q^n$.
因为 $S_n = aq^n + b$,
所以 $a = -\frac{a_1}{1-q}, b = \frac{a_1}{1-q}$.
所以 $a+b=0$.
综上,结论得证.

的焦点在 x 轴上,且 $c = \sqrt{3}$,故焦点坐标为 $(\sqrt{3}, 0), (-\sqrt{3}, 0)$.

(2)若 $m=3$,则椭圆的方程为 $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$,变形可得 $y^2 = 1 - \frac{x^2}{9}$.

设 $P(x, y)$,则 $|PA|^2 = (x-2)^2 + y^2 = \frac{8x^2}{9} - 4x + 5$.
又由 $-3 \leq x \leq 3$,根据二次函数的性质,分析可得,
当 $x = -3$ 时, $|PA|^2$ 取得最大值,为 25;

当 $x = \frac{9}{4}$ 时, $|PA|^2$ 取得最小值,为 $\frac{1}{2}$.

所以 $|PA|$ 的最大值为 5,最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

21.解:(1)将 $y = x + b$ 代入 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$,消去 y ,整理得 $3x^2 + 4bx + 2b^2 - 2 = 0$.
因为直线 $y = x + b$ 与椭圆 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 相交于 A, B 两个不同的点,
所以 $\Delta = 16b^2 - 12(2b^2 - 2) = 24 - 8b^2 > 0$,解得 $-\sqrt{3} < b < \sqrt{3}$.

所以 b 的取值范围为 $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.
(2)设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$.
当 $b=1$ 时,方程 ① 为 $3x^2 + 4x = 0$.
解得 $x_1 = 0, x_2 = -\frac{4}{3}$.所以 $y_1 = 1, y_2 = -\frac{1}{3}$.
所以 $|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$.

22.解:设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,由题意知 $y_1 < 0, y_2 > 0$.
(1)直线 l 的方程为 $y = \sqrt{3}(x - c)$,其中 $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.
与椭圆方程联立并消去 x ,得 $(3a^2 + b^2)y^2 + 2\sqrt{3}b^2cy - 3b^4 = 0$.
解得 $y_1 = \frac{-\sqrt{3}b^2(c+2a)}{3a^2+b^2}$,
 $y_2 = \frac{-\sqrt{3}b^2(c-2a)}{3a^2+b^2}$.

因为 $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{FB}$,所以 $-y_1 = 2y_2$.
代入并化简,得离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{2}{3}$.

(2)因为 $|AB| = \sqrt{1 + \frac{1}{3}} |y_2 - y_1|$,
所以 $\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{4\sqrt{3}ab^2}{3a^2+b^2} = \frac{15}{4}$.
由 $\frac{c}{a} = \frac{2}{3}$,得 $b = \frac{\sqrt{5}}{3}a$.
代入上式,得 $a=3, b=\sqrt{5}$.
所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$.

14. $\frac{3}{5}$
15. $[1, 2]$

提示:因为 $P(m, n)$ 是椭圆 $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$ 上的一个动点,所以 $m^2 + \frac{n^2}{2} = 1$,即 $n^2 = 2 - 2m^2$,所以 $m^2 + n^2 = 2 - m^2$.又 $-1 \leq m \leq 1$,所以 $1 \leq 2 - m^2 \leq 2$,所以 $1 \leq m^2 + n^2 \leq 2$.

16. $y = 4x^2$
提示:设 $M(x, y), B(x_0, y_0)$,则 $y_0 = 2x_0^2 + 1$.
又 M 为 AB 的中点,
所以 $\begin{cases} x = \frac{0+x_0}{2}, \\ y = \frac{y_0-1}{2}, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x_0 = 2x, \\ y_0 = 2y+1. \end{cases}$
将其代入 $y_0 = 2x_0^2 + 1$,得 $y = 4x^2$.

三、解答题

17.解:(1)设椭圆的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 或 $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$.
由已知得 $2a = 10$,则 $a = 5$.
又因为 $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$,所以 $c = 4$.
所以 $b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 16 = 9$.
所以椭圆方程为 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 或 $\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{9} = 1$.

(2)设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$.
由题意得 $c = b = 3$,
 $a^2 = b^2 + c^2 = 18$,
故所求椭圆的方程为 $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$.

18.解:因为点 B 与点 $A(-1, 1)$ 关于原点 O 对称,所以点 $B(1, -1)$.
设 $P(x, y)$,
由条件可得 $\frac{y-1}{x+1} \cdot \frac{y+1}{x-1} = -\frac{1}{3}$,
化简,得 $x^2 + 3y^2 = 4$,故动点 P 的轨迹方程为 $x^2 + 3y^2 = 4 (x \neq \pm 1)$.

19.解:由已知,得 $\frac{x^2}{\frac{m}{9}} + \frac{y^2}{\frac{m}{16}} = 1$,
 $a^2 = \frac{m}{9}, b^2 = \frac{m}{16}, c^2 = \frac{7m}{144}$.
在 $\triangle PF_1F_2$ 中,由面积公式,得 $S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{1}{2} |PF_1| \cdot |PF_2| \sin 60^\circ = 3\sqrt{3}$,
解得 $|PF_1| \cdot |PF_2| = 12$.
在 $\triangle PF_1F_2$ 中,由余弦定理,得 $4c^2 = |PF_1|^2 + |PF_2|^2 - 2|PF_1| \cdot |PF_2| \cdot \cos 60^\circ = |PF_1|^2 + |PF_2|^2 - |PF_1| \cdot |PF_2| = (|PF_1| + |PF_2|)^2 - 3|PF_1| \cdot |PF_2|$,
即 $4c^2 = 4a^2 - 3 \times 12$,所以 $b^2 = a^2 - c^2 = 9$,
即 $9 = \frac{m}{16}$,解得 $m = 144$.

由此可得 $a = \sqrt{\frac{m}{9}} = 4, c = \sqrt{\frac{7m}{144}} = \sqrt{7}$,
所以离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

20.解:(1)根据题意, $a=2$,则椭圆

第 4 期

第 3 版同步周测题参考答案

一、选择题

1.D

提示:动点 M 的轨迹是以 F_1, F_2 为端点的线段.

2.C

3.B

4.C

5.A

提示:由已知条件,得 $c=4, a=5$,则 $b = \sqrt{a^2 - c^2} = 3$.故短轴长为 $2b=6$.

6.C

7.D

提示:已知方程表示平面内到定点 $F_1(0, -2), F_2(0, 2)$ 的距离之和等于常数 10 的点的轨迹,即 $2a=10, 2c=4$,交点在 y 轴上的椭圆,所以 $a=5, c=2, b^2 = a^2 - c^2 = 21$,方程为 $\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{21} = 1$.故选 D.

8.B

提示:根据题意,知点 $P(-c, \pm \frac{b^2}{a})$.

因为 $\angle F_1PF_2 = 45^\circ$,所以有 $\frac{2c}{\frac{b^2}{a}} = \tan 45^\circ = 1$,
即 $2ac = b^2 = a^2 - c^2$,所以 $e^2 + 2e - 1 = 0$,解得 $e = \sqrt{2} - 1$,或 $e = -\sqrt{2} - 1$ (舍去).

9.C

提示:由椭圆方程得 $m > 0$ 且 $m \neq 5$.
直线 $y - kx - 1 = 0$ 过定点 $(0, 1)$,若使直线 $y - kx - 1 = 0$ 与椭圆 $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{m} = 1$ 恒有公共点,则点 $(0, 1)$ 在椭圆上或椭圆内,由此解得 $m \geq 1$ 且 $m \neq 5$.

10.B

提示:设点 $P(x, y)$,则 $\overrightarrow{MN} = (4, 0)$,
 $\overrightarrow{MP} = (x+2, y), \overrightarrow{NP} = (x-2, y)$.
根据已知条件得 $4\sqrt{(x+2)^2 + y^2} = 4(2-x)$.
整理得 $y^2 = -8x$.所以点 P 的轨迹方程为 $y^2 = -8x$.

11.C

提示:设 $\frac{y}{x-2} = k$,则 $y = k(x-2)$.与椭圆方程联立,消去 y ,整理得 $(k^2+4)x^2 - 4k^2x + 4(k^2-1) = 0$.令 $\Delta = 16k^4 - 4 \times 4(k^2-1) \cdot (k^2+4) = 0$,
解得 $k = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$,所以 $k_{\min} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

12.C

提示:设 $P(x_0, y_0)$,则 $\frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{3} = 1$,即 $y_0^2 = 3 - \frac{3x_0^2}{4}$.又因为 $F(-1, 0)$,所以 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{FP} = x_0 \cdot (x_0+1) + y_0^2 = \frac{1}{4}x_0^2 + x_0 + 3 = \frac{1}{4} \cdot (x_0+2)^2 + 2$.

又 $x_0 \in [-2, 2]$,所以 $(\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{FP}) \in [2, 6]$,所以 $(\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{FP})_{\max} = 6$.

二、填空题

13.中心

一、选择题

1.B

2.B

提示:由实际意义和命题否定的定义可知.

3.C 4.B

5.D

提示:由题可知 $p \wedge q$ 是假命题, $p \vee q$ 是真命题, $\neg p$ 是假命题, $\neg q$ 是真命题.

6.A

提示:如果原命题是真命题,则 $a \geq x^2$ 在 $x \in [1, 2]$ 上恒成立,故 $a \geq 4$.

7.A

8.A

9.D

提示: $\sqrt{3} \in A \cup B$ 的否定是: $\sqrt{3} \notin A \cup B$, 所以 $\sqrt{3} \notin A$ 且 $\sqrt{3} \notin B$, 即 $\sqrt{3} \in (\complement_A) \cap (\complement_B)$.

10.C

提示:选项 A 中,命题 p 假, q 假,不满足题意;选项 B 中,命题 p 真, q 假,不满足题意;选项 C 中,命题 p 假, q 真,满足题意;选项 D 中,命题 p 真, q 真,不满足题意.故选 C.

11.C

提示:根据定义域为 \mathbf{R} 的函数 $f(x)$ 不是偶函数,可知“ $\forall x \in \mathbf{R}, f(-x) = f(x)$ ”是假命题,故其否定形式为真命题,即 $\exists x_0 \in \mathbf{R}, f(-x_0) \neq f(x_0)$.

12.B

提示: $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$, 显然 C、D 为真; $\sin\alpha \cdot \sin\beta = 0$ 时, A 为真, B

为假.故选 B.

二、填空题

13. $\exists x < 0, (1+x)(1-9x^2) > 0$

14. “ $p \wedge q$ ”“ $\neg q$ ”, “ $p \vee q$ ”“ $\neg p$ ”

提示:因为命题 p 假,命题 q 真,所以命题“ $p \wedge q$ ”假,命题“ $p \vee q$ ”真,“ $\neg p$ ”真,“ $\neg q$ ”假.

15. $\sqrt{5} > 3; \sqrt{5} < 3, \sqrt{5} = 3$

16. $[-\frac{1}{2}, +\infty)$

提示:因为 $x_1 \in [-1, 3]$ 时, $f(x_1) \in [1, 10]$, $x_2 \in [-1, 3]$ 时, $g(x_2) \in [\frac{1}{2} - m, 8 - m]$,

所以只需 $1 \geq \frac{1}{2} - m$, 解得 $m \geq -\frac{1}{2}$.

三、解答题

17. 解:(1) 本题隐含了全称量词“所有的”, 其实命题应为“所有的指数函数都是单调函数”, 是全称命题, 且为真命题.

(2) 命题中含有存在量词“至少有一个”, 因此是特称命题, 真命题.

(3) 命题中含有全称量词“ \forall ”, 是全称命题, 真命题.

(4) 命题中含有存在量词“ \exists ”, 是特称命题, 真命题.

18. 解:若 p 为真命题, 则 $1 \in \{x | x^2 < a\}$, 故 $1^2 < a$, 即 $a > 1$; 若 q 为真命题, 则 $2 \in \{x | x^2 < a\}$, 即 $a > 4$.

(1) 若“ $p \wedge q$ ”为真命题, 则 p 真 q 真, 故 $a > 1$ 且 $a > 4$, 即 $a > 4$.

所以实数 a 的取值范围是 $(4, +\infty)$.

(2) 若“ $p \vee q$ ”为真命题, 则 $a > 1$ 或 $a > 4$, 即 $a > 1$.

所以实数 a 的取值范围是 $(1, +\infty)$.

19. 解: $\neg p: \forall x \in \mathbf{R}, \lg(ax^2 + 2x + 1)$ 有

意义,

即对一切 $x \in \mathbf{R}, ax^2 + 2x + 1 > 0$ 恒成立. 又 $a = 0$ 时, 不合题意,

所以 $\begin{cases} a > 0, \\ \Delta < 0, \end{cases}$ 解得 $a > 1$.

所以实数 a 的取值范围是 $(1, +\infty)$.

20. 解:命题 p 是真命题, 也就是关于 x 的方程 $4^x - 2^{x+1} + m = 0$ 有实数解, 即 $m = -(4^x - 2^{x+1})$. 令 $f(x) = -(4^x - 2^{x+1}) = -(2^x - 1)^2 + 1$, 所以当 $x \in \mathbf{R}$ 时, $f(x) \leq 1$.

因此实数 m 的取值范围是 $(-\infty, 1]$.

21. 解:由 $x^2 + 2ax + 4 > 0$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立,

得 $\Delta = (2a)^2 - 4 \times 4 < 0$, 解得 $-2 < a < 2$.

所以 $p: -2 < a < 2$.

由 $y = -(4 - 2a)^x$ 是 \mathbf{R} 上的减函数, 得 $4 - 2a > 1$, 解得 $a < \frac{3}{2}$.

所以 $q: a < \frac{3}{2}$.

由“ $p \vee q$ ”为真, “ $p \wedge q$ ”为假, 知 p 与 q 中必有一真一假, 即 p 真 q 假, 或 p 假 q 真.

所以 $\begin{cases} -2 < a < 2, \\ a \geq \frac{3}{2}, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a \leq -2, \text{ 或 } a \geq 2, \\ a < \frac{3}{2}, \end{cases}$

解得 $\frac{3}{2} \leq a < 2$, 或 $a \leq -2$.

所以, 实数 a 的取值范围是 $(-\infty, -2] \cup [\frac{3}{2}, 2)$.

22. 解:(1) 若 p 真: $-2 \leq x \leq 4$; 当 $m = 3$ 时, 若 q 真: $-1 \leq x \leq 5$, 因为“ $p \wedge q$ ”为真, 所以 $-1 \leq x \leq 4$. 所以实数 x 的取值范围是 $[-1, 4]$.

(2) 因为“ $\neg p$ ”是“ $\neg q$ ”的必要不充分条件, 所以 p 是 q 的充分不必要条件.

又 $q: 2 - m \leq x \leq 2 + m$, 所以 $\begin{cases} 2 - m \leq -2, \\ 4 \leq 2 + m, \end{cases}$ 且等号不同时取得,

所以 $m \geq 4$.

所以实数 m 的取值范围是 $[4, +\infty)$.

第 3 期

第 2~3 版章节测试题参考答案

一、选择题

1.A

2.D

提示:①等底等高的三角形都是面积相等的三角形, 但不一定全等;②当 x, y 中一个为零, 另一个不为零时, $|x| + |y| \neq 0$;③当 $c = 0$ 时不成立;④菱形的对角线互相垂直, 矩形的对角线不一定垂直.

3.A

4.D

5.C

6.B

7.D

提示:由 $\neg p$ 是真命题, 得 p 是假命题. 又 $p \vee q$ 是真命题, 所以 q 是真命题.

8.B

9.B

提示: $a^2 > b^2, \frac{a}{b} < 1$ 不能推出 $a > b$, $(\frac{1}{2})^a < (\frac{1}{2})^b \Leftrightarrow a > b$.

10.D

11.C

提示: $A = \{x | -1 < x < 1\}$; 当 $a = 1$ 时, $B = \{x | b - 1 < x < 3\}$. 若“ $a = 1$ ”是“ $A \cap B \neq \emptyset$ ”的充分而不必要条件, 则 b 必须满足条件 $b - 1 < 1 \Rightarrow b < 2$. 所以 b 的取值范围可以是 $\{b | b < 2\}$ 或其子集. 故选 C.

12.D

提示: $2ax^2 - 4ax - 3 \leq 0$ 恒成立, 当 $a = 0$ 时, $-3 \leq 0$ 成立; 当 $a \neq 0$ 时, $\begin{cases} a < 0, \\ \Delta = 16a^2 + 24a \leq 0, \end{cases}$ 得 $-\frac{3}{2} \leq a < 0$,

所以 $-\frac{3}{2} \leq a \leq 0$.

二、填空题

13. $\forall a, b \in \mathbf{R}, a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

14. 方向相同或相反的两个向量共线

15. $[1, 2)$

提示:两个都是假命题, 则 $\begin{cases} x < 2 \text{ 或 } x > 5, \\ 1 \leq x \leq 4 \end{cases} \Rightarrow 1 \leq x < 2$.

16. $(-4, 0)$

提示:由 $g(x) < 0$ 得 $2^x - 2 < 0, x < 1$. 又因为 $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) < 0$ 或 $g(x) < 0$, 所以 $f(x) = m(x - 2m)(x + m + 3) < 0$ 在 $x \geq 1$ 时恒成立, 所以 $\begin{cases} m < 0, \\ -m - 3 < 1, \text{ 解得 } -4 < m < 0. \\ 2m < 1, \end{cases}$

三、解答题

17. 解:“ $p \wedge q$ ”形式的命题. p : 方程 $x^2 - 2x + 1 = 0$ 有一个实数根,

q : 方程 $x^2 - 2x + 1 = 0$ 只有一个实数根, p 和 q 均为真命题.

18. 证明:将“若 $m^2 + n^2 = 2$, 则 $m + n \leq 2$ ”视为原命题, 则它的逆否命题为“若 $m + n > 2$, 则 $m^2 + n^2 \neq 2$ ”. 因为 $m + n > 2$,

所以 $m^2 + n^2 \geq \frac{1}{2}(m + n)^2 > \frac{1}{2} \times 2^2 = 2$, 所以 $m^2 + n^2 \neq 2$.

所以原命题的逆否命题是真命题, 从而原命题也为真命题, 得证.

19. 证明:充分性:

因为 A, B 为锐角, 且 $A + B = \frac{\pi}{4}$,

所以 $\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = 1$, 可得 $\tan A + \tan B = 1 - \tan A \tan B$, 所以 $(1 + \tan A)(1 + \tan B) = 1 + \tan A + \tan B + \tan A \tan B = 1 + (1 - \tan A \tan B) + \tan A \tan B = 2$.

必要性:

因为 $(1 + \tan A)(1 + \tan B) = 2$, 所以 $\tan A + \tan B = 1 - \tan A \tan B$,

故 $\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = 1$.

因为 A, B 为锐角, 所以 $0 < A + B < \pi$,

从而 $A + B = \frac{\pi}{4}$.

综上可知, $A + B = \frac{\pi}{4}$ 为 $(1 + \tan A) \cdot (1 + \tan B) = 2$ 的充要条件.

20. 解:(1) 由 p 为真命题, 得 $0 < a - \frac{3}{2} < 1$,

解得 $\frac{3}{2} < a < \frac{5}{2}$.

故 a 的取值范围是 $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$.

(2) $\forall x \in \mathbf{R}$, 有 $|x - 1| \geq 0$,

故 $0 < (\frac{1}{2})^{|x-1|} \leq 1$.

由 q 为真命题, 得 $a > 1$.

故 a 的取值范围是 $(1, +\infty)$.

(3) 因为“ $p \wedge q$ ”为假命题, “ $p \vee q$ ”为真命题, 所以 p, q 一真一假.

若 p 真 q 假, 则 a 不存在;

若 p 假 q 真, 则 $1 < a \leq \frac{3}{2}$ 或 $a \geq \frac{5}{2}$.

故 a 的取值范围是

$(1, \frac{3}{2}] \cup [\frac{5}{2}, +\infty)$.

21. 解:(1) 由 $M \cap P = \{x | 5 < x \leq 8\}$, 得 $-3 \leq a \leq 5$, 因此 $M \cap P = \{x | 5 < x \leq 8\}$ 的充要条件是 $|a| - 3 \leq a \leq 5$.

(2) 求实数 a 的一个值, 使它成为 $M \cap P = \{x | 5 < x \leq 8\}$ 的一个充分而不必要条件, 就是在集合 $|a| - 3 \leq a \leq 5$ 中取一个值, 如取 $a = 0$, 此时必有 $M \cap P = \{x | 5 < x \leq 8\}$; 反之, $M \cap P = \{x | 5 < x \leq 8\}$ 不一定有 $a = 0$, 故 $a = 0$ 是 $M \cap P = \{x | 5 < x \leq 8\}$ 的一个充分不必要条件.

(3) 求实数 a 的取值范围, 使它成为 $M \cap P = \{x | 5 < x \leq 8\}$ 的一个必要不充分条件就是另求一个集合, 使 $|a| - 3 \leq a \leq 5$ 是它的一个真子集.

如果 $|a| \leq 5$, 则不一定有 $M \cap P = \{x | 5 < x \leq 8\}$, 但是 $M \cap P = \{x | 5 < x \leq 8\}$ 时, 必有 $a \leq 5$, 故 $|a| \leq 5$ 是 $M \cap P = \{x | 5 < x \leq 8\}$ 的一个必要不充分条件.

22. 解:(1) 不等式 $m + f(x) > 0$ 可化为 $m > -f(x)$,

即 $m > -x^2 + 2x - 5 = -(x - 1)^2 - 4$.

要使 $m > -(x - 1)^2 - 4$ 对于任意 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立,

只需 $m > -4$ 即可.

故存在实数 $m > -4$, 使不等式 $m + f(x) > 0$ 对于任意 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立.

(2) 不等式 $m - f(x_0) > 0$ 可化为 $m > f(x_0)$, 若存在一个实数 x_0 , 使不等式 $m > f(x_0)$ 成立,

只需 $m > [f(x)]_{\min}$.

又 $f(x) = (x - 1)^2 + 4$, 所以 $[f(x)]_{\min} = 4$,

所以 $m > 4$.

所以, 所求实数 m 的取值范围是 $(4, +\infty)$.