第8期

第3版同步周测题参考答案

一、选择题

1.C

提示:Δx作为分母不能为0.

2.A

3.C

提示:$f(x)=kx+b$在区间$[m,n]$上的平均变化率为k,所以a=b=2.故选C.

4.B

提示:由定义知,函数在点$x=x_0$处的导数只与x_0有关.

5.D

提示:$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+2\Delta x)-f(a)}{3\Delta x}$

$=\frac{2}{3}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+2\Delta x)-f(a)}{2\Delta x}$

$=\frac{2}{3}f'(a)=1$,

则$f'(a)=\frac{3}{2}$.

6.B

提示:割线的斜率$k=\frac{\Delta y}{\Delta x}$

$=\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x+1}=\frac{2}{3}$.

7.C

提示:设切点为$P_0(a,b)$.由$f'(x)=3x^2+1$,得$k=f'(a)=3a^2+1=4$,解得$a=\pm1$,所以点P_0的坐标为$(1,0)$或$(-1,-4)$.

8.A

提示:$s'=2\sin t+2t\cos t+1$,故选A.

9.A

10.D

提示:由已知条件,

得$f'(x)=f'(-2)e^x-2x$.

所以$f'(-2)=f'(-2)\times e^{-2}-2\times(-2)$,

解得$f'(-2)=\frac{4e^2}{e^2-1}$.

11.A

提示:设$A(2,f(2))$,$B(4,f(4))$.由图象知,$f(x)$的图象在点A,B处的切线斜率k_A,k_B与割线AB的斜率k_{AB}满足$k_A<k_{AB}<k_B$,所以$f'(2)<\frac{f(4)-f(2)}{4-2}<f'(4)$,即$2f'(2)<f(4)-f(2)<2f'(4)$.

12.C

提示:画出各曲线,可知①④不存在自公切线;曲线②的一条自公切线为$y=5$;曲线③的一条自公切线为$y=-\frac{1}{4}$.

二、填空题

13.$\frac{\pi}{4}$

提示:$f'(x)=e^x\cos x-e^x\sin x$,

则$f'(0)=1$.

所以所求切线的斜率$k=\tan\theta=1$,

故倾斜角$\theta=\frac{\pi}{4}$.

14.在第3min附近红茶温度大约以4°C/min的速率下降

15.$-\frac{3}{16}$

提示:设$f(x)=x^{-3}$.由已知条件,得$f'(2)=M$.又$f'(x)=-3x^{-4}$,则$f'(2)=-\frac{3}{16}$.

故$M=-\frac{3}{16}$.

16.$30000\pi\ cm^2/s$

提示:因为水波以$v=50cm/s$的速度向外扩张,所以水波的半径$r=vt$,面积$S=\pi r^2=\pi(vt)^2=2500\pi t^2$,面积的膨胀率$S'=5000\pi t$.

当$r=300$时,$t=6$,$S'=5000\pi\times6=30000\pi(cm^2/s)$.

三、解答题

17.**解:**y'

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{2(x+\Delta x)+3}-\sqrt{2x+3}}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{[\sqrt{2(x+\Delta x)+3}]^2-(\sqrt{2x+3})^2}{\Delta x[\sqrt{2(x+\Delta x)+3}+\sqrt{2x+3}]}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{2}{\sqrt{2(x+\Delta x)+3}+\sqrt{2x+3}}$

$=\frac{1}{\sqrt{2x+3}}$.

18.**解:**(1)$y'=(3^xe^x)'-(2^x)'+(e)'$

$=(3^x)'e^x+3^x(e^x)'-(2^x)'$

$=3^x\ln3\cdot e^x+3^xe^x-2^x\ln2$

$=(\ln3+1)\cdot(3e)^x-2^x\ln2$.

(2)y'

$=\frac{(x+\cos x)'(x+\sin x)-(x+\cos x)(x+\sin x)'}{(x+\sin x)^2}$

$=\frac{(1-\sin x)(x+\sin x)-(x+\cos x)(1+\cos x)}{(x+\sin x)^2}$

$=\frac{-x\cos x-x\sin x+\sin x-\cos x-1}{(x+\sin x)^2}$.

19.**解:**(1)因为$\Delta s=s(3)-s(2)$

$=(3\times3^2+2\times3+1)-(3\times2^2+2\times2+1)=17$,

所以$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{17}{3-2}=17(m/s)$,即从t=2到t=3时,s关于t的平均变化率为17,即此段时间内该质点的平均速度为17m/s.

(2)因为$s'(t)=6t+2$,

所以$s'(2)=6\times2+2=14(m/s)$.

故当t=2时该质点的瞬时速度为14m/s.

(3)设该质点的速度为v m/s,

则$v(t)=s'(t)=6t+2$,

所以$v'(t)=6$,所以$v'(2)=6(m/s^2)$.

故当t=2时该质点的加速度为$6m/s^2$.

20.**解:**$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$,$g'(x)=\frac{a}{x}(x>0)$.

由已知,得$\begin{cases}\sqrt{x}=a\ln x,\\ \frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{a}{x},\end{cases}$

解得$a=\frac{e}{2}$,$x=e^2$.

所以两条曲线的交点坐标为(e^2,e),

切线的斜率$k=f'(e^2)=\frac{1}{2e}$,

所以切线的方程为$y-e=\frac{1}{2e}(x-e^2)$,

即$\frac{x}{2e}-y+\frac{e}{2}=0$.

21.**解:**(1)函数是一条直线,其斜率是一个大于零的常数,故导函数的大致图象如图1.

(2)$f'(x)>0$,并且随着x的增加,$f'(x)$的值逐渐减少,故导函数的大致图象如图2.

(3)当$x<0$时,$f'(x)>0$;当$x>0$时,$f'(x)<0$,并且随着x的增加,$f'(x)$的值逐渐减少,故导函数的大致图象如图3.

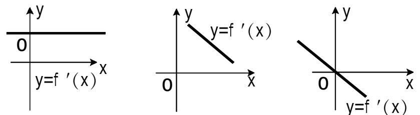


图1　图2　图3

22.(1)**解:**$f'(x)=x^2-4x+3=(x-2)^2-1\geq-1$,故切线斜率的取值范围为$[-1,+\infty)$.

(2)**解:**结合(1)可知,

$f'(x)\geq-1$且$-\frac{1}{f'(x)}\geq-1$,

即$-1\leq f'(x)<0$或$f'(x)\geq1$,

解得$x\leq2-\sqrt{2}$,或$1<x<3$,或$x\geq2+\sqrt{2}$.故切点横坐标的取值范围为$(-\infty,2-\sqrt{2}]\cup(1,3)\cup[2+\sqrt{2},+\infty)$.

(3)**证明:**假设存在切线l与曲线C同时切于不同的两点$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$x_1\neq x_2$,

则在点A处的切线方程是

$y-\left(\frac{1}{3}x_1^3-2x_1^2+3x_1\right)=(x_1^2-4x_1+3)(x-x_1)$,

即$y=(x_1^2-4x_1+3)x+\left(-\frac{2}{3}x_1^3+2x_1^2\right)$;

同理,在点B处的切线方程是

$y=(x_2^2-4x_2+3)x+\left(-\frac{2}{3}x_2^3+2x_2^2\right)$.

由于两切线是同一直线,

则有$x_1^2-4x_1+3=x_2^2-4x_2+3$

且$-\frac{2}{3}x_1^3+2x_1^2=-\frac{2}{3}x_2^3+2x_2^2$,

化简得$x_1+x_2=4$

且$(x_1+x_2)^2-3(x_1+x_2)-x_1x_2=0$.

解得$x_1=2$,$x_2=2$.

这与$x_1\neq x_2$矛盾,所以不存在与曲线C同时切于两个不同点的直线.

第5期

第3版同步周测题参考答案

一、选择题

1.A　2.B　3.A　4.B　5.C　6.A　7.B

提示:由题意知,$\frac{2}{\sqrt{m}}=4$,所以$m=\frac{1}{4}$.所以双曲线E的方程为$\frac{x^2}{4}-y^2=1$.所以E的渐近线方程为$y=\pm\frac{1}{2}x$.

8.C

9.C

提示:当直线l的斜率不存在时,直线l过双曲线的右顶点,满足要求;当直线l的斜率存在时,与两渐近线平行的直线满足要求,故共有3条.

10.D

提示:设双曲线方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$,点M在第一象限,则$|AB|=|BM|$,$\angle ABM=120°$.过点M作$MN\perp x$轴,垂足为N.在Rt$\triangle MNB$中,$|MB|=2a$,$|BN|=a$,$|MN|=\sqrt{3}a$,故$M(2a,\sqrt{3}a)$,代入双曲线方程,得$a^2=b^2=c^2-a^2$,即$c^2=2a^2$,所以$e=\sqrt{2}$.

11.D

提示:设双曲线的两个焦点分别是$F_1(-5,0)$与$F_2(5,0)$,则这两点正好是两圆的圆心,当且仅当点P与M,F_1三点共线以及P与N,F_2三点共线时所求的值最大,此时$|PM|-|PN|=(|PF_1|+2)-(|PF_2|-1)=6+3=9$,故选D.

12.B

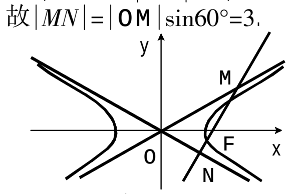
提示:由已知,得$F(2,0)$,渐近线方程为$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$,故$\angle MON=60°$.

若$\triangle OMN$为直角三角形,不妨设$\angle ONM=90°$(如图所示),

则易得直线MN的倾斜角$\angle MFx=60°$,斜率$k=\sqrt{3}$,方程为$y=\sqrt{3}(x-2)$.

与渐近线方程$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$联立,解得$M(3,\sqrt{3})$,则$|OM|=2\sqrt{3}$.

故$|MN|=|OM|\sin60°=3$.



(第12题图)

二、填空题

13.$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1(y<0)$

提示:由已知关系式可知点M与$A(0,5)$,$B(0,-5)$的距离之差等于8,则点M的轨迹是焦点在y轴上的双曲线的下支,其中$a=4$,$c=5$,则$b^2=9$.所以点M的轨迹方程为$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1(y<0)$.

14.2或$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

提示:当双曲线的焦点在x轴上时,有$\frac{b}{a}=\sqrt{3}$,则离心率$e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=2$;当双曲线的焦点在$y$轴上时,有$\frac{a}{b}=\sqrt{3}$,同理,得$e=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

15.$(-12,0)$

提示:由$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b}=1$表示双曲线,

得$b<0$,

所以离心率$e=\frac{\sqrt{4-b}}{2}\in(1,2)$.

所以$-12<b<0$.

16.$\frac{\sqrt{2}}{2}$

提示:设$P(x,y)(x\geq1)$.因为直线$x-y+1=0$平行于渐近线$x-y=0$,所以点P到直线$x-y+1=0$的距离恒大于该直线与渐近线$x-y=0$之间的距离.因此c的最大值为这两条平行直线间的距离,即$\frac{|1-0|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

三、解答题

17.**解:**由题意,设双曲线C的方程为$x^2-2y^2=\lambda$,将点$M(2,-2)$代入,可得$\lambda=-4$.

所以双曲线C的方程为$\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{4}=1$,

则$a=\sqrt{2}$,$b=2$,$c=\sqrt{6}$,离心率$e=\frac{c}{a}=\sqrt{3}$,渐近线方程为$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$.

18.**解:**椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$的焦点为$F_1(-\sqrt{7},0)$,$F_2(\sqrt{7},0)$,顶点为$A_1(-4,0)$,$A_2(4,0)$,$B_1(0,-3)$,$B_2(0,3)$.

故所求双曲线的焦点在x轴上,$2c=|A_1A_2|=8$,所以$c=4$;$2a=2\sqrt{7}$,所以$a=\sqrt{7}$.所以$b^2=c^2-a^2=9$.

故所求双曲线的方程为$\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{9}=1$.

19.**解:**双曲线中,$a=3$,$c=5$.不妨设$|PF_1|>|PF_2|$,则$|PF_1|-|PF_2|=2a=6$.又$|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot\cos60°$,而$|F_1F_2|=2c=10$,得$|PF_1|^2+|PF_2|^2-|PF_1|\cdot|PF_2|=(|PF_1|-|PF_2|)^2+|PF_1|\cdot|PF_2|=100$,所以$|PF_1|\cdot|PF_2|=64$.故$\triangle F_1PF_2$的面积$S=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|\sin60°=16\sqrt{3}$.

20.**解:**直线l的方程为$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$,即$bx+ay-ab=0$,则点$(1,0)$到直线$l$的距离$d_1=\frac{b(a-1)}{\sqrt{a^2+b^2}}$,点$(-1,0)$到直线$l$的距离$d_2=\frac{b(a+1)}{\sqrt{a^2+b^2}}$,$s=d_1+d_2=\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{2ab}{c}\geq\frac{4}{5}c$,即$5a\sqrt{c^2-a^2}\geq2c^2$,

于是有$5\sqrt{e^2-1}\geq2e^2$,

即$4e^4-25e^2+25\leq0$,得$\frac{5}{4}\leq e^2\leq5$.

又$e>1$,所以e的取值范围是

$\left[\frac{\sqrt{5}}{2},\sqrt{5}\right]$.

21.**解:**以直线AB为x轴,线段AB的垂直平分线为y轴,建立直角坐标系,如下图,则$A(3,0)$,$B(-3,0)$.

因为$|PB|-|PA|=4<6$,

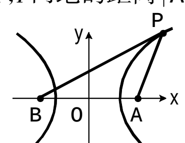
所以P在双曲线的右支上,且$a=2$,$c=3$,$b=\sqrt{5}$.

所以P在双曲线$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$右支上.

因为P在A的北偏东30°方向,

所以$k_{AP}=\tan60°=\sqrt{3}$.

所以AP所在直线的方程为$y=\sqrt{3}\cdot(x-3)$.与双曲线方程联立,解得点P的坐标为$(8,5\sqrt{3})$或$\left(\frac{16}{7},-\frac{5\sqrt{3}}{7}\right)$(舍去),所以$A$,$P$两地的距离$|AP|=10$千米.



(第21题图)

22.**解:**(1)双曲线的右焦点为$F(\sqrt{2},0)$,渐近线方程为$x\pm y=0$,

则圆心F到渐近线的距离$d=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$.所以圆的方程为$(x-\sqrt{2})^2+y^2=1$.

(2)设$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,经过点P的直线方程为$y=kx-1$(k显然存在).

联立方程组$\begin{cases}x^2-y^2=1,\\ y=kx-1,\end{cases}$消去$y$,

整理得$(1-k^2)x^2+2kx-2=0$.

所以$\Delta=(2k)^2-4(1-k^2)(-2)=8-4k^2>0$,且$x_1+x_2=\frac{-2k}{1-k^2}>0$,$x_1x_2=\frac{-2}{1-k^2}>0$,解得$1<k<\sqrt{2}$.又$y_1+y_2=k(x_1+x_2)-2=\frac{-2}{1-k^2}$,

所以线段MN的中点为$\left(\frac{-k}{1-k^2},\frac{-1}{1-k^2}\right)$,

垂直平分线的方程为

$y+\frac{1}{1-k^2}=-\frac{1}{k}\left(x+\frac{k}{1-k^2}\right)$.

令$x=0$,得截距$t=\frac{2}{k^2-1}>2$.

故t的取值范围是$(2,+\infty)$.

②

第 6 期

第 3 版同步周测题参考答案

一、选择题

1.A

提示：由题意知点P到点$(2,2)$的距离与到直线$3x-4y-6=0$的距离相等，则点P的轨迹为抛物线.

2.B

3.A

提示：由已知得焦点在 y 轴的负半轴上，p=4.故选 A.

4.B

5.B

提示：因为抛物线过点 P(-6,-3)，而点 P 在第三象限，所以焦点在 y 轴负半轴上.设抛物线方程为 $x^2=-2py$，把点 P 坐标代入，得 $36=-2p\times(-3)$，所以 p=6，所以抛物线的方程为 $x^2=-12y$，所以选 B.

6.D

7.C

提示：点 P 到其焦点的距离等于点 P 到其准线 x=-2 的距离，得 $x_P=7$，$y_P=\pm2\sqrt{14}$.

8.C

提示：画图可知共有 3 条，其中一条平行于 x 轴，所以选 C.

9.A

提示：由已知，得$F\left(\frac{p}{2},0\right)$，直线$AB$:$y=x-p$，代入抛物线的方程，可得$x^2-4px+p^2=0$.设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则$x_1+x_2=4p$.所以$|AF|+|BF|=x_1+x_2+p=4p+p=10$，解得$p=2$.

故准线方程为$x=-1$，即$x+1=0$.

10.C

提示：抛物线$y^2=8x$的准线方程是$x=-2$，点$Q(-2,0)$.

设直线l的方程是$y=k(x+2)$，代入抛物线方程，得$k^2x^2+(4k^2-8)x+4k^2=0$.

由题意知，当$k\neq0$时，$\Delta=(4k^2-8)^2-16k^4\geqslant0$，即$-1\leqslant k<0$或$0<k\leqslant1$.当$k=0$时，也满足题意，所以$-1\leqslant k\leqslant1$.

11.D

12.A

提示：根据抛物线的定义，可知 d_1 等于点 P 到焦点的距离，故当且仅当点 P 为过抛物线焦点与已知直线垂直的直线与抛物线的交点时，所求距离最小，且$(d_1+d_2)_{min}=\frac{12}{5}$.故选 A.

二、填空题

13.$y^2=20x$

14.$\left(-\frac{7}{16},0\right)$

提示：抛物线的标准方程是 $y^2=-\frac{7}{4}x$，则焦点在 x 轴的负半轴上，且 $2p=\frac{7}{4}$，故焦点坐标是$\left(-\frac{7}{16},0\right)$.

15.$\left(\frac{1}{8},\pm\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

提示：由抛物线的定义及平面几何知识，易知点 P 的横坐标为$\frac{|OF|}{2}=\frac{1}{8}$.

16.2

提示：因为$F(1,0)$，所以直线AB:$y=k(x-1)$.与$y^2=4x$联立，化简可得$k^2x^2-2(2+k^2)x+k^2=0$.

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

则$x_1+x_2=\frac{4+2k^2}{k^2}$，$x_1x_2=1$.

所以$y_1+y_2=k(x_1+x_2-2)=\frac{4}{k}$，

$y_1y_2=k^2[x_1x_2-(x_1+x_2)+1]=-4$.

由$\angle AMB=90°$，得$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.

又$\overrightarrow{MA}=(x_1+1,y_1-1)$，$\overrightarrow{MB}=(x_2+1,y_2-1)$，

所以$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(x_1+1)(x_2+1)+(y_1-1)\cdot(y_2-1)=x_1x_2+(x_1+x_2)+y_1y_2-(y_1+y_2)+2=0$，

即$1+2+\frac{4}{k^2}-4-\frac{4}{k}+2=0$，解得$k=2$.

三、解答题

17.**解：**双曲线的标准方程为$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$，故其焦点坐标为$(\pm3,0)$.

所以所求抛物线的标准方程为$y^2=-12x$或$y^2=12x$.

18.**解：**设$B\left(x,\frac{x^2}{2p}\right)$，又$F\left(0,\frac{p}{2}\right)$，

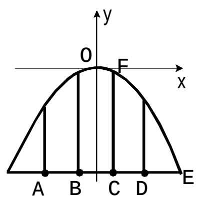
则 $x+0=2\sqrt{3}$，即 $x=2\sqrt{3}$.

所以$B\left(2\sqrt{3},\frac{6}{p}\right)$.

因为$|BF|=2|AF|$，结合抛物线的定义，得$\frac{6}{p}+\frac{p}{2}=2\sqrt{3+\frac{p^2}{4}}$，解得$p=\pm2$.

又$p>0$，所以$p=2$.

19.**解：**建立如图所示的平面直角坐标系.



(第19题图)

设抛物线方程为$x^2=-2py(p>0)$.

由题意，得点E的坐标为$(10,-4)$，

将其代入抛物线方程，解得$p=\frac{25}{2}$.

所以抛物线方程为$x^2=-25y$.

设点$F(2,b)$，则$b=-\frac{4}{25}$.

故最长支柱的长$|CF|=4-\frac{4}{25}=\frac{96}{25}$(m).

20.**解：**由 $y^2=4x$，得 $p=2$，其准线方程为 $x=-1$，焦点为 $F(1,0)$.

(1)由抛物线的定义可知，

$|AF|=x_1+\frac{p}{2}$，从而 $x_1=4-1=3$.

代入 $y^2=4x$ 中，解得 $y_1=\pm2\sqrt{3}$.

所以点 A 的坐标为$(3,2\sqrt{3})$或$(3,-2\sqrt{3})$.

(2)当直线 l 的斜率存在时，

设直线 l 的方程为 $y=k(x-1)$.

与抛物线方程联立并消去 y，

整理得 $k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$，

则 $x_1+x_2=2+\frac{4}{k^2}$.

所以$|AB|=x_1+x_2+p=4+\frac{4}{k^2}>4$.

当直线 l 的斜率不存在时，直线 l的方程为 $x=1$，此时$|AB|=4$，

所以$|AB|\geqslant4$，即线段 AB 的长的最小值为 4.

21.**解：**设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，中点$M(x,y)$，则$y_1^2=2x_1$，$y_2^2=2x_2$.

两式相减，得$(y_1+y_2)\cdot\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=2$.

把$y_1+y_2=2y$，$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{y-0}{x-(-2)}$代入化简，

得AB的中点M的轨迹方程为$y^2=x+2(x>2)$.

22.(1)**解：**联立$x^2=-y$与$y=kx-3$，

得$x^2+kx-3=0$.

因为$\Delta_1=k^2+12>0$，

所以l与抛物线$x^2=-y$恒有2个交点.

若$m\geqslant3$，则l与抛物线$x^2=4y$至少有1个交点.

联立$x^2=4y$与$y=kx-3$，得$x^2-4kx+12=0$.

所以$\Delta_2=16k^2-48\geqslant0$.结合$k>0$，得$k\geqslant\sqrt{3}$.所以$k$的最小值为$\sqrt{3}$.

(2)**证明：**若$m=3$，则l与抛物线$x^2=4y$只有1个交点.

结合(1)，可知$k=\sqrt{3}$，$A(2\sqrt{3},3)$.

由于$F(0,1)$为抛物线$x^2=4y$的焦点，

则$|\overrightarrow{FA}|=3+1=4$.

设$B(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$，

则$x_1+x_2=-k=-\sqrt{3}$，$x_1x_2=-3$.

所以$y_1+y_2=k(x_1+x_2)-6=-9$，$y_1y_2=(kx_1-3)(kx_2-3)=k^2x_1x_2-3k(x_1+x_2)+9=9$.

所以$\overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{FC}=x_1x_2+(y_1-1)(y_2-1)=x_1x_2+y_1y_2-(y_1+y_2)+1=16$.

所以$\overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{FC}=|\overrightarrow{FA}|^2$.

第 7 期

第 2~3 版章节测试题参考答案

一、选择题

1.D 2.A 3.A 4.B 5.D 6.C

7.B 8.A

9.C

提示：A选项中，直线的斜率大于0，故$ab<0$，此时曲线应为双曲线，故错误；同理，B选项中，$a<0$，$b<0$，曲线不存在，故错误；C选项中，$a>0$，$b<0$，曲线为焦点在x轴上的双曲线，故正确；由C选项可知D不正确.故选C.

10.A

提示：设右焦点为$F_1(2,0)$，则$|MF_1|+|MF|=2a=6$.所以$|MA|+|MF|=|MA|-|MF_1|+6$.又$-|AF_1|\leqslant|MA|-|MF_1|\leqslant|AF_1|$(当$M$，$A$，$F_1$三点共线时等号成立)，所以$6-\sqrt{2}\leqslant|MA|+|MF|\leqslant6+\sqrt{2}$.

11.A

提示：因为$|AF|=6$，$\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$，

所以$|FB|=3$.设$|CF|=x$，

由抛物线的定义，

可得$\frac{x}{3}=\frac{6-x}{6+3}$，解得$x=\frac{3}{2}$.

故$|BC|=|CF|+|BF|=\frac{9}{2}$.

12.A

提示：由题意，知$A(a,0)$，$B\left(c,\frac{b^2}{a}\right)$，$C\left(c,-\frac{b^2}{a}\right)$.由双曲线的对称性，知$D$在$x$轴上.设$D(x,0)$，由$BD\perp AC$，得$\frac{\frac{b^2}{a}-0}{c-x}\cdot\frac{\frac{b^2}{a}}{a-c}=-1$，解得$c-x=\frac{b^4}{a^2(c-a)}<a+\sqrt{a^2+b^2}=a+c$.所以$\frac{b^4}{a^2}<c^2-a^2=b^2\Rightarrow\frac{b^2}{a^2}<1\Rightarrow-1<\frac{b}{a}<1$.因此渐近线斜率的取值范围是$(-1,0)\cup(0,1)$.

二、填空题

13.2

提示：由抛物线的定义，得动点Q到焦点的距离的最小值为顶点到准线的距离，即$\frac{p}{2}=1$，$p=2$.

14.8

提示：根据双曲线定义，有$|MF_2|-|MF_1|=2a=4$，$|NF_2|-|NF_1|=2a=4$，两式相加，得$|MF_2|+|NF_2|-|MN|=8$.

15.$\pm\frac{\sqrt{3}}{4}$

16.②③

提示：易知F_1，F_2，E_1，E_2分别是两个椭圆的焦点，若点P在椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$上且不是两个椭圆的交点，则$P$到$F_1$，$F_2$两点的距离之和是定值，到$E_1$，$E_2$两点的距离之和不是定值，故①错误；由椭圆的对称性可知②正确；曲线C所围的区域在边长为6的正方形内部且在半径为3的圆外部，由此可知③正确，④错误.

三、解答题

17.**解：**设点$N(x,y)$.因为N是EF的中点，$F(2,0)$，所以$E(2x-2,2y)$.又E是OM的中点，$O(0,0)$，所以$M(4x-4,4y)$.将其代入抛物线方程中，得$(4y)^2=8(4x-4)$，即$y^2=2x-2$，此即为点N的轨迹方程.

18.**解：**当焦点在 x 轴上时，$a^2=m$，$b^2=n$，所以 $c^2=m+n$，且$\sqrt{\frac{n}{m}}=\frac{4}{5}$，则 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{m+n}{m}}=\sqrt{1+\frac{n}{m}}=\frac{\sqrt{41}}{5}$；

当焦点在 y 轴上时，$a^2=-n$，$b^2=-m$，所以 $c^2=-(m+n)$，且$\sqrt{\frac{-n}{-m}}=\frac{4}{5}$，则 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{-(m+n)}{-n}}=\sqrt{1+\frac{m}{n}}=\frac{\sqrt{41}}{4}$.

故离心率是$\frac{\sqrt{41}}{5}$或$\frac{\sqrt{41}}{4}$.

19.**解：**由题意，知抛物线的焦点在 x 轴上，可设抛物线的方程为 $y^2=ax(a\neq0)$.

由点 $M\left(\frac{2}{3},-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$在抛物线上，

得$\left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2=\frac{2}{3}a$，解得 $a=4$.

所以所求抛物线的方程为 $y^2=4x$.

因为点 $M\left(\frac{2}{3},-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$在椭圆上，

所以$\frac{4}{9a^2}+\frac{24}{9b^2}=1$. ①

又 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{1}{2}$， ②

由①②，可得 $a^2=4$，$b^2=3$.

所以所求椭圆的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

20.**解：**(1)当k不存在时，直线l的方程为$x=1$，代入双曲线的方程，得$y=0$，即l与C有一个交点.

当k存在时，设直线l的方程为$y=k(x-1)+2$，

代入C的方程，并整理，得

$(2-k^2)x^2+2(k^2-2k)x-k^2+4k-6=0$.

当$2-k^2=0$，即$k=\pm\sqrt{2}$时，上述方程有唯一解.

当$2-k^2\neq0$，即$k\neq\pm\sqrt{2}$时，$\Delta=16(3-2k)$.由$\Delta=0$，解得$k=\frac{3}{2}$；由$\Delta>0$，解得$k<\frac{3}{2}$；由$\Delta<0$，解得$k>\frac{3}{2}$.

所以，当

$k\in\left\{k\,\middle|\,k\text{不存在，或}k=\pm\sqrt{2}\text{，或}k=\frac{3}{2}\right\}$时，$l$与$C$只有一个交点；当$k\in\left\{k\,\middle|\,k<\frac{3}{2}\text{，且}k\neq\pm\sqrt{2}\right\}$时，$l$与$C$有两个交点；当$k\in\left\{k\,\middle|\,k>\frac{3}{2}\right\}$时，$l$与$C$无交点.

(2)设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由(1)知，

$x_1+x_2=\frac{2(k^2-2k)}{k^2-2}=2\times1$，解得$k=1$.

所以直线AB的方程为$x-y+1=0$.

21.**解：**(1)由题意得$F(1,0)$，l的方程为$y=k(x-1)(k>0)$.

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

由$\begin{cases}y=k(x-1),\\y^2=4x,\end{cases}$得$k^2x^2-2(k^2+2)x+k^2=0$.

故$x_1+x_2=\frac{2(k^2+2)}{k^2}$.

所以$|AB|=|AF|+|BF|=x_1+x_2+p=\frac{2(k^2+2)}{k^2}+2=8$，解得$k=-1$(舍去)，或$k=1$.

所以直线l的方程$y=x-1$.

(2)由(1)得AB的中点坐标为$(3,2)$，所以直线AB的垂直平分线方程为$y-2=-(x-3)$，即$y=-x+5$.

设所求圆的圆心坐标为(x_0,y_0)，

则$\begin{cases}y_0=-x_0+5,\\(x_0+1)^2=\frac{(y_0-x_0+1)^2}{2}+16,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x_0=3,\\y_0=2,\end{cases}$或$\begin{cases}x_0=11,\\y_0=-6.\end{cases}$

因此，所求圆的方程为$(x-3)^2+(y-2)^2=16$或$(x-11)^2+(y+6)^2=144$.

22.**解：**(1)由题意，得$M(-5\sqrt{2},0)$，$N(5\sqrt{2},0)$.

因为线路AB段上的任意一点到N的距离比到M的距离多10km，所以线路AB是以M，N为焦点的双曲线的一部分，设双曲线方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，则$2a=10$，$c=5\sqrt{2}$，所以$a^2=25$，$b^2=25$.

所以线路AB的方程为

$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{25}=1(x\leqslant-5,y\geqslant0)$.

同理可得线路CD的方程为

$\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{25}=1(x\geqslant0,y\leqslant-5)$.

易知$B(-5,0)$，故线路BC的方程为$x^2+y^2=25(-5\leqslant x\leqslant0,-5\leqslant y\leqslant0)$.

(2)设$G(x,y)$，则$x^2-y^2=25(x\leqslant-5,y\geqslant0)$.又$Q(0,5\sqrt{2})$，

故$|GQ|^2=x^2+(y-5\sqrt{2})^2$

$=2y^2-10\sqrt{2}y+75=2\left(y-\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2+50$.

所以当$y=\frac{5\sqrt{2}}{2}$时，$|GQ|$取得最小值，此时$x=-\frac{5\sqrt{6}}{2}$.所以G的位置为点$\left(-\frac{5\sqrt{6}}{2},\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$.