(2)因为函数 $g(t)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上单调递减,

所以 $[g(t)]_{max}=g(1)=\log_2\frac{9}{5}$.

所以 $[g(t)]_{max}=\log_2\frac{9}{5}<f(m)=\log_{\frac{1}{2}}m=\log_2\frac{1}{m}$.

所以 $\frac{1}{m}>\frac{9}{5}$,所以 $0<m<\frac{5}{9}$.所以实数 m 的取值范围是 $\left(0,\frac{5}{9}\right)$.

第 8 期

第 3 版同步周测题参考答案

一、选择题

1.D

2.B

3.B

提示:$y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 是单调减函数;函数 $y=x^2-\frac{1}{2}$ 在区间 $(-1,1)$ 内先减后增;函数 $y=-x^3$ 是减函数;函数 $y=2^x-1$ 单调递增,且有零点 $x=0$.

4.C

5.D

提示:$f(x)=-x-x^3$ 的图像在 $[a,b]$ 上是连续的,并且是单调递减的,又因为 $f(a)\cdot f(b)<0$,可得 $f(x)=0$ 在 $[a,b]$ 内有唯一一个实根.

6.C

提示:把 $y=f(x)$ 的图像向下平移一个单位后,只有 C 中的图像满足 $y=f(x)-1$ 与 x 轴无交点.

7.B

提示:令 $f(x)=0$,则有 $\Delta=b^2-4ac>0$,所以 $f(x)$ 的零点个数是 2.

8.A

提示:$f(x)=x+\frac{a}{x}(a\in\mathbf{R})$ 的图像在 $(1,2)$ 上是连续不断的,逐个选项代入验证,当 $a=-2$ 时,$f(1)=1-2=-1<0$,$f(2)=2-1=1>0$.故 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 上有零点,同理,其他选项不符合,选 A.

9.B

10.C

11.C

12.A

提示:由于二次函数 $f(x)$ 的二次项系数 $1>0$,且 $f(m)<0$,则二次函数 $f(x)$ 存在两个零点,设为 x_1,x_2,且 $x_1<x_2$.

则 $x_2+x_1=1$,$x_2x_1=a$,$x_2-x_1>0$,$x_1<m<x_2$,所以 $x_2-x_1=\sqrt{(x_2+x_1)^2-4x_2x_1}=\sqrt{1-4a}$,由于 $a>0$,则 $\sqrt{1-4a}<1$,则 $m-1<x_1$,所以 $f(m-1)>0$.

二、填空题

13.$(-1,0)$

提示:因为 $f(x)=x+b$ 是增函数,又 $f(x)=x+b$ 的零点在区间 $(0,1)$ 内,所以 $\begin{cases}f(0)<0,\\ f(1)>0.\end{cases}$

所以 $\begin{cases}b<0,\\ 1+b>0.\end{cases}$ 所以 $-1<b<0$.

14.$a<b<c$

提示:因为 $e^a+a=0$,所以 $e^a=-a$,所以 $a<0$;

因为 $\ln b+b=0$,所以 $\ln b=-b$,且 $b>0$,所以 $0<b<1$;

因为 $\ln c-1=0$,所以 $c=e>1$,所以 $a<b<c$.

15.1.5,1.75,1.875,1.8125

16.$(1,2)$

三、解答题

17.**解:**因为 $-\frac{1}{2}$ 是函数 $f(x)$ 的一个零点,

所以 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$.

因为 $y=f(x)$ 是偶函数且在 $(-\infty,0]$ 上单调递增,

所以当 $\log_{\frac{1}{4}}x\leqslant0$,即 $x\geqslant1$ 时,$\log_{\frac{1}{4}}x\geqslant-\frac{1}{2}$,解得 $x\leqslant2$,

即 $1\leqslant x\leqslant2$.

由对称性可知,当 $\log_{\frac{1}{4}}x>0$ 时,$\frac{1}{2}\leqslant x<1$.

综上所述,x 的取值范围是 $\left[\frac{1}{2},2\right]$.

18.**解:**(1)分别画出函数 $y_1=x^3$,$y_2=3x+1$ 的图像(图略),不难发现有 3 个交点,故原方程有3 个实数根.

(2) 分别画出函数 $y_1=3^{x-1}$,$y_2=\ln x$ 的图像(图略),不难发现没有交点,故原方程无实数根.

19.**解:**取区间 $[0,1]$ 作为起始区间,用二分法逐次计算如下.

取区间 $[0,1]$ 的中点 $x_1=0.5$,用计算器算得 $f(0.5)\approx0.6$.

因为 $f(0)\cdot f(0.5)<0$,

所以 $x_0\in(0,0.5)$.

再取区间 $(0,0.5)$ 的中点 $x_2=0.25$,用计算器算得 $f(0.25)\approx-0.7$.

因为 $f(0.25)\cdot f(0.5)<0$,

所以 $x_0\in(0.25,0.5)$.

同理可得,$x_0\in(0.375,0.5)$,

$x_0\in(0.375,0.4375)$.

由于 $|0.375-0.4375|=0.0625<0.1$,

故方程 $e^x+4x-3=0$ 的近似解可取为 0.4375.

20.**解:**当 $a=0$ 时,函数为 $y=-x+2$,则其零点为 $x=2$.

当 $a=\frac{1}{2}$ 时,则由 $\left(\frac{1}{2}x-1\right)(x-2)=0$,

解得 $x_1=x_2=2$,则其零点为 $x=2$.

当 $a\neq0$ 且 $a\neq\frac{1}{2}$ 时,则由 $(ax-1)\cdot(x-2)=0$,

解得 $x=\frac{1}{a}$ 或 $x=2$,

综上所述,当 $a=0$ 或 $\frac{1}{2}$ 时,零点为 $x=2$;当 $a\neq0$ 且 $a\neq\frac{1}{2}$ 时,零点为 $x=\frac{1}{a}$ 和 $x=2$.

21.**解:**由函数 $f(x)=4^x+k\cdot2^x+1$ 只有一个零点知,

方程 $(2^x)^2+k\cdot2^x+1=0$ 只有一个实数根,

令 $2^x=t(t>0)$,则 $t^2+kt+1=0$ 只有一个正实数根.

(1)当 $\Delta=k^2-4=0$ 时,$k=\pm2$.若 $k=2$,则 $t=-1$(舍去);若 $k=-2$,则 $t=1$,即 $2^x=1$,$x=0$,满足题意.

(2)当 $\Delta=k^2-4>0$ 时,方程 $t^2+kt+1=0$ 有两个正实数根,而 $t^2+kt+1=0$ 只有一个正实数根,所以 $\Delta=k^2-4>0$ 不成立.

所以实数 k 的值为-2,该零点为 0.

22.**解:**(1)设2 016年每台A型手提电脑的生产成本为P元,依题意得$P(1+50\%)=5\ 000\times(1+20\%)\times80\%$,

解得$P=3\ 200$(元).

(2)设2 013年~2 016年生产成本平均每年降低的百分数为x,根据题意,得$5\ 000(1-x)^4=3\ 200(0<x<1)$,

即$5(1-x)^2=4(0<x<1)$.

令 $f(x)=5(1-x)^2-4$,则 $f(0.10)=0.05>0$,$f(0.11)=-0.039\ 5<0$,

所以$f(x)$在$(0.10,0.11)$内有一个零点x_0.取区间$[0.10,0.11]$的中点$x_1=0.105$,

则$f(0.105)\approx0.005>0$,所以$f(0.11)\cdot f(0.105)<0$,所以$x_0\in(0.105,0.11)$.

由于 $|0.11-0.105|=0.005<0.01$,所以$f(x)=0$的近似解可取为0.11.

第 5 期

第 3 版同步周测题参考答案

一、选择题

1.C

2.C

提示:选项A中 $(-1)^{\frac{1}{3}}$ 和 $(-1)^{\frac{2}{6}}$ 均符合分数指数幂的定义,但 $(-1)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{-1}=-1$,$(-1)^{\frac{2}{6}}=\sqrt[6]{(-1)^2}=1$,故A不满足题意;选项B中,0的负分数指数幂没有意义,故B不满足题意;选项D中,$4^{-\frac{3}{2}}$ 和 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ 虽符合分数指数幂的定义,但值不相等,故D不满足题意;选项C中,$2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$,$4^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{2^2}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$,满足题意.

3.C 4.D

5.D

提示:$y_1=2^{1.8}$,$y_2=2^{1.32}$,$y_3=2^{1.5}$,根据函数 $y=2^x$ 的单调性,可知 $y_1>y_3>y_2$.故选D.

6.B

提示:要使函数$y=\sqrt{2^{x-1}-8}$有意义,必须满足$2^{x-1}-8\geqslant0$,即$2^{x-1}\geqslant8=2^3$,则$x-1\geqslant3$,解得$x\geqslant4$.

7.A

提示:令 $2-x=t$,则 $t=2-x$ 是减函数,因为当 $x>2$ 时,$f(x)>1$,所以当 $t<0$ 时,$a^t>1$.所以 $0<a<1$,所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数.

8.C

9.D

提示:依题意设 $f(x)=a^x(a>0$,且 $a\neq1)$,则 $a^{-1}=3$,得 $a=\frac{1}{3}$,故 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 是减函数.

10.A

提示:$y=8\cdot2^{-x}=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}$,只需将函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图像向右平移 3 个单位.

11.D

提示:由题图知$f(1)=\frac{1}{2}$,所以$a=\frac{1}{2}$,所以$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$,

由题意得$g(x)=-f(-x)=-\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}=-2^x$.

12.D

提示:若 $a>1$,则函数$f(x)=a^x$在$[1,2]$上单调递增,

所以$a^2-a=\frac{a}{2}$,解得$a=\frac{3}{2}$或$a=0$(舍去);

若$0<a<1$,则函数$f(x)=a^x$在$[1,2]$上单调递减,

所以$a-a^2=\frac{a}{2}$,解得$a=\frac{1}{2}$或$a=0$(舍去).综上,a的值是$\frac{1}{2}$或$\frac{3}{2}$.

二、填空题

13.③

14.2

提示:$f(x)+f(-x)=\left(\frac{2}{2^x+1}+ax\right)+\left[\frac{2}{2^{-x}+1}+a(-x)\right]=\frac{2}{2^x+1}+\frac{2}{2^{-x}+1}=\frac{2}{2^x+1}+\frac{2\cdot2^x}{1+2^x}=\frac{2+2\cdot2^x}{2^x+1}=2$.故$f(2018)+f(-2018)=2$.

15.$(2,2)$

提示:由于函数$y=a^x(a>0$,且$a\neq1)$的图像恒过定点$(0,1)$,故可令$x-2=0$,即$x=2$,此时有$f(2)=3-a^0=3-1=2$.故所求定点M的坐标为$(2,2)$.

16.$[-1,1]$

提示:因为 $y_1=2^x+1>1$,$y_2=-2^x-1<-1$,y_1 与 y_2 无公共点,而$y=b$为平行于x轴的直线,所以当$b\in[-1,1]$时,它与y_1,y_2均无公共点.

三、解答题

17.**解:**(1)原式$=(2^5)^{-\frac{3}{5}}-\left(\frac{64}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}+\frac{1}{(\sqrt{2})^2}+1$

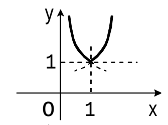
$=2^{-3}-\left[\left(\frac{3}{4}\right)^3\right]^{\frac{2}{3}}+\frac{1}{2}+1$

$=\frac{1}{8}-\frac{9}{16}+\frac{1}{2}+1=\frac{17}{16}$.

(2)原式$=[2\times(-6)\div(-3)]a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}}\cdot b^{\frac{1}{5}+\frac{1}{3}-\frac{8}{15}}=4ab^0=4a$.

18.**解:**$y=2^{|x-1|}=\begin{cases}2^{x-1},x\geqslant1,\\ \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1},x<1.\end{cases}$

其图像由两部分合成的,如图所示.一是把 $y=2^x$ 的图像向右平移 1 个单位长度,取 $x\geqslant1$ 的部分,二是把 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图像向右平移 1 个单位长度,取 $x<1$ 的部分,对接处的公共点为 $(1,1)$.



(第 18 题图)

由图像可知,函数的单调递减区间为 $(-\infty,1]$;单调递增区间为 $[1,+\infty)$,值域为 $[1,+\infty)$.

19.**解:**因为$f(x)+g(x)=a^x-a^{-x}+2$,又$f(x)$是奇函数,$g(x)$是偶函数,

所以$f(-x)+g(-x)=-f(x)+g(x)=a^{-x}-a^x+2$,

所以$f(2)+g(2)=a^2-a^{-2}+2$,$-f(2)+g(2)=a^{-2}-a^2+2$,

两式联立解得$f(2)=a^2-a^{-2}$,$g(2)=2$,

又因为$g(2)=a$,所$a=2$,所以$f(2)=\frac{15}{4}$.

20.**解:**(1)由已知得$\begin{cases}k\cdot a^0=1\\ k\cdot a^{-3}=8,\end{cases}$

解得$k=1$,$a=\frac{1}{2}$.

故$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}=2^x$.

(2)由(1)知$g(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}$,函数$g(x)$为奇函数.

证明:函数$g(x)$的定义域为$\mathbf{R}$,

又$g(-x)=\frac{2^{-x}-1}{2^{-x}+1}=\frac{1-2^x}{1+2^x}=-\frac{2^x-1}{2^x+1}=-g(x)$,

故函数$g(x)$是奇函数.

21.**解:**因为经过5分钟后容器A与容器B中的水量相等,故$m\cdot3^{-5a}=\frac{m}{2}$,即$3^{5a}=2$.

因为经过$(5+n)$分钟后容器A中的水只剩$\frac{m}{8}$升,

所以$\frac{m}{8}=m\cdot3^{-a(5+n)}$,结合$3^{5a}=2$,得$3^{na}=4=3^{10a}$,

所以$n=10$.

22.**解:**(1)因为 $f(x)=3^x$,

所以 $f(a+2)=3^{a+2}=18$,得 $3^a=2$.

又 $g(x)=3^{ax}-4^x=(3^a)^x-4^x$,

所以 $g(x)=2^x-4^x$,$x\in[0,1]$.

(2)令 $t=2^x$,$y=t-t^2=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$.

因为 $x\in[0,1]$,且函数 $t=2^x$ 在$[0,1]$上单调递增,所以 $t\in[1,2]$.

因为$\frac{1}{2}<1$,所以函数 $y=t-t^2$ 在$[1,2]$上单调递减,

所以函数 $g(x)$ 的单调递减区间为 $[0,1]$.证明如下:

任取 $x_1,x_2\in[0,1]$,且 $x_1<x_2$,

则 $g(x_2)-g(x_1)=2^{x_2}-4^{x_2}-2^{x_1}+4^{x_1}=(2^{x_2}-2^{x_1})-(2^{x_2}-2^{x_1})(2^{x_2}+2^{x_1})=(2^{x_2}-2^{x_1})\cdot(1-2^{x_1}-2^{x_2})$.

因为 $0\leqslant x_1<x_2\leqslant 1$,所以 $2^{x_2}>2^{x_1}$,且 $1\leqslant 2^{x_1}<2,1<2^{x_2}\leqslant 2$,

所以 $2<2^{x_1}+2^{x_2}<4,2^{x_2}-2^{x_1}>0$,且 $-3<1-2^{x_1}-2^{x_2}<-1<0$,

所以 $g(x_2)-g(x_1)<0$,即 $g(x_1)>g(x_2)$.

故函数 $g(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上单调递减.

(3)因为 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上是减函数,

所以 $g(1)\leqslant g(x)\leqslant g(0)$.

因为 $g(1)=2^1-4^1=-2,g(0)=2^0-4^0=0$,

所以 $-2\leqslant g(x)\leqslant 0$.

所以函数 $g(x)$ 的值域为 $[-2,0]$.

第 6 期

第 3 版同步周测题参考答案

一、选择题

1.D　2.D　3.D　4.B

5.D

提示:原式可化为 $\log_8 m=\frac{2}{\log_3 4}$,$\frac{\lg m}{3\lg 2}=\frac{2}{\frac{\lg 4}{\lg 3}}$,即 $\lg m=\frac{6\lg 2\cdot\lg 3}{2\lg 2}$,$\lg m=\lg 27$,所以 $m=27$.

6.C

提示:因为 $\lg(a+b)=\lg a+\lg b=\lg(ab)$,

所以 $a+b=ab$,

所以 $\lg(a-1)+\lg(b-1)=\lg[ab-(a+b)+1]=\lg 1=0$.

7.A　8.D　9.A

10.C

提示:$y=\log_2|x|=\begin{cases}\log_2 x, & x>0,\\ \log_2(-x), & x<0,\end{cases}$ 当 $x>0$ 时,$y=\log_2|x|$ 单调递增,排除A,D,又当 $x<0$ 时,函数 $y=\log_2|x|$ 单调递减,故选C.

11.B

提示:因为对数函数 $y=\log_{(2a-1)}x$ 在定义域上是增函数,所以 $2a-1>1$,解得 $a>1$,所以,实数 a 的取值范围是 $(1,+\infty)$.

12.D

提示:当 $a\leqslant 0$ 时,由 $2^a<1$,得 $a<0$;当 $a>0$ 时,由 $\log_2 a<1$,得 $0<a<2$.

综上所述,实数 a 的取值范围是 $(-\infty,0)\cup(0,2)$.

二、填空题

13.4

14.2

提示:因为 $25^{\log_5(2x-1)}=(5^2)^{\log_5(2x-1)}=(5^{\log_5(2x-1)})^2=(2x-1)^2=9$.所以 $2x-1=\pm 3$,又因为 $2x-1>0$,所以 $2x-1=3$.所以 $x=2$.

15.y_3,y_2,y_1

16.$(-1,0)$

提示:在同一直角坐标系中作出 $y=\log_2(-x)$ 和 $y=x+1$ 的图像即可得出答案.

三、解答题

17.**解:**(1)原式 $=\log_5 5+\log_5 7+\log_{\frac{1}{2}}2+\log_5 50-\log_5 2-\log_5 7=1-1+\log_5 25+\log_5 2-\log_5 2=2$.

(2)原式

$$=\left(\frac{\lg 2}{\lg 3}+\frac{\lg 2}{\lg 9}\right)\cdot\left(\frac{\lg 3}{\lg 4}+\frac{\lg 3}{\lg 8}\right)$$

$$=\left(\frac{\lg 2}{\lg 3}+\frac{\lg 2}{2\lg 3}\right)\cdot\left(\frac{\lg 3}{2\lg 2}+\frac{\lg 3}{3\lg 2}\right)$$

$$=\frac{3\lg 2}{2\lg 3}\cdot\frac{5\lg 3}{6\lg 2}=\frac{5}{4}.$$

18.**解:**(1)由 $2^x-1>0$,知 $2^x>1$,即 $2^x>2^0$,解得 $x>0$,所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

(2)令 $u=2^x-1$,可知 $u=2^x-1$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数,而 $y=\log_{\frac{1}{e}}u$ 在定义域上为减函数,故函数 $f(x)$ 在其定义域上为减函数.

19.**解:**现有细胞 100 个,先考虑经过 1,2,3,4 个小时后的细胞总数.

1 小时后,细胞总数为 $\frac{1}{2}\times 100+\frac{1}{2}\times 100\times 2=\frac{3}{2}\times 100$;

2 小时后,细胞总数为 $\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times 100+\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times 100\times 2=\frac{9}{4}\times 100$;

3 小时后,细胞总数为 $\frac{1}{2}\times\frac{9}{4}\times 100+\frac{1}{2}\times\frac{9}{4}\times 100\times 2=\frac{27}{8}\times 100$;

4 小时后,细胞总数为 $\frac{1}{2}\times\frac{27}{8}\times 100+\frac{1}{2}\times\frac{27}{8}\times 100\times 2=\frac{81}{16}\times 100$;

…

可见,细胞总数 y(个)与时间 x(小时)之间的函数关系为 $y=100\times\left(\frac{3}{2}\right)^x$,$x\in\mathbf{N}_+$.由 $100\times\left(\frac{3}{2}\right)^x>10^{10}$,得 $\left(\frac{3}{2}\right)^x>10^8$,两边取以 10 为底的对数,得 $x\lg\frac{3}{2}>8$,所以 $x>\frac{8}{\lg 3-\lg 2}$.因为 $\frac{8}{\lg 3-\lg 2}=\frac{8}{0.477-0.301}\approx 45.45$,所以 $x>45.45$.

故经过 46 小时,细胞总数超过 10^{10} 个.

20.**解:**原方程可化为 $2(\lg x)^2-4\lg x+1=0$,设 $t=\lg x$,

则原方程化为 $2t^2-4t+1=0$.

所以 $t_1+t_2=2,t_1t_2=\frac{1}{2}$.

由已知 a,b 是原方程的两个实根,则 $t_1=\lg a,t_2=\lg b$,所以 $\lg a+\lg b=2,\lg a\cdot\lg b=\frac{1}{2}$.

所以 $\lg(ab)\cdot(\log_a b+\log_b a)$

$$=(\lg a+\lg b)\left(\frac{\lg b}{\lg a}+\frac{\lg a}{\lg b}\right)$$

$$=\left(\frac{(\lg a+\lg b)\cdot[(\lg b)^2+(\lg a)^2]}{\lg a\lg b}\right)$$

$$=(\lg a+\lg b)\cdot\left(\frac{(\lg a+\lg b)^2-2\lg a\lg b}{\lg a\lg b}\right)$$

$$=2\times\frac{2^2-2\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=12.$$

21.**证明:**$\log_{(c+b)}a+\log_{(c-b)}a$

$$=\frac{1}{\log_a(c+b)}+\frac{1}{\log_a(c-b)}$$

$$=\frac{\log_a(c-b)+\log_a(c+b)}{\log_a(c+b)\cdot\log_a(c-b)}$$

$$=\frac{\log_a[(c-b)(c+b)]}{\frac{1}{\log_{(c+b)}a}\cdot\frac{1}{\log_{(c-b)}a}}$$

$$=\log_a a^2\cdot\log_{(c+b)}a\cdot\log_{(c-b)}a$$

$$=2\log_{(c+b)}a\cdot\log_{(c-b)}a,$$

即等式成立.

22.**解:**(1)因为 $\begin{cases}\log_2 f(a)=2,\\ f(\log_2 a)=k,\end{cases}$

所以 $\begin{cases}a^2-a+k=2^2,\\ \log_2 a=0 \text{ 或 } \log_2 a=1,\end{cases}$

又 $a>0$,且 $a\neq 1$,所以 $\begin{cases}k=2,\\ a=2.\end{cases}$

(2)$f(\log_a x)=f(\log_2 x)=(\log_2 x)^2-\log_2 x+2=\left(\log_2 x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$.

所以当 $\log_2 x=\frac{1}{2}$,即 $x=\sqrt{2}$ 时,$f(\log_a x)$ 有最小值 $\frac{7}{4}$.

第 7 期

第 2、3 版章节测试题参考答案

一、选择题

1.A　2.B　3.B　4.D

5.B

提示:由 $2^x=3^y$ 得 $\lg 2^x=\lg 3^y$,所以 $x\lg 2=y\lg 3$,所以 $\frac{x}{y}=\frac{\lg 3}{\lg 2}$.

6.C

提示:原式 $=\frac{\lg 4}{\lg 2}\cdot\frac{\lg 6}{\lg 4}\cdot\frac{\lg 8}{\lg 6}=3$.

7.A

提示:$\log_3 4>\log_3 3=1=\left(\frac{1}{5}\right)^0>0$,$\log_{\frac{1}{3}}10<0$,故有 $\log_3 4>\left(\frac{1}{5}\right)^0>\log_{\frac{1}{3}}10$.

8.D

9.D

提示:$f^{-1}(x)=\log_{\frac{1}{2}}x$,则 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$,由 $f(x)=1$ 可得 $x=0$.

10.A

提示:因为 $f_4(x)=\log_2(2x)=1+\log_2 x$,所以 $f_2(x)=\log_2(x+2)$ 沿着 x 轴先向右平移 2 个单位得到 $y=\log_2 x$ 的图像,然后再沿着 y 轴向上平移 1 个单位可得到 $f_4(x)=\log_2(2x)=1+\log_2 x$ 的图像,根据“同形”函数的定义,$f_2(x)$ 与 $f_4(x)$ 为“同形”函数.$f_3(x)=\log_2 x^2=2\log_2|x|$ 与 $f_1(x)=2\log_2(x+1)$ 不“同形”,故选 A.

11.C

提示:因为 $f(3)=a^3>0$,所以 $g(3)<0$,得 $0<a<1$.所以 $f(x),g(x)$ 在各自定义域上都为减函数.

12.D

提示:$f(x)=x^2,f(x)=\ln x,f(x)=3^x$ 分别符合 $f\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{f(x)}{f(y)}$,$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$,$f(x+y)=f(x)f(y)$ 三式,只有 D 不符合其中三个等式.

二、填空题

13.-1

提示:将对数式化为指数式,得 $3^{2x+1}=1-2\cdot 3^x$,

即 $3\cdot(3^x)^2+2\cdot 3^x-1=0$,得 $3^x=\frac{1}{3}$,故 $x=-1$.

14.$(-2,-1]$

提示:当 $x\in(-\infty,1]$ 时,$x-1\leqslant 0$,$0<3^{x-1}\leqslant 1,-2<f(x)\leqslant -1$;当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$1-x<0,0<3^{1-x}<1,-2<f(x)<-1$,所以 $f(x)$ 的值域为 $(-2,-1]$.

15.1

提示:因为 $f(-x)=f(x)$,所以 $\frac{e^{-x}}{a}+\frac{a}{e^{-x}}=\frac{e^x}{a}+\frac{a}{e^x}$,$\frac{1}{ae^x}+ae^x=\frac{e^x}{a}+\frac{a}{e^x}$,$\frac{1}{a}=a$,而 $a>0$,则 $a=1$.

16.1

提示:因为 $f(1+x)=f(1-x)$,所以 $y=f(x)$ 关于直线 $x=1$ 对称,所以 $a=1$.

所以 $f(x)=2^{|x-1|}$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增.所以 $[m,+\infty)\subseteq[1,+\infty)$.

所以 $m\geqslant 1$,即 m 的最小值为 1.

三、解答题

17.**解:**(1)$10^{\lg 3}-10\cdot\log_5 1+\pi^{\log_\pi 2}$

$=3-0+2$

$=5$.

(2)因为 $\log_a x+3\log_x a-\log_x y=2$,

由换底公式,得

$\log_a x+\frac{3}{\log_a x}-\frac{\log_a y}{\log_a x}=2$,

所以 $\log_a y=(\log_a x)^2-2\log_a x+3$.

18.**解:**(1)要使 $f(x)$ 有意义,只要使 $2^x+1\neq 0$,由于对任意的 $x\in\mathbf{R}$,$2^x\neq -1$,

所以 $x\in\mathbf{R}$,即函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$.$y=f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}=1-\frac{2}{2^x+1}$.

令 $t=2^x$,则 $t>0$,

所以 $y=1-\frac{2}{t+1}$.

所以 $y\in(-1,1)$,

即 $f(x)$ 的值域为 $(-1,1)$.

(2)对任意 $x\in\mathbf{R}$,则有 $-x\in\mathbf{R}$.

因为 $f(-x)=\frac{2^{-x}-1}{2^{-x}+1}=\frac{1-2^x}{1+2^x}=-f(x)$,

所以 $f(x)$ 为奇函数.

19.**解:**(1)由已知得 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-a}=2$,解得 $a=1$.

(2)由(1)知 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$,又 $g(x)=f(x)$,

则 $4^{-x}-2=\left(\frac{1}{2}\right)^x$,即 $\left(\frac{1}{4}\right)^x-\left(\frac{1}{2}\right)^x-2=0$,

即 $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]^2-\left(\frac{1}{2}\right)^x-2=0$,

令 $\left(\frac{1}{2}\right)^x=t$,则 $t^2-t-2=0$,即 $(t-2)(t+1)=0$,

又 $t>0$,故 $t=2$,即 $\left(\frac{1}{2}\right)^x=2$,解得 $x=-1$.

20.**解:**(1)由已知,$3-ax>0$ 对一切 $x\in[0,2]$ 恒成立,又根据底数的意义,$a>0$,且 $a\neq 1$,

所以函数 $f(x)=3-ax$ 在 $[0,2]$ 上为减函数,从而获得不等式:$f(2)=3-2a>0$,

解得 $a<\frac{3}{2}$.所以 $0<a<1$,或 $1<a<\frac{3}{2}$.

所以 a 的取值范围是 $(0,1)\cup\left(1,\frac{3}{2}\right)$.

(2)假设存在这样的实数 a,

由题设,知 $f(1)=1$,

而获得方程:$f(1)=\log_a(3-a)=1$.

所以 $a=\frac{3}{2}$,此时 $f(x)=\log_{\frac{3}{2}}\left(3-\frac{3}{2}x\right)$.

当 $x=2$ 时,$f(x)$ 没有意义,故这样的实数 a 不存在.

21.**解:**(1)当 $a>0,b>0$ 时,因为 $a\cdot 2^x,b\cdot 3^x$ 都单调递增,所以函数 $f(x)$ 单调递增;

当 $a<0,b<0$ 时,因为 $a\cdot 2^x,b\cdot 3^x$ 都单调递减,

所以函数 $f(x)$ 单调递减.

(2)$f(x+1)-f(x)=a\cdot 2^x+2b\cdot 3^x>0$.

①当 $a<0,b>0$ 时,$\left(\frac{3}{2}\right)^x>-\frac{a}{2b}$,

解得 $x>\log_{\frac{3}{2}}\left(-\frac{a}{2b}\right)$;

②当 $a>0,b<0$ 时,$\left(\frac{3}{2}\right)^x<-\frac{a}{2b}$,

解得 $x<\log_{\frac{3}{2}}\left(-\frac{a}{2b}\right)$.

22.**解:**(1)$S=g(t)=$

$$\frac{-\left[\log_{\frac{1}{2}}t+\log_{\frac{1}{2}}(t+2)\right]\times 2}{2}+\frac{-\left[\log_{\frac{1}{2}}(t+2)+\log_{\frac{1}{2}}(t+4)\right]\times 2}{2}-\frac{-\left[\log_{\frac{1}{2}}t+\log_{\frac{1}{2}}(t+4)\right]\times 4}{2}$$

$$=\log_2\frac{(t+2)^2}{t(t+4)}=\log_2\left(1+\frac{4}{t^2+4t}\right).$$