第 8 期

第 3 版同步周测题参考答案

一、选择题

1.A　2.C

3.A

提示：$2=a+2b\geqslant 2\sqrt{2ab}$，解得 $ab\leqslant\frac{1}{2}$.故选 A.

4.A　　5.C

6.D

提示：$\frac{x}{x+y}+\frac{2y}{x+2y}=\frac{1}{1+\frac{y}{x}}+\frac{2\frac{y}{x}}{1+2\frac{y}{x}}$，设 $t=\frac{y}{x}>0$，所以原式 $=\frac{1}{1+t}+\frac{2t}{2t+1}=\frac{1}{1+t}+\frac{2t+1-1}{2t+1}=1+\frac{t}{(t+1)(2t+1)}=1+\frac{1}{2t+\frac{1}{t}+3}$.因为 $2t+\frac{1}{t}\geqslant 2\sqrt{2}$，当 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时等号立，所以最大值为 $1+\frac{1}{2\sqrt{2}+3}=4-2\sqrt{2}$.

7.B　8.C

9.D

提示：圆方程为 $(x+1)^2+(y-2)^2=4$，圆心为 $(-1,2)$，半径为 2，若直线被圆截得弦长为 4，说明圆心在直线上，即 $-2a-2b+2=0$，所以 $a+b=1$，

所以 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)(a+b)=2+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2+2=4$，

当且仅当 $\frac{b}{a}=\frac{a}{b}$，即 $a=b$ 时，等号成立.

10.C

提示：因为 $a>b>0$，所以 $b(a-b)>0$.

所以 $b(a-b)\leqslant\left(\frac{b+a-b}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}$，所以 $a^2+\frac{1}{b(a-b)}\geqslant a^2+\frac{4}{a^2}\geqslant 4$，

当且仅当 $\begin{cases}b=a-b,\\ a^2=\frac{4}{a^2},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a=\sqrt{2},\\ b=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ 时，等号成立.故选 C.

11.C

提示：由已知，可得 $6\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)=1$，所以 $2a+b=6\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)\cdot(2a+b)=6\left(5+\frac{2a}{b}+\frac{2b}{a}\right)\geqslant 6\times(5+4)=54$，当且仅当 $\frac{2a}{b}=\frac{2b}{a}$ 时等号成立，所以 $9m\leqslant 54$，即 $m\leqslant 6$，故选 C.

12.B

提示：$\frac{(x+y)(x+ay)}{xy}=\frac{x^2+(a+1)xy+ay^2}{xy}=a+1+\frac{x^2+ay^2}{xy}\geqslant a+1+2\sqrt{a}=(\sqrt{a}+1)^2$，当且仅当 $x=\sqrt{a}\,y$ 时等号成立，所以 $\frac{(x+y)(x+ay)}{xy}$ 的最小值为 $(\sqrt{a}+1)^2$，于是 $(\sqrt{a}+1)^2\geqslant 9$ 恒成立，所以 $a\geqslant 4$，故选 B.

二、填空题

13.≤

提示：因为 $a^2+a-2>0$，所以 $a<-2$ 或 $a>1$，

又 $a>0$，所以 $a>1$，因为 $t>0$，所以 $\frac{t+1}{2}\geqslant\sqrt{t}$，所以 $\log_a\frac{t+1}{2}\geqslant\log_a\sqrt{t}=\frac{1}{2}\log_a t$.

14.$4\sqrt{2}$

提示：因为 $a>0,b>0$，所以 $\sqrt{ab}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{ab}}$，即 $ab\geqslant 2$，当且仅当 $a=b=\sqrt{2}$ 时取等号，所以 $a^3+b^3\geqslant 2\sqrt{(ab)^3}\geqslant 2\sqrt{2^3}=4\sqrt{2}$，当且仅当 $a=b=\sqrt{2}$ 时取等号，则 a^3+b^3 的最小值为 $4\sqrt{2}$.

15.8

16.1−2lg2

提示：由 $f(a)=f(b)$ 及 $0<a<b$ 可得 $\lg b=-\lg a$，即 $\lg(ab)=0$，即 $ab=1$，则 $\frac{1}{a}+\frac{4}{b}=\frac{4a+b}{ab}=4a+b\geqslant 2\sqrt{4ab}=4$，当且仅当 $b=4a$ 时，$\frac{1}{a}+\frac{4}{b}$ 取得最小值，由 $ab=1,b=4a$，可得 $a=\frac{1}{2},b=2$，所以 $f(a+b)=f\left(\frac{5}{2}\right)=\lg\frac{5}{2}=1-2\lg 2$.

三、解答题

17.**证明**：因为 a,b,c 均为正实数，

所以 $\frac{2b}{a}+\frac{a}{2b}\geqslant 2$（当且仅当 $a=2b$ 时等号成立），

$\frac{3c}{a}+\frac{a}{3c}\geqslant 2$（当且仅当 $a=3c$ 时等号成立），

$\frac{3c}{2b}+\frac{2b}{3c}\geqslant 2$（当且仅当 $2b=3c$ 时等号成立），

将上述三式相加得 $\left(\frac{2b}{a}+\frac{a}{2b}\right)+\left(\frac{3c}{a}+\frac{a}{3c}\right)+\left(\frac{3c}{2b}+\frac{2b}{3c}\right)\geqslant 6$（当且仅当 $a=2b=3c$ 时等号成立），所以 $\left(\frac{2b}{a}+\frac{a}{2b}-1\right)+\left(\frac{3c}{a}+\frac{a}{3c}-1\right)+\left(\frac{3c}{2b}+\frac{2b}{3c}-1\right)\geqslant 3$（当且仅当 $a=2b=3c$ 时等号成立），

即 $\frac{2b+3c-a}{a}+\frac{a+3c-2b}{2b}+\frac{a+2b-3c}{3c}\geqslant 3$（当且仅当 $a=2b=3c$ 时等号成立）.

18.**解**：(1)因为 $x>0,y>0$，由基本不等式，得 $2x+5y\geqslant 2\sqrt{2x\cdot 5y}$，即 $20\geqslant 2\sqrt{10}\cdot\sqrt{xy}$，所以 $xy\leqslant 10$，当且仅当 $2x=5y$，即 $x=5,y=2$ 时等号成立.

所以 $u=\lg x+\lg y=\lg(xy)\leqslant\lg 10=1$.

故 u 的最大值是 1.

(2)由已知，得 $xy=100$.

所以 $5x+2y\geqslant 2\sqrt{10xy}=20\sqrt{10}$，当且仅当 $5x=2y$，即 $x=2\sqrt{10},y=5\sqrt{10}$ 时，等号成立.

所以 v 的最小值是 $20\sqrt{10}$.

19.**解**：错误.

因为 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{xy}}$，　①

当且仅当 $x=y$ 时，等号成立，

$x+2y\geqslant 2\sqrt{2xy}$，　②

当且仅当 $x=2y$ 时，等号成立，而当 $x>0,y>0$ 时①②的等号同时成立是不可能的.

正确解法：因为 $x+2y=1$，且 $x>0,y>0$，

所以 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)(x+2y)=3+\frac{2y}{x}+\frac{x}{y}\geqslant 3+2\sqrt{\frac{2y}{x}\cdot\frac{x}{y}}=3+2\sqrt{2}$，

当且仅当 $\frac{2y}{x}=\frac{x}{y}$，即 $x=\sqrt{2}\,y$ 时，等号成立.

又 $x+2y=1$，所以 $\begin{cases}x=\sqrt{2}-1,\\ y=\frac{2-\sqrt{2}}{2}.\end{cases}$

所以 $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)_{\min}=3+2\sqrt{2}$.

20.**解**：因为 $x>0,y>0$，

所以不等式 $\left(3k-\frac{1}{2}\right)x+ky\geqslant\sqrt{2xy}$ 恒成立等价于 $\left(3k-\frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{x}{y}}+k\sqrt{\frac{y}{x}}\geqslant\sqrt{2}$ 恒成立.又 $k>\frac{1}{6}$，所以 $\left(3k-\frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{x}{y}}+k\sqrt{\frac{y}{x}}\geqslant 2\sqrt{k\left(3k-\frac{1}{2}\right)}$，所以 $2\sqrt{k\left(3k-\frac{1}{2}\right)}\geqslant\sqrt{2}$，解得 $k\leqslant-\frac{1}{3}$（舍去）或 $k\geqslant\frac{1}{2}$，所以 $k_{\min}=\frac{1}{2}$.

21.**解**：(1)设捕捞 n 年后的总盈利为 y 万元，则

$y=50n-98-\left[12\times n+\frac{n(n-1)}{2}\times 4\right]$

$=-2n^2+40n-98$

$=-2(n-10)^2+102$，

所以捕捞 10 年后总盈利最大，最大是 102 万元.

(2)年平均利润为 $\frac{y}{n}=-2\left(n+\frac{49}{n}-20\right)\leqslant-2\left(2\sqrt{n\cdot\frac{49}{n}}-20\right)=12$，

当且仅当 $n=\frac{49}{n}$，即 $n=7$ 时上式取等号.

所以，捕捞 7 年后的平均利润最大，最大是 12 万元.

22.**解**：设直线 AB 的方程为 $\frac{x}{2a}+\frac{y}{2b}=1$，当直线 AB 与圆相切时，得 $2a+2b-2ab-1=0$.　①

又 $S_{\triangle AOB}=2ab=S$，

所以 $2ab=2a+2b-1\geqslant 4\sqrt{ab}-1=4\sqrt{\frac{S}{2}}-1$，

所以 $S\geqslant 4\sqrt{\frac{S}{2}}-1$，$S-2\sqrt{2S}+1\geqslant 0$，

所以 $\sqrt{S}\geqslant\sqrt{2}+1$，或 $\sqrt{S}\leqslant\sqrt{2}-1$（舍）.

所以 $S\geqslant(\sqrt{2}+1)^2=3+2\sqrt{2}$，当且仅当 $a=b$ 时，等号成立.所以 $\triangle AOB$ 面积的最小值为 $3+2\sqrt{2}$，

将 $a=b$ 代入①，得 $2a^2-4a+1=0$，

所以 $a=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$，或 $a=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$（舍），

故直线 AB 的方程为 $x+y-2-\sqrt{2}=0$.

第 5 期

第 3 版同步周测题参考答案

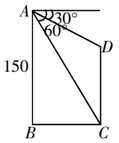
一、选择题

1.D　2.D

3.B

提示：由余弦定理，得 $AB=20\sqrt{31}$（m）.

4.B



（第 4 题图）

提示：由已知，得 $\angle ACB=80°$.

又 $AC=BC$，所以 $\angle CBA=50°$.

所以 $\angle ABD=60°-50°=10°$，

即灯塔 A 在灯塔 B 的北偏西 10°.

5.B　6.A　7.B　8.B

9.A

提示：设水柱高度是 h，水柱底端为 C，则在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=60°$，$AC=h$，$AB=100$，$BC=\sqrt{3}h$，根据余弦定理得，$(\sqrt{3}h)^2=h^2+100^2-2\cdot h\cdot 100\cdot\cos 60°$，即 $h^2+50h-5\ 000=0$，即 $(h-50)(h+100)=0$，解得 $h=50$ 或 -100（负值舍去），故水柱的高度是 50m.

10.C

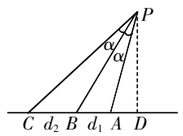
11.A

提示：因为 $\cos B=\frac{7^2+5^2-6^2}{2\times 7\times 5}=\frac{19}{35}$，

所以 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|\cos B=7\times 5\times\frac{19}{35}=19$.

12.C

提示：设山顶为点 P，山高为 PD，第一、二、三辆车分别为 A,B,C，俯角差为 α，作出图形如图，



（第 12 题图）

由题知 $\angle CPB=\angle BPA=\alpha$，由正弦定理，得 $\frac{d_2}{\sin\alpha}=\frac{PB}{\sin\angle PCB}$，$\frac{d_1}{\sin\alpha}=\frac{PB}{\sin\angle PAB}$，

即 $PB\sin\alpha=d_2\sin\angle PCB=d_1\sin\angle PAB$，

又因为 $1>\sin\angle PAB>\sin\angle PCB>0$，

所以 $d_1<d_2$.

二、填空题

13.9

14.$10\sqrt{2}$

提示：由题意得，$AB=80\times\frac{15}{60}=20$，$\angle PAB=30°$，$\angle APB=75°-30°=45°$，在 $\triangle ABP$ 中，由正弦定理得 $\frac{20}{\sin 45°}=\frac{PB}{\sin 30°}$，

所以 $PB=\frac{20\sin 30°}{\sin 45°}=\frac{20\times\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=10\sqrt{2}$.

15.$\sqrt{3}-1$

提示：在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理，得 $BC=\frac{100\sin 15°}{\sin 30°}=200\sin 15°$.

在 $\triangle DBC$ 中，$\angle CDB=90°+\theta$，

由正弦定理，

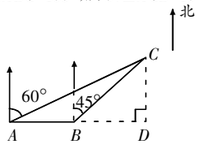
得 $\frac{50}{\sin 45°}=\frac{200\sin 15°}{\sin(90°+\theta)}$，

所以 $\cos\theta=\sin(90°+\theta)$

$=2\sqrt{2}\sin 15°=\sqrt{3}-1$.

16.无

提示：如图所示，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=30$，$\angle BAC=30°$，$\angle ABC=135°$，所以 $\angle ACB=15°$，



（第 16 题图）

由正弦定理，得 $BC=\frac{AB\sin\angle BAC}{\sin\angle ACB}=\frac{30\sin 30°}{\sin 15°}=\frac{15}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}=15(\sqrt{6}+\sqrt{2})$.

在 Rt$\triangle BDC$ 中，$CD=\frac{\sqrt{2}}{2}BC=15(\sqrt{3}+1)>38$.

所以此船无触礁的危险.

三、解答题

17.**解**：(1)由余弦定理，得 $BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cos A=7$，

故 $BD=\sqrt{7}$.

由正弦定理，得

$\sin\angle ABD=\frac{AD\sin A}{BD}=\frac{\sqrt{21}}{7}$.

(2)在 $\triangle BCD$ 中，

$\cos C=\frac{BC^2+CD^2-BD^2}{2BC\cdot CD}=\frac{1}{8}$.

因为 $C\in(0,\pi)$，所以 $\sin C=\frac{3\sqrt{7}}{8}$.

所以 $\triangle BCD$ 的面积 $S=\frac{1}{2}BC\cdot CD\cdot\sin C=\frac{3\sqrt{7}}{4}$.

18.**解**：在 $\triangle ADC$ 中，$\angle DAC=30°$，$\angle ADC=60°-\angle DAC=30°$，所以 $CD=AC=0.1$.

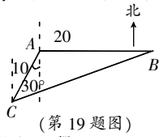
又 $\angle BCD=180°-60°-60°=60°$，

故 CB 是 $\triangle CAD$ 底边 AD 的中垂线，所以 $BD=BA$.

在 $\triangle ABC$ 中，$\frac{AB}{\sin\angle BCA}=\frac{AC}{\sin\angle ABC}$，即 $AB=\frac{AC\sin 60°}{\sin 15°}=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{20}$，

因此，$BD=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{20}\approx 0.33$.故 B,D 间的距离约为 0.33 km.

19.**解**：根据题目条件可得如下示意图.



（第 19 题图）

由余弦定理，得

$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos\angle CAB$

$=20^2+10^2-2\times 20\times 10\cos 120°=700$，

所以 $BC=10\sqrt{7}$.

由正弦定理，得

$\sin\angle ACB=\frac{AB\cdot\sin\angle CAB}{BC}$

$=\frac{20\times\sin 120°}{10\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$.

又 $0°<\angle ACB<90°$，

所以 $\cos\angle ACB=\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

所以 $\sin\theta=\sin(30°+\angle ACB)$

$=\sin 30°\cos\angle ACB+\cos 30°\sin\angle ACB$

$=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{7}}{7}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{21}}{7}$

$=\frac{5\sqrt{7}}{14}$.

20.**解**：设 E 为 BC 的中点，连接 DE，

则 $DE/\!/AB$，且 $DE=\frac{1}{2}AB=\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

设 $BE=x$.

在 $\triangle BDE$ 中，由余弦定理，得 $BD^2=BE^2+ED^2-2BE\cdot ED\cos\angle BED$，

即 $5=x^2+\frac{8}{3}+2\times\frac{2\sqrt{6}}{3}\times\frac{\sqrt{6}}{6}x$，

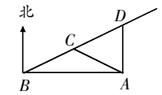
解得 $x=1$，$x=-\frac{7}{3}$（舍去）.故 $BC=2$.

从而 $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos B=\frac{28}{3}$，

即 $AC=\frac{2\sqrt{21}}{3}$.

故 $\sin A=\frac{BC\sin B}{AC}=\frac{\sqrt{70}}{14}$.

21.**解**：如图所示，考点为 A，检查开始处为 B，设公路上 C,D 两点到考点的距离为 1 千米.



（第 21 题图）

在 $\triangle ABC$ 中，$AB=\sqrt{3}$（千米），$AC=1$（千米），$\angle ABC=30°$，

由正弦定理，得 $\sin\angle ACB=\frac{\sin 30°}{AC}\cdot AB=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $\angle ACB=120°$（$\angle ACB=60°$ 不合题意），

所以 $\angle BAC=30°$，所以 $BC=AC=1$（千米），

在 $\triangle ACD$ 中，$AC=AD$，$\angle ACD=60°$，

所以 $\triangle ACD$ 为等边三角形，所以 $CD=1$（千米）.

因为 $\frac{BC}{12}\times 60=5$，所以在 BC 上需 5 分钟，CD 上需 5 分钟.

所以最长需要 5 分钟检查员开始收不到信号，并持续至少 5 分钟才算合格.

22.**解**：(1)$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}AB\cdot AD\sin\angle BAD$，$S_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}AC\cdot AD\sin\angle CAD$.

因为 $S_{\triangle ABD}=2S_{\triangle ADC}$，$\angle BAD=\angle CAD$，

所以 $AB=2AC$. 由正弦定理，得 $\frac{\sin B}{\sin C}=\frac{AC}{AB}=\frac{1}{2}$.

(2)因为 $S_{\triangle ABD}:S_{\triangle ADC}=BD:DC=2$，

所以 $BD=\sqrt{2}$.在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ADC$ 中，由余弦定理，知 $AB^2=AD^2+BD^2-2AD\cdot BD\cdot\cos\angle ADB$，$AC^2=AD^2+DC^2-2AD\cdot DC\cos\angle ADC$.

故 $AB^2+2AC^2=3AD^2+BD^2+2DC^2=6$.

由(1)，知 $AB=2AC$，所以 $AC=1$.

第6期

第2、3版章节测试题参考答案

一、选择题

1.B　2.D　3.B　4.B　5.B　6.A　7.D

8.D

提示:由题意得 $B=60°$,

由余弦定理,得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=a^2+c^2-ac$,

又三边 a,b,c 成等比数列,

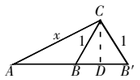
所以 $b^2=ac$,上式即为 $a^2+c^2-2ac=(a-c)^2=0$,

则 $a=c$,所以△ABC 是等边三角形.

9.D

提示:结合下图可知,三角形有两解的条件为 $b>a$,且 $b\sin A<a$,

即 $x>1$,且 $x\sin30°<1$,解得 $1<x<2$.



(第9题图)

10.A

提示:由题意,知 $a=c+4,b=c+2$,故角 A 为△ABC 中的最大角,即 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$,解得 $A=60°$(舍去)或 $A=120°$.由余弦定理,得 $\cos A=\cos120°=\frac{c^2+(c+2)^2-(c+4)^2}{2c(c+2)}=-\frac{1}{2}$,解得 $c=3$,所以 $b=5$,所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{15\sqrt{3}}{4}$.

11.C

提示:△ABC 中,$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\cdot\sin C$,

由余弦定理:$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$,

且 $2S=(a+b)^2-c^2$,得 $ab\sin C=(a+b)^2-(a^2+b^2-2ab\cos C)$,

整理得 $\sin C-2\cos C=2$,所以 $(\sin C-2\cos C)^2=4$.

所以 $\frac{(\sin C-2\cos C)^2}{\sin^2C+\cos^2C}=4$,化简可得 $3\tan^2C+4\tan C=0$.

因为 $C\in(0,180°)$,所以 $\tan C=-\frac{4}{3}$.

12.A

提示:由题意知,$\sin(A+C)+2\sin B\cos C=2\sin A\cos C+\cos A\sin C$.

所以 $2\sin B\cos C=\sin A\cos C$,又 $\cos C\neq0$,所以 $2\sin B=\sin A$,所以 $2b=a$,选A.

二、填空题

13.$15\sqrt{3}$

提示:由于三边长构成公差为4的等差数列,

故可设三边长分别为 $x-4,x,x+4$.

由一个内角为120°,知其必是最长边 $x+4$ 所对的角.

由余弦定理得,$(x+4)^2=x^2+(x-4)^2-2x(x-4)\cdot\cos120°$,

所以 $2x^2-20x=0$,所以 $x=0$(舍去)或 $x=10$,

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times(10-4)\times10\times\sin120°=15\sqrt{3}$.

14.$\frac{1}{2}$

提示:$\cos\angle ABC=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\frac{3^2+2^2-(\sqrt{7})^2}{2\times3\times2}=\frac{1}{2}$,所以 $\angle ABC=60°$,

所以 $\angle ABD=30°$.所以 $\sin\angle ABD=\frac{1}{2}$.

15.$100\sqrt{6}$

提示:在△ABC 中,$\angle CAB=30°$,$\angle ACB=75°-30°=45°$,根据正弦定理,得

$BC=\frac{AB}{\sin\angle ACB}\times\sin\angle BAC$

$=\frac{600}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\times\frac{1}{2}=300\sqrt{2}$.

所以 $CD=BC\times\tan\angle DBC=300\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=100\sqrt{6}$.

16.4

提示:在△ABC 中,$\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin A}=\frac{AB}{\sin C}$,$\frac{AC+BC}{\sin B+\sin A}=\frac{AB}{\sin C}$,

$AC+BC=2(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sin A+\sin B)$

$=4(\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

$=4\cos\frac{A-B}{2}\leqslant4$,所以 $(AC+BC)_{\max}=4$.

三、解答题

17.**解**:(1)由 $a=c$,得 $C=A=75°$,

所以 $B=180°-75°-75°=30°$.

由正弦定理,得

$b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})\sin30°}{\sin75°}=2$.

(2)因为 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$,

所以 $C=15°$;因为 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{1}{2}$,

所以 $B=60°$.所以 $A=180°-60°-15°=105°$.

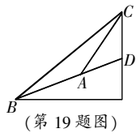
18.**证明**:因为 $2c^2-2a^2=b^2$,

所以 $2c\cos A-2ac\cos C$

$=2c\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}-2a\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$=\frac{2c^2-2a^2}{b}=b$.

19.**解**:如图所示,由题意,得



(第19题图)

$\angle ABC=45°-30°=15°$,

$\angle DAC=60°-30°=30°$.

所以 $\angle BAC=150°$,$\angle ACB=15°$,

所以 $AC=AB=40$m,$\angle ADC=120°$,$\angle ACD=30°$.

在△ACD 中,由正弦定理,得

$CD=\frac{\sin\angle CAD}{\sin\angle ADC}\cdot AC=\frac{\sin30°}{\sin120°}\cdot40$

$=\frac{40\sqrt{3}}{3}$(m).

故转播塔的高度为 $\frac{40\sqrt{3}}{3}$m.

20.**解**:(1)在 Rt△ABC 中,易得 $AC=5$,$\cos C=\frac{3}{5}$,$\sin C=\frac{4}{5}$.

又 $AD=4DC$,所以 $AD=4$,$DC=1$.

在△BCD 中,由余弦定理,得 $BD^2=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cos C$

$=3^2+1^2-2\times3\times1\times\frac{3}{5}=\frac{32}{5}$,

所以 $BD=\frac{4\sqrt{10}}{5}$.

(2)在△BCD 中,由正弦定理,

得 $\sin\angle CBD=\frac{CD\sin C}{BD}=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

21.**解**:(1)由已知,得

$\sin(B+C)=3\sin A\cos B$,

即 $\sin A=3\sin A\cos B$.

又 $\sin A\neq0$,所以 $\cos B=\frac{1}{3}$.

(2)$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cos B=\frac{1}{3}\cdot ac=2$,

故 $ac=6$.　①

由余弦定理,得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$,

所以 $a^2+c^2=12$.　②

由①②,解得 $a=c=\sqrt{6}$.

22.**解**:因为 A,B,C,D 四点共圆,圆内接四边形的对角和为 π.

所以 $\angle B+\angle D=\pi$,

所以由余弦定理可得 $AC^2=5^2+3^2-2\times5\times3\times\cos D=34-30\cos D$,

$AC^2=5^2+8^2-2\times5\times8\times\cos B=89-80\cos B$,

因为 $\angle B+\angle D=\pi$,即 $\cos B=-\cos D$,

所以 $-\frac{34-AC^2}{30}=\frac{89-AC^2}{80}$,

所以可解得 $AC=7$(km).

由余弦定理可得 $\cos B=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\frac{25+64-49}{2\times5\times8}=\frac{1}{2}$,所以 $B=60°$,

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot AB\cdot\sin B=\frac{1}{2}\times8\times5\times\frac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}$(km²).

第7期

第3版同步周测题参考答案

一、选择题

1.D

2.B

提示:因为 $a_1\in(0,1)$,$a_2\in(0,1)$,所以 $-1<a_1-1<0$,$-1<a_2-1<0$,所以 $M-N=a_1a_2-(a_1+a_2-1)=a_1a_2-a_1-a_2+1=a_1(a_2-1)-(a_2-1)=(a_1-1)(a_2-1)>0$,所以 $M>N$.

3.A

提示:因为 $a>b>c$,且 $a+b+c=0$,所以 $a>0$,$c<0$.又 $\begin{cases}b>c,\\a>0,\end{cases}$ 所以 $ab>ac$.

4.C　5.B

6.A

提示:不等式 $x^2+ax+4<0$ 的解集不是空集,即不等式 $x^2+ax+4<0$ 有解,所以 $\Delta=a^2-4\times1\times4>0$,解得 $a>4$ 或 $a<-4$.

7.D

提示:由题意知 $x^2+px+q=(x-1)(x-2)$,则待解不等式等价于 $(x-1)(x-2)\cdot(x^2-5x-6)>0\Rightarrow(x-1)(x-2)(x-6)(x+1)>0\Rightarrow x<-1$ 或 $1<x<2$ 或 $x>6$.

8.C

提示:结合二次函数的图像,知 $\begin{cases}a>0,\\\Delta<0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a>0,\\ac>\frac{1}{4}.\end{cases}$ 故选C.

9.C

提示:画出 $y=\frac{1}{x}$ 的图像,可确定 x 的取值范围.

10.B

提示:由 $a\odot b=ab+2a+b$,得 $x\odot(x-2)=x(x-2)+2x+x-2=x^2+x-2<0$,解得 $-2<x<1$.

11.B

提示:令 $f(x)=x^2+(m^2-1)x+m-2$,则由题意,知 $\begin{cases}f(-1)<0,\\f(1)<0,\end{cases}$

所以 $\begin{cases}m^2-m>0,\\m^2+m-2<0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}m>1,\text{或 }m<0,\\-2<m<1,\end{cases}$

解得 $-2<m<0$.

12.C

提示:由 $f(1-x)=f(1+x)$,知 $f(x)$ 的对称轴为 $x=\frac{a}{2}=1$,故 $a=2$.

又 $f(x)$ 开口向下,所以当 $x\in[-1,1]$ 时,$f(x)$ 为增函数,$f(x)_{\min}=f(-1)=-1-2+b^2-b+1=b^2-b-2$,$f(x)>0$ 对 $x\in[-1,1]$ 恒成立,即 $[f(x)]_{\min}=b^2-b-2>0$ 恒成立,解得 $b<-1$,或 $b>2$.

二、填空题

13.27

提示:由已知,得 $\left(\frac{x^2}{y}\right)^2\in[16,81]$,

$\frac{1}{xy^2}\in\left[\frac{1}{8},\frac{1}{3}\right]$.

故 $\frac{x^3}{y^4}=\left(\frac{x^2}{y}\right)^2\cdot\frac{1}{xy^2}\in[2,27]$.

所以 $\frac{x^3}{y^4}$ 的最大值是27.

14.③

提示:①不等式可化为 $(x+2)^2>0$,所以解集为 $\{x|x\neq-2\}$;②不等式解集为 $\{x|x\neq0\}$;③由 $\Delta=1-4<0$,所以不等式解集为 $\mathbf{R}$;④由定义域要求 $x\neq0$,所以解集为 $\{x|x\neq0\}$.

15.$\{x|15\leqslant x\leqslant45,x\in\mathbf{N}_+\}$

提示:由题意得,$(150-2x)x-(50+30x)\geqslant1300$,化简得,$x^2-60x+675\leqslant0$,解得 $15\leqslant x\leqslant45$,且 x 为整数.

16.$\left[-\frac{8}{9},1\right]$

提示:由题意得,不等式 $x^2-6kx+k+8\geqslant0$ 的解集为 $\mathbf{R}$,所以函数 $y=x^2-6kx+k+8$ 的图像在 x 轴上方,与 x 轴至多有一个公共点.

所以 $\Delta=(-6k)^2-4\times1\times(k+8)\leqslant0$,

整理得 $9k^2-k-8\leqslant0$,解得 $-\frac{8}{9}\leqslant k\leqslant1$.

三、解答题

17.**证明**:$\frac{b}{3a}-\frac{b+m}{3a+m}$

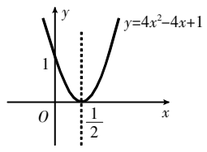
$=\frac{b(3a+m)-3a(b+m)}{3a(3a+m)}$

$=\frac{m(b-3a)}{3a(3a+m)}$.

因为 $a>0>b$,$m>0$,所以 $b-3a<0$,$3a+m>0$,则 $\frac{m(b-3a)}{3a(3a+m)}<0$.

所以 $\frac{b}{3a}<\frac{b+m}{3a+m}$.

18.**解**:(1)原不等式可化为 $4x^2-4x+1\geqslant0$.因为 $\Delta=0$,方程 $4x^2-4x+1=0$ 有两个相等的实数根 $x_1=x_2=\frac{1}{2}$.画出相应二次函数 $y=4x^2-4x+1$ 的图像,如图,可知原不等式的解集是 $\mathbf{R}$.



(第18题图)

(2)原不等式移项,得 $\frac{2x-1}{x+3}-1>0$,

化简,得 $\frac{x-4}{x+3}>0$,即 $(x-4)(x+3)>0$,

解得 $x<-3$,或 $x>4$.

所以原不等式的解集为 $\{x|x<-3$,或 $x>4\}$.

19.**解**:(1)当 $m=1$ 时,不等式 $f(x)>0$ 为 $2x^2-x>0$,

因此所求解集为 $(-\infty,0)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

(2)不等式 $f(x)+1>0$,即 $(m+1)x^2-mx+m>0$,

由题意知 $\frac{3}{2}$,3 是方程 $(m+1)x^2-mx+m=0$ 的两根,因此 $\frac{3}{2}+3=\frac{m}{m+1}$,$\frac{3}{2}\times3=\frac{m}{m+1}\Rightarrow m=-\frac{9}{7}$.

20.**解**:由题意,设 $a=\lg x$,$b=\lg y$,

所以 $\lg(xy)=a+b$,$\lg\frac{x}{y}=a-b$,

$\lg(x^4y^2)=4a+2b$.

设 $4a+2b=m(a+b)+n(a-b)$,

所以 $\begin{cases}m+n=4,\\m-n=2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=3,\\n=1.\end{cases}$

又因为 $3\leqslant3(a+b)\leqslant6$,$3\leqslant a-b\leqslant4$,

所以 $6\leqslant4a+2b\leqslant10$,

所以 $\lg(x^4y^2)$ 的取值范围为 $[6,10]$.

21.**解**:设花坛的宽度为 xm,则草坪的长为 $(800-2x)$m,宽为 $(600-2x)$m.

根据题意得 $(800-2x)\cdot(600-2x)\geqslant\frac{1}{2}\times800\times600$,

整理得 $x^2-700x+60\ 000\geqslant0$,

解不等式得 $x\geqslant600$(舍去)或 $x\leqslant100$,

由题意知 $x>0$,所以 $0<x\leqslant100$.

当 x 在 $(0,100]$ 内取值时,绿草坪的面积不小于总面积的二分之一.

22.**解**:由函数 $f(x)=x^2+ax+b(a,b\in\mathbf{R})$ 的值域为 $[0,+\infty)$,可知对于 $x^2+ax+b=0$,有 $\Delta=a^2-4b=0$,即 $b=\frac{a^2}{4}$,所以 $f(x)=x^2+ax+b=x^2+ax+\frac{a^2}{4}=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2$,由 $f(x)=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2<c$,解得 $-\sqrt{c}-\frac{a}{2}<x<\sqrt{c}-\frac{a}{2}$.

又不等式 $f(x)<c$ 的解集为 $(m,m+6)$,所以 $\left(\sqrt{c}-\frac{a}{2}\right)-\left(-\sqrt{c}-\frac{a}{2}\right)=2\sqrt{c}=6$,解得 $c=9$.