

一、选择题

- 1.D
2.C
3.D

提示:由 $AD_1 \perp A_1D$, $AD_1 \perp A_1B_1$, $A_1D \cap A_1B_1 = A_1$, 可得 $AD_1 \perp$ 平面 A_1DB_1 . 故选 D.

- 4.D
5.D

提示:取 BC 的中点 E , 连接 A_1E , AE , 可得 $A_1E \perp BC$, $AE \perp BC$, 则 $\angle A_1EA$ 为二面角 A_1-BC-A 的平面角. 设 $AA_1 =$

a , 则 $AE = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, 所以 $\tan \angle A_1EA =$

$$\frac{AA_1}{AE} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

- 6.D

提示:平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $PAB \perp$ 平面 PBC , 平面 $PCD \perp$ 平面 PAD , 平面 $PAD \perp$ 平面 PAB , 共 5 对.

- 7.C
8.C

提示:连接 AO . 因为 $PA \perp PB$, $PA \perp PC$, 所以 $PA \perp$ 平面 PBC , 故 $PA \perp BC$. 因为 $PO \perp$ 平面 ABC , 所以 $PO \perp BC$. 又 $PA \cap PO = P$, 所以 $BC \perp$ 平面 PAO , 故 $AO \perp BC$. 同理, $BO \perp AC$. 故 O 是 $\triangle ABC$ 的垂心.

- 9.C

提示:易证 $BC \perp$ 平面 PAC , 所以 $AF \perp BC$ 又 $AF \perp PC$, 所以 $AF \perp$ 平面 PBC , 所以 $AF \perp PB$. 又 $AE \perp PB$, 所以 $PB \perp$ 平面 AEF , 所以 $PB \perp EF$. 故 $\angle AEF$ 是二面角 $C-PB-A$ 的平面角.

- 10.D

提示:连接 BC 因为 $BD \perp AB$, 且 $\beta \perp \alpha$, 交线为 AB , 所以 $BD \perp \alpha$, 则 $BD \perp BC$. 在 $\text{Rt} \triangle BAC$ 中, $BC=5$. 在 $\text{Rt} \triangle CBD$ 中, $CD = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$.

- 11.A

提示:分别连接线段 a 的中点与线段 b 的两端点, 由该四面体各棱长都相等, 可得 a 与这两条连线垂直, 从而证得 a 与两条连线确定的平面垂直, 故 $a \perp c$. 同理, $b \perp c$.

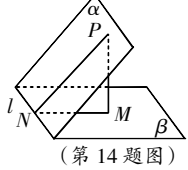
- 12.A

提示: $B_1C \perp$ 平面 BD_1C_1 , 所以点 P 的轨迹为线段 B_1C .

二、填空题

- 13.无数
14. 30°

提示:如图所示, 过点 P 作 $PM \perp \beta$, 垂足为 M , 作 $PN \perp l$, 垂足为 N , 连接 MN , 则 $l \perp$ 平面 PNM , 所以 $l \perp MN$, 所以 $\angle PNM$ 就是二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角. 在 $\text{Rt} \triangle PMN$ 中, $PN=2PM$, 所以 $\angle PNM = 30^\circ$, 即二面角 $\alpha-l-\beta$ 的大小为 30° .



(第 14 题图)

- 15.垂直

16. ②③④ \Rightarrow ① (或 ①③④ \Rightarrow ②)

三、解答题

17. 证明: 连接 EF .

因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 所以 F 是 AC 的中点. 又因为 E 是 SA 的中点, 所以 $EF \parallel SC$. 因为 $SC \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 $EF \perp$ 平面 $ABCD$. 又因为 $EF \subset$ 平面 BDE , 所以平面 $BDE \perp$ 平面 $ABCD$.

18. 证明: 连接 OA .

由题设知 $AB=AC=SA$, 则 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形, 所以 $OA=OB=OC=$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}SA, \text{ 且 } AO \perp BC.$$

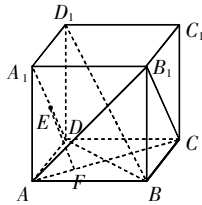
又在 $\triangle SBC$ 中, $SB=SC$, $OB=OC$,

所以 $SO \perp BC$, 且 $SO = \frac{\sqrt{2}}{2}SA$,

从而 $OA^2 + SO^2 = SA^2$, 所以 $SO \perp AO$.

又 $SO \perp BC$, 且 $AO \cap BC = O$, 所以 $SO \perp$ 平面 ABC .

19. 证明: 如图所示, 连接 AB_1, B_1C, BD .



(第 19 题图)

因为 $DD_1 \perp$ 平面 $ABCD$, $AC \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $DD_1 \perp AC$. 又 $AC \perp BD$, $BD \cap DD_1 = D$, 所以 $AC \perp$ 平面 BDD_1 , 所以 $AC \perp BD_1$. 同理可证 $B_1C \perp BD_1$. 又 $AC \cap B_1C = C$, 所以 $BD_1 \perp$ 平面 AB_1C .

因为 $EF \perp A_1D$, $A_1D \parallel B_1C$,

所以 $EF \perp B_1C$.

又 $EF \perp AC$, $B_1C \cap AC = C$,

所以 $EF \perp$ 平面 AB_1C .

所以 $EF \parallel BD_1$.

20. 证明: (1) 连接 AC . 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $A_1A \perp$ 底面 $ABCD$,

所以 $BD \perp A_1A$. 又 $BD \perp AC$, $A_1A \cap AC = A_1$, 所以 $BD \perp$ 平面 $ACEA_1$. 因为 $A_1E \subset$ 平面 $ACEA_1$, 所以 $A_1E \perp BD$.

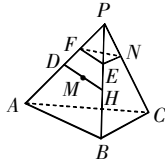
(2) 设 AC 与 BD 的交点为 O , 则 O 是 BD 的中点, 连接 A_1O, OE . 计算可得 $A_1D = A_1B$, $ED = EB$, 所以 $BD \perp A_1O$, $BD \perp OE$, 所以 $\angle A_1OE$ 为二面角 A_1-BD-E 的平面角.

设正方体的棱长为 $2a$, 由平面几何知识, 得 $EO = \sqrt{3}a$, $A_1O = \sqrt{6}a$, $A_1E = 3a$, 所以 $A_1E^2 = A_1O^2 + EO^2$, 所以 $\angle A_1OE = 90^\circ$ 所以平面 $A_1BD \perp$ 平面 EBD .

21. 解: 在 PC 上任取一点 N , 过点 N 在平面 PBC 内作 PC 的垂线交 PB 于 E , 过点 N 在平面 PAC 内作 PC 的垂线交 PA 于 F , 连接 EF , 过点 M 在平面 PAB 内作 EF 的平行线分别交 PA, PB 于 D, H , 则 DH 即为所求. 证明如下:

由作法知 PC 垂直于平面 NEF 内的两条相交直线, 故 $PC \perp$ 平面 NEF , 所以 $PC \perp EF$.

又 $DH \parallel EF$, 所以 $DH \perp PC$.



(第 21 题图)

22. (1) 证明: 在矩形 $ABCD$ 中, $CB \perp AB$, 而 $CB \subset$ 平面 $ABCD$, 平面 $ABCD \perp$ 平面 $ABEF$, 交线为 AB , 所以 $CB \perp$ 平面 $ABEF$. 因为 $AF \subset$ 平面 $ABEF$, 所以 $AF \perp CB$.

因为 AB 为 $\odot O$ 的直径, 所以 $AF \perp BF$. 又 $CB \cap BF = B$, 所以 $AF \perp$ 平面 CBF .

因为 $AF \subset$ 平面 DAF , 所以平面 $DAF \perp$ 平面 CBF .

(2) 解: 过点 A 作 $AM \perp EF$, 交 EF 的延长线于点 M , 连接 DM . 由 (1) 得 $CB \perp$ 平面 $ABEF$, 而 $DA \parallel CB$, 所以 $DA \perp$ 平面 $ABEF$. 所以 $DA \perp EF$.

又 $AM \cap DA = A$, 所以 $EF \perp$ 平面 DAM . 所以 $DM \perp EF$.

所以 $\angle DMA$ 为二面角 $D-FE-B$ 的平面角, 即 $\angle DMA = 60^\circ$.

过点 F 作 $FH \perp AB$ 于 H , 由平面几何知识, 得 $AH = \frac{1}{2}(AB - EF) = \frac{1}{2}$, 则

$$FH = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 故 } MA = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{所以 } AD = MA \cdot \tan \angle DMA = \frac{\sqrt{3}}{2} \times$$

$$\sqrt{3} = \frac{3}{2}.$$

第 1 期

第 3 版同步周测题参考答案

一、选择题

- 1.C
2.B
3.C
4.B

提示:在题中所给图形中, 包含范围最小的是正方体, 其次是正四棱柱, 然后依次是长方体、直四棱柱、棱柱, 故选 B.

- 5.D

提示:俯视图是从几何体的上面向下面正投影, 故选 D.

- 6.C

提示:根据斜二测画法的规则, 原来的直角变为 45° 角, 排除 B; 与 y' 轴平行的线段长度减半, 排除 A; 与 x' 轴平行的线段长度不变, 排除 D. 故选 C.

- 7.B

- 8.D

- 9.B

- 10.D

- 11.A

提示:将侧面展开, 最短距离为长、宽分别为 $2\pi, 4$ 的矩形的对角线长.

- 12.C

提示:由主视图知小正方体共 3 列, 且左侧高一层, 中间最高两层, 右侧最高两层. 结合左视图可知搭成这个几何体至少需要小正方体的个数为 $3+2+1=6$.

二、填空题

13. 三棱锥

14. 16cm

提示:由斜二测画法的规则可知正方形 $O'A'B'C'$ 对应的原图形是 $\square OABC$, 且 $OA=2, OB \perp OA, OB=4\sqrt{2}$. 所以 $AB=OC = \sqrt{2^2 + (4\sqrt{2})^2} = 6$. 所以周长等于 $2 \times 6 + 2 \times 2 = 16(\text{cm})$.

15. 正方体、长方体、球

16. ①③④⑤

提示:因为有六个面, 所以①正确; 因为侧棱的延长线不能交于一点, 所以②不正确; 把几何体放倒就会发现③正确; 由切割法可知④正确; 由补

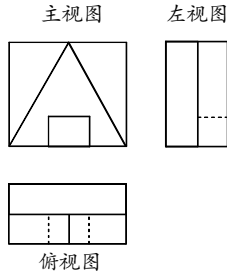
形法可知⑤正确.

三、解答题

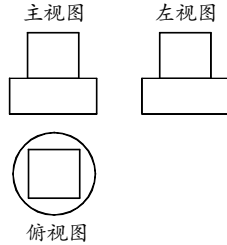
17. 解: (1) 由一个圆柱和两个圆台构成.

(2) 由挖去与上底面同底的圆锥的圆台、一个圆柱和一个圆锥构成.

18. 解: 三视图如图所示.



(1)



(2)

(第 18 题图)

19. 解: 建立平面直角坐标系 xOy , 在 x 轴上截取 $OD=O'D'=1, OC=O'C'=2$, 在过点 D 且与 y 轴平行的直线上截取 $DA=2D'A'=2$, 在过点 A 且与 x 轴平行的直线上截取 $AB=A'B'=2$, 连接 BC , 即得到了原图形 (图略). 易知原四边形 $ABCD$ 是直角梯形, 上底 $AB=2$, 下底 $CD=3$, 高 $AD=2$, 所以其面积 $S = \frac{(2+3) \times 2}{2} = 5$.

20. 解: 由三视图可知该几何体的下方是一个四棱柱, 上方是一个四棱锥, 并且底面重合.

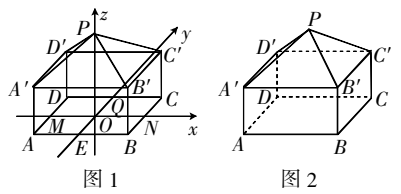
(1) 画轴. 如图 1 所示, 画出 x 轴、 y 轴、 z 轴, 三轴交于点 O , 使 $\angle xOy = 45^\circ$, $\angle xOz = 90^\circ$.

(2) 画棱柱的底面. 以 O 为中点, 在 x 轴上画 $MN=2$, 在 y 轴上画 $EQ=1$, 分别过点 M, N 作 y 轴的平行线, 过点 E, Q 作 x 轴的平行线, 设它们的交点分别为 A, B, C, D , 则四边形 $ABCD$ 就是该棱柱的下底面.

(3) 画棱柱的侧棱. 分别以 A, B, C, D 四个顶点为起点作平行于 z 轴, 长度为 1 的线段, 得四条侧棱 AA', BB', CC', DD' , 顺次连接 A', B', C', D' .

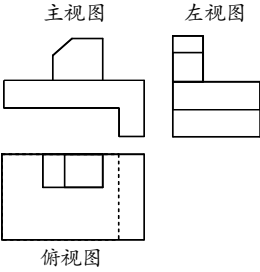
(4) 画四棱锥的顶点. 在 z 轴上截取线段 OP , 使 $OP=2$.

(5) 成图. 连接 PA', PB', PC', PD' , 擦去辅助线, 将被遮挡部分改为虚线, 可得图 2 所示的直观图.



(第 20 题图)

21. 解: 由于主视图正确, 观察可知左视图少画两条轮廓线, 俯视图少画三条看得见的轮廓线, 一条分界线和一条看不见的轮廓线, 补上后如图所示.



(第 21 题图)

22. 解: (1) 如图所示, 设内接圆柱的底面圆半径为 r .

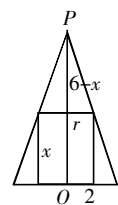
$$\text{由已知, 得 } \frac{6-x}{6} = \frac{r}{2},$$

$$\text{所以 } r = \frac{6-x}{3}.$$

$$\text{故 } S = \frac{2(6-x)}{3} \cdot x = -\frac{2}{3}x^2 + 4x,$$

$$\text{即 } S = -\frac{2}{3}x^2 + 4x, \text{ 其中 } 0 < x < 6.$$

$$(2) \text{ 当 } x = -\frac{4}{2 \times (-\frac{2}{3})} = 3 \text{ 时, } S \text{ 最大.}$$



(第 22 题图)

1.B
2.B
提示:由公理1可知选B.
3.C
提示:共线的点不能确定一个平面,故A、B错误;根据公理2,可知三角形的三个顶点可以确定一个平面,故C正确;空间四边形不能确定一个平面,故D错误.故选C.

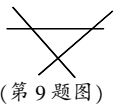
4.A
提示:设直线EF与GH的交点为P,则 $P \in EF \subset \text{平面} ADB$,且 $P \in GH \subset \text{平面} CDB$.因为平面ADB∩平面CDB=DB,所以 $P \in DB$,即交点在直线DB上.
5.B
提示:在空间四边形ABCD中,分别取AB、BC、CD、AD的中点E、F、G、H,则 $EF \parallel \frac{1}{2}AC \parallel HG$,所以四边形EFGH是平行四边形.又 $AC \perp BD, EH \parallel BD$,所以 $EF \perp EH$.所以四边形EFGH是矩形.

6.A
提示:如果一条直线上有一个点在平面外,那么该直线与平面平行或相交,从而可知A正确.

7.D
提示:由 $m \not\subset \alpha, A \in m, A \in \alpha$,可知m与α相交.又 $n \not\subset \alpha$,所以m与n一定不平行.故选D.

8.C
9.C

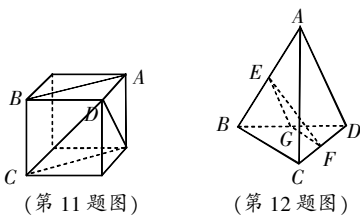
提示:两两平行且不共面的三条直线中,每两条直线可以确定一个平面,则三条直线可以确定三个平面,即m=3.这三个平面把空间分成七个部分(把平面看作直线,空间的分割情况如图所示),即n=7.



(第9题图)

10.B
提示:根据空间中两条直线的位置关系可知①正确;根据异面直线的定义可知⑤正确.②③④中的a、b均可平行,故选B.

11.B
提示:将展开图还原为正方体,如图所示.易知AB与CD所成的角为60°,故AB与CD异面但不垂直.



(第11题图)

(第12题图)

12.B
提示:如图,取BD的中点G,连接EG、FG,则∠EFG(或其补角)为异面直线EF与BC所成的角.
因为 $EG = \frac{1}{2}AD, GF = \frac{1}{2}BC, AD = BC$,所以EG=GF.

因为 $AD \perp BC, EG \parallel AD, GF \parallel BC$,所以 $EG \perp GF$.
所以△EGF为等腰直角三角形.
所以∠EFG=45°.

二、填空题
13.(1)C (2)D (3)A (4)B
14.75°或105°
15.4

提示:当四点共面时能确定1个平面;若这四点不共面,则任意三点可确定1个平面,故可确定4个平面.

16.(1)30°;(2)60°
提示:(1)因为 $A_1F_1 \parallel B_1E_1, B_1E_1 \parallel BE$,所以 $A_1F_1 \parallel BE$.

所以∠EBD(或其补角)是异面直线 A_1F_1 与BD所成的角.由正六边形的性质可知∠EBD=30°.
(2)因为 $B_1E_1 \parallel BE$,所以直线 C_1F_1 与 B_1E_1 相交所成的锐角(或直角)是异面直线 C_1F_1 与BE所成的角.由正六边形的性质可知该角为60°.

三、解答题
17.解:(1)错误.因为点 $A \notin \text{平面} CC_1B_1B$,所以直线 $AC_1 \not\subset \text{平面} CC_1B_1B$.
(2)正确.因为 $O \in \text{直线} AC \subset \text{平面} AA_1C_1C, O \in \text{直线} BD \subset \text{平面} BB_1D_1D$,且 $O_1 \in \text{直线} A_1C_1 \subset \text{平面} AA_1C_1C, O_1 \in \text{直线} B_1D_1 \subset \text{平面} BB_1D_1D$,所以平面 AA_1C_1C 与平面 BB_1D_1D 的交线为 OO_1 .

(3)(4)都正确.因为 $AD \parallel B_1C_1$,所以 A, B_1, C_1, D 共面.

18.证明:由公理2,可知点A、B、D确定一个平面,设其为α,则 $E \in AB \subset \alpha, F \in AD \subset \alpha$.所以 $EF \subset \alpha$,即 $m \subset \alpha$.又 $G \in m$,所以 $G \in \alpha$.所以 $BG \subset \alpha$.因为 $C \in BG$,所以 $C \in \alpha$.所以四边形ABCD是平面四边形.

19.证明:因为E、H是△ABD的中位线,

所以 $EH \parallel BD$,且 $EH = \frac{1}{2}BD$.

因为 $\frac{CF}{CB} = \frac{CG}{CD} = \frac{2}{3}$,

所以 $FG \parallel BD$,且 $FG = \frac{2}{3}BD$.

所以 $EH \parallel FG$,且 $EH \neq FG$,故四边形EFGH为梯形,且直线EF与GH必相交.

设交点为P,因为 $EF \subset \text{平面} ABC, GH \subset \text{平面} ACD$,所以 $P \in \text{平面} ABC$,且 $P \in \text{平面} ACD$.

又平面 $ABC \cap \text{平面} ACD = AC$,所以 $P \in AC$.

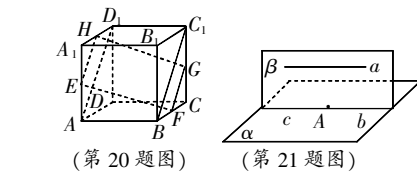
所以直线EF、GH、AC交于一点.
20.证明:连接 BC_1, AD_1 ,如图.因为E、F、G、H分别是 AA_1, BC, CC_1, D_1A_1 的中点,

所以 $EH \parallel \frac{1}{2}AD_1, FG \parallel \frac{1}{2}BC_1$.

因为 $AB \parallel D_1C_1$,所以四边形 ABC_1D_1 是平行四边形.

所以 $AD_1 \parallel BC_1$.所以 $EH \parallel FG$.

所以四边形EFGH是平行四边形.



(第20题图)

(第21题图)

21.解:已知 $a \parallel \alpha, A \in \alpha, A \in b, b \parallel a$.求证: $b \subset \alpha$.

证明:如图,因为 $a \parallel \alpha, A \in \alpha$,所以 $A \notin a$.

所以由A和a可确定一个平面β,则 $A \in \beta$.

所以α与β相交于过点A的直线.设 $\alpha \cap \beta = c$,则 $A \in c$.

由 $a \parallel \alpha$,知a与α无公共点,而 $c \subset \alpha$,所以a与c无公共点.

因为 $a \not\subset \beta, c \subset \beta$,所以 $a \parallel c$.

又 $a \parallel b$,则b与c平行或重合.

因为 $A \in b, A \in c$,所以b与c重合.

所以 $b \subset \alpha$.

22.解:(1)F是 A_1D_1 的中点.理由如下:

分别取 A_1D_1, AD 的中点F、G,连接BG、FG、 FB_1, DF (如图1).

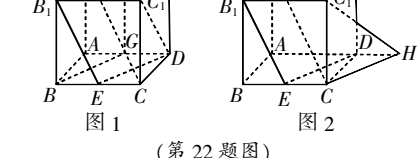


图1

图2

(第22题图)

在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,易证四边形BEDG和四边形 BB_1FG 都是平行四边形,

所以 $DE \parallel BG, BG \parallel B_1F$,所以 $DE \parallel B_1F$,所以 B_1, E, D, F 四点共面.

所以 $A_1D_1 \cap \text{平面} B_1ED = F$.

(2)如图2,过点C作 $CH \parallel DE$,交AD的延长线于点H,连接 A_1H .

则∠ A_1CH (或其补角)是异面直线 A_1C 与DE所成的角.

因为 $A_1C = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = 2\sqrt{3}$,
 $CH = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}, A_1H = \sqrt{2^2 + (2+1)^2} = \sqrt{13}$,所以 $A_1C^2 + CH^2 \neq A_1H^2$,所以∠ A_1CH 不是直角.

第3期
第3版同步周测题参考答案
一、选择题

1.C
提示:若直线a//直线b,且 $b \not\subset \text{平面} \alpha$,则 $a \parallel \alpha$ 或 $a \subset \alpha$,故选C.

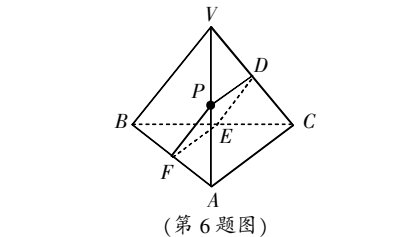
2.D
提示:过平面外一点作该平面的平行平面,有且只有1个,在这个平行平面上过这个点的直线有无数条,这些直线都与原平面平行,故选D.

3.C
提示:由面面平行的性质可知截面四边形是矩形.

4.B
提示:由已知条件,可知 $DE \parallel BC$,则 $DE \parallel \text{平面} ABC$.又 $DE \subset \text{平面} DEFG$,平面 $DEFG \cap \text{平面} ABC = GF$,所以 $DE \parallel GF$.所以 $GF \parallel BC$.所以 $GF \neq BC$,即 $GF \neq DE$,所以直线DG与EF必相交.

5.D
提示:由平面 ADD_1A_1 与平面 D_1EF 有公共点 D_1 ,依据公理3知,必有过该点的公共直线l.在平面 ADD_1A_1 内与l平行的线有无数条,且它们都不在平面 D_1EF 内,由线面平行的判定定理知它们都与平面 D_1EF 平行.

6.C
提示:如图,过点P作AC的平行线PD交VC于点D,作VB的平行线交AB于点F,过点D作VB的平行线交BC于E.连接EF,由 $PF \parallel DE$,故P、D、E、F共面,且平面PDEF与VB和AC都平行,易知四边形PDEF是平行四边形,故选C.



(第6题图)

7.A
提示:平面EFH即平面EFDC.易证 $B_1G \parallel EC$,所以 $B_1G \parallel \text{平面} EFDC$.故选A.

8.C
提示:由平面平行的性质定理,易证 $\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$.所以 $AC = \frac{DF}{DE} \times AB = \frac{5}{2} \times 6 = 15$.

9.A
提示:依据面面平行的判定定理.

10.D
提示:作平面 $\gamma \parallel \alpha, \gamma \parallel \beta$,且平面γ到平面α的距离等于平面γ到平面β的距离,则不论A、B分别在平面α、β内如何移动,所有的动点C都在平面γ内,故选D.

11.C
12.C
提示:②中a与b可能平行、相交或是异面直线;③中α与β可能平行、相交;⑤⑥中a可能与α平行,也可能在α内.

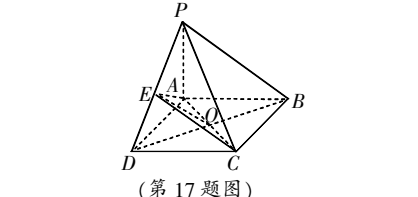
二、填空题
13. $b \parallel \alpha$ 或 $b \subset \alpha$
14.平行四边形
15.平行

提示:因为过 A_1, C_1, B 的平面与底面 $A_1B_1C_1D_1$ 的交线为 A_1C_1 ,又正方体的两底面互相平行,则由两个平面平行的性质定理知 $l \parallel A_1C_1$.

16.①③④
提示:②中无穷多条直线可能都互相平行,此时,平面α不一定与平面β平行.

三、解答题

17.证明:连接BD与AC相交于O,连接EO,如图.



(第17题图)

在□ABCD中,O是BD的中点,又E是PD的中点,所以 $EO \parallel PB$.

因为 $PB \subset \text{平面} AEC, EO \subset \text{平面} AEC$,所以 $PB \parallel \text{平面} AEC$.

18.证明:由已知得平面ABE//平面DCC₁F,又平面 $AEC_1F \cap \text{平面} ABE = AE$,平面 $AEC_1F \cap \text{平面} DCC_1F = C_1F$,所以 $AE \parallel C_1F$.同理可得 $AF \parallel C_1E$,所以四边形 AEC_1F 是平行四边形.

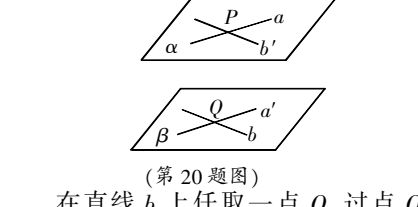
19.解:因为 $A \notin \alpha$,所以A、a确定一个平面,设为β.因为 $B \in \alpha$,所以 $B \in \beta$.又 $A \in \beta$,所以 $AB \subset \beta$.同理 $AC \subset \beta, AD \subset \beta$.

因为点A与直线a在α的异侧,所以β与α相交,即平面ABD与α相交,交线为EG.因为 $BD \parallel \alpha, BD \subset \text{平面} ABD$,平面 $ABD \cap \alpha = EG$,所以 $BD \parallel EG$.

所以 $\frac{EG}{BD} = \frac{AG}{AD} = \frac{AF}{AC}$,

所以 $EG = \frac{AF}{AC} \cdot BD = \frac{5}{9} \times 4 = \frac{20}{9}$.

20.证明:如图所示,在直线a上任取一点P,过点P作直线 $b' \parallel b$,则a与b'可确定一个平面,记为α.因为 $b' \not\subset \alpha, b \not\subset \alpha$,所以 $b \parallel \alpha$.



(第20题图)

在直线b上任取一点Q,过点Q

作直线 $a' \parallel a$,则a'与b可确定一个平面,记为β.

因为 $a \not\subset \alpha, a' \not\subset \alpha$,所以 $a' \parallel \alpha$.又 $a' \cap b = Q$,所以 $\alpha \parallel \beta$.

21.(1)证明:因为四边形EFGH为平行四边形,所以 $EF \parallel HG$.

又因为 $HG \subset \text{平面} ABD$,所以 $EF \parallel \text{平面} ABD$.

又因为 $EF \subset \text{平面} ABC$,平面 $ABD \cap \text{平面} ABC = AB$,所以 $EF \parallel AB$.

又 $EF \subset \text{平面} EFGH, AB \not\subset \text{平面} EFGH$,所以 $AB \parallel \text{平面} EFGH$.

(2)解:设 $EF = x(0 < x < 4)$.由 $EF \parallel AB$,得 $\frac{EF}{AB} = \frac{CE}{CA}$,

即 $\frac{CE}{CA} = \frac{x}{4}$.

由 $EH \parallel FG \parallel CD$,得 $\frac{EH}{CD} = \frac{AE}{AC}$,

即 $\frac{EH}{6} = \frac{AE}{AC}$.

因为 $\frac{CE}{CA} + \frac{AE}{AC} = 1$,

所以 $\frac{x}{4} + \frac{EH}{6} = 1$,

则 $EH = 6 - \frac{3}{2}x$.

所以四边形EFGH的周长

$l = 2(x + 6 - \frac{3}{2}x) = 12 - x$.

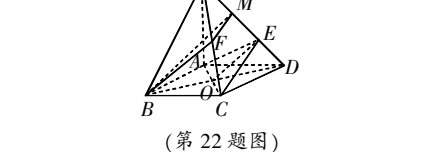
又 $0 < x < 4$,则有 $8 < l < 12$.所以四边形EFGH周长的取值范围是(8,12).

22.解:当F是棱SC的中点时,存在过BF的平面BFM平行于平面AEC.

证明如下:

如图,取SE的中点M,连接FM、BF,则 $FM \parallel CE$,

所以 $FM \parallel \text{平面} ACE$.连接BM、BD.



(第22题图)

设 $BD \cap AC = O$,则O为BD的中点,连接OE.

由 $EM = \frac{1}{2}SE = ED$ 知,E是MD的中点,

所以 $BM \parallel OE$,又 $BM \not\subset \text{平面} ACE$,所以 $BM \parallel \text{平面} ACE$.

又 $FM \cap BM = M$,所以平面BFM//平面AEC.

所以在棱SC上存在一点F(F是棱SC的中点),且存在过BF的平面BFM(M是SE的中点)平行于平面AEC.