第 12 期

第 2~3 版综合检测题(二)参考答案

一、选择题

1~6.DCABDC 7.D 8.B

9.A

提示:由已知条件,可得 $AC\perp$ 平面 ABD,所以平面 $ABC\perp$ 平面 ABD.又平面 $ABC\cap$ 平面 $ABD=AB$,所以点 D 在平面 ABC 内的投影 H 必在 AB 上.

10.A

11.C

提示:由已知条件,得 $A(0,0)$,$B(1,3)$,且动直线 $x+my=0$ 与动直线 $mx-y-m+3=0$ 互相垂直.所以点 P 在以 AB 为直径的圆上,所以点 P 到直线 AB 距离的最大值等于该圆的半径. 又 $|AB|=\sqrt{10}$,所以 $\triangle PAB$ 面积的最大值为 $\frac{1}{2}\times\sqrt{10}\times\frac{\sqrt{10}}{2}=\frac{5}{2}$.

12.D

提示:取 SB 的中点 M,连接 GM,则 $GM/\!/SC$,又 $EF/\!/SC$,所以 $GM/\!/EF$,从而可证 $GM/\!/$ 平面 AEF.过点 G 作 $GN/\!/AF$,交 AB 于点 N,连接 MN,则 $GN/\!/$ 平面 AEF.又 $GM\cap GN=G$,所以平面 $GMN/\!/$ 平面 AEF.所以动点 P 的轨迹就是线段 MN,MG,NG. 取底面正方形 $ABCD$ 的中心 O 为坐标原点,与 BC,AB 平行的直线分别为 x 轴、y 轴,SO 所在直线为 z 轴,建立空间直角坐标系,则 $S(0,0,4)$,$B(2,2,0)$,$C(-2,2,0)$,故 $M(1,1,2)$,$G(0,2,0)$.又结合平面几何知识,可得 $N(2,1,0)$,所以 $|MN|=\sqrt{5}$,$|MG|=\sqrt{6}$,$|NG|=\sqrt{5}$.所以点 P 的轨迹的周长为 $2\sqrt{5}+\sqrt{6}$.

二、填空题

13.$2\sqrt{2}\pi$ 14.$(2,2)$

15.$\left\{-1,-\frac{1}{6},\frac{2}{3},4\right\}$

提示:若三条直线中至少有两条平行或三条直线交于一点,则不能构成三角形.①当已知的三条直线有两条平行时,有 $-m=-4$,或 $\frac{2}{3m}=-4$,或 $\frac{2}{3m}=-m$,解得 $m=4$,或 $m=-\frac{1}{6}$.②当已知的三条直线交于一点时,联立 $\begin{cases}4x+y=4,\\ mx+y=0,\end{cases}$ 得交点为 $\left(\frac{4}{4-m},\frac{-4m}{4-m}\right)$,代入直线 $2x-3my-4=0$,解得 $m=\frac{2}{3}$,或 $m=-1$.综上,实数 m 的取值集合是 $\left\{-1,-\frac{1}{6},\frac{2}{3},4\right\}$.

16.$2\sqrt{2}-1$

三、解答题

17.**证明**:由 P 为直线 AB 外一点,可知直线 AB 与点 P 确定一平面,设其为 β,则 $C\in AP\subsetneqq\beta$,$D\in BP\subsetneqq\beta$,所以直线 $CD\subsetneqq\beta$.又 $C\in\alpha$,$D\in\alpha$,所以直线 $CD\subsetneqq\alpha$.所以 $CD=\alpha\cap\beta$. 设直线 AB 与 α 交于点 O,则 $O\in AB\subsetneqq\beta$,且 $O\in\alpha$,所以 $O\in\alpha\cap\beta$.所以 $O\in CD$.故不论 P 在何位置,直线 CD 必过直线 AB 与 α 的交点.

18.**解**:(1)由题意知,直线 l_1,l_2 的斜率必存在,则 $\frac{a}{2}\cdot(1-a)=-1$,解得 $a=2$,或 $a=-1$.

(2)显然直线 l_1,l_2 的斜率存在,则 $\frac{a}{2}=1-a$,解得 $a=\frac{2}{3}$.所以直线 l_1,l_2 的方程分别为 $x-3y+6=0$,$x-3y-6=0$.故两直线间的距离 $d=\frac{|6-(-6)|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{6\sqrt{10}}{5}$.

19.**解**:(1)因为圆 C 关于直线 $x+y-1=0$ 对称,所以圆心 $C\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$ 在直线 $x+y-1=0$ 上,所以 $D+E=-2$. ①

由圆的半径为 $\sqrt{2}$,

则 $\frac{D^2+E^2-12}{4}=2$. ②

由①②,解得 $D=2,E=-4$,或 $D=-4,E=2$.

又因为圆心 C 在第二象限,所以 $D>0,E<0$.所以 $D=2,E=-4$.所以圆 C 的方程为 $x^2+y^2+2x-4y+3=0$.

(2)由切线在两坐标轴上的截距相等且不为零,设切线 $l:x+y=a$,

则圆心 $C(-1,2)$ 到切线 l 的距离等于半径 $\sqrt{2}$,

即 $\frac{|-1+2-a|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$,

解得 $a=-1$,或 $a=3$.

故直线 l 的方程为 $x+y+1=0$,或 $x+y-3=0$.

20.(1)**证明**:由平面 $ABC\perp$ 平面 ABD,交线为 AB,$AD\perp AB$,得 $AD\perp$ 平面 ABC.又 $BC\subsetneqq$ 平面 ABC,所以 $AD\perp BC$.

(2)**解**:取 AC 的中点 N,连接 MN,ND,则 $MN/\!/BC$,所以 $\angle DMN$(或其补角)为异面直线 BC 与 MD 所成的角.

在 $\mathrm{Rt}\triangle DAM$ 中,$AD=2\sqrt{3}$,$AM=1$,故 $DM=\sqrt{13}$.

由(1)知 $AD\perp$ 平面 ABC,故 $AD\perp AC$,在 $\mathrm{Rt}\triangle DAN$ 中,$AN=1$,故 $DN=\sqrt{13}$.

在等腰 $\triangle DMN$ 中,$MN=1$,可得 $\cos\angle DMN=\frac{\frac{1}{2}MN}{DM}=\frac{\sqrt{13}}{26}$. 故异面直线 BC 与 MD 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{13}}{26}$.

21.(1)**解**:由三视图可知,该多面体是直三棱柱,其中平面 $ABCD\perp$ 平面 $ABFE$,$AB=AE=AD=2$,

则 $V_{D-ABF}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times2=\frac{4}{3}$.

(2)**证明**:取 BF 的中点 P,连接 MP,NP,则 $NP/\!/CF$,$MP/\!/EF$,所以 $NP/\!/$ 平面 $CDEF$,$MP/\!/$ 平面 $CDEF$.又 $NP\cap MP=P$,所以平面 $MNP/\!/$ 平面 $CDEF$.又 $MN\subsetneqq$ 平面 MNP,所以 $MN/\!/$ 平面 $CDEF$.

(3)**解**:存在点 G 满足要求,此时 G 为 AD 的中点,证明如下:

连接 GN,因为 N,G 分别为 BC,AD 的中点,且四边形 $ABCD$ 为正方形,所以 $GN/\!/CD$,可得 $GN/\!/$ 平面 $CDEF$.由(2)知,$MN/\!/$ 平面 $CDEF$,又 $MN\cap GN=N$,所以平面 $MNG/\!/$ 平面 $CDEF$.而 $MG\subsetneqq$ 平面 MNG,所以 $MG/\!/$ 平面 $CDEF$.

22.**解**:(1)显然直线 l 的斜率存在,由 $A(0,-1)$,设直线 $l:y=kx-1$,又 $B(4,3)$,则 $\frac{|4k-3-1|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{2}\times\frac{6}{5}\right)^2}$,

解得 $k=\frac{4}{3}$,或 $k=\frac{3}{4}$.

(2)①若动圆 P 同时平分圆 A 与圆 B 的周长,作出图形可得 $PA=PB$,故 P 在 AB 的垂直平分线 $x+y-3=0$ 上.故动圆圆心 P 的轨迹方程为 $x+y-3=0$.

②设 $P(m,3-m)$,则圆 P 的半径的平方 $r^2=|PA|^2+1^2=m^2+(3-m+1)^2+1$,方程为 $(x-m)^2+[y+(m-3)]^2=m^2+(3-m+1)^2+1$,即 $x^2+y^2-6y-8-2m(x-y-1)=0$.

令 $\begin{cases}x^2+y^2-6y-8=0,\\ x-y-1=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=2+\frac{3\sqrt{2}}{2},\\ y=1+\frac{3\sqrt{2}}{2},\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=2-\frac{3\sqrt{2}}{2},\\ y=1-\frac{3\sqrt{2}}{2}.\end{cases}$

所以动圆 P 过定点 $\left(2+\frac{3\sqrt{2}}{2},1+\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ 和 $\left(2-\frac{3\sqrt{2}}{2},1-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$.

第 9 期

第 3 版同步周测题参考答案

一、选择题

1.B 2.C 3.D 4.C 5.B

6.B

提示:由已知,可得圆心 $(1,2)$ 到直线 $ax-y+3=0$ 的距离等于 1,即 $\frac{|a-2+3|}{\sqrt{a^2+1}}=1$,得 $a=0$.

7.D

提示:由已知,得直线与圆相切或相交,则 $d=\frac{|-1|}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}}\leqslant r=1$,即 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\geqslant1$.

8.B

提示:过两圆的交点的直线方程是 $x^2+y^2-x-(x^2+y^2-y)=0$,即 $y=x$.故选 B.

9.D

提示:两圆的圆心分别为 $(-2,2)$,$(2,-5)$,则两圆的圆心距 $d=\sqrt{65}$.又两圆半径分别为 1 和 4,则 $d>1+4=5$,即两圆外离,因此它们有 4 条公切线.

10.C

提示:由已知,得 $E(0,0,1)$,$F(\sqrt{2},\sqrt{2},1)$.设 AC 与 BD 交于点 O,连接 OE.因为 $AM/\!/$ 平面 BDE,$AM\subsetneqq$ 平面 $ACEF$,平面 $BDE\cap$ 平面 $ACEF=OE$,所以 $AM/\!/OE$.从而易得 M 是 EF 的中点,所以 $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$.

11.B

提示:若 AB 为底边,则 $|AC|=|BC|$,即 $\sqrt{(m-2)^2+(1-4)^2+(9-3)^2}=\sqrt{(10-2)^2+(-1-4)^2+(6-3)^2}$,此方程无整数解;同理,若 AC 为底边,则 $|AB|=|BC|$,方程无整数解;若 BC 为底边,则 $|AB|=|AC|$,解得 $m=4$.故选 B.

12.C

提示:由已知,得圆 C_1 的圆心为 $C_1(-2,1)$,半径 $r_1=1$;圆 C_2 的圆心为 $C_2(3,4)$,半径 $r_2=3$,则 $|PM|+|PN|\geqslant|PC_1|+|PC_2|-r_1-r_2=|PC_1|+|PC_2|-4$.因为 $C_1(-2,1)$ 关于 x 轴的对称点为 $C_1'(-2,-1)$,所以 $|PC_1|+|PC_2|$ 的最小值为 $|C_1'C_2|=5\sqrt{2}$.所以 $|PM|+|PN|$ 的最小值为 $5\sqrt{2}-4$.

二、填空题

13.$a^2+b^2=r^2$

14.3

提示:由题意,得 $M(1,2,3)$,又 $B(-1,0,2)$,所以 $|BM|=3$.

15.$x^2+(y+2)^2=5$

16.$\frac{\sqrt{2}}{2}$

提示:将 $x(x-k)\leqslant y(k-y)$ 化简,得 $x^2+y^2-kx-ky\leqslant0$,所以点 (x,y) 在以 $A\left(\frac{k}{2},\frac{k}{2}\right)$ 为圆心,半径等于 $\frac{\sqrt{2}k}{2}$ 的圆上及圆内.因为点 (x,y) 被圆 $O:x^2+y^2=1$ 覆盖,所以圆 A 内切于圆 O 或内含于圆 O,得 $\sqrt{\frac{k^2}{4}+\frac{k^2}{4}}\leqslant1-\frac{\sqrt{2}k}{2}$,解得 $k\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$.所以 k 的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

三、解答题

17. **解**:因为 B' 在底面上的投影 B 的坐标为 $(1,\sqrt{3},0)$,所以 $B'(1,\sqrt{3},2)$.

又因为 O' 在底面上的投影 O_1 为 $\triangle OAB$ 的中心,则 $O_1\left(1,\frac{\sqrt{3}}{3},0\right)$,则 $O'\left(1,\frac{\sqrt{3}}{3},2\right)$,故 $|O'B|=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

18.**解**:(1)设圆 P 的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$.

由已知,得 $\begin{cases}1^2+0^2+D+0+F=0,\\ 4^2+0^2+4D+0+F=0,\\ 6^2+(-2)^2+6D-2E+F=0,\end{cases}$

解得 $D=-5,E=7,F=4$.故圆 P 的方程为 $x^2+y^2-5x+7y+4=0$.

(2)由圆的对称性,可知圆心 P 的横坐标为 $\frac{1+4}{2}=\frac{5}{2}$,故圆心 $P\left(\frac{5}{2},2\right)$,半径 $r=|AP|=\frac{5}{2}$.

故圆 P 的方程为 $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+(y-2)^2=\frac{25}{4}$.

19.**解**:圆心为 $O(0,0)$,半径 $r=\sqrt{5}$.

(1)由圆的几何性质,知过圆上一点 $P(2,1)$ 的切线与 OP 所在直线垂直,故切线的斜率为 -2,切线方程为 $y-1=-2(x-2)$,即 $2x+y-5=0$.

(2)显然切线的斜率存在,设切线方程为 $y-1=k(x-3)$,则 $\frac{|1-3k|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{5}$,

解得 $k=-\frac{1}{2}$,或 $k=2$.故切线方程为 $x+2y-5=0$ 或 $2x-y-5=0$.

20.**解**:(1)将两圆方程联立,解方程组,可得 $\begin{cases}x=3,\\ y=-1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-1,\\ y=1.\end{cases}$

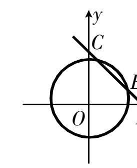
故 $|AB|=\sqrt{(3+1)^2+(-1-1)^2}=2\sqrt{5}$.

(2)结合(1),得 AB 的中点为 $(1,0)$,直线 AB 的斜率为 $-\frac{1}{2}$,

所以线段 AB 的垂直平分线的方程为 $y-0=2(x-1)$,即 $2x-y-2=0$.

21.**解**:如图,以该岛为原点,正东、正北方向分别为 x 轴、y 轴正方向,建立直角坐标系,则雷达最大观测范围是一个圆,其方程为 $x^2+y^2=200^2$,外国测量船的航行路线所在直线的方程为 $x+y=250$.故海岛到外国测量船的航行路线的距离为 $d=\frac{|250|}{\sqrt{1^2+1^2}}=125\sqrt{2}$.

故航行路线被圆截得的弦 $|BC|=2\sqrt{200^2-(125\sqrt{2})^2}=50\sqrt{14}$,所以能观测到的时间 $t=\frac{50\sqrt{14}}{20}=\frac{5\sqrt{14}}{2}$(小时).



(第 21 题图)

22.**解**:(1)圆 M 的圆心为 $M(6,7)$,半径 $r=5$.

由圆心 N 在直线 $x=6$ 上,

可设 $N(6,y_0)$.

因为圆 N 与 x 轴相切,与圆 M 外切,所以 $0<y_0<7$,

所以圆 N 的半径等于 y_0,

从而 $7-y_0=5+y_0$,解得 $y_0=1$.

因此,圆 N 的标准方程为 $(x-6)^2+(y-1)^2=1$.

(2)因为直线 $l/\!/OA$,

所以直线 l 的斜率为 $\frac{4-0}{2-0}=2$.

设直线 l 的方程为 $y=2x+m$,即 $2x-y+m=0$,则圆心 M 到直线 l 的距离 $d=\frac{|2\times6-7+m|}{\sqrt{5}}=\frac{|m+5|}{\sqrt{5}}$.

因为 $|BC|=|OA|=2\sqrt{5}$,

而 $r^2=d^2+\left(\frac{1}{2}|BC|\right)^2$,

所以 $25=\frac{(m+5)^2}{5}+5$,

解得 $m=5$ 或 $m=-15$.

故直线 l 的方程为 $2x-y+5=0$ 或 $2x-y-15=0$.

第 10 期

第 2~3 版章节测试题参考答案

一、选择题

1.D　2.C　3.C　4.D　5.C

6.C

提示:联立 l_1 和 l_2 的方程,解得交点为 $\left(-\frac{19}{7},\frac{3}{7}\right)$.故所求直线的斜率 $k=-\frac{3}{19}$,所求直线方程为 $3x+19y=0$.

7.A

8.D

提示:圆 C 的圆心为 $\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)$,半径 $r=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$,则圆心到直线 l 的距离 $d=\frac{\left|\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}=r$,所以直线 l 与圆 C 相切.结合选项可知选 D.

9.C

10.B

提示:设 $G(x,y,z)$,则 $|GA|^2+|GB|^2+|GC|^2=3(x-1)^2+3(y-2)^2+3(z-1)^2+46$.当 $x=1,y=2,z=1$ 时,点 G 到 A,B,C 三点距离的平方和最小,故 $G(1,2,1)$.

11.D

提示:点 $A(2,0,0),B(2,2,0),C(0,2,0),D(1,1,\sqrt{2})$在 xOy 平面上的投影分别为 $(2,0,0),(2,2,0),(0,2,0),(1,1,0)$,$S_1=\frac{1}{2}\times2\times2=2$;在 yOz 平面上的投影分别为$(0,0,0),(0,2,0),(0,2,0),(0,1,\sqrt{2})$,$S_2=\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{2}=\sqrt{2}$;在 zOx 平面上的投影分别为$(2,0,0),(2,0,0),(0,0,0),(1,0,\sqrt{2})$,$S_3=\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{2}=\sqrt{2}$,则 $S_3=S_2$ 且 $S_3\neq S_1$.故选 D.

12.D

提示:将两圆方程相减,可得直线 AB 的方程为 $a^2+b^2-2ax-2by=0$,即 $2ax+2by=a^2+b^2$,故②正确;分别把 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$代入②式并相减,得 $a(x_1-x_2)+b(y_1-y_2)=0$,故①正确;由圆的几何性质可知线段 AB 与线段 C_1C_2 互相平分,所以 $x_1+x_2=a,y_1+y_2=b$,故③正确.故选 D.

二、填空题

13.$x^2+y^2+28x-15y=0$

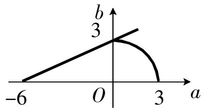
14.-2

提示:因为 $l_1:y=2x+3$,所以 $l_2:-x=-2y+3$,即 $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$,所以 $k_2=\frac{1}{2}$.又因为 $l_3\perp l_2$,所以 $k_3=-2$.

15.$3\sqrt{2}$

16.$\frac{1}{2}$

提示:圆 C_1 的圆心为 $C_1(-a,0)$,半径 $r_1=2$;圆 C_2 的圆心为 $C_2(0,b)$,半径 $r_2=1$,因为两圆外切,所以 $|C_1C_2|=\sqrt{a^2+b^2}=3$.又 $a\geqslant0,b\geqslant0$,所以点(a,b)在以原点为圆心,半径等于 3 的圆弧上,如图所示,而$\frac{b}{a+6}$表示圆弧上的点与点$(-6,0)$连线的斜率,则当点(a,b)为$(0,3)$时,$\frac{b}{a+6}$取得最大值$\frac{1}{2}$.



(第 16 题图)

三、解答题

17.**证明**:由已知条件,得直线 AB 的斜率 $k_{AB}=\frac{11-3}{5-1}=2$,直线 AC 的斜率 $k_{AC}=\frac{-5-3}{-3-1}=2$,所以 $k_{AB}=k_{AC}$.

所以直线 AB 与 AC 平行或重合.又两直线有公共点 A,所以重合,即 A,B,C 三点在同一条直线上.

18.**解**:(1)当直线不过原点时,设所求方程为$\frac{x}{2a}+\frac{y}{a}=1$,将点 $P(-3,2)$代入,解得 $a=\frac{1}{2}$,此时,直线方程为 $x+2y-1=0$.当直线过原点时,斜率 $k=-\frac{2}{3}$,直线方程为 $y=-\frac{2}{3}x$,即 $2x+3y=0$.

综上可知,所求直线方程为 $x+2y-1=0$ 或 $2x+3y=0$.

(2)由$\begin{cases}2x+7y-4=0,\\7x-21y-1=0,\end{cases}$解得交点为$\left(1,\frac{2}{7}\right)$.

当所求直线的斜率存在时,设其方程为 $y-\frac{2}{7}=k(x-1)$,即 $7kx-7y+(2-7k)=0$,由 $A(-3,1),B(5,7)$,得 $\frac{|-21k-7+(2-7k)|}{\sqrt{49k^2+49}}=\frac{|35k-49+(2-7k)|}{\sqrt{49k^2+49}}$,解得 $k=\frac{3}{4}$,故直线方程为 $21x-28y-13=0$.

当所求直线的斜率不存在时,直线方程为 $x=1$,显然也满足条件.

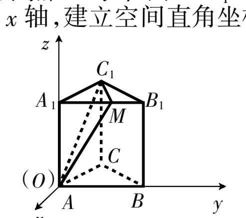
综上可知,所求直线的方程为 $21x-28y-13=0$ 或 $x=1$.

19.**解**:(1)根据题意,知圆心 C 与圆心 $D(1,-2)$关于直线 $y=x$ 对称,则 $C(-2,1)$.又半径 $r=2$,所以圆 C 的标准方程为$(x+2)^2+(y-1)^2=4$.

(2)因为 $r=2,|AB|=2\sqrt{3}$,

所以圆心 $C(-2,1)$到直线 l 的距离 $d=\sqrt{r^2-\left(\frac{AB}{2}\right)^2}=1$,即$\frac{|-2k-1+1|}{\sqrt{k^2+1}}=1$,解得 $k=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.所以直线 l 的方程为 $x-\sqrt{3}y+\sqrt{3}=0$ 或 $x+\sqrt{3}y-\sqrt{3}=0$.

20.**解**:如图,以 A 为坐标原点,AB 所在直线为 y 轴,AA_1 所在直线为 z 轴,经过原点且与平面ABB_1A_1 垂直的直线为 x 轴,建立空间直角坐标系.



(第 20 题图)

由已知得 $A(0,0,0),B(0,a,0),A_1(0,0,\sqrt{2}a),C_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a,\frac{a}{2},\sqrt{2}a\right)$,$B_1(0,a,\sqrt{2}a)$.

取 A_1B_1 的中点 M,

则点 M 的坐标为$\left(0,\frac{a}{2},\sqrt{2}a\right)$.

连接AM,MC_1,则$MC_1\perp$平面ABB_1A_1,

所以 AC_1 在平面 ABB_1A_1 上的投影为 AM.

又$|AM|=\frac{3a}{2}$,故所求投影长为$\frac{3a}{2}$.

21.**解**:(1)因为$|AB|=2$,所以在圆 C 上找到最低点 P_1 即可得出$\triangle ABP$ 面积的最小值.

又圆心 $C(3,4)$,半径 $r=2$,所以 P_1 的纵坐标为 $4-2=2$,故$\triangle ABP$ 面积的最小值为$\frac{1}{2}\times2\times2=2$.

(2)当切线的斜率存在时,设切线方程为 $y=k(x-1)$,即 $kx-y-k=0$,

则圆心 $C(3,4)$到该切线的距离 $d=\frac{|3k-4-k|}{\sqrt{1+k^2}}=2$,解得 $k=\frac{3}{4}$,故所求的切线方程为 $3x-4y-3=0$;

当过点 A 的直线的斜率不存在时,其方程为 $x=1$,也满足切线的条件.

综上所述,过点 A 的圆 C 的切线方程为 $3x-4y-3=0$ 或 $x=1$.

(3)设点 $P(x,y)$,则$|AP|^2+|BP|^2=(x-1)^2+y^2+(x+1)^2+y^2=2(x^2+y^2)+2=2|OP|^2+2$.

因为$(|OP|)_{max}=|OC|+r=7$,所以$|AP|^2+|BP|^2$ 的最大值为 $2\times7^2+2=100$.

此时直线 OC 的方程为 $y=\frac{4}{3}x$,

与圆 C 的方程联立,

解得$\begin{cases}x=\frac{9}{5},\\y=\frac{12}{5},\end{cases}$或$\begin{cases}x=\frac{21}{5},\\y=\frac{28}{5}.\end{cases}$

结合图形可知点 $P\left(\frac{21}{5},\frac{28}{5}\right)$.

22.**解**:(1)分别以 l_1,l_2 为 y 轴、x 轴,以 O 为原点建立平面直角坐标系,则 $M(0,3),N(4,5)$,设该圆弧所在圆的方程为$(x-x_0)^2+y^2=r^2$,

由$\begin{cases}x_0^2+3^2=r^2,\\(4-x_0)^2+5^2=r^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_0=4,\\r^2=25.\end{cases}$

于是,铁路线所在圆弧的方程为

$(x-4)^2+y^2=25(0\leqslant x\leqslant4,y\geqslant3)$.

(2)设校址的坐标为$(a,0)(a>4)$,铁路上任一点为(x,y),d 为铁路上任一点到校址的距离,

则 $d^2=(x-a)^2+y^2=(x-a)^2+25-(x-4)^2=(8-2a)x+a^2+9$.

因为 $a>4,x\in[0,4]$,

所以当 $x=4$ 时,d^2 取得最小值为 $a^2-8a+41$.

令 $a^2-8a+41=26$,

解得 $a=3$(舍去),或 $a=5$.

故该校址到点 O 的最近距离为 5km.

第 11 期

第 2~3 版综合检测题(一)参考答案

一、选择题

1.A　2.B　3.B

4.A

提示:因为A_1B与EF都在平面A_1BCD_1中,且不平行,所以两者相交.

5.B

提示:由平面四边形,可知①④错误.

6.A

提示:设倾斜角为 α,解方程,得 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$.又 $\alpha\in(0°,90°)$,所以 $\alpha=60°$,所以 $\tan\alpha=\sqrt{3}$.

7.B　8.C

9.C

提示:联立两圆的方程,解得直径的端点分别为$A\left(-1+\frac{\sqrt{2}}{2},-1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,$B\left(-1-\frac{\sqrt{2}}{2},-1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,则$|AB|=2$,且中点坐标为$(-1,-1)$.所以圆心坐标为$(-1,-1)$,半径等于 1,所以所求圆的方程为$(x+1)^2+(y+1)^2=1$.

10.D

提示:点 $P(1,1,1)$关于 xOy 平面的对称点为 $M(1,1,-1)$,则$|QM|=\sqrt{57}$,故选 D.

11.C

提示:由已知,得正四棱锥的底面边长为 $2\sqrt{3}$,则高为 3.故侧面与底面所成二面角的正切值 $\tan\alpha=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$,所以二面角等于 60°.

12.D

提示:由已知条件知点 M 在直线 $x-y-4=0$.又点 M 满足 $a^2+b^2-4a+4b\leqslant0$,即$(a-2)^2+(b+2)^2\leqslant8$,所以 M 的轨迹是直线 $x-y-4=0$ 在圆$(x-2)^2+(y+2)^2=8$ 上及内部的部分,即线段 $x-y-4=0(0\leqslant x\leqslant4)$.而 a^2+b^2 的几何意义是原点与线段 $x-y-4=0(0\leqslant x\leqslant4)$上点的距离的平方,由 $d=\frac{|4|}{\sqrt{1+1}}=2\sqrt{2}$,得 a^2+b^2 的最小值为 8;由原点到点$(0,-4)$和点$(4,0)$的距离都为 4,得 a^2+b^2 的最大值为 16.故选 D.

二、填空题

13.$l/\!/\beta$ 或 $l\subsetneqq\beta$　14.$3x+4y\pm24=0$

15.48π

提示:由两圆相切,且圆心距为$\sqrt{9+a^2}$,得$\sqrt{9+a^2}=4+1$或$\sqrt{9+a^2}=4-1$,解得$a=4$.故正方体外接球的直径$2R=\sqrt{4^2+4^2+4^2}=4\sqrt{3}$.所以这个球的表面积为$4\pi R^2=48\pi$.

16.$\left(1-\frac{\sqrt[3]{7}}{2}\right)a$

三、解答题

17.**解**:由斜二测画法可知该四边形是直角梯形,其中 $AB\perp BC,AD=2,BC=4,AB=2$,故 $DC=2\sqrt{2}$.从而旋转后形成的几何体是上、下底面半径分别为 2,4,母线长为 $2\sqrt{2}$ 的圆台,其表面积 $S=\pi(2^2+4^2+2\times2\sqrt{2}+4\times2\sqrt{2})=(20+12\sqrt{2})\pi$.

18.**解**:(1)设 BC 边上的高所在的直线为 l,

由题知 BC 边所在直线的斜率 $k_{BC}=\frac{3-(-1)}{2-(-2)}=1$,

所以直线 l 的斜率 $k_l=\frac{-1}{k_{BC}}=-1$.

又点 $A(-1,4)$在直线 l 上,由点斜式得直线 l 的方程为 $y-4=-(x+1)$,即 $x+y-3=0$.

(2)由点斜式得 BC 边所在直线的方程为 $y+1=1\times(x+2)$,即 $x-y+1=0$,所以点 $A(-1,4)$到 BC 边所在直线的距离为 $d=\frac{|-1-4+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$.

又$|BC|=\sqrt{(-2-2)^2+(-1-3)^2}=4\sqrt{2}$,所以 $S=\frac{1}{2}|BC|\cdot d=8$.

19.**解**:(1)圆心 $C_1(0,0)$到直线 l的距离 $d=\frac{|3\times0-4\times0-15|}{\sqrt{3^2+4^2}}=3$,半径 $r=5$,故圆 C_1 截直线 l 所得弦长为 $2\sqrt{r^2-d^2}=8$.

(2)将圆 C 与圆 C_1 的方程相减,得公共弦所在直线的方程为 $2x-4my-4m^2-25=0$.因为该直线平行于直线 l,所以$\frac{2}{3}=\frac{-4m}{-4}\neq\frac{-4m^2-25}{-15}$,解得 $m=\frac{2}{3}$.

20.**证明**:(1)取 BB_1 的中点 M,连接 HM,MC_1.由 $HM \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} C_1D_1$,知四边形 HMC_1D_1 是平行四边形,所以 $HD_1/\!/MC_1$.

又 $MC_1/\!/BF$,所以 $BF/\!/HD_1$.

(2)取 BD 的中点 O,连接 OE,D_1O,

则 $OE \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} \frac{1}{2}DC$.

又 $D_1G \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} \frac{1}{2}DC$,所以 $OE \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} D_1G$.

所以四边形 $OEGD_1$ 是平行四边形,所以 $GE/\!/D_1O$.

又 $D_1O\subsetneqq$平面 BB_1D_1D,

$GE\not\subset$平面 BB_1D_1D,

所以 $EG/\!/$平面 BB_1D_1D.

21.**证明**:(1)因为 $PA=PD$,E 为 AD 的中点,所以 $PE\perp AD$.

又在矩形 $ABCD$ 中,$BC/\!/AD$,

所以 $PE\perp BC$.

(2)因为平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$,交线为 AD,又 $AB\perp AD$,所以 $AB\perp$平面 PAD.

又 $PD\subsetneqq$平面 PAD,所以 $AB\perp PD$.

又 $PA\perp PD,AB\cap PA=A$,

所以 $PD\perp$平面 PAB.

因为 $PD\subsetneqq$平面 PCD,

所以平面 $PAB\perp$平面 PCD.

(3)取 PC 的中点 G,连接 DG,FG,

则 $FG \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} \frac{1}{2}BC$.

由 $DE \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} \frac{1}{2}BC$,可得 $DE \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} FG$,

所以四边形 $EFGD$ 为平行四边形.

所以 $EF/\!/DG$.

又 $EF\not\subset$平面 PCD,$DG\subsetneqq$平面 PCD,

所以 $EF/\!/$平面 PCD.

22.**解**:(1)由 $x^2+y^2-6x+5=0$,得$(x-3)^2+y^2=4$.所以圆心坐标为 $C_1(3,0)$.

(2)设 $M(x,y)$.因为点 M 为弦 AB 的中点,所以 $C_1M\perp AB$.显然直线 l 的斜率 k_{AB} 存在,当 $k_{AB}\neq0$ 时,得 $k_{C_1M}\cdot k_{AB}=-1$,

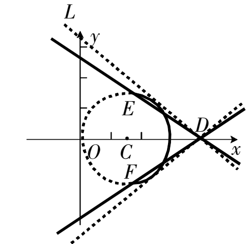
即$\frac{y}{x-3}\cdot\frac{y}{x}=-1$,化简,得

$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\frac{9}{4}(x\neq0$ 且 $x\neq3)$.①

当 $k_{AB}=0$ 时,$M(3,0)$满足①中方程,此时 $x=3$.

若直线 l 与圆 C_1 相切,可求得其方程为 $y=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}x$,代入圆 C_1 的方程,解得 $x=\frac{5}{3}$,结合图形可得点 M 的横坐标 $x>\frac{5}{3}$.故线段 AB 的中点 M 的轨迹方程为$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\frac{9}{4}\left(\frac{5}{3}<x\leqslant3\right)$.

(3)由(2)知点 M 的轨迹是以 $C\left(\frac{3}{2},0\right)$为圆心,半径 $r=\frac{3}{2}$ 的部分圆弧 $\overset{\frown}{EF}$(如下图所示,不包括两端点),且 $E\left(\frac{5}{3},\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)$,$F\left(\frac{5}{3},-\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)$.



(第 22 题图)

又直线 $L:y=k(x-4)$过定点 $D(4,0)$,当直线 L 与圆 C 相切时,

由$\frac{\left|k\left(\frac{3}{2}-4\right)-0\right|}{\sqrt{k^2+1^2}}=\frac{3}{2}$,得 $k=\pm\frac{3}{4}$.

又 $k_{DF}=-k_{DE}=\frac{2\sqrt{5}}{7}$,

结合上图可知,k 的取值范围是

$\left\{-\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right\}\cup\left[-\frac{2\sqrt{5}}{7},\frac{2\sqrt{5}}{7}\right]$.