

## 一、选择题

1.B

2.D

提示:过平面外一点作该平面的平行平面,有且只有1个,在这个平行平面上过这个点的直线有无数条,这些直线都与原平面平行,故选D.

3.C

提示:由面面平行的性质可知截面四边形是矩形.

4.B

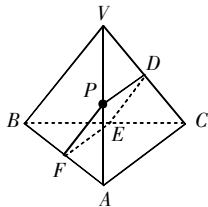
提示:由已知条件,可知 $DE \parallel BC$ ,则 $DE \parallel$ 平面 $ABC$ .又 $DE \subset$ 平面 $DEFG$ ,平面 $DEFG \cap$ 平面 $ABC=GF$ ,所以 $DE \parallel GF$ .所以 $GF \parallel BC$ .所以 $GF \neq BC$ ,即 $GF \neq DE$ ,所以直线 $DG$ 与 $EF$ 必相交.

5.D

提示:由平面 $ADD_1A_1$ 与平面 $D_1EF$ 有公共点 $D_1$ ,依据公理3知,必有过该点的公共直线 $l$ .在平面 $ADD_1A_1$ 内与 $l$ 平行的线有无数条,且它们都不在平面 $D_1EF$ 内,由线面平行的判定定理知它们都与平面 $D_1EF$ 平行.

6.C

提示:如图,过点 $P$ 作 $AC$ 的平行线 $PD$ 交 $VC$ 于点 $D$ ,作 $VB$ 的平行线交 $AB$ 于点 $F$ ,过点 $D$ 作 $VB$ 的平行线交 $BC$ 于 $E$ .连接 $EF$ ,由 $PF \parallel DE$ ,故 $P, D, E, F$ 共面,且平面 $PDEF$ 与 $VB$ 和 $AC$ 都平行,易知四边形 $PDEF$ 是平行四边形,故选C.



(第6题图)

7.A

提示:平面 $EFH$ 即平面 $EFDC$ .易证 $B_1G \parallel EC$ ,所以 $B_1G \parallel$ 平面 $EFDC$ .故选A.

8.C

提示:由平面平行的性质定理,易证 $\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$ .所以 $AC = \frac{DF}{DE} \times AB = \frac{5}{2} \times 6 = 15$ .

9.A

提示:依据面面平行的判定定理.

10.D

提示:作平面 $\gamma \parallel \alpha, \gamma \parallel \beta$ ,且平面 $\gamma$ 到平面 $\alpha$ 的距离等于平面 $\gamma$ 到平面 $\beta$ 的距离,则不论 $A, B$ 分别在平面 $\alpha, \beta$ 内如何移动,所有的动点 $C$ 都在平面 $\gamma$ 内,故选D.

11.C

12.C

提示:②中 $a$ 与 $b$ 可能平行、相交或是异面直线;③中 $\alpha$ 与 $\beta$ 可能平行、相交;⑤⑥中 $a$ 可能与 $\alpha$ 平行,也可能在 $\alpha$ 内.

## 二、填空题

13. $b \parallel \alpha$ 或 $b \subset \alpha$ 

14.平行四边形

15.平行

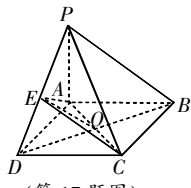
提示:因为过 $A_1, C_1, B$ 的平面与底面 $A_1B_1C_1D_1$ 的交线为 $A_1C_1$ ,又正方体的两底面互相平行,则由两个平面平行的性质定理知 $l \parallel A_1C_1$ .

16.①③④

提示:②中无穷多条直线可能都互相平行,此时,平面 $\alpha$ 不一定与平面 $\beta$ 平行.

## 三、解答题

17.证明:连接 $BD$ 与 $AC$ 相交于 $O$ ,连接 $EO$ ,如图.



(第17题图)

在 $\square ABCD$ 中, $O$ 是 $BD$ 的中点,又 $E$ 是 $PD$ 的中点,所以 $EO \parallel PB$ .

因为 $PB \not\subset$ 平面 $AEC, EO \subset$ 平面 $AEC$ ,所以 $PB \parallel$ 平面 $AEC$ .

18.证明:由已知得平面 $ABE \parallel$ 平面 $DCC_1F$ ,又平面 $AEC_1F \cap$ 平面 $ABE = AE$ ,平面 $AEC_1F \cap$ 平面 $DCC_1F = C_1F$ ,所以 $AE \parallel C_1F$ .同理可得 $AF \parallel C_1E$ ,所以四边形 $AEC_1F$ 是平行四边形.

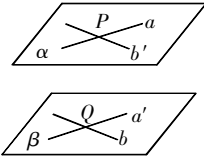
19.解:因为 $A \notin \alpha$ ,所以 $A, a$ 确定一个平面,设为 $\beta$ .因为 $B \in \alpha$ ,所以 $B \in \beta$ .又 $A \in \beta$ ,所以 $AB \subset \beta$ .同理 $AC \subset \beta, AD \subset \beta$ .

因为点 $A$ 与直线 $a$ 在 $\alpha$ 的异侧,所以 $\beta$ 与 $\alpha$ 相交,即平面 $ABD$ 与 $\alpha$ 相交,交线为 $EG$ .因为 $BD \parallel \alpha, BD \subset$ 平面 $ABD$ ,平面 $ABD \cap \alpha = EG$ ,所以 $BD \parallel EG$ .

所以 $\frac{EG}{BD} = \frac{AG}{AD} = \frac{AF}{AC}$ ,

所以 $EG = \frac{AF}{AC} \cdot BD = \frac{5}{9} \times 4 = \frac{20}{9}$ .

20.证明:如图所示,在直线 $a$ 上任取一点 $P$ ,过点 $P$ 作直线 $b' \parallel b$ ,则 $a$ 与 $b'$ 可确定一个平面,记为 $\alpha$ .因为 $b' \subset \alpha, b \not\subset \alpha$ ,所以 $b \parallel \alpha$ .



(第20题图)

在直线 $b$ 上任取一点 $Q$ ,过点 $Q$ 作直线 $a' \parallel a$ ,则 $a'$ 与 $b$ 可确定一个平面,记为 $\beta$ .

因为 $a \subset \alpha, a' \not\subset \alpha$ ,所以 $a' \parallel \alpha$ .

又 $a' \cap b = Q$ ,所以 $\alpha \parallel \beta$ .

21.(1)证明:因为四边形 $EFGH$ 为平行四边形,所以 $EF \parallel HG$ .

又因为 $HG \subset$ 平面 $ABD$ ,

所以 $EF \parallel$ 平面 $ABD$ .

又因为 $EF \subset$ 平面 $ABC$ ,平面 $ABD \cap$ 平面 $ABC = AB$ ,

所以 $EF \parallel AB$ .

又 $EF \subset$ 平面 $EFGH, AB \not\subset$ 平面 $EFGH$ ,

所以 $AB \parallel$ 平面 $EFGH$ .

(2)解:设 $EF = x (0 < x < 4)$ .

由 $EF \parallel AB$ ,得 $\frac{EF}{AB} = \frac{CE}{CA}$ ,

即 $\frac{CE}{CA} = \frac{x}{4}$ .

由 $EH \parallel FG \parallel CD$ ,得 $\frac{EH}{CD} = \frac{AE}{AC}$ ,

即 $\frac{EH}{6} = \frac{AE}{AC}$ .

因为 $\frac{CE}{CA} + \frac{AE}{AC} = 1$ ,

所以 $\frac{x}{4} + \frac{EH}{6} = 1$ ,

则 $EH = 6 - \frac{3}{2}x$ .

所以四边形 $EFGH$ 的周长

$l = 2 \left( x + 6 - \frac{3}{2}x \right) = 12 - x$ .

又 $0 < x < 4$ ,则有 $8 < l < 12$ .

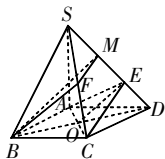
所以四边形 $EFGH$ 周长的取值范围是 $(8, 12)$ .

22.解:当 $F$ 是棱 $SC$ 的中点时,存在过 $BF$ 的平面 $BFM$ 平行于平面 $AEC$ .证明如下:

如图,取 $SE$ 的中点 $M$ ,连接 $FM, BF$ ,则 $FM \parallel CE$ ,

所以 $FM \parallel$ 平面 $AEC$ .

连接 $BM, BD$ .



(第22题图)

设 $BD \cap AC = O$ ,则 $O$ 为 $BD$ 的中点,连接 $OE$ .

由 $EM = \frac{1}{2}SE = ED$ 知, $E$ 是 $MD$ 的中点,

所以 $BM \parallel OE$ ,

又 $BM \not\subset$ 平面 $AEC$ ,

所以 $BM \parallel$ 平面 $AEC$ .

又 $FM \cap BM = M$ ,

所以平面 $BFM \parallel$ 平面 $AEC$ .

所以在棱 $SC$ 上存在一点 $F$ ( $F$ 是棱 $SC$ 的中点),且存在过 $BF$ 的平面 $BFM$ ( $M$ 是 $SE$ 的中点)平行于平面 $AEC$ .

## 第1期

## 第3版同步周测题参考答案

## 一、选择题

1.C 2.B 3.D 4.A

5.D

提示:俯视图是从几何体的上面向下面正投影,故选D.

6.C

提示:根据斜二测画法的规则,原来的直角变为 $45^\circ$ 角,排除B;与 $y'$ 轴平行的线段长度减半,排除A;与 $x'$ 轴平行的线段长度不变,排除D.故选C.

7.A

提示:三个侧面都是直角边长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的等腰直角三角形,底面是边长为1的等边三角形.

8.D

提示:设圆台的母线长为 $l$ 由题知,中截面是半径为 $\frac{5+R}{2}$ 的圆面,则 $\left[ \pi \times \frac{l}{2} \times \left( 5 + \frac{5+R}{2} \right) \right] : \left[ \pi \times \frac{l}{2} \times \left( \frac{5+R}{2} + R \right) \right] = 1:2$ ,解得 $R=25$ .

9.C

提示:设上底面面积为 $S$ ,则下底面面积为 $4S$ ,设高为 $h$ ,那么 $V_{A_1-ABC} = \frac{1}{3}Sh, V_{C-A_1B_1C_1} = \frac{4}{3}Sh, V_{B-A_1B_1C} = \frac{1}{3}(S + \sqrt{S \times 4S} + 4S)h - \frac{1}{3}Sh - \frac{4}{3}Sh = \frac{2}{3}Sh$ ,从而可知选C.

10.C

提示:设体积为 $V$ ,则 $S_{正} = 6\sqrt{V^2}, S_{柱} = 2\pi \left( \sqrt{\frac{3V}{2\pi}} \right)^2 + 4\pi \left( \sqrt{\frac{3V}{2\pi}} \right)^2 = 3\sqrt{2\pi V^2}, S_{球} = \sqrt{36\pi V^2}$ ,比较可得 $S_{球} < S_{柱} < S_{正}$ .

11.A

提示:将侧面展开,最短距离为长、宽分别为 $2\pi, 4$ 的矩形的对角线长.

12.C

提示:由正视图知小正方体共3列,且左侧高一层,中间最高两层,右侧最高两层.结合侧视图可知搭成这个几何体至少需要小正方体的个数为 $3+2+1=6$ .

## 二、填空题

13.三棱锥

14.16cm

提示:由斜二测画法的规则可知正方形 $O'A'B'C'$ 对应的原图形是 $\square OABC$ ,且 $OA=2, OB \perp OA, OB=4\sqrt{2}$ .所以 $AB=OC=\sqrt{2^2+(4\sqrt{2})^2}=6$ .所以周长等于 $2 \times 6 + 2 \times 2 = 16(\text{cm})$ .

15.6π

提示:由题意可将三棱锥补充为一个长、宽、高分别是 $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ 的长方体,则其外接球的直径 $2R = \sqrt{1+2+3} = \sqrt{6}$ ,表面积 $S = 4\pi R^2 = 6\pi$ .

16.①③④⑤

提示:因为有六个面,所以①正

确;因为侧棱的延长线不能交于一点,所以②不正确;把几何体放倒就会发现③正确;由切割法可知④正确;由补形法可知⑤正确.

## 三、解答题

17.解:(1)由一个圆柱和两个圆台构成.

(2)由挖去与上底面同底的圆锥的圆台、一个圆柱和一个圆锥构成.

18.解:由三视图可知该几何体的下方是一个四棱柱,上方是一个四棱锥,并且底面重合.

(1)画轴.如图1所示,画出 $x$ 轴、 $y$ 轴、 $z$ 轴,三轴交于点 $O$ ,使 $\angle xOy = 45^\circ, \angle xOz = 90^\circ$ .

(2)画棱柱的底面.以 $O$ 为中点,在 $x$ 轴上画 $MN=2$ ,在 $y$ 轴上画 $EQ=1$ ,分别过点 $M, N$ 作 $y$ 轴的平行线,过点 $E, Q$ 作 $x$ 轴的平行线,设它们的交点分别为 $A, B, C, D$ ,则四边形 $ABCD$ 就是该棱柱的下底面.

(3)画棱柱的侧棱.分别以 $A, B, C, D$ 四个顶点为起点作平行于 $z$ 轴,长度为1的线段,得四条侧棱 $AA', BB', CC', DD'$ ,顺次连接 $A', B', C', D'$ .

(4)画四棱锥的顶点.在 $z$ 轴上截取线段 $OP$ ,使 $OP=2$ .

(5)成图.连接 $PA', PB', PC', PD'$ ,擦去辅助线,将被遮挡部分改为虚线,可得图2所示的直观图.

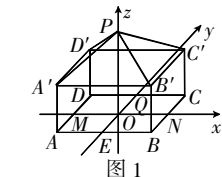


图1

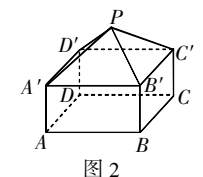


图2

19.解:(1)如图所示,设内接圆柱的底面圆半径为 $r$ .

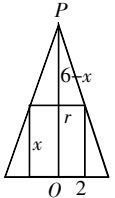
由已知,得 $\frac{6-x}{6} = \frac{r}{2}$ ,

所以 $r = \frac{6-x}{3}$ .

故 $S = \frac{2(6-x)}{3} \cdot x = -\frac{2}{3}x^2 + 4x$ ,

即 $S = -\frac{2}{3}x^2 + 4x$ ,其中 $0 < x < 6$ .

(2)当 $x = -\frac{4}{2 \times (-\frac{2}{3})} = 3$ 时, $S$ 最大.



(第19题图)

20.解:(1) $S_1 = \frac{1}{3} \times \pi \times 18^2 = 108\pi(\text{cm}^2)$ ,

$S_2 = \frac{2}{3} \times \pi \times 18^2 = 216\pi(\text{cm}^2)$ .

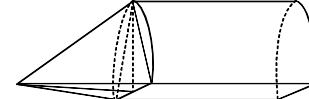
(2)设较小圆锥的底面半径为 $r_1$ ,则有 $2\pi r_1 = \frac{1}{3} \times 2\pi \times 18$ ,解得 $r_1 = 6$ .

所以 $h_1 = \sqrt{18^2 - r_1^2} = 12\sqrt{2}(\text{cm})$ .同理可得较大圆锥的底面半径 $r_2 =$

$12, h_2 = \sqrt{18^2 - r_2^2} = 6\sqrt{5}(\text{cm})$ .

所以 $h_1:h_2 = 12\sqrt{2}:6\sqrt{5} = 2\sqrt{2}:\sqrt{5}$ .

21.解:由三视图可知,该几何体的左侧是一个三棱锥,右侧是横放的半个圆柱,如图所示.



(第21题图)

(1)此几何体的体积 $V = \frac{1}{3} \times \left( \frac{1}{2} \times 2 \times 1 \right) \times 1 + \frac{1}{2} \times \pi \times 1^2 \times 2 = \pi + \frac{1}{3}$ .

(2)将三棱锥与圆柱底面重合的面看作底面,则此几何体的表面积 $S =$ 三棱锥的侧面积 $S_1$ +圆柱底面积 $S_2$ 的 $\frac{1}{2} \times 2 =$ 三棱锥的底面积 $S_3$ +圆柱侧面积 $S_4$ 的 $\frac{1}{2} +$ 圆柱的轴截面面积 $S_5$ ,其中 $S_1 = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 + \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\sqrt{2})^2 \times 2 = 1 + \sqrt{3}$ ,

$S_2 = \pi \times 1^2 = \pi, S_3 = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1, S_4 = 2\pi \times 1 \times 2 = 4\pi, S_5 = 2 \times 2 = 4$ .故 $S = 1 + \sqrt{3} + \pi \times \frac{1}{2} \times 2 - 1 + 4\pi \times \frac{1}{2} + 4 = 3\pi + 4 + \sqrt{3}$ .

22.解:如下图,  $\triangle PAB$ 是正三角形,则当容器内放有铁球时,水深 $PC = 3r$ ,水面半径为 $\sqrt{3}r$ ,

那么,水的体积 $V = \frac{1}{3} \times \pi \times (\sqrt{3}r)^2 \times$

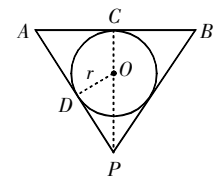
$3r - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{5}{3}\pi r^3$ .

将球取出后,设容器中水的深度为 $h$ ,则水面半径为 $\frac{\sqrt{3}}{3}h$ .

由 $\frac{1}{3} \times \pi \times \left( \frac{\sqrt{3}}{3}h \right)^2 \times h = \frac{5}{3}\pi r^3$ ,得

$h = \sqrt[3]{15}r$ .

答:将球取出后,容器内的水深是 $\sqrt[3]{15}r$ .



(第22题图)

1.D  
2.B  
提示:面最少的多面体是四面体,由此知选 B.

3.B  
4.D  
5.C

提示:注意画出从正前方看不到部分的轮廓线.

6.B  
提示:由已知图形可知,侧视图为 Rt△PAD 及 PA 边上的中线,故选 B.

7.B  
提示:仅仅平行于 x 轴的线段长度在直观图中保持不变.

8.C  
提示:此正方形的边长为 4 或 8,故面积为 16 或 64.

9.D  
提示:由已知条件,得正四棱台侧面梯形的高为  $\sqrt{2^2 - \left(\frac{3-1}{2}\right)^2} = \sqrt{3}$ .

所以侧面积  $S = \frac{1}{2} \times (1+3) \times \sqrt{3} \times 4 = 8\sqrt{3}$ .

10.A  
提示:先将四面体置于边长为 1 的正方体中,再将正方体置于球中,则正方体的体对角线长等于球的直径,即

$\sqrt{3} = 2R$ , 所以球的半径  $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 表面积  $S = 4\pi R^2 = 4\pi \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3\pi$ .

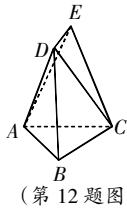
11.B  
提示:设新的水面高度是  $h$ , 则倒圆锥形器皿中水的体积是  $\frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{3}h}{3}\right)^2 \cdot h = \pi \times 2^2 \times 6$ , 解得  $h = 6$ .

12.A

提示:由三视图得直观图如图所示,则该几何体共有 9 条棱.

又该几何体由三棱锥  $D-ABC$  和三棱锥  $D-AEC$  组合而成,

则体积  $V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 4 \times 2 \times 2 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 4 \times 2 \times 1 = 4$ . 故选 A.



二、填空题

13.3π

14.36πcm³

提示:设一个球形麻团的半径为  $r$ , 则长方体的长和宽均为  $4r$ , 高为  $2r$ , 所以  $2(4r \cdot 4r + 4r \cdot 2r + 4r \cdot 2r) = 576$ , 解得  $r = 3$ . 故一个麻团的体积  $V = \frac{4}{3}\pi r^3 =$

$36\pi(\text{cm}^3)$ .

15.6

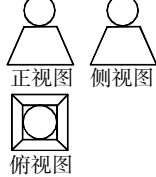
提示:由正视图和侧视图知,该几何体由两层小正方体拼接成,且上层仅有 1 个小正方体;由俯视图知,该几何体的最下层有 5 个小正方体,则共有 6 个小正方体.

16.(1)(2)(4)

提示:由于直观图中横轴不变,纵轴减半,故(3)中两个三角形的直观图不全等.

三、解答题

17.解:根据题意,该几何体是正四棱台与球的组合体,它的三视图如图所示.



(第 17 题图)

18.解:根据三视图可知,此几何体为圆台.其直观图画法如下:

(1)画轴.画  $x$  轴、 $z$  轴,记坐标原点为  $O$ ,使  $\angle xOz = 90^\circ$ ,如图 1 所示.

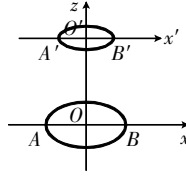


图 1

(第 18 题图)



图 2

(2)画圆台的两底面.在  $x$  轴上取  $A, B$  两点,使  $AB$  的长度等于俯视图中大圆的直径,且  $OA = OB$ .选择椭圆模板中适当的椭圆过  $A, B$  两点,使它成为圆台的下底面.在  $z$  轴上截取点  $O'$ ,使  $OO'$  等于正视图的高度,过点  $O'$  作  $Ox$  轴的平行线  $O'x'$  轴,类似圆台下底面的作法作出圆台的上底面.

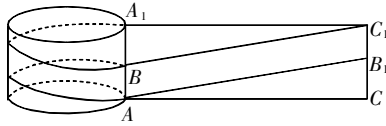
(3)成图.连接  $A'A, B'B$ , 去掉辅助线,将被遮挡的部分改为虚线,即得到几何体的直观图如图 2 所示.

19.解:由已知图形可知,在平面直角坐标系中,  $A(0,0), B(3,0), C(2,2), D(0,4)$ , 则四边形  $ABCD$  的面积  $S = \frac{1}{2} \times$

$(2+4) \times 2 + \frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 7$ .

20.解:(1)设圆柱的底面半径为  $r$ , 则  $2\pi r = 2\pi$ , 解得  $r = 1$ . 所以此圆柱的体积  $V = \pi \times 1^2 \times 2 = 2\pi$ .

(2)设母线  $AA_1$  的中点为  $B$ , 将侧面展开图记为矩形  $ACC_1A_1$ ,  $CC_1$  的中点为  $B_1$ , 如图所示,则绳长的最小值即为  $AB_1 + BC_1$ . 因为  $AB_1 = BC_1 = \sqrt{4\pi^2 + 1}$ , 所以以绳长的最小值为  $2\sqrt{4\pi^2 + 1}$ .



(第 20 题图)

21.解:由已知条件,得  $CD = 2, BC = 2$ . 阴影部分绕  $AB$  所在直线旋转一周得到的旋转体是圆台挖去半个球所得组合体,其中圆台的上、下底面半径分别为 1, 2, 高为  $\sqrt{3}$ , 母线长为 2, 球的半径为 1.

所以旋转体的体积  $V = V_{\text{圆台}} - V_{\text{半球}} = \frac{1}{3}\pi \times \sqrt{3} \times (2^2 + 2 \times 1 + 1^2) - \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi \times 1^3 = \frac{7\sqrt{3}-2}{3}\pi$ ,

表面积  $S = S_{\text{半球}} + S_{\text{圆台侧}} + S_{\text{圆台下底}} = \frac{1}{2} \times 4\pi \times 1^2 + \pi \times (1+2) \times 2 + \pi \times 2^2 = 12\pi$ .

22.解:(1)因为  $AE = BE' = x$ , 所以  $EE' = 20 - 2x$ . 由  $EE' > 0$ , 得  $0 < x < 10$ .

故礼品袋的侧面积

$S = S_{\text{正方形}} - 4S_{\triangle SE'E} - 4S_{\triangle EAH'} = 20 \times 20 - 4 \times$

$\frac{1}{2} (20 - 2x) \times 10 - 4 \times \frac{1}{2} x^2 = -2x^2 + 40x$ ,

即  $S = -2x^2 + 40x, 0 < x < 10$ .

(2)当  $x = 5$  时,在四棱锥  $S-EFGH$  中,  $OE = OF = 5, EF = 5\sqrt{2}, SE = 5\sqrt{5}$ , 高  $SO = \sqrt{SE^2 - OE^2} = 10$ .

包装盒的内径最小值,即为正四棱锥  $S-EFGH$  的外接球的半径  $R$ , 设外接球的球心为  $O'$ , 则点  $O'$  在正四棱锥  $S-EFGH$  的高  $SO$  上, 连接  $EO'$ ,

则在 Rt△ $EOO'$  中,  $OE^2 + O'O^2 = O'E^2$ ,

即  $5^2 + (10 - R)^2 = R^2$ , 解得  $R = \frac{25}{4}$ . 故

包装盒的内径的最小值是  $\frac{25}{4}$  cm.

第 3 期

第 3 版同步周测题参考答案

一、选择题

1.A

2.B

提示:由公理 1 可知选 B.

3.C

提示:共线的点不能确定一个平面,故 A, B 错误;根据公理 2, 可知三角形的三个顶点可以确定一个平面, 故 C 正确;空间四边形不能确定一个平面, 故 D 错误. 故选 C.

4.A

提示:设直线  $EF$  与  $GH$  的交点为  $P$ , 则  $P \in EF \subset$  平面  $ADB$ , 且  $P \in GH \subset$  平面  $CDB$ . 因为平面  $ADB \cap$  平面  $CDB = DB$ , 所以  $P \in DB$ , 即交点在直线  $DB$  上.

5.B

提示:在空间四边形  $ABCD$  中, 分别取  $AB, BC, CD, AD$  的中点  $E, F, G, H$ , 则  $EF \parallel \frac{1}{2}AC \parallel HG$ , 所以四边形  $EFGH$  是平行四边形. 又  $AC \perp BD, EH \parallel BD$ , 所以  $EF \perp EH$ . 所以四边形  $EFGH$  是矩形.

6.A

提示:如果一条直线上有一个点在平面外, 那么该直线与平面平行或相交, 从而可知 A 正确.

7.D

提示:由  $m \not\subset \alpha, A \in m, A \in \alpha$ , 可知  $m$  与  $\alpha$  相交. 又  $n \subset \alpha$ , 所以  $m$  与  $n$  一定不平行. 故选 D.

8.C

9.C

提示:两两平行且不共面的三条直线中, 每两条直线可以确定一个平面, 则三条直线可以确定三个平面, 即  $m = 3$ . 这三个平面把空间分成七个部分(把平面看作直线, 空间的分割情况如图所示), 即  $n = 7$ .



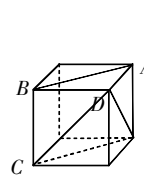
(第 9 题图)

10.B

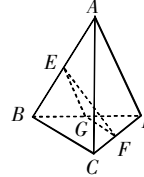
提示:根据空间中两条直线的位置关系可知①正确;根据异面直线的定义可知⑤正确. ②③④中的  $a, b$  均可平行, 故选 B.

11.B

提示:将展开图还原为正方体, 如图所示. 易知  $AB$  与  $CD$  所成的角为  $60^\circ$ , 故  $AB$  与  $CD$  异面但不垂直.



(第 11 题图)



(第 12 题图)

12.B

提示:如图,取  $BD$  的中点  $G$ , 连接  $EG, FG$ , 则  $\angle EFG$  (或其补角) 为异面直线  $EF$  与  $BC$  所成的角.

因为  $EG = \frac{1}{2}AD, GF = \frac{1}{2}BC, AD = BC$ , 所以  $EG = GF$ .

因为  $AD \perp BC, EG \parallel AD, GF \parallel BC$ , 所以  $EG \perp GF$ . 所以  $\triangle EGF$  为等腰直角三角形. 所以  $\angle EFG = 45^\circ$ .

二、填空题

13.(1)C (2)D (3)A (4)B

14.75°或 105°

15.4

提示:当四点共面时能确定 1 个平面;若这四点不共面, 则任意三点可确定 1 个平面, 故可确定 4 个平面.

16.(1)30°; (2)60°

提示:(1)因为  $A_1F_1 \parallel B_1E_1, B_1E_1 \parallel BE$ , 所以  $A_1F_1 \parallel BE$ ,

所以  $\angle EBD$  (或其补角) 是异面直线  $A_1F_1$  与  $BD$  所成的角. 由正六边形的性质可知  $\angle EBD = 30^\circ$ .

(2)因为  $B_1E_1 \parallel BE$ ,

所以直线  $C_1F_1$  与  $B_1E_1$  相交所成的锐角 (或直角) 是异面直线  $C_1F_1$  与  $BE$  所成的角. 由正六边形的性质可知该角为  $60^\circ$ .

三、解答题

17.解:(1)错误. 因为点  $A \notin$  平面  $CC_1B_1B$ , 所以直线  $AC_1 \not\subset$  平面  $CC_1B_1B$ .

(2)正确. 因为  $O \in$  直线  $ACC$  平面  $AA_1C_1C, O \in$  直线  $BD \subset$  平面  $BB_1D_1D$ , 且  $O_1 \in$  直线  $A_1C_1 \subset$  平面  $AA_1C_1C, O_1 \in$  直线  $B_1D_1 \subset$  平面  $BB_1D_1D$ , 所以平面  $AA_1C_1C$  与平面  $BB_1D_1D$  的交线为  $OO_1$ .

(3)(4)都正确. 因为  $AD \parallel B_1C_1$ , 所以  $A, B_1, C_1, D$  共面.

18.证明:由公理 2, 可知点  $A, B, D$  确定一个平面, 设其为  $\alpha$ , 则  $E \in AB \subset \alpha, F \in AD \subset \alpha$ . 所以  $EF \subset \alpha$ , 即  $m \subset \alpha$ . 又  $G \in m$ , 所以  $G \in \alpha$ . 所以  $BG \subset \alpha$ . 因为  $C \in BG$ , 所以  $C \in \alpha$ . 所以四边形  $ABCD$  是平面四边形.

19.证明:因为  $E, H$  是  $\triangle ABD$  的中位线,

所以  $EH \parallel BD$ , 且  $EH = \frac{1}{2}BD$ .

因为  $\frac{CF}{CB} = \frac{CG}{CD} = \frac{2}{3}$ ,

所以  $FG \parallel BD$ , 且  $FG = \frac{2}{3}BD$ .

所以  $EH \parallel FG$ , 且  $EH \neq FG$ , 故四边形  $EFGH$  为梯形, 且直线  $EF$  与  $GH$  必相交.

设交点为  $P$ , 因为  $EF \subset$  平面  $ABC, GH \subset$  平面  $ACD$ , 所以  $P \in$  平面  $ABC$ , 且  $P \in$  平面  $ACD$ . 又平面  $ABC \cap$  平面  $ACD = AC$ ,

所以  $P \in AC$ .

所以直线  $EF, GH, AC$  交于一点.

20.证明:连接  $BC_1, AD_1$ , 如图. 因为  $E, F, G, H$  分别是  $AA_1, BC, CC_1, D_1A_1$  的中点,

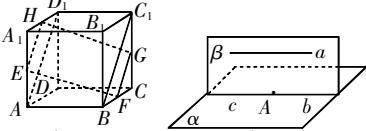
所以  $EH \parallel \frac{1}{2}AD_1, FG \parallel \frac{1}{2}BC_1$ .

因为  $AB \parallel D_1C_1$ , 所以四边形  $ABC_1D_1$  是平行四边形.

所以  $AD_1 \parallel BC_1$ .

所以  $EH \parallel FG$ .

所以四边形  $EFGH$  是平行四边形.



(第 20 题图)

(第 21 题图)

21.解:已知  $a \parallel \alpha, A \in \alpha, A \in b, b \parallel a$ . 求证:  $b \subset \alpha$ .

证明:如图, 因为  $a \parallel \alpha, A \in \alpha$ , 所以  $A \notin a$ .

所以由  $A$  和  $a$  可确定一个平面  $\beta$ , 则  $A \in \beta$ .

所以  $\alpha$  与  $\beta$  相交于过点  $A$  的直线. 设  $\alpha \cap \beta = c$ , 则  $A \in c$ .

由  $a \parallel \alpha$ , 知  $a$  与  $\alpha$  无公共点, 而  $c \subset \alpha$ , 所以  $a$  与  $c$  无公共点. 因为  $a \subset \beta, c \subset \beta$ , 所以  $a \parallel c$ . 又  $a \parallel b$ , 则  $b$  与  $c$  平行或重合.

因为  $A \in b, A \in c$ , 所以  $b$  与  $c$  重合.

所以  $b \subset \alpha$ .

22.解:(1)  $F$  是  $A_1D_1$  的中点.

理由如下:

分别取  $A_1D_1, AD$  的中点  $F, G$ , 连接  $BG, FG, FB_1, DF$  (如图 1).

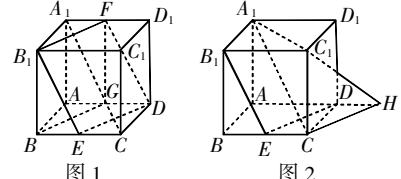


图 1

图 2

(第 22 题图)

在正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中, 易证四边形  $BEDG$  和四边形  $BB_1FG$  都是平行四边形,

所以  $DE \parallel BG, BG \parallel B_1F$ , 所以  $DE \parallel B_1F$ , 所以  $B_1, E, D, F$  四点共面.

所以  $A_1D_1 \cap$  平面  $B_1ED = F$ .

(2) 如图 2, 过点  $C$  作  $CH \parallel DE$ , 交  $AD$  的延长线于点  $H$ , 连接  $A_1H$ ,

则  $\angle A_1CH$  (或其补角) 是异面直线  $A_1C$  与  $DE$  所成的角.

因为  $A_1C = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = 2\sqrt{3}$ ,  $CH = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ ,  $A_1H = \sqrt{2^2 + (2+1)^2} = \sqrt{13}$ , 所以  $A_1C^2 + CH^2 \neq A_1H^2$ , 所以  $\angle A_1CH$  不是直角.