第12期

第2~3版综合检测题(二)参考答案

一、选择题

1~6.AAABDC　7.D　8.B

9.A

提示：由已知条件，可得$AC\perp$平面ABD，所以平面$ABC\perp$平面ABD.又平面$ABC\cap$平面$ABD=AB$，所以点D在平面ABC内的射影H必在AB上.

10.A

11.C

提示：由已知条件，得$A(0,0)$，$B(1,3)$，且动直线$x+my=0$与动直线$mx-y-m+3=0$互相垂直.所以点P在以AB为直径的圆上，所以点P到直线AB距离的最大值等于该圆的半径长.又$|AB|=\sqrt{10}$，所以$\triangle PAB$面积的最大值为$\frac{1}{2}\times\sqrt{10}\times\frac{\sqrt{10}}{2}=\frac{5}{2}$.

12.D

提示：取SB的中点M，连接GM，则$GM\parallel SC$，又$EF\parallel SC$，所以$GM\parallel EF$，从而可证$GM\parallel$平面AEF.过点G作$GN\parallel AF$，交AB于点N，连接MN，则$GN\parallel$平面AEF.又$GM\cap GN=G$，所以平面$GMN\parallel$平面AEF.所以动点P的轨迹就是线段MN,MG,NG. 取底面正方形$ABCD$的中心O为坐标原点，与BC,AB平行的直线分别为x轴、y轴，SO所在直线为z轴，建立空间直角坐标系，则$S(0,0,4)$，$B(2,2,0)$，$C(-2,2,0)$，故$M(1,1,2)$，$G(0,2,0)$.又结合平面几何知识，可得$N(2,1,0)$，所以$|MN|=\sqrt{5}$，$|MG|=\sqrt{6}$，$|NG|=\sqrt{5}$.所以点P的轨迹的周长为$2\sqrt{5}+\sqrt{6}$.

二、填空题

13.$2\sqrt{2}\pi$　14.(2,2)

15.$2x-y+5=0$

16.$2\sqrt{2}-1$

提示：$x^2+y^2\leqslant2(|x|+|y|)$即$(|x|-1)^2+(|y|-1)^2\leqslant2$.若$x>0,y>0$，则$(x-1)^2+(y-1)^2\leqslant2$，点$P$在以$C_{11}(1,1)$为圆心，$\sqrt{2}$为半径长的圆面内(第一象限)；同理，若$x<0,y>0$，则点$P$在以$C_{12}(-1,1)$为圆心，$\sqrt{2}$为半径长的圆面内(第二象限)；若$x<0,y<0$，则点$P$在以$C_{13}(-1,-1)$为圆心，$\sqrt{2}$为半径长的圆面内(第三象限)；若$x>0,y<0$，则点$P$在以$C_{14}(1,-1)$为圆心，$\sqrt{2}$为半径长的圆面内(第四象限).由图形可知，$|PQ|$的最小值为$|C_{11}C_2|-r_1-r_2=2\sqrt{2}-1$.

三、解答题

17.**证明**：由P为直线AB外一点，可知直线AB与点P确定一平面，设其为β，则$C\in AP\subset\beta$，$D\in BP\subset\beta$，所以直线$CD\subset\beta$.又$C\in\alpha$，$D\in\alpha$，所以直线$CD\subset\alpha$.所以$CD=\alpha\cap\beta$. 设直线AB与α交于点O，则$O\in AB\subset\beta$，且$O\in\alpha$，所以$O\in\alpha\cap\beta$.所以$O\in CD$.故不论P在何位置，直线CD必过直线AB与α的交点.

18.**解**：(1)由题意知，直线l_1,l_2的斜率必存在，则$\frac{a}{2}\cdot(1-a)=-1$，解得$a=2$，或$a=-1$.

(2)显然直线l_1,l_2的斜率存在，则$\frac{a}{2}=1-a$，解得$a=\frac{2}{3}$.所以直线l_1,l_2的方程分别为$x-3y+6=0$，$x-3y-6=0$.故两直线间的距离$d=\frac{|6-(-6)|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{6\sqrt{10}}{5}$.

19.**解**：(1)因为圆C关于直线$x+y-1=0$对称，所以圆心$C\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$在直线$x+y-1=0$上，所以$D+E=-2$.　①

由圆的半径长为$\sqrt{2}$，

则$\frac{D^2+E^2-12}{4}=2$.　②

由①②，解得$D=2,E=-4$，或$D=-4,E=2$.

又因为圆心C在第二象限，所以$D>0,E<0$.所以$D=2,E=-4$.所以圆C的方程为$x^2+y^2+2x-4y+3=0$.

(2)由切线在两坐标轴上的截距相等且不为零，设切线$l:x+y=a$，

则圆心$C(-1,2)$到切线l的距离等于半径长$\sqrt{2}$，

即$\frac{|-1+2-a|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，

解得$a=-1$，或$a=3$.

故直线l的方程为$x+y+1=0$，或$x+y-3=0$.

20.(1)**证明**：由平面$ABC\perp$平面ABD，交线为AB，$AD\perp AB$，得$AD\perp$平面ABC.又$BC\subset$平面ABC，所以$AD\perp BC$.

(2)**解**：取AC的中点N，连接MN,ND，则$MN\parallel BC$，所以$\angle DMN$(或其补角)为异面直线BC与MD所成的角.

在$Rt\triangle DAM$中，$AD=2\sqrt{3}$，$AM=1$，故$DM=\sqrt{13}$.

由(1)知$AD\perp$平面ABC，故$AD\perp AC$，在$Rt\triangle DAN$中，$AN=1$，故$DN=\sqrt{13}$.

在等腰$\triangle DMN$中，$MN=1$，可得$\cos\angle DMN=\frac{\frac{1}{2}MN}{DM}=\frac{\sqrt{13}}{26}$.故异面直线$BC$与$MD$所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{13}}{26}$.

(3)**解**：连接CM，在等边$\triangle ABC$中，可得$CM\perp AB$，且$CM=\sqrt{3}$.

又平面$ABC\perp$平面ABD，交线为AB，所以$CM\perp$平面ABD，则$\angle CDM$为直线CD与平面ABD所成的角.

在$Rt\triangle CAD$中，$CD=\sqrt{AC^2+AD^2}=4$，则在$Rt\triangle CMD$中，$\sin\angle CDM=\frac{CM}{CD}=\frac{\sqrt{3}}{4}$.所以直线$CD$与平面$ABD$所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{3}}{4}$.

21.(1)**解**：由三视图可知，该多面体是直三棱柱，其中平面$ABCD\perp$平面$ABFE$，$AB=AE=AD=2$，

则$V_{D-ABF}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times2=\frac{4}{3}$.

(2)**证明**：取BF的中点P，连接MP,NP，则$NP\parallel CF$，$MP\parallel EF$，所以$NP\parallel$平面$CDEF$，$MP\parallel$平面$CDEF$.又$NP\cap MP=P$，所以平面$MNP\parallel$平面$CDEF$.又$MN\subset$平面MNP，所以$MN\parallel$平面$CDEF$.

(3)**解**：存在点G满足要求，此时G为AD的中点，证明如下：

连接GN，因为N,G分别为BC,AD的中点，且四边形$ABCD$为正方形，所以$GN\parallel CD$，可得$GN\parallel$平面$CDEF$.由(2)知，$MN\parallel$平面$CDEF$，又$MN\cap GN=N$，所以平面$MNG\parallel$平面$CDEF$.而$MG\subset$平面MNG，所以$MG\parallel$平面$CDEF$.

22.**解**：(1)显然直线l的斜率存在，由$A(0,-1)$，设直线$l:y=kx-1$，又$B(4,3)$，则$\frac{|4k-3-1|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{2}\times\frac{6}{5}\right)^2}$，解得$k=\frac{4}{3}$，或$k=\frac{3}{4}$.

(2)①若动圆P同时平分圆A与圆B的周长，作出图形可得$PA=PB$，故P在AB的垂直平分线$x+y-3=0$上.故动圆圆心P的轨迹方程为$x+y-3=0$.

②设$P(m,3-m)$，则圆P的半径长的平方$r^2=|PA|^2+1^2=m^2+(3-m+1)^2+1$，方程为$(x-m)^2+[y+(m-3)]^2=m^2+(3-m+1)^2+1$，即$x^2+y^2-6y-8-2m(x-y-1)=0$.

令$\begin{cases}x^2+y^2-6y-8=0,\\x-y-1=0,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=2+\frac{3\sqrt{2}}{2},\\y=1+\frac{3\sqrt{2}}{2},\end{cases}$或$\begin{cases}x=2-\frac{3\sqrt{2}}{2},\\y=1-\frac{3\sqrt{2}}{2}.\end{cases}$

所以动圆P过定点$\left(2+\frac{3\sqrt{2}}{2},1+\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$和$\left(2-\frac{3\sqrt{2}}{2},1-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$.

第9期

第3版同步周测题参考答案

一、选择题

1.B　2.C　3.D　4.C　5.B

6.B

提示：由已知，可得圆心(1,2)到直线$ax-y+3=0$的距离等于1，即$\frac{|a-2+3|}{\sqrt{a^2+1}}=1$，得$a=0$.

7.D

提示：由已知，得直线与圆相切或相交，则$d=\frac{|-1|}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}}\leqslant r=1$，即$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\geqslant1$.

8.B

提示：过两圆的交点的直线方程是$x^2+y^2-x-(x^2+y^2-y)=0$，即$y=x$.故选B.

9.D

提示：两圆的圆心分别为$(-2,2)$，$(2,-5)$，则两圆的圆心距$d=\sqrt{65}$.又两圆半径长分别为1和4，则$d>1+4=5$，即两圆外离，因此它们有4条公切线.

10.C

提示：由已知，得$E(0,0,1)$，$F(\sqrt{2},\sqrt{2},1)$.设AC与BD交于点O，连接OE.因为$AM\parallel$平面BDE，$AM\subset$平面$ACEF$，平面$BDE\cap$平面$ACEF=OE$，所以$AM\parallel OE$.从而易得M是EF的中点，所以$M\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$.

11.B

提示：由已知，可设点$M(x,1-x,0)$，则$|MN|=\sqrt{(x-6)^2+(1-x-5)^2+(0-1)^2}=\sqrt{2(x-1)^2+51}$，所以$|MN|_{min}=\sqrt{51}$.

12.C

提示：由已知，得圆C_1的圆心为$C_1(-2,1)$，半径长$r_1=1$；圆C_2的圆心为$C_2(3,4)$，半径长$r_2=3$，则$|PM|+|PN|\geqslant|PC_1|+|PC_2|-r_1-r_2=|PC_1|+|PC_2|-4$.因为$C_1(-2,1)$关于$x$轴的对称点为$C_1'(-2,-1)$，所以$|PC_1|+|PC_2|$的最小值为$|C_1'C_2|=5\sqrt{2}$.所以$|PM|+|PN|$的最小值为$5\sqrt{2}-4$.

二、填空题

13.$a^2+b^2=r^2$

14.3

提示：由题意，得$M(1,2,3)$，又$B(-1,0,2)$，所以$|BM|=3$.

15.$x^2+y^2=1(x\neq\pm1)$

提示：设$P(x,y)$，则$k_{AP}\cdot k_{BP}=\frac{y}{x+1}\cdot\frac{y}{x-1}=-1$，整理，得动点$P$的轨迹方程是$x^2+y^2=1(x\neq\pm1)$.

16.$\frac{\sqrt{2}}{2}$

提示：将$x(x-k)\leqslant y(k-y)$化简，得$x^2+y^2-kx-ky\leqslant0$，所以点(x,y)在以$A\left(\frac{k}{2},\frac{k}{2}\right)$为圆心，半径长等于$\frac{\sqrt{2}k}{2}$的圆上及圆内.因为点$(x,y)$被圆$O:x^2+y^2=1$覆盖，所以圆$A$内切于圆$O$或内含于圆$O$，得$\sqrt{\frac{k^2}{4}+\frac{k^2}{4}}\leqslant1-\frac{\sqrt{2}k}{2}$，解得$k\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$.所以$k$的最大值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

三、解答题

17.**解**：因为B'在底面上的射影B的坐标为$(1,\sqrt{3},0)$，所以$B'(1,\sqrt{3},2)$.

又因为O'在底面上的射影O_1为$\triangle OAB$的中心，则$O_1\left(1,\frac{\sqrt{3}}{3},0\right)$，则$O'\left(1,\frac{\sqrt{3}}{3},2\right)$，故$|O'B|=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

18.**解**：(1)设圆P的方程为$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$.

由已知，得$\begin{cases}1^2+0^2+D+0+F=0,\\4^2+0^2+4D+0+F=0,\\6^2+(-2)^2+6D-2E+F=0,\end{cases}$

解得$D=-5,E=7,F=4$.故圆P的方程为$x^2+y^2-5x+7y+4=0$.

(2)由圆的对称性，可知圆心P的横坐标为$\frac{1+4}{2}=\frac{5}{2}$，故圆心$P\left(\frac{5}{2},2\right)$，半径长$r=|AP|=\frac{5}{2}$.

故圆P的方程为$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+(y-2)^2=\frac{25}{4}$.

19.(1)**证明**：由已知，得直线$l:\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，即$bx+ay-ab=0$.

又圆心$C(1,1)$，半径长$r=1$，由圆C与l相切，得$\frac{|a+b-ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}=1$，

化简，得$ab-2a-2b+2=0$，即$(a-2)(b-2)=2$.

(2)**解**：设线段AB的中点为$M(x,y)$，则$\begin{cases}x=\frac{a}{2},\\y=\frac{b}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2x,\\b=2y.\end{cases}$

代入$(a-2)(b-2)=2$，可得$2(x-1)\cdot(y-1)=1(x>1)$，即为所求轨迹方程.

20.**解**：(1)将两圆方程联立，解方程组，可得$\begin{cases}x=3,\\y=-1,\end{cases}$或$\begin{cases}x=-1,\\y=1.\end{cases}$

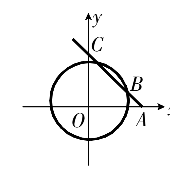
故$|AB|=\sqrt{(3+1)^2+(-1-1)^2}=2\sqrt{5}$.

(2)结合(1)，得AB的中点为(1,0)，直线AB的斜率为$-\frac{1}{2}$，

所以线段AB的垂直平分线的方程为$y-0=2(x-1)$，即$2x-y-2=0$.

21.**解**：如图，以该岛为原点，正东、正北方向分别为x轴、y轴正方向，建立直角坐标系，则雷达最大观测范围是一个圆，其方程为$x^2+y^2=200^2$，外国测量船的航行路线所在直线的方程为$x+y=250$.故海岛到外国测量船的航行路线的距离为$d=\frac{|250|}{\sqrt{1^2+1^2}}=125\sqrt{2}$.

故航行路线被圆截得的弦$|BC|=2\sqrt{200^2-(125\sqrt{2})^2}=50\sqrt{14}$，所以能观测到的时间$t=\frac{50\sqrt{14}}{20}=\frac{5\sqrt{14}}{2}$(小时).



(第21题图)

22.**解**：(1)圆M的圆心为$M(6,7)$，半径长$r=5$.

由圆心N在直线$x=6$上，

可设$N(6,y_0)$.

因为圆N与x轴相切，与圆M外切，所以$0<y_0<7$，

所以圆N的半径长等于y_0，

从而$7-y_0=5+y_0$，解得$y_0=1$.

因此，圆N的标准方程为$(x-6)^2+(y-1)^2=1$.

(2)因为直线$l\parallel OA$，

所以直线l的斜率为$\frac{4-0}{2-0}=2$.

设直线l的方程为$y=2x+m$，即$2x-y+m=0$，则圆心M到直线l的距离$d=\frac{|2\times6-7+m|}{\sqrt{5}}=\frac{|m+5|}{\sqrt{5}}$.

因为$|BC|=|OA|=2\sqrt{5}$，

而$r^2=d^2+\left(\frac{1}{2}|BC|\right)^2$，

所以$25=\frac{(m+5)^2}{5}+5$，

解得$m=5$或$m=-15$.

故直线l的方程为$2x-y+5=0$或$2x-y-15=0$.

第 10 期

第 2~3 版章节测试题参考答案

一、选择题

1.B 2.A 3.C 4.B

5.C

提示:由条件可知点 $P(3,3,3)$ 或关于坐标平面或关于原点对称的点,但到原点的距离都相同,即 $|OP|=\sqrt{3^2+3^2+3^2}=3\sqrt{3}$.

6.D

7.D

提示:圆 C 的圆心为 $\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)$,半径长 $r=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$,则圆心到直线 l 的距离 $d=\frac{\left|\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}=r$,所以直线 l 与圆 C 相切.结合选项可知选 D.

8.C 9.C

10.B

提示:设 $G(x,y,z)$,则 $|GA|^2+|GB|^2+|GC|^2=3(x-1)^2+3(y-2)^2+3(z-1)^2+46$.当 $x=1,y=2,z=1$ 时,点 G 到 A,B,C 三点距离的平方和最小,故 $G(1,2,1)$.

11.D

提示:点 $A(2,0,0),B(2,2,0),C(0,2,0),D(1,1,\sqrt{2})$ 在 xOy 平面上的射影分别为 $(2,0,0),(2,2,0),(0,2,0),(1,1,0)$,$S_1=\frac{1}{2}\times2\times2=2$;在 yOz 平面上的射影分别为 $(0,0,0),(0,2,0),(0,2,0),(0,1,\sqrt{2})$,$S_2=\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{2}=\sqrt{2}$;在 zOx 平面上的射影分别为 $(2,0,0),(2,0,0),(0,0,0),(1,0,\sqrt{2})$,$S_3=\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{2}=\sqrt{2}$,则 $S_3=S_2$ 且 $S_3\neq S_1$.故选 D.

12.D

提示:将两圆方程相减,可得直线 AB 的方程为 $a^2+b^2-2ax-2by=0$,即 $2ax+2by=a^2+b^2$,故②正确;分别把 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$ 代入②式并相减,得 $a(x_1-x_2)+b(y_1-y_2)=0$,故①正确;由圆的几何性质可知线段 AB 与线段 C_1C_2 互相平分,所以 $x_1+x_2=a,y_1+y_2=b$,故③正确.故选 D.

二、填空题

13.$x^2+y^2+28x-15y=0$

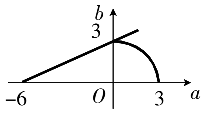
14.$\sqrt{14}$

15.$(x-2)^2+(y+2)^2=6$

提示:连接 PD,DM,则 $|PD|^2=|PM|^2+|DM|^2=6$.故点 P 的轨迹是以 $D(2,-2)$ 为圆心,半径长等于 $\sqrt{6}$ 的圆.所以点 P 的轨迹方程是 $(x-2)^2+(y+2)^2=6$.

16.$\frac{1}{2}$

提示:圆 C_1 的圆心为 $C_1(-a,0)$,半径长 $r_1=2$;圆 C_2 的圆心为 $C_2(0,b)$,半径长 $r_2=1$,因为两圆外切,所以 $|C_1C_2|=\sqrt{a^2+b^2}=3$.又 $a\geqslant0,b\geqslant0$,所以点 (a,b) 在以原点为圆心,半径长等于 3 的圆弧上,如图所示,而 $\frac{b}{a+6}$ 表示圆弧上的点与点 $(-6,0)$ 连线的斜率,则当点 (a,b) 为 $(0,3)$ 时,$\frac{b}{a+6}$ 取得最大值 $\frac{1}{2}$.



(第 16 题图)

三、解答题

17.**解**:过点 $A(2,-1)$ 且与直线 $x+y=1$ 垂直的直线方程为 $x-y-3=0$,则圆心必在此直线上.

又圆 C 的圆心在 $y=-2x$ 上,

由方程组 $\begin{cases}y=-2x,\\x-y-3=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1,\\y=-2.\end{cases}$

故圆 C 的圆心坐标为 $(1,-2)$,

半径长 $r=\sqrt{(1-2)^2+(-2+1)^2}=\sqrt{2}$.

所以所求圆的方程为 $(x-1)^2+(y+2)^2=2$.

18.**解**:圆 A 的圆心为 $A(1,1)$,半径长 $r_1=3$;圆 B 的圆心为 $B(-1,-1)$,半径长 $r_2=2$.

因为 $|AB|=2\sqrt{2}$,且 $|r_1-r_2|<|AB|<r_1+r_2$,所以两圆相交.

将两圆方程等号两端分别相减,得过两交点的直线方程为 $4x+4y+5=0$.

设两交点分别为 C,D,因为圆心 A 到直线 CD 的距离

$d=\frac{|4\times1+4\times1+5|}{\sqrt{4^2+4^2}}=\frac{13\sqrt{2}}{8}$,

所以 $|CD|=2\sqrt{r_1^2-d^2}=\frac{\sqrt{238}}{4}$.

19.**解**:(1)根据题意,知圆心 C 与圆心 $D(1,-2)$ 关于直线 $y=x$ 对称,则 $C(-2,1)$.

又半径长 $r=2$,所以圆 C 的标准方程为 $(x+2)^2+(y-1)^2=4$.

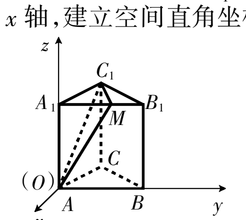
(2)因为 $r=2,|AB|=2\sqrt{3}$,

所以圆心 $C(-2,1)$ 到直线 l 的距离 $d=\sqrt{r^2-\left(\frac{AB}{2}\right)^2}=1$,

即 $\frac{|-2k-1+1|}{\sqrt{k^2+1}}=1$,解得 $k=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

所以直线 l 的方程为 $x-\sqrt{3}y+\sqrt{3}=0$ 或 $x+\sqrt{3}y-\sqrt{3}=0$.

20.**解**:如图,以 A 为坐标原点,AB 所在直线为 y 轴,AA_1 所在直线为 z 轴,经过原点且与平面 ABB_1A_1 垂直的直线为 x 轴,建立空间直角坐标系.



(第 20 题图)

由已知得 $A(0,0,0),B(0,a,0),A_1(0,0,\sqrt{2}a),C_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a,\frac{a}{2},\sqrt{2}a\right)$,$B_1(0,a,\sqrt{2}a)$.

取 A_1B_1 的中点 M,

则点 M 的坐标为 $\left(0,\frac{a}{2},\sqrt{2}a\right)$.

连接 AM,MC_1,则 $MC_1\perp$ 平面 ABB_1A_1,

所以 AC_1 在平面 ABB_1A_1 上的射影为 AM.

又 $|AM|=\frac{3a}{2}$,

故所求射影长为 $\frac{3a}{2}$.

21.**解**:(1)因为 $|AB|=2$,所以在圆 C 上找到最低点 P_1 即可得出 $\triangle ABP$ 面积的最小值.

又圆心 $C(3,4)$,半径长 $r=2$,所以 P_1 的纵坐标为 $4-2=2$,故 $\triangle ABP$ 面积的最小值为 $\frac{1}{2}\times2\times2=2$.

(2)当切线的斜率存在时,设切线方程为 $y=k(x-1)$,即 $kx-y-k=0$,

则圆心 $C(3,4)$ 到该切线的距离 $d=\frac{|3k-4-k|}{\sqrt{1+k^2}}=2$,解得 $k=\frac{3}{4}$,故所求的切线方程为 $3x-4y-3=0$;

当过点 A 的直线的斜率不存在时,其方程为 $x=1$,也满足切线的条件.

综上所述,过点 A 的圆 C 的切线方程为 $3x-4y-3=0$ 或 $x=1$.

(3)设点 $P(x,y)$,则 $|AP|^2+|BP|^2=(x-1)^2+y^2+(x+1)^2+y^2=2(x^2+y^2)+2=2|OP|^2+2$.

因为 $(|OP|)_{\max}=|OC|+r=7$,所以 $|AP|^2+|BP|^2$ 的最大值为 $2\times7^2+2=100$.

此时直线 OC 的方程为 $y=\frac{4}{3}x$,与圆 C 的方程联立,

解得 $\begin{cases}x=\frac{9}{5},\\y=\frac{12}{5}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=\frac{21}{5},\\y=\frac{28}{5}.\end{cases}$

结合图形可知点 $P\left(\frac{21}{5},\frac{28}{5}\right)$.

22.**解**:(1)分别以 l_1,l_2 为 y 轴,x 轴,以 O 为原点建立平面直角坐标系,则 $M(0,3),N(4,5)$,设该圆弧所在圆的方程为 $(x-x_0)^2+y^2=r^2$,

由 $\begin{cases}x_0^2+3^2=r^2,\\(4-x_0)^2+5^2=r^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_0=4,\\r^2=25.\end{cases}$

于是,铁路线所在圆弧的方程为 $(x-4)^2+y^2=25(0\leqslant x\leqslant4,y\geqslant3)$.

(2)设校址的坐标为 $(a,0)(a>4)$,铁路上任一点为 (x,y),d 为铁路上任一点到校址的距离,

则 $d^2=(x-a)^2+y^2=(x-a)^2+25-(x-4)^2=(8-2a)x+a^2+9$.

因为 $a>4,x\in[0,4]$,

所以当 $x=4$ 时,d^2 取得最小值为 $a^2-8a+41$.

令 $a^2-8a+41=26$,

解得 $a=3$(舍去),或 $a=5$.

故该校址到点 O 的最近距离为 5km.

第 11 期

第 2~3 版综合检测题(一)参考答案

一、选择题

1.D 2.B 3.B

4.A

提示:因为 A_1B 与 EF 都在平面 A_1BCD_1 中,且不平行,所以两者相交.

5.B

提示:由平面四边形,可知①④错误.

6.A

提示:设倾斜角为 α,解方程,得 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$.又 $\alpha\in(0°,90°)$,所以 $\alpha=60°$,所以 $\tan\alpha=\sqrt{3}$.

7.B 8.C

9.C

提示:联立两圆的方程,解得直径的端点分别为 $A\left(-1+\frac{\sqrt{2}}{2},-1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,$B\left(-1-\frac{\sqrt{2}}{2},-1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,则 $|AB|=2$,且中点坐标为 $(-1,-1)$.所以圆心坐标为 $(-1,-1)$,半径长等于 1,所以所求圆的方程为 $(x+1)^2+(y+1)^2=1$.

10.D

提示:点 $P(1,1,1)$ 关于 xOy 平面的对称点为 $M(1,1,-1)$,则 $|QM|=\sqrt{57}$,故选 D.

11.C

提示:由已知,得正四棱锥的底面边长为 $2\sqrt{3}$,则高为 3.故侧面与底面所成二面角的正切值 $\tan\alpha=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$,所以二面角等于 60°.

12.D

提示:由已知条件知点 M 在直线 $x-y-4=0$.又点 M 满足 $a^2+b^2-4a+4b\leqslant0$,即 $(a-2)^2+(b+2)^2\leqslant8$,所以 M 的轨迹是直线 $x-y-4=0$ 在圆 $(x-2)^2+(y+2)^2=8$ 上及内部的部分,即线段 $x-y-4=0(0\leqslant x\leqslant4)$.而 a^2+b^2 的几何意义是原点与线段 $x-y-4=0(0\leqslant x\leqslant4)$ 上点的距离的平方,由 $d=\frac{|4|}{\sqrt{1+1}}=2\sqrt{2}$,得 a^2+b^2 的最小值为 8;由原点到点 $(0,-4)$ 和点 $(4,0)$ 的距离都为 4,得 a^2+b^2 的最大值为 16.故选 D.

二、填空题

13.$l/\!/\beta$ 或 $l\subset\beta$ 14.$3x+4y\pm24=0$

15.48π

提示:由两圆相切,且圆心距为 $\sqrt{9+a^2}$,得 $\sqrt{9+a^2}=4+1$ 或 $\sqrt{9+a^2}=4-1$,解得 $a=4$.故正方体外接球的直径 $2R=\sqrt{4^2+4^2+4^2}=4\sqrt{3}$.所以这个球的表面积为 $4\pi R^2=48\pi$.

16.$\left(1-\frac{\sqrt[3]{7}}{2}\right)a$

三、解答题

17.**解**:由斜二测画法可知该四边形是直角梯形,其中 $AB\perp BC,AD=2,BC=4,AB=2$,故 $DC=2\sqrt{2}$.从而旋转后形成的几何体是上、下底面半径分别为 2,4,母线长为 $2\sqrt{2}$ 的圆台,其表面积 $S=\pi(2^2+4^2+2\times2\sqrt{2}+4\times2\sqrt{2})=(20+12\sqrt{2})\pi$.

18.**解**:(1)设 BC 边上的高所在的直线为 l,

由题知 BC 边所在直线的斜率

$k_{BC}=\frac{3-(-1)}{2-(-2)}=1$,

所以直线 l 的斜率 $k_l=\frac{-1}{k_{BC}}=-1$.

又点 $A(-1,4)$ 在直线 l 上,由点斜式得直线 l 的方程为 $y-4=-(x+1)$,即 $x+y-3=0$.

(2)由点斜式得 BC 边所在直线的方程为 $y+1=1\times(x+2)$,即 $x-y+1=0$,所以点 $A(-1,4)$ 到 BC 边所在直线的距离为 $d=\frac{|-1-4+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$.

又 $|BC|=\sqrt{(-2-2)^2+(-1-3)^2}=4\sqrt{2}$,所以 $S=\frac{1}{2}|BC|\cdot d=8$.

19.**解**:(1)圆心 $C_1(0,0)$ 到直线 l 的距离 $d=\frac{|3\times0-4\times0-15|}{\sqrt{3^2+4^2}}=3$,半径长 $r=5$,故圆 C_1 截直线 l 所得弦长为 $2\sqrt{r^2-d^2}=8$.

(2)将圆 C 与圆 C_1 的方程相减,得公共弦所在直线的方程为 $2x-4my-4m^2-25=0$.因为该直线平行于直线 l,所以 $\frac{2}{3}=\frac{-4m}{-4}\neq\frac{-4m^2-25}{-15}$,解得 $m=\frac{2}{3}$.

20.**证明**:(1)取 BB_1 的中点 M,连接 HM,MC_1.由 $HM\overset{/\!/}{=}C_1D_1$,知四边形 HMC_1D_1 是平行四边形,所以 $HD_1/\!/MC_1$.

又 $MC_1/\!/BF$,所以 $BF/\!/HD_1$.

(2)取 BD 的中点 O,连接 OE,D_1O,

则 $OE\overset{/\!/}{=}\frac{1}{2}DC$.

又 $D_1G\overset{/\!/}{=}\frac{1}{2}DC$,所以 $OE\overset{/\!/}{=}D_1G$.

所以四边形 $OEGD_1$ 是平行四边形,所以 $GE/\!/D_1O$.

又 $D_1O\subset$ 平面 BB_1D_1D,

$GE\not\subset$ 平面 BB_1D_1D,

所以 $EG/\!/$ 平面 BB_1D_1D.

21.**证明**:(1)因为 $PA=PD$,E 为 AD 的中点,所以 $PE\perp AD$.

又在矩形 $ABCD$ 中,$BC/\!/AD$,

所以 $PE\perp BC$.

(2)因为平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$,交线为 AD,又 $AB\perp AD$,所以 $AB\perp$ 平面 PAD.

又 $PD\subset$ 平面 PAD,所以 $AB\perp PD$.

又 $PA\perp PD,AB\cap PA=A$,

所以 $PD\perp$ 平面 PAB.

因为 $PD\subset$ 平面 PCD,

所以平面 $PAB\perp$ 平面 PCD.

(3)取 PC 的中点 G,连接 DG,FG,

则 $FG\overset{/\!/}{=}\frac{1}{2}BC$.

由 $DE\overset{/\!/}{=}\frac{1}{2}BC$,可得 $DE\overset{/\!/}{=}FG$,

所以四边形 $EFGD$ 为平行四边形.

所以 $EF/\!/DG$.

又 $EF\not\subset$ 平面 PCD,$DG\subset$ 平面 PCD,

所以 $EF/\!/$ 平面 PCD.

22.**解**:(1)由 $x^2+y^2-6x+5=0$,得 $(x-3)^2+y^2=4$.所以圆心坐标为 $C_1(3,0)$.

(2)设 $M(x,y)$.因为点 M 为弦 AB 的中点,所以 $C_1M\perp AB$.显然直线 l 的斜率 k_{AB} 存在,当 $k_{AB}\neq0$ 时,得 $k_{C_1M}\cdot k_{AB}=-1$,

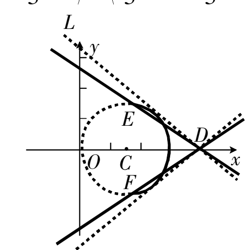
即 $\frac{y}{x-3}\cdot\frac{y}{x}=-1$,化简,得

$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\frac{9}{4}(x\neq0$ 且 $x\neq3)$.①

当 $k_{AB}=0$ 时,$M(3,0)$ 满足①中方程,此时 $x=3$.

若直线 l 与圆 C_1 相切,可求得其方程为 $y=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}x$,代入圆 C_1 的方程,解得 $x=\frac{5}{3}$,结合图形可得点 M 的横坐标 $x>\frac{5}{3}$.故线段 AB 的中点 M 的轨迹方程为 $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\frac{9}{4}\left(\frac{5}{3}<x\leqslant3\right)$.

(3)由(2)知点 M 的轨迹是以 $C\left(\frac{3}{2},0\right)$ 为圆心,半径长 $r=\frac{3}{2}$ 的部分圆弧 $\overset{\frown}{EF}$(如下图所示,不包括两端点),且 $E\left(\frac{5}{3},\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)$,$F\left(\frac{5}{3},-\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)$.



(第 22 题图)

又直线 $L:y=k(x-4)$ 过定点 $D(4,0)$,

当直线 L 与圆 C 相切时,

由 $\frac{\left|k\left(\frac{3}{2}-4\right)-0\right|}{\sqrt{k^2+1^2}}=\frac{3}{2}$,得 $k=\pm\frac{3}{4}$.

又 $k_{DE}=-k_{DF}=\frac{2\sqrt{5}}{7}$,

结合上图可知,k 的取值范围是 $\left\{-\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right\}\cup\left[-\frac{2\sqrt{5}}{7},\frac{2\sqrt{5}}{7}\right]$.